МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Элементы линейной алгебры

Основы аналитической геометрии

Введение в математический анализ

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Методические рекомендации и варианты заданий аттестационных работ по курсу «Математика» для студентов строительных специальностей дневной формы обучения

Брест 2016

УДК [512.64+514.12+517.1/.2](076)

В настоящих методических рекомендациях приведены варианты заданий аттестационных работ по разделам «Элементы линейной алгебры», «Основы аналитической геометрии», «Введение в математический анализ», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» дисциплины «Математика», изучаемым студентами строительных специальностей дневной формы обучения в первом семестре. Приведено подробное решение типовых задач, даны некоторые методические рекомендации, полезные для успешного выполнения заданий.

Составители: **Юхимук М.М.**, старший преподаватель,
Юхимук Т.Ю., старший преподаватель

Рецензент: **Басик А.И.**, доцент кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н.

I. Практические задания по теме «Элементы линейной алгебры»

№1. Найти матрицу $B \cdot \left(B^T - 3A\right)$.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

10. $A=\begin{bmatrix}0 & -2\\ -1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-5 & 2 & 0\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$

11. $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\\ -3 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-4 & -2 & -5\\ -3 & 5 & 0\end{bmatrix}$

12. $A=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 0 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$

13. $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 5 & -1\\ 1 & -3 & 2\end{bmatrix}$

14. $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 4\\ -3 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -2 & -5\\ -3 & 5 & 2\end{bmatrix}$

15. $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & 4\\ -1 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 3 & -1\\ 1 & 5 & 2\end{bmatrix}$

25. $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & -1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 0\\ 5 & 3\end{bmatrix}$

26. $A=\begin{bmatrix}4 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

27. $A=\begin{bmatrix}-2 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 0\\ 5 & 3\end{bmatrix}$

28. $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -1\\ -3 & 2 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & -3\\ -4 & 1\end{bmatrix}$

29. $A=\begin{bmatrix}-2 & 4 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 4 & -2\\ 5 & 3\end{bmatrix}$

30. $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 4 & 1\\ -5 & 3\end{bmatrix}$

№2. Вычислить определитель.

1. $\begin{vmatrix}2 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 1 & 4\\ -1 & 2 & 0 & -1\\ 4 & -5 & 1 & 3\end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix}3 & -2 & 5 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 2\\ 5 & 1 & -2 & -3\\ 1 & -5 & 1 & -2\end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix}2 & 0 & -1 & -3\\ 5 & 4 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 0 & 5\end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix}4 & -2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & -2 & -3\\ 4 & -5 & 1 & -2\end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix}4 & -2 & -1 & -1\\ 0 & 4 & 1 & 2\\ 3 & 5 & -2 & 1\\ 1 & -5 & 0 & -2\end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 5 & -4 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 4 & -2\end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix}2 & 0 & -1 & -3\\ 5 & -4 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -5 & 4 & -1\end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix}4 & 3 & -1 & -2\\ 5 & 1 & 4 & 1\\ -3 & -1 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 2\end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix}2 & 2 & 0 & 4\\ 5 & 1 & -4 & -1\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ -3 & 4 & 1 & 2\end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & -1 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & -5 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & 5 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} -3 & 2 & -5 & -1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & -4 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -4 & -1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} -4 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} -5 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

№3. Решить матричное уравнение.

1. $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ 3 & -3 & -6 \\ -7 & 9 & 9 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -6 & 8 & 6 \\ 6 & 5 & -7 \\ 7 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

2. $X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -7 & -5 \\ 1 & 6 & 9 \\ -6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

3. $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 8 & -3 \end{bmatrix}$

4. $X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 8 & -3 & 8 \\ 8 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

5. $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 7 & 7 & 9 \\ 4 & 9 & -4 \end{bmatrix}$

6. $X \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -8 \end{bmatrix}$

7. $X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -3 & 7 & -4 \end{bmatrix}$

8. $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -9 & 6 \\ -7 & -7 & 8 \\ 5 & 6 & -6 \end{bmatrix}$

9. $X \cdot \begin{bmatrix} -3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ -5 & -8 & 4 \end{bmatrix}$

10. $X \cdot \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -9 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \\ 7 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

11. $X \cdot \begin{bmatrix} -2 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 6 & 4 & 3 \\ -2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$

12. $X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -5 \\ -6 & 5 & -7 \\ 8 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 6 & -4 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -6 & -8 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ -5 & -5 & -7 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 9 \\ -8 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -5 & 9 & -8 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 \\ -5 & -4 & -2 \\ -8 & -7 & -4 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & -9 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -8 & -8 & 6 \\ 4 & 6 & -2 \\ -1 & -8 & -6 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -6 & 9 & -8 \\ -2 & 3 & -2 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & 8 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 5 \\ -6 & 4 & 4 \\ -6 & 2 & -9 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -4 \\ 1 & -6 & -3 \\ 6 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

13. $X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 & -5 \\ 7 & -4 & 5 \\ 7 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

14. $X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -9 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & -8 \end{bmatrix}$

15. $X \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 6 & -2 & -7 \\ -2 & -9 & 7 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \\ -8 & -9 & -6 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & -5 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -4 & -2 & 9 \\ 4 & 1 & -9 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 4 & 1 & -9 \\ 8 & 5 & -8 \end{bmatrix}$

№4. Решить систему линейных неоднородных уравнений.

1. $\begin{cases} x-4y-3z=-3, \\ 2x-2y+z=9, \\ 3x-y-4z=-5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x+y+4z=-7, \\ 2x-4y-3z=7, \\ x-5y-2z=-3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+5y+2z=9, \\ 4x-2y-5z=-6, \\ 3x+y-z=4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x+3y+z=-7, \\ 5x+3y+4z=-5, \\ x+2y-2z=-8. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x-y+4z=8, \\ 4x+5y+4z=7, \\ 2x-2y+3z=6. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x-y+4z=4, \\ 5x-4y+z=-5, \\ 2x-2y+3z=4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x-y+3z=5, \\ 5x+4y+4z=9, \\ x-2y+3z=8. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x-2y+4z=-1, \\ x-2y+z=-5, \\ 5x-y+2z=-4. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x+y+4z=9, \\ 3x+5y+2z=1, \\ 4x-2y+5z=-9. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5x-3y+4z=-5, \\ x-2y+z=-6, \\ 3x+y-z=-2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+5y+3z=-5, \\ 3x-4y-3z=7, \\ 4x+y-z=7. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x-y-3z=-6, \\ 5x+2y+4z=-4, \\ x-2y-3z=-9. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x-y-4z=-4, \\ x+5y+2z=-2, \\ 4x-2y-3z=3. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x-y+3z=-1, \\ 5x-3y+5z=5, \\ 2x-2y-3z=1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x-2y-5z=2, \\ 3x+y-2z=-4, \\ x-y-4z=4. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x+y+2z=7, \\ 4x-2y-5z=3, \\ x+2y+5z=7. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x-3y-2z=-3, \\ 2x-2y+z=1, \\ 4x-3y+5z=2. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x+5y+4z=-7, \\ 2x-2y+3z=-4, \\ x-3y-z=-7. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x+3y-2z=-9, \\ 3x-5y+4z=9, \\ 4x-2y+z=-5. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 5x-y+4z=1, \\ 4x-4y+z=6, \\ x-2y-3z=-2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x-3y+z=2, \\ x-4y-2z=-9, \\ 3x-2y+z=-2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x-2y-4z=-6, \\ x-4y-3z=8, \\ 2x-2y-3z=-2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x+2y-4z=7, \\ x+y-2z=5, \\ 4x-2y-5z=-7. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x-3y-5z=-7, \\ x-y-2z=-4, \\ 5x-2y-3z=-1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x-2y+3z=-7, \\ 3x-5y+2z=2, \\ x-2y-z=9. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x-2y-5z=2, \\ 3x+y-2z=-1, \\ 2x-2y-z=-4. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x+5y-4z=3, \\ 4x+3y-2z=-9, \\ x-2y+5z=-5. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x+2y+5z=-1, \\ 2x+5y-2z=-5, \\ 4x+5y-4z=5. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x-3y-5z=7, \\ 2x+y-2z=-5, \\ 3x-2y-4z=8. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x+3y+4z=-8, \\ 4x-3y+5z=-3, \\ 2x-2y+z=4. \end{cases}$

№5. Решить систему линейных однородных уравнений.

1. $\begin{cases} x-y+2z=0, \\ 4x-3y+5z=0, \\ 2x-3y+7z=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x-3y-2z=0, \\ 5x+y+7z=0, \\ x-y-z=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x-2y+3z=0, \\ 2x+y+3z=0, \\ x-3y-2z=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x+y+2z=0, \\ 2x+y+z=0, \\ 7x-4y+z=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x+y-4z=0, \\ 3x+4y+2z=0, \\ 4x+5y+2z=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x+y-z=0, \\ x-y-4z=0, \\ 3x+2y+3z=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+2y-6z=0, \\ 5x+2y+2z=0, \\ 2x-y+8z=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x-y-5z=0, \\ 4x-5y-3z=0, \\ x-3y+z=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x+4y+z=0, \\ 2x+3y-3z=0, \\ 2x+5y-z=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x+3y+4z=0, \\ x-y-2z=0, \\ 5x-2y-5z=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x+5y-z=0, \\ 5x+8y+2z=0, \\ x-2y+4z=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x+3y+4z=0, \\ 3x+4y+2z=0, \\ 5x+2y-6z=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 5x+2y-4z=0, \\ 4x+y-5z=0, \\ x-y-5z=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x+2y+7z=0, \\ x+2y-3z=0, \\ 2x+y+6z=0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 4x+2y+5z=0, \\ x-y+2z=0, \\ 2x+4y+z=0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 5x+2y+z=0, \\ 4x+y-z=0, \\ x-2y-7z=0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x+3y-z=0, \\ 3x+4y-3z=0, \\ x+y-2z=0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 4x+y+8z=0, \\ 5x-2y-3z=0, \\ 5x-y+z=0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x-2y+2z=0, \\ x-4y-6z=0, \\ x+y+4z=0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x+5y-4z=0, \\ x+4y-5z=0, \\ 3x+4y+z=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x+3y+4z=0, \\ 4x-2y-5z=0, \\ x-y-2z=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x + 4y - z = 0, \\ 5x - y + 6z = 0, \\ 2x + y + z = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x + y + 8z = 0, \\ 4x - 5y + 2z = 0, \\ x - 4y - 5z = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x + 3y + 8z = 0, \\ 3x + y - 2z = 0, \\ 4x + 3y + 4z = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ 4x - y - 3z = 0, \\ 3x + 4y - 7z = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 4x - 5y + z = 0, \\ 3x + 5y - 8z = 0, \\ x - 2y + z = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x + 3y - 4z = 0, \\ 2x - 3y + z = 0, \\ x - 2y + z = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 4x - 3y - z = 0, \\ 6x - y - 5z = 0, \\ x + 3y - 4z = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 5x - 4y - z = 0, \\ 3x - 2y - z = 0, \\ x - 4y + 3z = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x - 5y + 4z = 0, \\ 4x - 9y + 5z = 0, \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$

№6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & -5 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

27. $A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

29. $A = \begin{bmatrix} -9 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

30. $A = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

II. Практические задания по теме «Основы аналитической геометрии»

№1. Вычислить $\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)\cdot\left(\gamma\vec{a}-\delta\vec{b}\right)$.

1. $\alpha=2,\ \beta=-4,\ \gamma=-3,\ \delta=1,\ \vec{a}=(-2;3;1),\ \vec{b}=(1;-1;2)$
2. $\alpha=1,\ \beta=-2,\ \gamma=4,\ \delta=2,\ |\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{3}$
3. $\alpha=2,\ \beta=-1,\ \gamma=2,\ \delta=4,\ \vec{a}=(5;2;-2),\ \vec{b}=(3;-1;1)$
4. $\alpha=-2,\ \beta=-5,\ \gamma=2,\ \delta=6,\ |\vec{a}|=4,\ |\vec{b}|=1,\ \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=-\frac{\pi}{3}$
5. $\alpha=1,\ \beta=3,\ \gamma=2,\ \delta=-4,\ \vec{a}=(2;1;3),\ \vec{b}=(1;-1;-4)$
6. $\alpha=2,\ \beta=1,\ \gamma=-1,\ \delta=-3,\ |\vec{a}|=4,\ |\vec{b}|=5,\ \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{3}$
7. $\alpha=-1,\ \beta=2,\ \gamma=1,\ \delta=-4,\ \vec{a}=(1;2;3),\ \vec{b}=(2;-1;-3)$
8. $\alpha=3,\ \beta=-2,\ \gamma=1,\ \delta=2,\ |\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=-\frac{\pi}{3}$
9. $\alpha=3,\ \beta=-1,\ \gamma=2,\ \delta=1,\ \vec{a}=(-1;2;1),\ \vec{b}=(4;3;-5)$
10. $\alpha=-1,\ \beta=6,\ \gamma=5,\ \delta=-2,\ |\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=1,\ \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{3}$
11. $\alpha=3,\ \beta=5,\ \gamma=-1,\ \delta=2,\ \vec{a}=(2;-5;1),\ \vec{b}=(-3;1;1)$
12. $\alpha=-2,\ \beta=1,\ \gamma=-1,\ \delta=3,\ |\vec{a}|=4,\ |\vec{b}|=5,\ \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=-\frac{\pi}{3}$
13. $\alpha=-5,\ \beta=-2,\ \gamma=2,\ \delta=-3,\ \vec{a}=(-4;-1;3),\ \vec{b}=(5;2;-3)$
14. $\alpha=-1,\ \beta=3,\ \gamma=4,\ \delta=-2,\ |\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2,\ \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{3}$
15. $\alpha=4,\ \beta=-2,\ \gamma=-2,\ \delta=-3,\ \vec{a}=(2;-1;-4),\ \vec{b}=(1;2;-4)$
16. $\alpha=2,\ \beta=1,\ \gamma=-4,\ \delta=3,\ |\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=5,\ \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=-\frac{\pi}{3}$
17. $\alpha=2,\ \beta=-1,\ \gamma=-4,\ \delta=3,\ \vec{a}=(4;-3;-2),\ \vec{b}=(-2;1;2)$
18. $\alpha=5,\ \beta=2,\ \gamma=-1,\ \delta=1,\ |\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=4,\ \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{3}$
19. $\alpha=-1,\ \beta=3,\ \gamma=4,\ \delta=3,\ \vec{a}=(4;-6;-3),\ \vec{b}=(2;-5;-2)$

20. $\alpha = 4,\ \beta = 1,\ \gamma = -1,\ \delta = 5,\ |\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 3,\ \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = -\frac{\pi}{3}$

21. $\alpha = 6,\ \beta = 4,\ \gamma = 5,\ \delta = -3,\ \vec{a} = (1;-1;3),\ \vec{b} = (-2;3;-4)$

22. $\alpha = -4,\ \beta = -1,\ \gamma = 3,\ \delta = 2,\ |\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = 6,\ \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$

23. $\alpha = 4,\ \beta = 3,\ \gamma = 3,\ \delta = -2,\ \vec{a} = (2;-1;-3),\ \vec{b} = (-5;2;3)$

24. $\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = -1,\ \delta = 5,\ |\vec{a}| = 6,\ |\vec{b}| = 1,\ \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = -\frac{\pi}{3}$

25. $\alpha = -3,\ \beta = 5,\ \gamma = -2,\ \delta = -1,\ \vec{a} = (2;2;-5),\ \vec{b} = (3;1;-4)$

26. $\alpha = 1,\ \beta = 3,\ \gamma = -1,\ \delta = 2,\ |\vec{a}| = 6,\ |\vec{b}| = 2,\ \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$

27. $\alpha = -1,\ \beta = 2,\ \gamma = 6,\ \delta = 5,\ \vec{a} = (-1;4;-2),\ \vec{b} = (-2;5;-3)$

28. $\alpha = 5,\ \beta = -1,\ \gamma = 2,\ \delta = -4,\ |\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 2,\ \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = -\frac{\pi}{3}$

29. $\alpha = 3,\ \beta = -2,\ \gamma = 2,\ \delta = 5,\ \vec{a} = (4;-3;6),\ \vec{b} = (2;-1;4)$

30. $\alpha = 4,\ \beta = 2,\ \gamma = -3,\ \delta = -2,\ |\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 4,\ \cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$

№2. Найти длину вектора $\left(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\right) \times \left(\gamma\vec{a} - \delta\vec{b}\right)$.

1. $\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = -1,\ \delta = 5,\ |\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 3,\ \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{6}$

2. $\alpha = 1,\ \beta = -3,\ \gamma = -1,\ \delta = 3,\ \vec{a} = (1;-1;0),\ \vec{b} = (3;-2;-1)$

3. $\alpha = -1,\ \beta = 3,\ \gamma = -4,\ \delta = 2,\ |\vec{a}| = 5,\ |\vec{b}| = 2,\ \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{5\pi}{6}$

4. $\alpha = 2,\ \beta = 3,\ \gamma = -1,\ \delta = 2,\ \vec{a} = (-4;-1;2),\ \vec{b} = (3;0;1)$

5. $\alpha = 4,\ \beta = -5,\ \gamma = 2,\ \delta = -1,\ |\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = 3,\ \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{6}$

6. $\alpha = -2,\ \beta = -4,\ \gamma = -1,\ \delta = 3,\ \vec{a} = (0;-5;2),\ \vec{b} = (1;4;-1)$

7. $\alpha = 3,\ \beta = 1,\ \gamma = -1,\ \delta = 2,\ |\vec{a}| = 6,\ |\vec{b}| = 4,\ \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{5\pi}{6}$

8. $\alpha = 2,\ \beta = -1,\ \gamma = 3,\ \delta = 1,\ \vec{a} = (-1;3;2),\ \vec{b} = (2;5;0)$

9. $\alpha = 2,\ \beta = 4,\ \gamma = -2,\ \delta = -1,\ |\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 8,\ \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{6}$

10. $\alpha = 3,\ \beta = -2,\ \gamma = 2,\ \delta = 1,\ \vec{a} = (-2;-1;3),\ \vec{b} = (0;-4;1)$

11. $\alpha = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = -2,\ \delta = 3,\ |\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 7,\ \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{5\pi}{6}$

12. $\alpha = 3,\ \beta = -1,\ \gamma = 5,\ \delta = 2,\ \vec{a} = (1;0;-4),\ \vec{b} = (2;-3;-7)$

13. $\alpha = 3,\ \beta = -2,\ \gamma = 4,\ \delta = 6,\ |\vec{a}| = 5,\ |\vec{b}| = 2,\ \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{6}$

14. $\alpha = 1,\ \beta = -2,\ \gamma = 2,\ \delta = 3,\ \vec{a} = (1;-3;-5),\ \vec{b} = (2;0;-4)$

15. $\alpha = -1,\ \beta = -6,\ \gamma = 2,\ \delta = 3,\ |\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 4,\ \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{5\pi}{6}$

16. $\alpha = -1,\ \beta = 2,\ \gamma = 3,\ \delta = 1,\ \vec{a} = (2;-3;4),\ \vec{b} = (0;-2;3)$

17. $\alpha = 5,\ \beta = 4,\ \gamma = -5,\ \delta = 2,\ |\vec{a}| = 7,\ |\vec{b}| = 2,\ \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{6}$

18. $\alpha = -3,\ \beta = 4,\ \gamma = -1,\ \delta = -2,\ \vec{a} = (2;-1;0),\ \vec{b} = (4;-3;2)$

19. $\alpha = 4,\ \beta = -2,\ \gamma = 3,\ \delta = 2,\ |\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = 5,\ \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{5\pi}{6}$

20. $\alpha = -1,\ \beta = 1,\ \gamma = 4,\ \delta = 5,\ \vec{a} = (0;4;-6),\ \vec{b} = (-1;2;-5)$

21. $\alpha = 6,\ \beta = 7,\ \gamma = 3,\ \delta = -4,\ |\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 5,\ \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{6}$

22. $\alpha = 3,\ \beta = -5,\ \gamma = -1,\ \delta = -2,\ \vec{a} = (-3;5;1),\ \vec{b} = (0;2;-1)$

23. $\alpha = 5,\ \beta = 4,\ \gamma = 6,\ \delta = -3,\ |\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = 2,\ \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{5\pi}{6}$

24. $\alpha = 2,\ \beta = -1,\ \gamma = 4,\ \delta = 3,\ \vec{a} = (1;0;3),\ \vec{b} = (-2;-1;4)$

25. $\alpha = 5,\ \beta = 8,\ \gamma = 1,\ \delta = -2,\ |\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = 9,\ \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{6}$

26. $\alpha = 2,\ \beta = -5,\ \gamma = -1,\ \delta = -2,\ \vec{a} = (1;-4;-3),\ \vec{b} = (2;0;-2)$

27. $\alpha = 2,\ \beta = -4,\ \gamma = -1,\ \delta = -7,\ |\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 6,\ \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{5\pi}{6}$

28. $\alpha = 4,\ \beta = -5,\ \gamma = -1,\ \delta = -2,\ \vec{a} = (2;-2;0),\ \vec{b} = (3;-1;1)$

29. $\alpha = 7,\ \beta = 8,\ \gamma = 1,\ \delta = -4,\ |\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 2,\ \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\pi}{6}$

30. $\alpha = -2,\ \beta = 1,\ \gamma = 4,\ \delta = 3,\ \vec{a} = (-1;1;-2),\ \vec{b} = (2;3;0)$

№3. В треугольнике ABC найти точку пересечения медианы AN и высоты CH.

1. $A(2;-3), B(4;3), C(-2;5)$
2. $A(-1;-4), B(2;-3), C(-4;1)$
3. $A(2;-3), B(3;-1), C(5;-5)$
4. $A(3;-3), B(6;3), C(2;5)$
5. $A(-1;1), B(3;5), C(-7;-3)$
6. $A(6;5), B(5;2), C(3;-4)$
7. $A(3;3), B(1;5), C(9;3)$
8. $A(-6;-2), B(-8;3), C(2;7)$
9. $A(2;3), B(-1;6), C(7;8)$
10. $A(-3;-2), B(4;-3), C(-2;5)$
11. $A(4;2), B(6;3), C(2;-1)$
12. $A(3;5), B(1;9), C(5;3)$
13. $A(4;3), B(1;6), C(3;4)$
14. $A(4;1), B(-2;-2), C(4;-2)$
15. $A(2;2), B(3;5), C(-1;1)$
16. $A(2;-2), B(3;1), C(-5;1)$
17. $A(2;4), B(-1;-5), C(5;1)$
18. $A(3;1), B(5;-3), C(3;7)$
19. $A(4;-5), B(-4;3), C(-2;5)$
20. $A(-3;-4), B(-4;-2), C(2;-6)$
21. $A(-5;3), B(-6;4), C(2;6)$
22. $A(3;-6), B(-5;2), C(1;-4)$
23. $A(1;-3), B(5;-5), C(-1;7)$
24. $A(3;7), B(-2;2), C(8;4)$
25. $A(3;5), B(1;6), C(2;3)$
26. $A(-1;-5), B(-2;-4), C(-6;-6)$
27. $A(2;3), B(1;5), C(-3;-3)$
28. $A(4;3), B(5;2), C(-5;-6)$
29. $A(4;3), B(5;7), C(-3;9)$
30. $A(-4;3), B(2;9), C(-8;1)$

№4. Установить какая линия определяется уравнением. Построить линию.

1. $16x^2+9y^2+64x-18y-71=0$
2. $4x^2-9y^2-40x+18y+55=0$
3. $9x^2+16y^2-36x-96y+36=0$
4. $16x^2-4y^2+64x+24y-36=0$
5. $9x^2+25y^2+72x+50y-56=0$
6. $4x^2-16y^2+48x-96y-64=0$
7. $x^2+49y^2+4x-98y+4=0$
16. $4x^2-9y^2-48x-54y+27=0$
17. $4x^2+36y^2+56x+72y+88=0$
18. $9x^2-4y^2+72x-40y+8=0$
19. $36x^2+9y^2-72x-90y-63=0$
20. $49x^2-y^2-98x-4y-4=0$
21. $9x^2+36y^2-90x+72y-63=0$
22. $x^2-49y^2-8x-98y-82=0$

8. $25x^2-4y^2+50x-16y-91=0$

9. $25x^2+9y^2-50x-90y+25=0$

10. $4x^2-25y^2-40x-50y-25=0$

11. $4x^2+49y^2-40x-98y-47=0$

12. $4x^2-36y^2+48x+72y-36=0$

13. $49x^2+4y^2+98x-48y-3=0$

14. $36x^2-y^2-72x-8y-16=0$

15. $36x^2+4y^2-72x-16y-92=0$

23. $x^2+49y^2-14x+98y+49=0$

24. $9x^2-25y^2-90x+50y-25=0$

25. $49x^2+y^2+98x-16y+64=0$

26. $9x^2-y^2-36x-6y+18=0$

27. $9x^2+4y^2+36x+32y+64=0$

28. $x^2-9y^2+6x-36y-36=0$

29. $4x^2+9y^2-40x-18y+73=0$

30. $4x^2-16y^2+24x-64y-92=0$

№5. Найти длину высоты пирамиды *ABCD*, опущенной из вершины *D*.

1. $A(2;3;-1)$, $B(3;-1;-4)$, $C(4;2;-3)$, $D(-1;2;1)$
2. $A(5;-2;3)$, $B(6;-1;4)$, $C(7;1;1)$, $D(4;-2;-1)$
3. $A(6;-4;1)$, $B(5;-6;-2)$, $C(8;-1;4)$, $D(6;-5;-7)$
4. $A(-1;4;5)$, $B(1;1;7)$, $C(-2;5;3)$, $D(-2;3;6)$
5. $A(3;-4;1)$, $B(5;-3;4)$, $C(-1;1;2)$, $D(3;2;-1)$
6. $A(5;-1;3)$, $B(4;-3;-2)$, $C(3;3;1)$, $D(-1;6;-7)$
7. $A(-4;1;-2)$, $B(-5;2;-3)$, $C(2;5;1)$, $D(3;-2;3)$
8. $A(-1;-4;2)$, $B(3;-5;4)$, $C(-2;-2;1)$, $D(4;6;1)$
9. $A(4;5;-3)$, $B(2;4;-2)$, $C(5;7;1)$, $D(-4;3;5)$
10. $A(-2;3;2)$, $B(1;-2;4)$, $C(-5;4;1)$, $D(3;4;1)$
11. $A(3;-1;5)$, $B(6;-4;3)$, $C(1;2;4)$, $D(3;5;-8)$
12. $A(4;-2;-1)$, $B(1;-8;2)$, $C(6;5;-4)$, $D(-2;5;1)$
13. $A(1;4;-3)$, $B(-2;5;-2)$, $C(6;3;-5)$, $D(-2;-3;1)$
14. $A(6;2;-1)$, $B(-2;4;-5)$, $C(3;3;-2)$, $D(3;1;-7)$
15. $A(2;-1;-3)$, $B(5;-3;-5)$, $C(-5;4;1)$, $D(1;-2;3)$

16. $A(-1;4;-2)$, $B(-2;3;-1)$, $C(-5;-1;4)$, $D(-2;3;-4)$

17. $A(-2;1;6)$, $B(-1;3;3)$, $C(2;4;-1)$, $D(2;-3;5)$

18. $A(5;2;3)$, $B(4;1;4)$, $C(3;-3;7)$, $D(-5;5;2)$

19. $A(-1;3;-2)$, $B(-4;7;-5)$, $C(3;-3;4)$, $D(2;-3;1)$

20. $A(-3;5;-2)$, $B(-7;3;-3)$, $C(-8;1;-3)$, $D(-4;1;-2)$

21. $A(6;2;-2)$, $B(3;3;-3)$, $C(2;5;-4)$, $D(2;-5;1)$

22. $A(-1;4;-6)$, $B(-2;2;-5)$, $C(3;5;-4)$, $D(1;-2;1)$

23. $A(4;6;-2)$, $B(2;4;-1)$, $C(5;3;-3)$, $D(-3;1;2)$

24. $A(-3;-2;5)$, $B(1;3;9)$, $C(-6;-6;3)$, $D(-1;2;2)$

25. $A(2;6;7)$, $B(-2;8;8)$, $C(5;3;5)$, $D(5;-4;-2)$

26. $A(-3;5;-2)$, $B(-2;3;-1)$, $C(-5;1;3)$, $D(4;-3;-1)$

27. $A(-2;-1;-4)$, $B(-5;4;1)$, $C(-1;-2;-6)$, $D(2;-9;-8)$

28. $A(5;-1;8)$, $B(6;-2;9)$, $C(2;3;6)$, $D(-1;2;5)$

29. $A(3;4;2)$, $B(-2;2;4)$, $C(4;5;3)$, $D(3;2;-2)$

30. $A(-2;4;3)$, $B(-1;-3;-1)$, $C(-3;2;1)$, $D(-2;3;2)$

№6. Установить взаимное расположение прямой l и плоскости β. В случае их пересечения найти координаты точки пересечения.

1. $l:\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z-1}{4};\ \ \beta: x+2y+3z+5=0$

2. $l:\begin{cases}2x+2y+3z+4=0,\\ x-2y-2z+2=0;\end{cases}\ \ \beta: 3x+y+2z+8=0$

3. $l:\begin{cases}x=-4t+2,\\ y=2t+4,\\ z=3t+1;\end{cases}\ \ \beta:\dfrac{x}{7/5}+\dfrac{y}{7/2}+\dfrac{z}{7/3}=1$

4. $l:\dfrac{x+6}{4}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{2};\ \ \beta: 2x+3y+4z+1=0$

5. $l:\begin{cases}-3x+y-2z+4=0,\\ 2x-2y+3z+3=0;\end{cases}$ $\beta: x+3y-z+7=0$

6. $l:\begin{cases}x=3t+5,\\ y=-t+1,\\ z=2t+4;\end{cases}$ $\beta: \dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{-1/2}+\dfrac{z}{-2/3}=1$

7. $l:\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+4}{4};$ $\beta: 3x-2y-z+5=0$

8. $l:\begin{cases}5x+2y+3z+5=0,\\ x+3y+5z+6=0;\end{cases}$ $\beta: 4x-y-2z+4=0$

9. $l:\begin{cases}x=-t+4,\\ y=2t-2,\\ z=3t+1;\end{cases}$ $\beta: \dfrac{x}{-7}+\dfrac{y}{7/2}+\dfrac{z}{-7/5}=1$

10. $l:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{4};$ $\beta: 2x+5y-4z+3=0$

11. $l:\begin{cases}3x-4y+5z-6=0,\\ 4x-3y+2z+6=0;\end{cases}$ $\beta: 3x-y-z+12=0$

12. $l:\begin{cases}x=4t-3,\\ y=-2t+4,\\ z=5t-5;\end{cases}$ $\beta: \dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{3/2}+\dfrac{z}{-3/2}=1$

13. $l:\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4};$ $\beta: 3x+4y-3z+10=0$

14. $l:\begin{cases}4x-5y+3z-1=0,\\ x-2y+2z+2=0;\end{cases}$ $\beta: 3x+y-5z-5=0$

15. $l:\begin{cases}x=-4t+2,\\ y=3t-5,\\ z=2t+3;\end{cases}$ $\beta: \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-4/3}+\dfrac{z}{1}=1$

16. $l:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+1}{-4};$ $\beta: 2x-5y-3z-11=0$

17. $l:\begin{cases}3x-2y+z+4=0,\\ 2x+4y-3z+2=0;\end{cases}$ $\beta: 6x-4y+2z+3=0$

18. $l:\begin{cases} x = 4t+3, \\ y = -5t+2, \\ z = 3t-1; \end{cases}$ $\beta: \frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{-6}=1$

19. $l: \frac{x+5}{3}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-2}{-7};$ $\beta: 5x+2y+3z-4=0$

20. $l:\begin{cases} 4x+2y-3z+1=0, \\ 3x+y-2z+5=0; \end{cases}$ $\beta: 2x+3y-z-3=0$

21. $l:\begin{cases} x = 2t-1, \\ y = 5t-3, \\ z = -4t+5; \end{cases}$ $\beta: \frac{x}{-2/3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1$

22. $l: \frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-5}{-5};$ $\beta: 4x-y+2z-8=0$

23. $l:\begin{cases} x-y+4z+3=0, \\ 2x+3y-z+2=0; \end{cases}$ $\beta: 3x+3y-z-9=0$

24. $l:\begin{cases} x = -3t-4, \\ y = 2t+3, \\ z = -7t+5; \end{cases}$ $\beta: \frac{x}{-9/5}+\frac{y}{-9/2}+\frac{z}{3}=1$

25. $l: \frac{x+5}{-3}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+4}{3};$ $\beta: 2x+3y-3z-7=0$

26. $l:\begin{cases} 5x-2y+z-3=0, \\ 3x-y+2z+3=0; \end{cases}$ $\beta: 4x-y+5z+3=0$

27. $l:\begin{cases} x = 5t+2, \\ y = -4t-1, \\ z = 6t-2; \end{cases}$ $\beta: \frac{x}{-1}+\frac{y}{1/2}+\frac{z}{2/3}=1$

28. $l: \frac{x-4}{5}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z-2}{4};$ $\beta: 5x+2y-3z-9=0$

29. $l:\begin{cases} x-2y+2z+2=0, \\ 3x-3y+2z+4=0; \end{cases}$ $\beta: 3x-2y+z-1=0$

30. $l:\begin{cases} x = 5t-1, \\ y = -4t+3, \\ z = 2t+4; \end{cases}$ $\beta: \frac{x}{-3}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{3}=1$

III. Практические задания по теме «Введение в математический анализ»

№1. Найти предел последовательности.

1. $x_n = \dfrac{5n^4 - 3n^2 + 2}{3n^3 - 2n - n}$
2. $x_n = \dfrac{3 - 4n^4 + 5n^6}{2n^8 + 4n^2 - 7}$
3. $x_n = \dfrac{1 + 5n^2 + 4n^4}{2 - 3n^3 - 2n^4}$
4. $x_n = \dfrac{7n^8 - 2n^6 + n}{2 - 4n^2 - 3n^3}$
5. $x_n = \dfrac{2 + 4n^3 - 5n^4}{7 + 7n^3 - 6n^8}$
6. $x_n = \dfrac{1 + 5n^4 + 8n^9}{4n^9 - 5n^7 + n}$
7. $x_n = \dfrac{3n^4 + n^5 + 8n^7}{2n^3 + 5n^2 - 1}$
8. $x_n = \dfrac{3n^3 - 2n^2 + 4}{3n^5 - 7n - 1}$
9. $x_n = \dfrac{5 - 4n^3 - 9n^9}{9n^9 + 7n^6 - n}$
10. $x_n = \dfrac{1 + 5n^3 - n^8}{3n - n^6 + 2n^7}$
11. $x_n = \dfrac{1 + 3n^5 - 8n^8}{3 - n^2 + 2n^8}$
12. $x_n = \dfrac{2n^5 + 3n^4 + 2n}{5n^2 - 2n + 4}$
13. $x_n = \dfrac{9 - 4n - 2n^2}{6n^4 + 8n^2 - 5n}$
14. $x_n = \dfrac{9n^7 - 2n^8 + 2n}{3n^7 + 7n - 4}$
15. $x_n = \dfrac{7n^6 + 3n^4 + 8n}{3 - 5n - n^5}$
16. $x_n = \dfrac{n - 4n^2 + 5n^3}{2 - 7n^4 + 6n^5}$
17. $x_n = \dfrac{4n^8 + 3n^6 - 2}{1 - 4n^7 - 4n^8}$
18. $x_n = \dfrac{7 - 2n^4 + 4n^6}{2 - 6n^2 + 3n^4}$
19. $x_n = \dfrac{5n^4 + n^2 + 2}{2n^6 - 9n^4 - 4n}$
20. $x_n = \dfrac{6 + 9n - 5n^2}{4 - 2n + n^2}$
21. $x_n = \dfrac{1 - 2n^2 - 9n^5}{3n^7 + 7n^3 - 5n}$
22. $x_n = \dfrac{3 + 2n^3 - 6n^5}{2n - n^2 - 3n^5}$
23. $x_n = \dfrac{5n^7 + n^5 + 1}{n^5 - 2n^3 - 4}$
24. $x_n = \dfrac{4 + 2n^3 - 5n^4}{n - 3n^5 + 6n^7}$
25. $x_n = \dfrac{6n^3 - 3n^2 + 5}{n^3 - 7n + 2}$
26. $x_n = \dfrac{4 - 3n^2 + 6n^9}{n^8 - 5n^5 - n}$
27. $x_n = \dfrac{3 - 2n^4 + 8n^5}{n^6 + 6n^5 - 2}$
28. $x_n = \dfrac{n - 2n^2 - 8n^4}{2n^4 - 6n^3 + 1}$
29. $x_n = \dfrac{9n^3 - 3n^2 + 5}{2n^2 + 5n - 2}$
30. $x_n = \dfrac{5n^3 - n^2 + 2n}{3n^8 - 2n^6 - 1}$

№2. Найти предел функции, не используя правила Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{3x^2 - 5x - 2}$
11. $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{2x^2 + 9x + 4}{x^2 + x - 12}$
21. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 5x - 3}$

2. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+8x+15}{5x^2+23x-10}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{3x^2-10x+7}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+8x+7}{7x^2+5x-2}$

5. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3x^2+8x-16}{x^2+6x+8}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{4x^2-13x+10}$

7. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-3x-18}{5x^2+13x-6}$

8. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+10x+8}{x^2+10x+16}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-12x+7}{x^2+3x-4}$

10. $\lim\limits_{x\to -9}\dfrac{x^2+7x-18}{2x^2+17x-9}$

12. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{4x^2-13x-12}$

13. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-15x+18}{x^2-8x+12}$

14. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x^2-11x-12}{x^2+4x-21}$

15. $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2+x-30}{3x^2+20x+12}$

16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{8x^2-9x+1}{x^2+3x-4}$

17. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+10x+9}{9x^2+7x-2}$

18. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$

19. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-7x-18}{4x^2-37x+9}$

20. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{4x^2-25x+6}{x^2-4x-12}$

22. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-11x+10}{x^2+3x-10}$

23. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+12x+4}{x^2+x-2}$

24. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-8x+15}{4x^2-19x-5}$

25. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-15x+7}{x^2-5x-14}$

26. $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{2x^2+17x+21}{x^2+5x-14}$

27. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-9x+8}{2x^2-17x+8}$

28. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{x^2+7x-8}{2x^2+17x+8}$

29. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{6x^2+19x-20}{x^2+5x+4}$

30. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{5x^2+7x-6}$

№3. Найти предел функции.

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+2}}{x^2-25}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{7x-4}}{x^2+3x-10}$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5x+7}-\sqrt{1-x}}{x^3+3x^2-x-3}$

4. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{5x+6}-\sqrt{7x-6}}{x^2-5x-6}$

16. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+64}{\sqrt{7+x}-\sqrt{11+2x}}$

17. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-x-20}{\sqrt{3-x}-\sqrt{-9-4x}}$

18. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{-9x+7}-\sqrt{8-8x}}{x^3+1}$

19. $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x^2+4x-21}{\sqrt{-2x-5}-\sqrt{2-x}}$

5. $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{2x+11}}{x^2+7x-10}$

6. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+8x^2+7x}{\sqrt{3x+8}-\sqrt{2x+7}}$

7. $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{3-\sqrt{2x-5}}{6-\sqrt{5x+1}}$

8. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+8x^2+15x}{\sqrt{3-5x}-\sqrt{-3-7x}}$

9. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{5-\sqrt{1-8x}}{2-\sqrt{7+x}}$

10. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+4x^2-12x}{\sqrt{7x-6}-\sqrt{3x+2}}$

11. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{4x+5}-5}{\sqrt{3x-7}-\sqrt{8}}$

12. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^3-7x^2+12x}{\sqrt{8-x}-\sqrt{3x-8}}$

13. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{2x-4}-2}$

14. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{6x+7}-\sqrt{x+7}}{x^3+7x^2+12x}$

15. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{8x-7}-\sqrt{5x-1}}{x^2-4}$

20. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{4x-5}-\sqrt{x+1}}$

21. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+5x^2+5x-3}{\sqrt{1-5x}-4}$

22. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{\sqrt{6-5x}-\sqrt{4-6x}}$

23. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{3-2x}-\sqrt{6-x}}{x^2-9}$

24. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{6x-9}}{x^3-27}$

25. $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{\sqrt{4-2x}-4}{\sqrt{7-3x}-5}$

26. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{5x-7}-\sqrt{2x+2}}{x^3-4x^2+5x-6}$

27. $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{x^2-64}{\sqrt{4x+4}-\sqrt{5x-4}}$

28. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+x^2-7x+2}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{8x-7}}$

29. $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{x^2-36}{\sqrt{-1-x}-\sqrt{-7-2x}}$

30. $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^3+7x^2+8x-10}{\sqrt{-7-2x}-\sqrt{x+8}}$

№4. Найти предел функции.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x-2}\right)^{5x+8}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{6-x}{2-x}\right)^{\frac{7-3x}{2}}$

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4-3x}{7-3x}\right)^{\frac{2x-3}{5}}$

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-9}\right)^{3-5x}$

21. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{7x-3}{7x+4}\right)^{2x-5}$

22. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5+2x}{9+2x}\right)^{3x-5}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2+6x}{5+6x}\right)^{4x+1}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2-6x}{9-6x}\right)^{\frac{3-4x}{5}}$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2-8x}{7-8x}\right)^{3x+4}$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{8x+4}{8x-5}\right)^{\frac{1+4x}{3}}$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5-5x}{2-5x}\right)^{2-9x}$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5+7x}{2+7x}\right)^{\frac{3x+4}{9}}$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4+6x}{1+6x}\right)^{3+2x}$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4-x}{9-x}\right)^{\frac{4-9x}{5}}$

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{7x+2}{7x-3}\right)^{\frac{4+3x}{9}}$

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+5}\right)^{5-x}$

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x+8}\right)^{\frac{4-2x}{3}}$

16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-7}{3x+4}\right)^{5-2x}$

17. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3-8x}{1-8x}\right)^{\frac{9-x}{7}}$

18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+6}\right)^{3+6x}$

19. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+6}{2x+3}\right)^{\frac{1-5x}{7}}$

20. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{8x+4}{8x+1}\right)^{-2x-7}$

23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-2x}{5-2x}\right)^{\frac{5x+2}{7}}$

24. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+7}\right)^{\frac{4-x}{5}}$

25. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{8x-3}{8x+2}\right)^{5-8x}$

26. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5-x}{6-x}\right)^{\frac{4x+9}{7}}$

27. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2-9x}{5-9x}\right)^{7-3x}$

28. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x-6}{4x+1}\right)^{\frac{2x+7}{3}}$

29. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+7}\right)^{3+8x}$

30. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x+3}{5x-9}\right)^{\frac{3x-2}{5}}$

№5. Найти предел, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{x\arcsin4x}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\left(2^{8x}-1\right)}{\operatorname{tg}(4x)}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-1}{\log_5(1+2x)}$

4. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2^{x-3}-1}{x^2+2x-15}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}\left(5^x-1\right)}{x^2+x}$

11. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-x-6}{\arcsin^2\left(\operatorname{tg}(x+2)\right)}$

12. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\log_3\left(1+\sin(x-2)\right)}{x^3-8}$

13. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^3+64}{1-\cos(2x+8)}$

14. $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{\ln\left(1+\sin(x+6)\right)}{x^2-36}$

15. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+27}{\ln\left(1+\sin(6+2x)\right)}$

21. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sin\left(e^{2x-6}-1\right)}{1-\cos(6-2x)}$

22. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos7x-\cos5x}{\ln(1+\sin2x)}$

23. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sin^2\left(\operatorname{tg}(5-x)\right)}{x^3-25x}$

24. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-6x}{\cos8x-\cos2x}$

25. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}\left(\arcsin(2x)\right)}{\cos3x-\cos5x}$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^{\sin(3-x)}-1}{x^2-9}$

7. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\sin(4-8x)}{(1-2x)^3-1}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(3x)}{\operatorname{tg}^2(6x)}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(e^x-1\right)}{\cos 5x-\cos x}$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(e^{3-3x}-1\right)}{x^2-4x+3}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\left(1-\cos(8x)\right)}{\ln(1+4x)}$

17. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-4x-5}{\ln\left(1+\sin(5-x)\right)}$

18. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin\left((1+2x)^6-1\right)}$

19. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-16x}{\arcsin\left(\operatorname{tg}(4-x)\right)}$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_6\left(1+\operatorname{tg}(5x)\right)}{x^3-6x^2+8x}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^3\left(\ln(1+2x)\right)}{7x^2+4x}$

27. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{1-\cos(4-2x)}$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\left(\log_4(1+5x)\right)}{x^3+2x^2+5x}$

29. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{3x-6}-1}{1-\cos(4-2x)}$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 9x-\cos 3x}{\operatorname{arctg} 2x}$

№6. Исследовать функцию на непрерывность и построить ее график.

1. $f(x)=\begin{cases} 3-x, & x<-1, \\ x^2+3, & -1\le x<2, \\ 5, & x\ge 2. \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} 2x+5, & x<-4, \\ x^2+4x+5, & -4\le x\le 1, \\ 11-x, & x>1. \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x<-2, \\ -x^2-2x+3, & -2\le x<2, \\ 2x, & x\ge 2. \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} (x+3)^2, & x\le -2, \\ -x^2+3, & -2<x\le 1, \\ 3x-1, & x>1. \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} 5x+8, & x<-1, \\ x^2, & -1\le x<2, \\ -x^2+6x-4, & x\ge 2. \end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases} -x^2+5, & x\le -1, \\ (x-1)^2, & -1<x\le 4, \\ 7-x, & x>4. \end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases} (x+2)^2, & x\le -1, \\ 2x+3, & -1<x<2, \\ -x^2+5, & x\ge 2. \end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases} -1, & x\le -1, \\ x^2-5, & -1<x\le 2, \\ -(1-x)^2, & x>2. \end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases} -2x-3, & x<-4, \\ 5, & -4\le x<1, \\ x^2-4x+5, & x\ge 1. \end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases} 3, & x\le -1, \\ x^2-4, & -1<x\le 3, \\ 11-2x, & x>3. \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} 5, & x\le 2, \\ -x^2+8x-7, & 2<x\le 7, \\ 2x-9, & x>7. \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} x^2+8x+11, & x<-3, \\ -x^2+5, & -3\le x\le 1, \\ x-1, & x>1. \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} x^2+8x+10, & x\le -1, \\ 3, & -1<x<2, \\ -x^2+6x-4, & x\ge 2. \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} -x^2+3, & x<3, \\ x-6, & 3\le x<6, \\ (x-6)^2, & x\ge 6. \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} -3, & x<2, \\ x^2-10x+15, & 2\le x\le 7, \\ 1-x, & x>7. \end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-7, & x<1, \\ x^2-6x+1, & 1\le x\le 7, \\ x-5, & x>7. \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} x+7, & x<-3, \\ x^2-4, & -3\le x\le 4, \\ 12, & x>4. \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} x^2+8x+7, & x<-1, \\ x^2-4x-5, & -1\le x<6, \\ 2x-7, & x\ge 6. \end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases} x^2+6x+5, & x<0, \\ 5, & 0\le x\le 3, \\ -x^2+8x-7, & x>3. \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} 3x+2, & x\le 1, \\ x^2-6x+10, & 1<x\le 6, \\ 2x-9, & x>6. \end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases} -4x-29, & x<-4, \\ -x^2-2x-5, & -4\le x\le 0, \\ x-6, & x>0. \end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases} x^2-4, & x\le 1, \\ 2x-5, & 1<x\le 4, \\ x^2-10x+15, & x>4. \end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases} -2x-7, & x\le -5, \\ x^2+4x-3, & -5<x<0, \\ x-3, & x\ge 0. \end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases} x^2+8x+3, & x\le -2, \\ -(x-1)^2, & -2<x\le 3, \\ 5-2x, & x>3. \end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases} x+5, & x<-4, \\ -3x-5, & -4\le x<-2, \\ -x^2+5, & x\ge -2. \end{cases}$

26. $f(x)=\begin{cases} -x^2-10x-15, & x<-1, \\ -x^2+4x-1, & -1\le x\le 4, \\ x-3, & x>4. \end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases} -3x, & x<1, \\ -x^2+6x-8, & 1\le x\le 6, \\ 7-2x, & x>6. \end{cases}$

28. $f(x)=\begin{cases} -x^2-2x+9, & x\le 2, \\ -x^2+10x-15, & 2<x\le 8, \\ 2x-9, & x>8. \end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases} -7-2x, & x\le -4, \\ x+5, & -4<x<1, \\ (x-2)^2, & x\ge 1. \end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases} 2x+7, & x<-3, \\ x^2-6, & -3\le x\le 2, \\ -x, & x>2. \end{cases}$

IV. Практические задания по теме «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

№1. Найти производную функции.

1. $y = 5\sqrt{x} + \dfrac{4}{x^3} - 7x^2 + 2\sqrt[3]{x^4}$
2. $y = 3x^4 - \dfrac{5}{\sqrt[7]{x^3}} - 2x^7 + \dfrac{6}{x^8}$
3. $y = 4\sqrt{x^7} - \dfrac{1}{6\sqrt{x^5}} - \dfrac{8}{x} - 5$
4. $y = \dfrac{6}{x^2} - \sqrt[3]{x^5} + 2x^4 - \dfrac{1}{3x}$
5. $y = 8x^3 - \dfrac{1}{x^2} + 9\sqrt[3]{x^4} - 3x$
6. $y = 4\sqrt[7]{x^6} - \dfrac{2}{x^4} + 3x^4 - \dfrac{1}{3\sqrt{x}}$
7. $y = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{3}{2x^4} + 3x^5 - 8\sqrt{x}$
8. $y = 4\sqrt{x} + \dfrac{5}{x^4} + \sqrt[5]{x^2} - \dfrac{1}{7x}$
9. $y = 5x^3 - \dfrac{9}{\sqrt[5]{x^3}} - \dfrac{4}{x^2} - 8$
10. $y = \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^4} + 5\sqrt[7]{x^6} - x^2$
11. $y = 5x^6 - \dfrac{3}{x^5} + \dfrac{1}{2x} - 4\sqrt[9]{x^2}$
12. $y = \dfrac{2}{\sqrt[8]{x^3}} + \dfrac{1}{4x^2} - x + 6$
13. $y = 4x^6 + \dfrac{1}{4\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt{x^5} + \dfrac{6}{x}$
14. $y = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x^8}} + \dfrac{3}{x^2} - 5x^6 + 6\sqrt{x}$
15. $y = \dfrac{9}{x^3} + \dfrac{1}{3\sqrt{x}} + 2\sqrt[7]{x^4} + 3x^3$
16. $y = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + 5x^6 + 2x$
17. $y = 4\sqrt{x^5} - \dfrac{2}{x} + 3x^6 + \dfrac{6}{\sqrt{x^7}}$
18. $y = 6x - 3x^5 + \dfrac{5}{x^4} + \dfrac{1}{2\sqrt{x^9}}$
19. $y = 5\sqrt[3]{x^4} - 2x + 4x^7 - \dfrac{5}{7x^6}$
20. $y = \dfrac{1}{2x^3} + 6x - \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^5}} - 2\sqrt{x^7}$
21. $y = 3\sqrt{x^5} - \dfrac{1}{6x^3} + 3x - \dfrac{8}{\sqrt[5]{x^7}}$
22. $y = \dfrac{6}{x^3} + \dfrac{1}{\sqrt[7]{x^5}} - 3x^3 + 3$
23. $y = \dfrac{4}{3x^4} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + x^5 - 8\sqrt{x^3}$
24. $y = \dfrac{3}{x^4} - \dfrac{2}{5\sqrt[9]{x^7}} + x - 7$
25. $y = 4x^3 - \dfrac{5}{x} + 8\sqrt{x^5} - \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$
26. $y = 3\sqrt{x} - 5x^4 + \dfrac{3}{x^5} - \dfrac{2}{\sqrt[7]{x^4}}$
27. $y = x^6 - \dfrac{5}{\sqrt[5]{x^3}} + \dfrac{8}{x^4} - x$
28. $y = 4x - 3\sqrt{x^5} - \dfrac{2}{\sqrt[5]{x^3}} + \dfrac{5}{x}$
29. $y = \dfrac{5}{x^6} + 3\sqrt{x^5} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^7}} + 4x$
30. $y = \dfrac{7}{\sqrt{x}} - \dfrac{5}{x^3} + 3\sqrt[6]{x^5} - 4x^4$

№2. Найти производную функции.

1. $y = \ln^3\left(x^2 - 5\right) \cdot \cos\sqrt{\operatorname{tg}(2x)}$

2. $y = \operatorname{arctg}\left(\ln(7 - 2x)\right) \cdot \sqrt{\operatorname{sh}(x\cos 7)}$

3. $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg}\left(2^x + x^3\right)} \cdot \log_2\left(e^{3-\sin x}\right)$

4. $y = \log_4^5\left(x^4 - 5x^2\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\sin^2(2x)\right)$

5. $y = \sqrt[4]{\ln^3\left(3 - x^2\right)} \cdot \operatorname{cth}\left(5^{2x} - 3x^5\right)$

6. $y = \arccos^4(\operatorname{tg} x) \cdot \sqrt{\ln\left(e^x - x\sin 5\right)}$

7. $y = \operatorname{tg}\left(\log_2^4\left(5x^3\right)\right) \cdot \left(3e^{5x} - 5\right)^3$

8. $y = \arcsin\left(\operatorname{ch}^5(1 - x)\right) \cdot \ln\sqrt{\operatorname{tg}^7\left(x^2 - 3^x\right)}$

9. $y = \sqrt[3]{7x^4 + \operatorname{ch}^3 5x - 1} \cdot \sin^3\left(\operatorname{ctg}(3x)\right)$

10. $y = \operatorname{th}\left(e^{4x^3 - 5x + 2}\right) \cdot \ln\sqrt{\operatorname{arctg}(2 - x)}$

11. $y = \operatorname{cth}\sqrt[5]{\log_4^3\left(3x^3\right)} \cdot \left(x\cos 7 + 6^{5x^2}\right)$

12. $y = \sqrt[7]{x\ln 2 - \cos^2(5x)} \cdot \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{sh}^2\left(x^4\right)\right)$

16. $y = \dfrac{\arccos^4\left(e^{2-3x^4}\right)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2x - 3)}}$

17. $y = \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{ch}(3x)}}{\ln\left(5^{1-6x} - 3x^7\right)}$

18. $y = \dfrac{\sqrt{\cos\left(2^{\operatorname{th} x^4}\right)}}{\arcsin^3\left(4 + x^3\right)}$

19. $y = \dfrac{\log_4\left(\operatorname{ch}^5(1 - x)\right)}{\operatorname{tg}\sqrt{\sin(5x)}}$

20. $y = \dfrac{e^{\arccos x^4}}{\ln^6\left(\operatorname{cth}\sqrt[5]{5x^6 - 2}\right)}$

21. $y = \dfrac{\operatorname{arcctg}\left(\log_3^5(3x + 1)\right)}{\sqrt{\cos^3\left(5x^3 - \ln 2\right)}}$

22. $y = \dfrac{\left(\ln^4 x - \sin x^3\right)^6}{e^{\operatorname{sh}\left(2\sqrt{x} - 3\right)}}$

23. $y = \dfrac{\sqrt[7]{3^{5x} - \operatorname{ctg} x}}{\cos\left(\arcsin^3(\ln x)\right)}$

24. $y = \dfrac{\sqrt{\log_3\left(e^{-x\cos 5}\right)}}{\arccos^5\left(\operatorname{tg}(1 - 5x)\right)}$

25. $y = \dfrac{\operatorname{th}^5\left(\sin\sqrt[3]{x^4 - 4^x}\right)}{\sqrt{\operatorname{ch}^3(2x) - \ln x}}$

26. $y = \dfrac{\left(x\ln 3 - \operatorname{sh}\sqrt[6]{2x}\right)^4}{\sqrt{\operatorname{arcctg}\left(2\sqrt[5]{x}\right)}}$

27. $y = \dfrac{e^{\sqrt{\cos\left(8x^2 - 3x\right)}}}{\log_3^5\left(\arcsin x^3\right)}$

13. $y=\cos\left(e^{3x^2-4x\sin 2}\right)\cdot\sqrt{\log_4\left(\operatorname{th}(3-x)\right)}$

14. $y=e^{\operatorname{sh}^5\left(4^x-2x\right)}\cdot\operatorname{ctg}^3\sqrt{\ln(2-5x)}$

15. $y=\operatorname{cth}\sqrt[4]{5^{3x^4-x^3+x}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\ln^3(1-5x)\right)$

28. $y=\dfrac{\ln\left(\arcsin^3(\cos x)\right)}{\operatorname{tg}^6\left(3^{\operatorname{cth}(x+\ln x)}\right)}$

29. $y=\dfrac{5^{\arccos\sqrt[4]{\sin x^4}}}{\sqrt{\cos^5 x-\cos x^5}}$

30. $y=\dfrac{\left(\ln 3x^5-\cos\sqrt[3]{x+2}\right)^4}{e^{\sqrt{\operatorname{ctg}\left(\ln^2 x\right)}}}$

№3. Найти производные первого и второго порядков функции $y=y(x)$.

1. $\operatorname{tg}\left(2x^2-7y\right)=x$

2. $\begin{cases}x=\operatorname{arctg}t^2\\ y=\ln t^4\end{cases}$

3. $\sqrt{xy}+\operatorname{tg}y=3$

4. $\begin{cases}x=e^{-4t+3}\\ y=t^2e^{2t+3}\end{cases}$

5. $xy=x^2+\operatorname{arctg}y$

6. $\begin{cases}x=3\cos^2 t\\ y=t^2\sin^2 t\end{cases}$

7. $\cos^2\left(x^3-y\right)=y$

8. $\begin{cases}x=3t^4+2t^3\\ y=2t-5t^2\end{cases}$

11. $\begin{cases}x=\ln^2 t\\ y=t^4\end{cases}$

12. $\ln\dfrac{y}{x}+2x^2+y=0$

13. $\begin{cases}x=\arccos t\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\end{cases}$

14. $2^{xy}+\sin y=1$

15. $\begin{cases}x=t^4\\ y=t^2\ln t\end{cases}$

16. $\ln y-\operatorname{ch}(xy)=2$

17. $\begin{cases}x=1-t^2\\ y=\ln\left(t^3+2t^2\right)\end{cases}$

18. $y^2x=3y+\operatorname{arctg}x$

21. $e^{xy}+2x=y^3$

22. $\begin{cases}x=\sqrt{t^2+3}\\ y=\left(t^2+3\right)^2\end{cases}$

23. $\sin^2\left(x-y^4\right)=x$

24. $\begin{cases}x=\dfrac{1}{t+2}\\ y=\dfrac{t^3}{t+2}\end{cases}$

25. $\operatorname{tg}x+e^{xy}=5$

26. $\begin{cases}x=e^{2t}+3\\ y=t^2e^{-4t}\end{cases}$

27. $x^2y-e^{xy}=0$

28. $\begin{cases}x=\cos^4 3t\\ y=\sin 3t\end{cases}$

9. $x^3+y^2=\operatorname{sh}(xy)$

10. $\begin{cases} x=\sin^3 2t \\ y=\cos^2 2t \end{cases}$

19. $\begin{cases} x=\ln t^2 \\ y=t^2\ln t \end{cases}$

20. $\operatorname{cth}\left(4x-y^3\right)=y$

29. $y\ln x+xy^2=x^2$

30. $\begin{cases} x=\arcsin t \\ y=t\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

№4. Вычислить данную величину приближённо с помощью дифференциала (результат записать с тремя знаками после запятой).

1. $\sqrt[3]{28}$
2. $(1{,}03)^4$
3. $e^{0{,}87}$
4. $\sqrt[3]{123}$
5. $(3{,}03)^4$
6. $\sqrt[5]{32{,}8}$
7. $\ln(0{,}97)$
8. $\operatorname{arctg}(0{,}92)$
9. $\sqrt{35{,}91}$
10. $\operatorname{arctg}(1{,}08)$
11. $(1{,}99)^5$
12. $\sqrt[4]{81{,}7}$
13. $\operatorname{arctg}(0{,}94)$
14. $\ln(1{,}08)$
15. $e^{1{,}04}$
16. $(2{,}01)^5$
17. $\sqrt[6]{65}$
18. $\operatorname{arctg}(1{,}03)$
19. $(1{,}98)^4$
20. $\sqrt[3]{64{,}7}$
21. $e^{0{,}95}$
22. $\ln(0{,}93)$
23. $(1{,}02)^5$
24. $\sqrt[3]{26{,}91}$
25. $\operatorname{arctg}(0{,}97)$
26. $e^{1{,}09}$
27. $(4{,}03)^3$
28. $\sqrt[4]{82}$
29. $\operatorname{arctg}(1{,}12)$
30. $\ln(1{,}04)$

№5. Найти предел с помощью правила Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2x-3)}{\sqrt[3]{x+5}}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+\sin^2 x}{1-\cos^2 2x}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(7^{\frac{1}{x}}-1\right)x$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos\left(e^x-1\right)}{\sin^2 x}$

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{ctg}^2 2x}{\operatorname{ctg}^2 4x}$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+5)}{\sqrt[3]{2x-3}}$

11. $\lim\limits_{x\to1}\lg x\cdot\lg(x-1)$

12. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{\operatorname{tg}^2 4x}$

13. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{1-\cos 5x}$

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5-3x^2+8}{x\ln x}$

15. $\lim\limits_{x\to0}x^2\ln\left(\sin^2 x\right)$

16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 2x-e^{3x}}{\ln\left(1-x^3\right)}$

21. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{e^{\operatorname{tg}x}-x-1}$

22. $\lim\limits_{x\to0}\left(1-e^{5x}\right)\operatorname{ctg}x$

23. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 5x}{e^{x^2}-1-x^2}$

24. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\operatorname{ctg}^2 6x}{\operatorname{ctg}^2 3x}$

25. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{\operatorname{tg}x-x}$

26. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}x-\dfrac{\pi}{2}\right)\ln x$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 4x}{x-\operatorname{tg} x}$

8. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{3x+7}}{\lg(x-2)}$

9. $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\ln(x-2)$

10. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln^2 x}{(3x+5)^3}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_2(\cos 2x)}{\log_3(\cos 3x)}$

18. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\operatorname{tg}^2 6x}{\operatorname{tg}^2 3x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-x^2-1}{\sin^2 3x}$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^3 2x}{1-\cos 6x}$

27. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2}$

28. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{5x+4}}{\log_2(x-1)}$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{arctg} x}{x^2}$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_3(\sin 3x)}{\log_2(\sin 2x)}$

№6. Найти промежутки возрастания и убывания, точки максимума и минимума, максимум и минимум функции, промежутки вогнутости, выпуклости, точки перегиба графика функции.

1. $y=x^3+15x^2+63x+66$
2. $y=x^3-9x^2+24x-16$
3. $y=x^3-6x^2-15x+49$
4. $y=x^3+6x^2+9x+22$
5. $y=x^3-9x^2-21x+17$
6. $y=x^3-6x^2+9x+10$
7. $y=x^3-3x^2-9x+2$
8. $y=4x^3+18x^2-48x+9$
9. $y=2x^3-27x^2+84x+15$
10. $y=2x^3-3x^2-36x+6$
11. $y=2x^3-24x^2+90x-6$
12. $y=6x^3+9x^2-36x+20$
13. $y=2x^3-9x^2-24x+12$
14. $y=2x^3-21x^2+36x+7$
15. $y=x^3+9x^2+15x-3$
16. $y=x^3+12x^2+36x-4$
17. $y=x^3-12x^2+21x+30$
18. $y=x^3-3x^2-24x+28$
19. $y=x^3+6x^2-36x-80$
20. $y=x^3+3x^2-45x-40$
21. $y=4x^3-30x^2+72x-51$
22. $y=x^3-3x^2-9x+6$
23. $y=2x^3-9x^2-60x-57$
24. $y=x^3+12x^2+45x+50$
25. $y=x^3-3x^2-72x+80$
26. $y=4x^3+6x^2-24x-5$
27. $y=x^3-3x^2-24x-15$
28. $y=4x^3-18x^2+24x-11$
29. $y=x^3+9x^2-48x-30$
30. $y=4x^3+30x^2+48x+1$

V. Решение практических заданий по теме «Элементы линейной алгебры»

№1. Найти матрицу $B\cdot\left(B^{T}-3A\right)$, если $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}7 & 4 & 1\\ -1 & -3 & 0\end{bmatrix}$.

Решение.

Выполним следующие действия:

1) $B^{T}=\begin{bmatrix}7 & -1\\ 4 & -3\\ 1 & 0\end{bmatrix}$;

2) $3A=3\cdot\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot 2 & 3\cdot(-1)\\ 3\cdot 1 & 3\cdot 0\\ 3\cdot 3 & 3\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -3\\ 3 & 0\\ 9 & 6\end{bmatrix}$;

3) $B^{T}-3A=\begin{bmatrix}7 & -1\\ 4 & -3\\ 1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & -3\\ 3 & 0\\ 9 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7-6 & -1-(-3)\\ 4-3 & -3-0\\ 1-9 & 0-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\\ -8 & -6\end{bmatrix}$;

4) $B\cdot\left(B^{T}-3A\right)=\begin{bmatrix}7 & 4 & 1\\ -1 & -3 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\\ -8 & -6\end{bmatrix}=$

$$=\begin{bmatrix}7\cdot 1+4\cdot 1+1\cdot(-8) & 7\cdot 2+4\cdot(-3)+1\cdot(-6)\\ (-1)\cdot 1+(-3)\cdot 1+0\cdot(-8) & (-1)\cdot 2+(-3)\cdot(-3)+0\cdot(-6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -4\\ -4 & 7\end{bmatrix}.$$

Ответ: $\begin{bmatrix}3 & -4\\ -4 & 7\end{bmatrix}$.

№2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 3 & -2\end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 3 & -2\end{vmatrix}\overset{1)}{=}\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 5\\ 3 & 2 & -5 & 6\\ 4 & 3 & -5 & 9\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{vmatrix}\overset{2)}{=}a_{41}\cdot A_{41}+a_{42}\cdot A_{42}+a_{43}\cdot A_{43}+a_{44}\cdot A_{44}=a_{42}\cdot A_{42}\overset{3)}{=}$$

$$=1\cdot(-1)^{4+2}\cdot\begin{vmatrix}1&2&5\\3&-5&6\\4&-5&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&5\\3&-5&6\\4&-5&9\end{vmatrix}\overset{4)}{=}\begin{vmatrix}1&2&5\\0&-11&-9\\0&-13&-11\end{vmatrix}\overset{5)}{=}a_{11}\cdot A_{11}+a_{21}\cdot A_{21}+a_{31}\cdot A_{31}=a_{11}\cdot A_{11}\overset{6)}{=}$$

$$=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-11&-9\\-13&-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-11&-9\\-13&-11\end{vmatrix}\overset{7)}{=}(-11)\cdot(-11)-(-9)\cdot(-13)=121-117=4.$$

1) С помощью элементов 2-го столбца получим нули в 4-й строке. Для этого к каждому элементу 3-го столбца прибавим соответствующий элемент 2-го столбца, умноженный на (-3). Затем к каждому элементу 4-го столбца прибавим соответствующий элемент 2-го столбца, умноженный на 2.

2) Разложим полученный определитель по элементам 4-й строки.

3) a_{42} – элемент на пересечении 4-й строки и 2-го столбца, а A_{42} – его алгебраическое дополнение.

4) С помощью элементов 1-й строки получим нули в 1-м столбце. Для этого к каждому элементу 2-й строки прибавим соответствующий элемент 1-й строки, умноженный на (-3); к каждому элементу 3-й строки прибавим соответствующий элемент 1-й строки, умноженный на (-4).

5) Разложим полученный определитель по элементам 1-го столбца.

6) a_{11} – элемент на пересечении 1-й стоки и 1-го столбца, а A_{11} – его алгебраическое дополнение.

7) Полученный определитель 2-го порядка вычисляем следующим образом: из произведения элементов, стоящих на главной диагонали, вычитаем произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

Ответ: 4.

№3. Решить матричное уравнение $\begin{bmatrix}2&1&-2\\0&3&1\\4&2&-5\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}4&2&-2\\7&3&-5\\7&1&-5\end{bmatrix}$.

Решение.

Запишем уравнение в виде $A\cdot X=B$, где

$A=\begin{bmatrix}2&1&-2\\0&3&1\\4&2&-5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4&2&-2\\7&3&-5\\7&1&-5\end{bmatrix}$, а X – квадратная матрица 3-го порядка.

Умножив обе части равенства $A\cdot X=B$ слева на матрицу A^{-1}, получим $X=A^{-1}\cdot B$. Матрицу, обратную к матрице A, найдём по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A:

$$\det A=\begin{vmatrix}2&1&-2\\0&3&1\\4&2&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&-2\\0&3&1\\0&0&-1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}3&1\\0&-1\end{vmatrix}=2\cdot\left(3\cdot(-1)-0\cdot 1\right)=-6.$$

Поскольку определитель отличен от нуля, то матрица, обратная к матрице A – существует.

Найдём алгебраические дополнения матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&1\\2&-5\end{vmatrix}=3\cdot(-5)-2\cdot 1=-17;\; A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&1\\4&-5\end{vmatrix}=-\left(0\cdot(-5)-1\cdot 4\right)=4;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&3\\4&2\end{vmatrix}=0\cdot 2-4\cdot 3=-12;\; A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&-2\\2&-5\end{vmatrix}=-\left(1\cdot(-5)-(-2)\cdot 2\right)=1;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&-2\\4&-5\end{vmatrix}=2\cdot(-5)-4\cdot(-2)=-2;\; A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&1\\4&2\end{vmatrix}=-\left(2\cdot 2-1\cdot 4\right)=0;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&-2\\3&1\end{vmatrix}=1\cdot 1-3\cdot(-2)=7;\; A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&-2\\0&1\end{vmatrix}=-\left(2\cdot 1-0\cdot(-2)\right)=-2;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&1\\0&3\end{vmatrix}=2\cdot 3-0\cdot 1=6.$$

Таким образом, $A^{-1}=\dfrac{1}{-6}\cdot\begin{bmatrix}-17&1&7\\4&-2&-2\\-12&0&6\end{bmatrix}.$

Подставляя A^{-1} и B в равенство $X=A^{-1}\cdot B$, получим:

$$X=\frac{1}{-6}\cdot\begin{bmatrix}-17&1&7\\4&-2&-2\\-12&0&6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&2&-2\\7&3&-5\\7&1&-5\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{-6}\cdot\begin{bmatrix}(-17)\cdot 4+1\cdot 7+7\cdot 7 & (-17)\cdot 2+1\cdot 3+7\cdot 1 & (-17)\cdot(-2)+1\cdot(-5)+7\cdot(-5)\\ 4\cdot 4+(-2)\cdot 7+(-2)\cdot 7 & 4\cdot 2+(-2)\cdot 3+(-2)\cdot 1 & 4\cdot(-2)+(-2)\cdot(-5)+(-2)\cdot(-5)\\ (-12)\cdot 4+0\cdot 7+6\cdot 7 & (-12)\cdot 2+0\cdot 3+6\cdot 1 & (-12)\cdot(-2)+0\cdot(-5)+6\cdot(-5)\end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}-12&-24&-6\\-12&0&12\\-6&-18&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4&1\\2&0&-2\\1&3&1\end{bmatrix}.$$

Ответ: $\begin{bmatrix}2&4&1\\2&0&-2\\1&3&1\end{bmatrix}.$

№4. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x+2y-5z=-5, \\ 4x+3y-5z=-6, \\ x-2y-4z=4. \end{cases}$

Решение.

Рассмотрим основные методы решения систем линейных уравнений:

а) метод обратной матрицы (матричный метод):

Введя обозначения $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$, запишем исходную систему в матричном виде: $A\cdot X=B$, откуда $X=A^{-1}\cdot B$.

Матрицу A^{-1} найдём по формуле $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$.

Вычислим определитель матрицы A:

$$\det A=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix}=\left(3\cdot3\cdot(-4)+2\cdot1\cdot(-5)+4\cdot(-2)\cdot(-5)\right)-\left(1\cdot3\cdot(-5)+\right.$$

$$\left.+3\cdot(-2)\cdot(-5)+4\cdot2\cdot(-4)\right)=-36-10+40-(-15+30-32)=-6+17=11\neq0.$$

Так как $\det A\neq0$, то система имеет единственное решение.

Найдём алгебраические дополнения матрицы A:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}=-22$; $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=11$; $A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-11$;

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}=18$; $A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=-7$; $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=8$;

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=5$; $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}=-5$; $A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=1$.

Таким образом, $A^{-1}=\dfrac{1}{11}\cdot\begin{bmatrix} -22 & 18 & 5 \\ 11 & -7 & -5 \\ -11 & 8 & 1 \end{bmatrix}$.

Подставляя A^{-1} и B в равенство $X=A^{-1}\cdot B$, найдём вектор-столбец неизвестных:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\frac{1}{11}\cdot\begin{bmatrix} -22 & 18 & 5 \\ 11 & -7 & -5 \\ -11 & 8 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}=\frac{1}{11}\cdot\begin{bmatrix} 22 \\ -33 \\ 11 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ откуда } \begin{cases} x=2, \\ y=-3, \\ z=1. \end{cases}$$

б) формулы Крамера:

Поскольку определитель матрицы *A* системы отличен от нуля, то решение системы можно найти по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta};\; y=\frac{\Delta_2}{\Delta};\; z=\frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ – определитель матрицы *A*; а Δ_1, Δ_2, Δ_3 – определители, полученные из Δ заменой 1-го, 2-го, 3-го столбцов столбцом свободных членов соответственно.

Находим определитель системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 2 & -5\\ 4 & 3 & -5\\ 1 & -2 & -4\end{vmatrix}=\left(3\cdot 3\cdot(-4)+2\cdot 1\cdot(-5)+4\cdot(-2)\cdot(-5)\right)-\left(1\cdot 3\cdot(-5)+\right.$$

$$\left.+3\cdot(-2)\cdot(-5)+4\cdot 2\cdot(-4)\right)=-6-(-17)=11\neq 0.$$

Находим вспомогательные определители:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-5 & 2 & -5\\ -6 & 3 & -5\\ 4 & -2 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & -9\\ 0 & 3 & -11\\ 0 & -2 & 0\end{vmatrix}=-1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & -11\\ -2 & 0\end{vmatrix}=22;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3 & -5 & -5\\ 4 & -6 & -5\\ 1 & 4 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -17 & 7\\ 4 & -22 & 11\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-17 & 7\\ -22 & 11\end{vmatrix}=-33;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}3 & 2 & -5\\ 4 & 3 & -6\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 8 & -17\\ 4 & 11 & -22\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}8 & -17\\ 11 & -22\end{vmatrix}=11.$$

По формулам Крамера получаем: $x=\frac{22}{11}=2$; $y=\frac{-33}{11}=-3$; $z=\frac{11}{11}=1$.

в) метод Гаусса:

Расширенная матрица системы имеет вид: $\left[\begin{array}{ccc|c}3 & 2 & -5 & -5\\ 4 & 3 & -5 & -6\\ 1 & -2 & -4 & 4\end{array}\right]$. Поменяем 1-ю и 3-ю строки матрицы местами и приведем полученную матрицу к ступенчатому виду:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -4 & 4\\ 4 & 3 & -5 & -6\\ 3 & 2 & -5 & -5\end{array}\right]\overset{1)}{\vdots}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -4 & 4\\ 0 & 11 & 11 & -22\\ 0 & 8 & 7 & -17\end{array}\right]\overset{2)}{\vdots}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -4 & 4\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 8 & 7 & -17\end{array}\right]\overset{3)}{\vdots}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -4 & 4\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{array}\right].$$

1) К элементам 2-й строки прибавим соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на (–4). Затем к элементам 3-й строки прибавим соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на (–3).

2) Разделим элементы 2-й строки на 11.
3) К элементам 3-й строки прибавим соответствующие элементы 2-й строки, умноженные на (-8).
Последней расширенной матрице соответствует система, равносильная исходной: $\begin{cases} x - 2y - 4z = 4, \\ y + z = -2, \\ -z = -1. \end{cases}$

Из последнего уравнения системы получаем: $z = \dfrac{-1}{-1} = 1$.

Подставив значение z во 2-е уравнение, получим: $y = \dfrac{-2-1}{1} = -3$.

Из 1-го уравнения системы находим: $x = 4 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) = 2$.

Ответ: $(2;-3;1)$.

№5. Решить систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 2x - y - 7z = 0, \\ -5x - 2y + 4z = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Решение.
Поменяем в расширенной матрице $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -7 & 0 \\ -5 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ системы 1-ю и 3-ю строки местами и приведём полученную матрицу к ступенчатому виду:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -7 & 0 \end{array}\right] \overset{1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 0 \end{array}\right] \overset{2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

1) Прибавим к элементам 2-й строки соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на 5, а к элементам 3-й строки – соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на (-2).
2) Прибавим к элементам 3-й строки соответствующие элементы 2-й строки, умноженные на 1.

Получим систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 3y + 9z = 0, \end{cases}$ равносильную исходной. Пусть переменные x и y – базисные, а $z = t$ $(t \in \text{Ў})$ – свободная. Из последнего уравнения системы получим: $y = \dfrac{-9t}{3} = -3t$. Подставив найденное значение в первое уравнение, получим: $x = -t + 3t = 2t$.

Ответ: $\{(2t, -3t, t),\ t \in \text{Ў}\}$.

№6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение: $\det(A - \lambda E) = 0$:

Поскольку $A - \lambda E = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-\lambda & -1 \\ 3 & 5-\lambda \end{bmatrix}$, то характеристическое уравнение примет вид: $\begin{vmatrix} 9-\lambda & -1 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 14\lambda + 48 = 0$.

Корни последнего уравнения $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 8$ являются собственными значениями матрицы A.

Для определения собственных векторов матрицы A запишем матричное равенство $(A - \lambda E) \cdot X = O$ в виде системы: $\begin{cases} (9-\lambda) \cdot x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_1 + (5-\lambda) \cdot x_2 = 0. \end{cases}$ **(*)**

Найдём собственный вектор X_1, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 6$, для чего вместо λ подставим в систему (*) λ_1:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow 3x_1 - x_2 = 0.$$

Пусть переменная x_2 – базисная, а $x_1 = u$ $(u \in R \setminus \{0\})$ – свободная. Тогда $x_2 = 3u$. Значит, собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению $\lambda_1 = 6$, будет вектор $X_1 = \begin{bmatrix} u \\ 3u \end{bmatrix}$, $u \in$ Ў $\setminus \{0\}$.

Найдём собственный вектор X_2, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 8$, для чего вместо λ подставим в систему (*) λ_2:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0.$$

Пусть переменная x_2 – базисная, а $x_1 = v$ $(v \in R \setminus \{0\})$ – свободная. Тогда $x_2 = v$. Значит, собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению $\lambda_2 = 8$, будет вектор $X_2 = \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}$, $v \in$ Ў $\setminus \{0\}$.

Ответ: $\lambda_1 = 6$, $X_1 = \begin{bmatrix} u \\ 3u \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 8$, $X_2 = \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}$, $u, v \in$ Ў $\setminus \{0\}$.

VI. Практические задания по теме «Основы аналитической геометрии»

№1. Вычислить $\left(2\vec{a}-4\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)$, если

а) $\vec{a}=(2;-2;5)$, $\vec{b}=(-1;1;2)$;

б) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=1$, $\cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}})=\dfrac{\pi}{3}$.

***Решение*.**

а) Выполним следующие действия:

1) $2\vec{a}-4\vec{b}=2\cdot(2;-2;5)-4\cdot(-1;1;2)=(4;-4;10)-(-4;4;8)=(8;-8;2)$;

2) $\vec{a}+3\vec{b}=(2;-2;5)+3\cdot(-1;1;2)=(2;-2;5)+(-3;3;6)=(-1;1;11)$;

3) $\left(2\vec{a}-4\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)=(8;-8;2)\cdot(-1;1;11)=8\cdot(-1)+(-8)\cdot1+2\cdot11=6$.

б) Упростим выражение:

$\left(2\vec{a}-4\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)=2\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot3\vec{b}-4\vec{b}\cdot\vec{a}-4\vec{b}\cdot3\vec{b}=2\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\vec{b}-12\vec{b}^{\,2}$.

Далее выполним по действиям:

1) $\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2=16$;

2) $\vec{b}^{\,2}=|\vec{b}|^2=1$;

3) $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}})=4\cdot1\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=2$;

4) $2\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\vec{b}-12\vec{b}^{\,2}=2\cdot16+2\cdot2-12\cdot1=32+4-12=24$.

***Ответ*:** а) 6; б) 24.

№2. Найти длину вектора $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(-3\vec{a}-2\vec{b}\right)$, если:

а) $\vec{a}=(2;-1;4)$, $\vec{b}=(-5;3;-5)$;

б) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\sin(\widehat{\vec{a};\vec{b}})=\dfrac{\pi}{6}$.

***Решение*.**

а) Выполним следующие действия:

1) $2\vec{a}+\vec{b}=2\cdot(2;-1;4)+(-5;3;-5)=(4;-2;8)+(-5;3;-5)=(-1;1;3)$;

2) $-3\vec{a}-2\vec{b}=-3\cdot(2;-1;4)-2\cdot(-5;3;-5)=(-6;3;-12)+(10;-6;10)=(4;-3;-2)$;

3) $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(-3\vec{a}-2\vec{b}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 3\\ 4 & -3 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -3 & -2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 4 & -2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 4 & -3\end{vmatrix}=(7;10;-1)$.

Найдём длину вектора: $\left|\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(-3\vec{a}-2\vec{b}\right)\right|=\sqrt{7^2+10^2+(-1)^2}=\sqrt{150}$.

б) Упростим выражение:

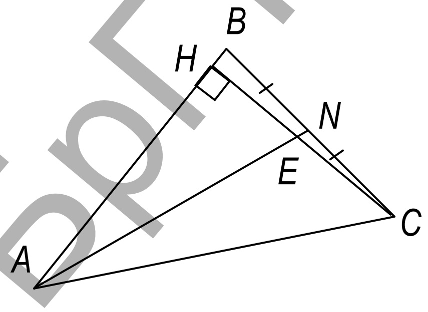
$$\left|\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(-3\vec{a}-2\vec{b}\right)\right| = \left|2\vec{a}\times -3\vec{a} + 2\vec{a}\times -2\vec{b} + \vec{b}\times -3\vec{a} + \vec{b}\times -2\vec{b}\right| =$$

$$= \left|-4\vec{a}\times\vec{b} - 3\vec{b}\times\vec{a}\right| = \left|-4\vec{a}\times\vec{b} + 3\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|-\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = 3.$$

Ответ: а) $\sqrt{150}$; б) 3.

№3. В треугольнике ABC найти точку пересечения медианы AN и высоты CH, если $A(2;1)$, $B(7;-6)$, $C(-5;-4)$.



Решение.

Координаты середины N отрезка BC равны полусуммам координат концов отрезка:

$$x_N = \frac{7+(-5)}{2} = 1,\ y_N = \frac{-6+(-4)}{2} = -5.$$

Составим уравнение медианы AN по формуле $\dfrac{x-x_A}{x_N-x_A} = \dfrac{y-y_A}{y_N-y_A}$, где $(x_A;y_A)$ и $(x_N;y_N)$ – координаты точек A и N соответственно:

$$\frac{x-2}{1-2} = \frac{y-1}{-5-1} \Leftrightarrow \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-6} \Leftrightarrow 6x - y - 11 = 0.$$

Составим аналогичным образом уравнение стороны AB:

$$\frac{x-2}{7-2} = \frac{y-1}{-6-1} \Leftrightarrow \frac{x-2}{5} = \frac{y-1}{-7} \Leftrightarrow -7x - 5y + 19 = 0.$$

Представив последнее уравнение в виде $y = \dfrac{-7}{5}x - \dfrac{19}{5}$, получим угловой коэффициент прямой AB: $k_{AB} = -\dfrac{7}{5}$.

Так как $AB \perp CH$, то $k_{AB}\cdot k_{CH} = -1$, откуда $k_{CH} = \dfrac{5}{7}$.

Уравнение высоты CH найдём по формуле $y - y_C = k_{CH}\cdot(x - x_C)$:

$$y-(-4) = \frac{5}{7}\cdot\left(x-(-5)\right) \Leftrightarrow y + 4 = \frac{5}{7}\cdot(x+5) \Leftrightarrow 5x - 7y - 3 = 0.$$

Найдём точку пересечения медианы AN и высоты CH, для чего составим систему из уравнений этих линий:

$$\begin{cases}6x - y - 11 = 0\\ 5x - 7y - 3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-42x + 7y + 77 = 0\\ 5x - 7y - 3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-37x + 74 = 0\\ y = 6x - 11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 2\\ y = 1\end{cases}$$

Таким образом, медиана AN и высота CH пересекаются в точке $E(2;1)$.

Ответ: $(2;1)$.

№4. Установить какая линия определяется уравнением $4x^2+9y^2-32x+54y+109=0$. Построить линию.

Решение.

Сгруппируем слагаемые в левой части равенства:

$4\cdot\left(x^2-8x\right)+9\cdot\left(y^2+6y\right)+109=0$;

Выделим полные квадраты в выражениях в скобках:

$4\cdot\left(\left(x-4\right)^2-16\right)+9\cdot\left(\left(y+3\right)^2-9\right)+109=0$;

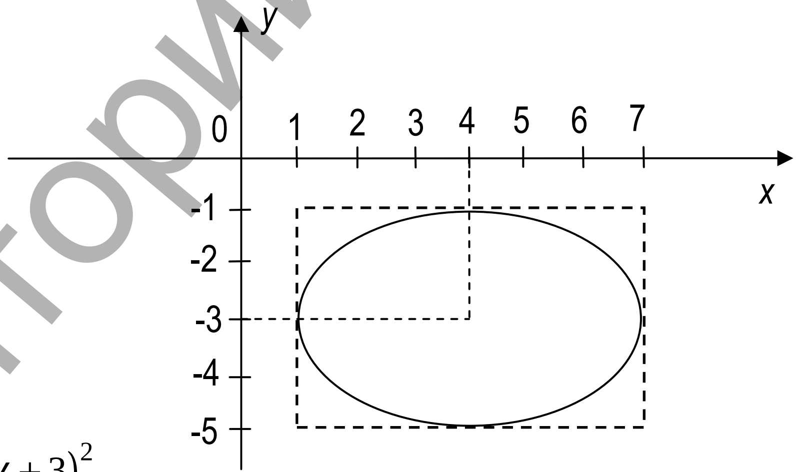
$4\cdot\left(x-4\right)^2-64+9\cdot\left(y+3\right)^2-81+109=0$;

$4\cdot\left(x-4\right)^2+9\cdot\left(y+3\right)^2=36$.

Разделим обе части равенства на 36: $\dfrac{\left(x-4\right)^2}{3^2}+\dfrac{\left(y+3\right)^2}{2^2}=1$.

Последнее уравнение определяет эллипс с центром в точке $\left(4;-3\right)$, большая полуось которого $a=3$, а малая – $b=2$. Вершины эллипса находятся в точках $\left(1;-3\right)$, $\left(7;-3\right)$, $\left(4;-5\right)$, $\left(4;-1\right)$

Выполним чертеж:



Ответ: эллипс $\dfrac{\left(x-4\right)^2}{3^2}+\dfrac{\left(y+3\right)^2}{2^2}=1$.

№5. Найти длину высоты пирамиды *ABCD*, опущенной из вершины *D*, если $A(3;4;-2)$, $B(2;3;-4)$, $C(6;5;-1)$, $D(-2;1;-4)$.

Решение.

Найдём уравнение плоскости *ABC* по формуле $\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix}=0$,

где $\left(x_A;y_A;z_A\right)$, $\left(x_B;y_B;z_B\right)$, $\left(x_C;y_C;z_C\right)$ – координаты точек *A*, *B* и *C* соответственно:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+2 \\ 2-3 & 3-4 & -4+2 \\ 6-3 & 5-4 & -1+2 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель в левой части равенства, разложив его по элементам 1-й строки:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-3)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (y-4)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (z+2)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-3)\cdot 1 - (y-4)\cdot 5 + (z+2)\cdot 2 = x - 5y + 2z + 21.$$

Таким образом, уравнение плоскости ABC запишется в следующем виде: $x - 5y + 2z + 21 = 0$.

Длина высоты пирамиды $ABCD$, опущенной из вершины D равна расстоянию от точки D до плоскости ABC.

Поскольку расстояние от точки $(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости с уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, то искомое расстояние $d = \dfrac{|-2 - 5\cdot 1 + 2\cdot(-4) + 21|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2 + 2^2}} = \dfrac{|-2-5-8+21|}{\sqrt{1+25+4}} = \dfrac{6}{\sqrt{30}}$.

Ответ: $\dfrac{6}{\sqrt{30}}$.

№6. Установить взаимное расположение прямой l и плоскости β. В случае их пересечения найти координаты точки пересечения.

а) $l: \dfrac{x-3}{-3} = \dfrac{y-4}{6} = \dfrac{z+6}{4}$; $\beta: 4x + 5y + z - 4 = 0$;

б) $l: \begin{cases} 5x + 5y + 4z - 5 = 0, \\ 2x + 3y + z + 4 = 0; \end{cases}$ $\beta: x - y + 2z - 7 = 0$;

в) $l: \begin{cases} x = 4t + 5, \\ y = -5t - 4, \\ z = 2t + 1; \end{cases}$ $\beta: \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{-3} + \dfrac{z}{-6/7} = 1$.

Решение.

а) Запишем уравнение прямой l в параметрическом виде, приравнивая каждую из дробей в выражении $\dfrac{x-3}{-3} = \dfrac{y-4}{6} = \dfrac{z+6}{4}$ к t и выражая x, y, z:

$\begin{cases} x = 3 - 3t, \\ y = 4 + 6t, \\ z = -6 + 4t. \end{cases}$ Выражения для x, y, z подставим в уравнение плоскости β:

$4\cdot(3-3t)+5\cdot(4+6t)+(-6+4t)-4=0 \;\Leftrightarrow\; 22t+22=0 \;\Leftrightarrow\; t=-1.$

Так как уравнение имеет единственное решение, то прямая пересекает плоскость. Для нахождения координат точки пересечения подставим полученное значение t в параметрические уравнения прямой:

$\begin{cases} x=3-3\cdot(-1)=6,\\ y=4+6\cdot(-1)=-2,\\ z=-6+4\cdot(-1)=-10.\end{cases}$ Таким образом, прямая l пересекает плоскость β в точке с координатами $(6;-2;-10)$.

б) Чтобы записать уравнение прямой l в параметрическом виде, сначала найдём точку, которая принадлежит этой прямой. Для этого достаточно найти какое-нибудь частное решение системы $\begin{cases} 5x+5y+4z-5=0,\\ 2x+3y+z+4=0.\end{cases}$

При $x=0$ $\begin{cases} 5y+4z-5=0\\ 3y+z+4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y+4z-5=0\\ -12y-4z-16=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7y-21=0\\ 4z=5-5y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3\\ z=5\end{cases}$

Получили точку $M(0;-3;5)\in l$.

Направляющий вектор прямой l получим как векторное произведение нормальных векторов $\vec{n}_1=(5;5;4)$, $\vec{n}_2=(2;3;1)$ плоскостей, определяющих эту прямую: $\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 5 & 4\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}5 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}5 & 4\\ 2 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}5 & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-7\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$, или

$\vec{a}=(-7;3;5)$. Уравнение прямой l в параметрическом виде: $\begin{cases} x=0-7t,\\ y=-3+3t,\\ z=5+5t.\end{cases}$

Выражения для x, y, z подставим в уравнение плоскости β:

$-7t-(-3+3t)+2\cdot(5+5t)-7=0 \;\Leftrightarrow\; 0\cdot t+6=0$. Поскольку последнее равенство невозможно, то прямая не пересекает плоскость, то есть $l \parallel \beta$.

в) Подставим выражения для x, y, z из параметрических уравнений прямой l в общее уравнение $x-2y-7z-6=0$ плоскости β:

$(4t+5)-2\cdot(-5t-4)-7\cdot(2t+1)-6=0 \;\Leftrightarrow 0\cdot t=0.$

Так как последнему равенству удовлетворяют все действительные числа, то все точки прямой принадлежат плоскости, то есть $l\subset\beta$.

Ответ: а) прямая пересекает плоскость в точке $(6;-2;-10)$;

б) прямая параллельна плоскости;

в) прямая лежит в плоскости.

VI. Решение практических заданий по теме «Введение в математический анализ.»

№1. Найти предел последовательности $x_n = \dfrac{4n^7 - 3n^5 + 2}{n^6 - 5n^9 - n}$.

Решение.

При $n \to \infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, то есть мы имеем неопределённость вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^7 - 3n^5 + 2}{n^6 - 5n^9 - n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^9\left(\dfrac{4}{n^2} - \dfrac{3}{n^4} + \dfrac{2}{n^9}\right)}{n^9\left(\dfrac{1}{n^3} - 5 - \dfrac{1}{n^8}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4}{n^2} - \dfrac{3}{n^4} + \dfrac{2}{n^9}}{\dfrac{1}{n^3} - 5 - \dfrac{1}{n^8}} = \frac{0}{-5} = 0,$$ так как выражения $\dfrac{4}{n^2}, \dfrac{3}{n^4}, \dfrac{2}{n^9}, \dfrac{1}{n^3}, \dfrac{1}{n^8}$ стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Ответ: 0.

№2. Найти $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2 - 5x - 24}{2x^2 + 3x - 9}$, не используя правила Лопиталя.

Решение.

При $x \to -3$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то есть мы имеем неопределённость вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

Квадратный трехчлен $x^2 - 5x - 24$ имеет нули (-3) и 8. Значит, $x^2 - 5x - 24 = (x - (-3))(x - 8) = (x+3)(x-8)$.

Квадратный трехчлен $2x^2 + 3x - 9$ имеет нули (-3) и $1{,}5$. Значит, $2x^2 + 3x - 9 = 2(x - (-3))(x - 1{,}5) = (x+3)(2x-3)$.

Тогда $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2 - 5x - 24}{2x^2 + 3x - 9} = \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(x-8)}{(x+3)(2x-3)} = \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x-8}{2x-3} = \dfrac{-3-8}{2\cdot(-3)-3} = \dfrac{11}{9}$.

Ответ: $\dfrac{11}{9}$.

№3. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{5+x} - 3}{2 - \sqrt{3x-8}}$.

Решение.

При $x \to 4$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то есть мы имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для раскрытия этой неопределённости умножим числитель и знаменатель на выражения, сопряжённые числителю и знаменателю дроби:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{5+x}-3}{2-\sqrt{3x-8}}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{5+x}-3\right)\left(\sqrt{5+x}+3\right)\left(2+\sqrt{3x-8}\right)}{\left(2-\sqrt{3x-8}\right)\left(2+\sqrt{3x-8}\right)\left(\sqrt{5+x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\left(\sqrt{5+x}\right)^2-3^2\right)\left(2+\sqrt{3x-8}\right)}{\left(2^2-\left(\sqrt{3x-8}\right)^2\right)\left(\sqrt{5+x}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(2+\sqrt{3x-8}\right)}{(12-3x)\left(\sqrt{5+x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2+\sqrt{3x-8}}{-3\cdot\left(\sqrt{5+x}+3\right)}=\frac{2+\sqrt{3\cdot 4-8}}{-3\cdot\left(\sqrt{5+4}+3\right)}=-\frac{2}{9}.$$

Ответ: $-\frac{2}{9}$.

№4. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+7}{4x+3}\right)^{8x-2}$.

Решение.

При $x\to+\infty$ получаем неопределённость вида $\left[1^{\infty}\right]$, для раскрытия которой воспользуемся II замечательным пределом $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\text{e}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+7}{4x+3}\right)^{8x-2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\left(\frac{4x+7}{4x+3}-1\right)\right)^{8x-2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{4x+3}\right)^{8x-2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{4x+3}{4}\right)}\right)^{8x-2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{4x+3}{4}\right)}\right)^{\frac{4x+3}{4}\cdot\frac{4}{4x+3}\cdot(8x-2)}=$$

$$=\text{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{4x+3}\cdot(8x-2)}=\text{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{32x-8}{4x+3}}=\text{e}^{\frac{32}{4}}=\text{e}^{8}.$$

Ответ: e^8.

№5. Найти следующие пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции: а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 5x-\cos^2 3x}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\lg\left(1+\text{tg}(x+4)\right)}{x^3+64}$.

Решение.

а) При $x \to 0$ получаем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для раскрытия этой неопределённости используем эквивалентные бесконечно малые функции. Сначала преобразуем выражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 5x-\cos^2 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 5x-\cos 3x)\cdot(\cos 5x+\cos 3x)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{5x-3x}{2}\sin\frac{5x+3x}{2}\cdot(\cos 5x+\cos 3x)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x\sin 4x(\cos 5x+\cos 3x)}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}\lim_{x\to 0}(\cos 5x+\cos 3x)=$$

$=\begin{bmatrix}\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x\\ \sin 4x \underset{x\to 0}{\sim} 4x\end{bmatrix}=-2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{x}\cdot 2=-2\cdot 1\cdot 4\cdot 2=-16$, поскольку функции $\cos 5x$ и $\cos 3x$ стремятся к единице при $x\to 0$.

б) При $x\to -4$ также получаем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\lim_{x\to -4}\frac{\lg\left(1+\operatorname{tg}(x+4)\right)}{x^3+64}=\left[\log_{10}\left(1+\operatorname{tg}(x+4)\right)\underset{x\to -4}{\sim}\frac{\operatorname{tg}(x+4)}{\ln 10}\right]=\lim_{x\to -4}\frac{\left(\frac{\operatorname{tg}(x+4)}{\ln 10}\right)}{x^3+64}=$$

$$=\lim_{x\to -4}\frac{\operatorname{tg}(x+4)}{(x+4)\left(x^2-4x+16\right)\cdot\ln 10}=\left[\operatorname{tg}(x+4)\underset{x\to -4}{\sim}x+4\right]=$$

$$=\lim_{x\to -4}\frac{x+4}{(x+4)\left(x^2-4x+16\right)\cdot\ln 10}=\lim_{x\to -4}\frac{1}{\left(x^2-4x+16\right)\cdot\ln 10}=\frac{1}{48\ln 10}.$$

Ответ: а) -16; б) $\frac{1}{48\ln 10}$.

№6. Исследовать функцию $f(x)=\begin{cases}2x+5, & x\le -2\\ x^2-7, & -2<x\le 3\\ 2, & x>3\end{cases}$ на непрерывность и построить её график.

Решение.

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty;-2)$, $(-2;3)$, $(3;+\infty)$, где она задана непрерывными элементарными функциями (линейными и квадратичной). Следовательно, разрыв возможен только в точках $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$.

Исследуем функцию $f(x)$ на непрерывность в точке $x_1 = -2$:

$f(-2-0) = \lim\limits_{x \to -2-0} f(x) = \lim\limits_{x \to -2-0} (2x+5) = 1$,

$f(-2+0) = \lim\limits_{x \to -2+0} f(x) = \lim\limits_{x \to -2+0} \left(x^2 - 7\right) = -3$,

$f(-2) = (2x+5)\big|_{x=-2} = 1$.

Так как односторонние пределы $\lim\limits_{x \to -2-0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -2+0} f(x)$ не равны, но оба существуют и конечны, то функция $f(x)$ в точке $x_1 = -2$ имеет разрыв первого рода со скачком $h = |1-(-3)| = 1+3 = 4$.

Исследуем функцию $f(x)$ на непрерывность в точке $x_2 = 3$:

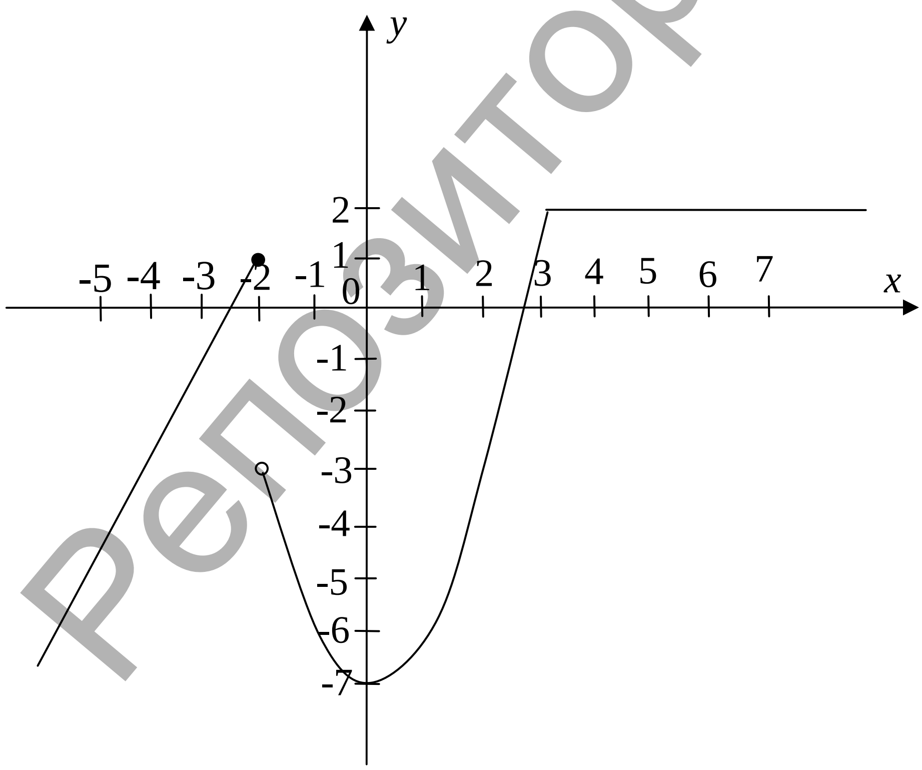
$f(3-0) = \lim\limits_{x \to 3-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 3-0} \left(x^2 - 7\right) = 2$,

$f(3+0) = \lim\limits_{x \to 3+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 3+0} 2 = 2$,

$f(3) = 2\big|_{x=3} = 2$.

Так как $f(3-0) = f(3+0) = f(3)$, то функция $f(x)$ в точке $x_2 = 3$ является непрерывной.

Построим график функции $f(x)$:



Ответ: Функция непрерывна на промежутках $(-\infty;-2]$, $(-2;+\infty)$ и в точке (-2) терпит разрыв 1-го рода со скачком, равным 4.

VII. Практические задания по теме «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

№1. Найти производную функции $y=\dfrac{6}{\sqrt[5]{x^3}}-7x^6+\dfrac{3}{5x^4}-8$.

Решение.

$$y'=\left(6x^{-\frac{3}{5}}-7x^6+\frac{3}{5}x^{-4}-8\right)'=6\cdot\left(x^{-\frac{3}{5}}\right)'-7\cdot\left(x^6\right)'+\frac{3}{5}\cdot\left(x^{-4}\right)'-(8)'=$$

$$=6\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot x^{-\frac{3}{5}-1}-7\cdot 6\cdot x^{6-1}+\frac{3}{5}\cdot(-4)\cdot x^{-4-1}-0=-\frac{18}{5}x^{-\frac{8}{5}}-42x^5-\frac{12}{5}x^{-5}=$$

$$=-\frac{18}{5\sqrt[5]{x^8}}-42x^5-\frac{12}{5x^5}.$$

Ответ: $-\dfrac{18}{5\sqrt[5]{x^8}}-42x^5-\dfrac{12}{5x^5}$.

№2. Найти производную функции:

а) $y=\arcsin^5\left(1-3x^2\right)\cdot\log_5\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)$;

б) $y=\dfrac{\cos^3\left(2^{3x-1}\right)}{e^{2x-5x^4+2}}$.

Решение.

а) $$y'=\left(\left(\arcsin\left(1-3x^2\right)\right)^5\cdot\log_5\left(\operatorname{tg}x^{\frac{1}{2}}\right)\right)'=\left(\left(\arcsin\left(1-3x^2\right)\right)^5\right)'\cdot\log_5\left(\operatorname{tg}x^{\frac{1}{2}}\right)+$$

$$+\left(\arcsin\left(1-3x^2\right)\right)^5\cdot\left(\log_5\left(\operatorname{tg}x^{\frac{1}{2}}\right)\right)'=5\left(\arcsin\left(1-3x^2\right)\right)^4\cdot\left(\arcsin\left(1-3x^2\right)\right)'\cdot$$

$$\cdot\log_5\left(\operatorname{tg}x^{\frac{1}{2}}\right)+\left(\arcsin\left(1-3x^2\right)\right)^5\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}x^{\frac{1}{2}}\cdot\ln 5}\cdot\left(\operatorname{tg}x^{\frac{1}{2}}\right)'=5\left(\arcsin\left(1-3x^2\right)\right)^4\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(1-3x^2\right)^2}}\cdot\left(1-3x^2\right)'\cdot\log_5\left(\operatorname{tg}x^{\frac{1}{2}}\right)+\left(\arcsin\left(1-3x^2\right)\right)^5\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}x^{\frac{1}{2}}\cdot\ln 5}\cdot\frac{1}{\cos^2 x^{\frac{1}{2}}}\cdot$$

$$\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = 5\left(\arcsin\left(1-3x^2\right)\right)^4\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(1-3x^2\right)^2}}\cdot(-6x)\cdot\log_5\left(\mathrm{tg}\,x^{\frac{1}{2}}\right)+\left(\arcsin\left(1-3x^2\right)\right)^5\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}\,x^{\frac{1}{2}}\cdot\ln 5}\cdot\frac{1}{\cos^2 x^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{30\cdot\arcsin^4\left(1-3x^2\right)\cdot\log_5\left(\mathrm{tg}\sqrt{x}\right)}{\sqrt{6-9x^2}}+\frac{\arcsin^5\left(1-3x^2\right)}{\ln 5\cdot\sqrt{x}\cdot\sin\left(2\sqrt{x}\right)}.$$

б) $$y' = \left(\frac{\cos^3\left(2^{3x-1}\right)}{e^{2x-5x^4+2}}\right)' = \frac{\left(\cos^3\left(2^{3x-1}\right)\right)'\cdot e^{2x-5x^4+2}-\cos^3\left(2^{3x-1}\right)\cdot\left(e^{2x-5x^4+2}\right)'}{\left(e^{2x-5x^4+2}\right)^2} =$$

$$= \frac{3\cos^2\left(2^{3x-1}\right)\cdot\left(\cos\left(2^{3x-1}\right)\right)'\cdot e^{2x-5x^4+2}-\cos^3\left(2^{3x-1}\right)\cdot e^{2x-5x^4+2}\cdot\left(2x-5x^4+2\right)'}{\left(e^{2x-5x^4+2}\right)^2} =$$

$$= \frac{3\cos^2\left(2^{3x-1}\right)\cdot\left(-\sin\left(2^{3x-1}\right)\right)\left(2^{3x-1}\right)'-\cos^3\left(2^{3x-1}\right)\cdot\left(2-20x^3\right)}{e^{2x-5x^4+2}} =$$

$$= \frac{3\cos^2\left(2^{3x-1}\right)\cdot\left(-\sin\left(2^{3x-1}\right)\right)2^{3x-1}\cdot\ln 2\cdot 3-\cos^3\left(2^{3x-1}\right)\cdot\left(2-20x^3\right)}{e^{2x-5x^4+2}}.$$

Ответ: а) $\dfrac{\arcsin^5\left(1-3x^2\right)}{\ln 5\cdot\sqrt{x}\cdot\sin\left(2\sqrt{x}\right)}-\dfrac{30\cdot\arcsin^4\left(1-3x^2\right)\cdot\log_5\left(\mathrm{tg}\sqrt{x}\right)}{\sqrt{6-9x^2}}$;

б) $\dfrac{-9\ln 2\cdot\cos^2\left(2^{3x-1}\right)\cdot\sin\left(2^{3x-1}\right)\cdot 2^{3x-1}-\cos^2\left(2^{3x-1}\right)\cdot\left(2-20x^3\right)}{e^{2x-5x^4+2}}$.

№3. Найти производные первого и второго порядков функции $y = y(x)$:

а) $y^2 - x = \mathrm{arctg}\,y$;

б) $\begin{cases} x = t^4, \\ y = 2t^8 - 3t^5. \end{cases}$

Решение.

а) Равенство $y^2 - x = \mathrm{arctg}\,y$ определяет функцию y, заданную неявно. Продифференцируем обе части этого равенства по x, считая y функцией от x: $\left(y(x)\right)^2 - x = \mathrm{arctg}\,y(x)$:

$$2y(x)y'(x)-1=\frac{1}{1+\left(y(x)\right)^2}y'(x) \;\Leftrightarrow\; y'(x)\cdot\left(2y(x)-\frac{1}{1+\left(y(x)\right)^2}\right)=1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; y'(x)=\frac{1}{2y(x)-\frac{1}{1+\left(y(x)\right)^2}} \;\Leftrightarrow\; y'=\frac{y^2+1}{2y^3+2y-1}.$$

Продифференцируем обе части последнего равенства по x:

$$y''(x)=\left(\frac{\left(y(x)\right)^2+1}{2\left(y(x)\right)^3+2y(x)-1}\right)'=$$

$$=\frac{\left(\left(y(x)\right)^2+1\right)'\left(2\left(y(x)\right)^3+2y(x)-1\right)-\left(\left(y(x)\right)^2+1\right)\left(2\left(y(x)\right)^3+2y(x)-1\right)'}{\left(2\left(y(x)\right)^3+2y(x)-1\right)^2}=$$

$$=\frac{2y(x)y'(x)\left(2\left(y(x)\right)^3+2y(x)-1\right)-\left(\left(y(x)\right)^2+1\right)\left(6\left(y(x)\right)^2y'(x)+2y'(x)\right)}{\left(2\left(y(x)\right)^3+2y(x)-1\right)^2}=$$

$$=y'(x)\cdot\frac{2y(x)\left(2\left(y(x)\right)^3+2y(x)-1\right)-\left(\left(y(x)\right)^2+1\right)\left(6\left(y(x)\right)^2+2\right)}{\left(2\left(y(x)\right)^3+2y(x)-1\right)^2}=$$

$$=y'(x)\cdot\frac{-2\left(y(x)\right)^4-4\left(y(x)\right)^2-2y(x)-2}{\left(2\left(y(x)\right)^3+2y(x)-1\right)^2}=-2y'\cdot\frac{y^4+2y^2+y+1}{\left(2y^3+2y-1\right)^2}.$$

Подставим в последнее выражение $y'=\dfrac{y^2+1}{2y^3+2y-1}$:

$$y''=-2\cdot\frac{y^2+1}{2y^3+2y-1}\cdot\frac{y^4+2y^2+y+1}{\left(2y^3+2y-1\right)^2}=-\frac{2y^6+6y^4+2y^3+6y^2+2y+2}{\left(2y^3+2y-1\right)^3}.$$

б) Равенства $\begin{cases}x=t^4\\ y=2t^8-4t^5\end{cases}$ определяют параметрически заданную функцию, для которой справедливы равенства $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$, $y''_x=\dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$. Имеем:

$x'_t=\left(t^4\right)'=4t^3$; $y'=\left(2t^8-4t^5\right)'=16t^7-20t^4$.

Значит, $y'_x = \dfrac{16t^7 - 20t^4}{4t^3} = 4t^4 - 5t$.

Далее, $\left(y''_x\right)'_t = \left(4t^4 - 5t\right)' = 16t^3 - 5$, откуда $y''_x = \dfrac{16t^3 - 5}{4t^3} = 4 - \dfrac{5}{4t^3}$.

Ответ: а) $y' = \dfrac{y^2 + 1}{2y^3 + 2y - 1}$, $y'' = -\dfrac{2y^6 + 6y^4 + 2y^3 + 6y^2 + 2y + 2}{\left(2y^3 + 2y - 1\right)^3}$;

б) $y'_x = 4t^4 - 5t$; $y''_x = 4 - \dfrac{5}{4t^3}$.

№4. Вычислить $\sqrt[3]{27{,}15}$ приближённо с помощью дифференциала (результат записать с тремя знаками после запятой).

Решение.

Представим данную величину в виде $\sqrt[3]{27{,}15} = \sqrt[3]{27 + 0{,}15}$ и введём в рассмотрение функцию $y = \sqrt[3]{x}$, где $x = x_0 + \mathrm{V}x$; $x_0 = 27$; $\mathrm{V}x = 0{,}15$.

Воспользуемся формулой $y\left(x_0 + \mathrm{V}x\right) \approx y\left(x_0\right) + y'\left(x_0\right) \cdot \mathrm{V}x$.

Получим: $y\left(x_0\right) = \sqrt[3]{27} = 3$, $y' = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $y'\left(x_0\right) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \dfrac{1}{27}$.

Вычисляем: $\sqrt[3]{27{,}15} \approx 3 + \dfrac{1}{27} \cdot 0{,}15 = 3 + \dfrac{1}{27} \cdot \dfrac{15}{100} = 3 + \dfrac{1}{180} \approx 3 + 0{,}0056 \approx 3{,}006$.

Ответ: 3,006.

№5. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$ с помощью правила Лопиталя.

Решение.

При $x \to 0$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то есть мы имеем неопределённость вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Следовательно, можно применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\left(x\cos x - \sin x\right)'}{\left(x^3\right)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x\sin x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\left(-\sin x\right)'}{\left(3x\right)'} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{3} = \frac{-1}{3}.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{3}$.

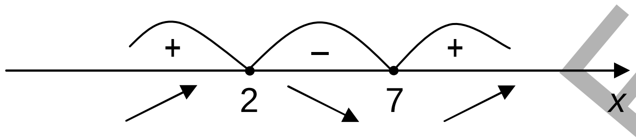
№6. Найти промежутки возрастания и убывания, точки максимума и минимума, максимум и минимум функции $y = 4x^3 - 54x^2 + 168x - 30$, промежутки вогнутости, выпуклости, точки перегиба ее графика.

***Решение*.**

Функция $y = 4x^3 - 54x^2 + 168x + 30$ определена на всей числовой прямой. Найдём критические точки этой функции:

$$y' = 0 \;\Leftrightarrow\; 12x^2 - 108x + 168 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 9x + 14 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 7. \end{array}\right.$$

Критические точки разбивают область определения функции y на промежутки $(-\infty;2)$, $(2;7)$, $(7;+\infty)$. Определим знак производной y' на каждом из этих промежутков:



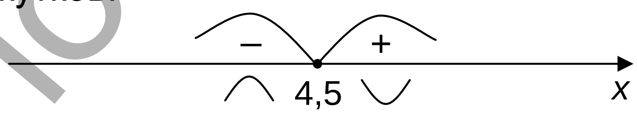
Таким образом, функция y возрастает на промежутках $(-\infty;2)$ и $(7;+\infty)$ и убывает на промежутке $(2;7)$. При этом точка $x = 2$ является точкой максимума функции, а точка $x = 7$ – ее точкой минимума.
Находим максимум и минимум функции:

$$y_{\max} = y(2) = 4\cdot 2^3 - 54\cdot 2^2 + 168\cdot 2 - 30 = 32 - 216 + 336 - 30 = 122,$$

$$y_{\min}(7) = 4\cdot 7^3 - 54\cdot 7^2 + 168\cdot 7 - 30 = 1372 - 2646 + 1176 - 30 = -128.$$

Для определения промежутков выпуклости и вогнутости графика функции находим вторую производную и приравниваем её к нулю:
$y'' = 0 \;\Leftrightarrow\; 24x - 108 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 4{,}5$.

Точка $x = 4{,}5$ разбивает область определения функции на промежутки $(-\infty;4{,}5)$ и $(4{,}5;+\infty)$. Определим знак второй производной y'' на каждом их этих промежутков:



Таким образом, график функции y является выпуклым на промежутке $(-\infty;4{,}5)$ и вогнутым на промежутке $(4{,}5;+\infty)$.

Так как $y(4{,}5) = 4\cdot(4{,}5)^3 - 54\cdot(4{,}5)^2 + 168\cdot 4{,}5 - 30 = -3$, то точка $(4{,}5;-3)$ является точкой перегиба графика функции.

Ответ: $(-\infty;2)$ и $(7;+\infty)$ – промежутки возрастания, $(2;7)$ – промежуток убывания; $y_{\max} = y(2) = 122$, $y_{\min} = y(7) = -128$; $(-\infty;4{,}5)$ – промежуток выпуклости, $(4{,}5;+\infty)$ – промежуток вогнутости; точка перегиба: $(4{,}5;-3)$.

Литература

1. Бугров, Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. − М.: Наука, 1988. − 224 с.

2. Бугров, Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. − М.: Наука, 1984. − 432 с.

3. Герасимович, А.И. Математический анализ: Справочное пособие в 2-х частях / А.И. Герасимович и др. − Мн.: Выш. шк., 1990. − 272 с.

4. Индивидуальные задания по высшей математике / Под ред. А.П. Рябушко, IIч. − Мн.: Выш. шк., 2007. − 367 с.

5. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2-х томах / Н. С. Пискунов. − М.: Наука, 1985. − Т.1 432 с., Т.2 560 с.

6. Сухая, Т.А. Задачи по высшей математике: в 2-х частях / Т.А. Сухая, В.Ф. Бубнов. − Мн.: Выш. шк., 1993. − Ч.1 416 с., Ч.2 304 с.

7. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. − М.: Астрель: АСТ, 2005. − 991 с.

8. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Бричикова. − Мн.: ТетраСистемс, 2000. − 640 с.

9. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2-х частях / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. − Мн.: Высш. шк., 1997. − Ч.1 304 с., Ч.2 416 с.

10. Лудерер, Б. Высшая математика в экономике, технике, информатике: справочник: пер. с нем. / Б. Лудерер, Ф. Наллау, К. Феттерс; под ред. А.В. Самусенко, В.В. Казаченок. − Мн.: Выш. шк., 2005. − 279 с.

11. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: Ч.1 / Д.Т. Письменный. − М.: АйрисПресс, 2004. − 288 с.

Содержание

Учебное издание

Составители:
Юхимук Михаил Михайлович
Юхимук Татьяна Юрьевна

Элементы линейной алгебры

Основы аналитической геометрии

Введение в математический анализ

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Методические рекомендации и варианты заданий аттестационных работ по курсу «Математика» для студентов строительных специальностей дневной формы обучения

Ответственный за выпуск: Юхимук М.М.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная верстка: Юхимук М.М.
Корректор: Юхимук М.М.

Подписано в печать 4.05.2016 г. Формат 60х84 1/16. Бумага «Снегурочка».
Усл. п. л. 3,0. Уч. изд. л. 3,25. Заказ № 522. Тираж 80 экз.
Отпечатано на ризографе Учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.