

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Кафедра автоматизации технологических процессов и производств**

**А.В. Ярошевич**

**ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО  
УПРАВЛЕНИЯ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ**

*Конспект лекций*

для студентов специальности

**1 – 36 01 01 «Технология машиностроения»**

Брест 2012

УДК 62-52(075)  
ББК 32.965  
Я77

Рецензент:

*В.В.Петрукович*, главный энергетик Брестского филиала РУП «Белтелеком»

**Ярошевич А.В.**

**Я77** Теория автоматического управления технологическими системами: конспект лекций. – Брест: из-во БрГТУ, 2012. – 79 с.

**ISBN 978-985-493-217-0**

В курсе «Теория автоматического управления технологическими системами» изучаются основные понятия и математический аппарат анализа линейных систем автоматического управления. Изложение курса ведётся по традиционной схеме, основанной на передаточных функциях звеньев и структурных схемах. Теоретический материал иллюстрируется примерами наиболее характерных систем. Объём материала ограничен объёмом лекционного курса (36 часов).

УДК 62-52(075)  
ББК 32.965

ISBN 978-985-493-217-0

© Ярошевич А.В., 2012  
© Издательство БрГТУ, 2012

# ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение.....	4
1.1 Предмет теории автоматического управления .....	4
1.2 Примеры систем автоматического управления.....	6
2. Математическое описание систем автоматического управления.....	8
2.1 Уравнения динамики и передаточные функции САУ .....	8
2.2 Структурные схемы систем автоматического управления.....	10
2.3 Частотные характеристики САУ .....	14
2.4 Временные характеристики САУ .....	16
2.5 Элементарные звенья и их характеристики .....	17
2.6 Построение логарифмических частотных характеристик.....	29
3. Описание системы автоматического регулирования.....	32
3.1 Схема системы регулирования напряжения генератора.....	32
3.2 Уравнения и передаточные функции звеньев САУ напряжения генератора.....	33
4. Критерии устойчивости систем автоматического управления.....	40
4.1 Условия устойчивости системы .....	40
4.2 Алгебраический критерий устойчивости Гурвица.....	44
4.3 Критерий устойчивости Михайлова.....	47
4.4 Критерий устойчивости Найквиста.....	50
4.5 Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам .....	54
5. Методы оценки качества регулирования линейных систем .....	56
5.1 Оценка качества переходных процессов при единичном ступенчатом воздействии.....	56
5.2 Оценка качества регулирования по частотным характеристикам.....	58
5.3 Корневые методы оценки качества регулирования .....	59
5.4 Частотные методы оценки качества регулирования.....	60
5.5 Метод трапеций для построения переходной характеристики.....	62
6. Синтез САУ.....	65
7. Заключение.....	75
8. Литература.....	78

# 1. ВВЕДЕНИЕ

## 1.1 Предмет теории автоматического управления

*Теория автоматического управления* является специальной технической теоретической дисциплиной, понятия и методы которой предназначены для *описания, анализа* характеристик и динамических процессов и *синтеза* параметров *систем автоматического управления*.

Базой для создания теории автоматического управления (ТАУ) явились специальные разделы высшей математики и базовые понятия технической кибернетики, важнейшим из которых является *принцип обратной связи*.

Системы автоматического управления (САУ) являются обширным видом технических автоматических систем. Примерами автоматических систем могут служить:

- автомат включения уличного освещения, включающий фонари в зависимости от уровня освещенности естественным светом;
- автомат по продаже билетов или штучных товаров;
- автоматический станок, управляемый программой изготовления (обработки) изделия (детали);
- автоматический регулятор скорости вращения двигателя при изменении нагрузки на валу или параметров электропитания;
- регуляторы температуры, давления, напряжения, частоты и т.п.;
- автопилот, поддерживающий параметры полета самолета без участия летчика;
- система самонаведения ракеты на цель;
- измерительный прибор, работающий по компенсационному принципу;
- вычислительное устройство, микропроцессор, компьютер.

К системам автоматического управления относят такие автоматические системы, которые в течение достаточно длительного времени заданным образом изменяют или поддерживают неизменными определенные физические величины (координаты, скорость, электрическое напряжение, частоту, температуру, давление и т.п.) в динамическом управляемом процессе. К ним можно отнести из перечисленных выше автоматических систем автоматический станок, автоматические регуляторы скорости вращения, температуры, напряжения, давления, частоты, автопилот, систему самонаведения и измерительный прибор компенсационного типа.

Схема простейшей САУ представлена на рис. 1.1.

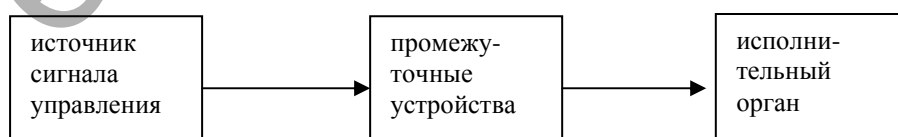
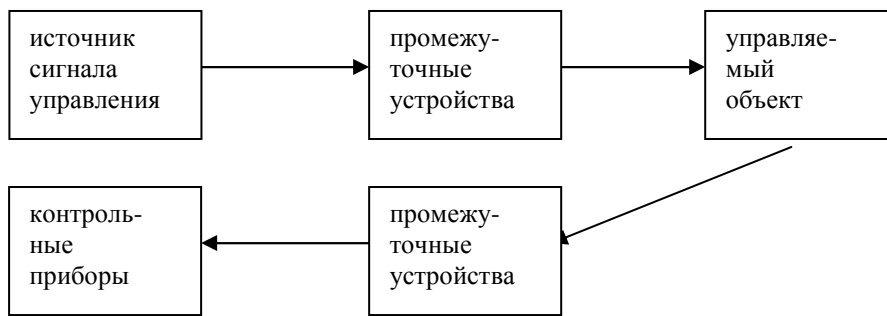


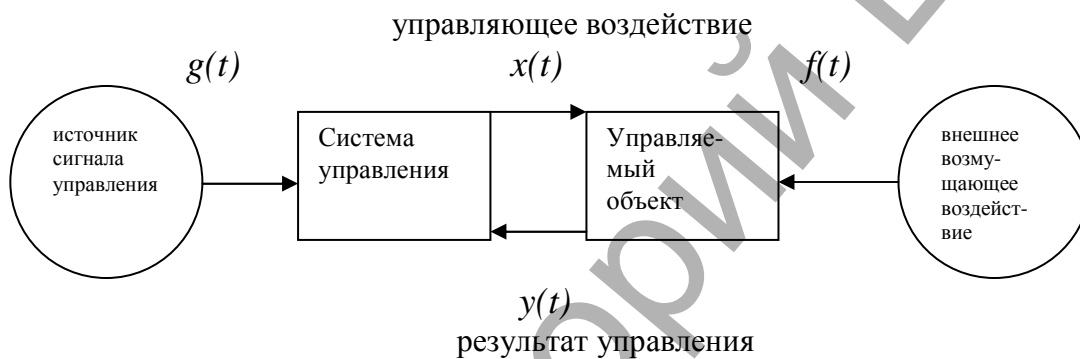
Рисунок 1.1

Более сложным вариантом системы является вариант с контрольными приборами для отображения параметров регулируемого процесса, представленный на рис.1.2.



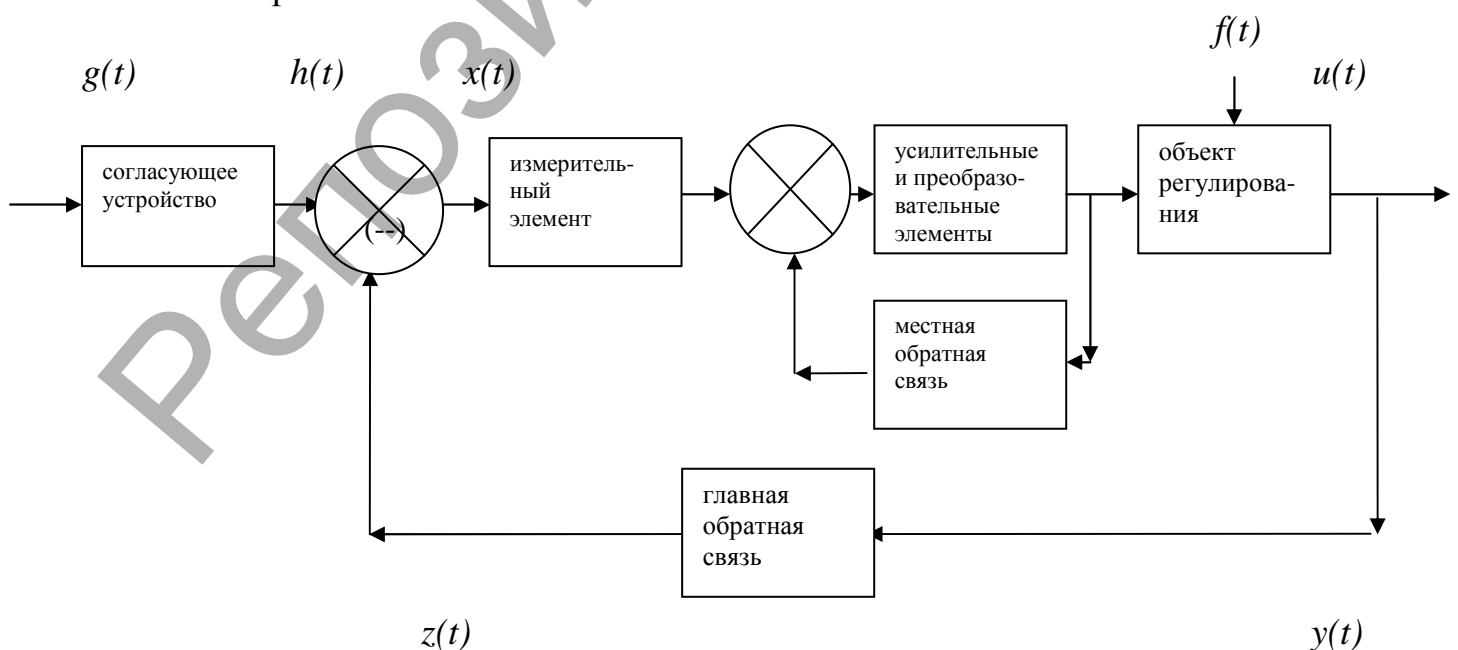
**Рисунок 1.2**

Естественным дальнейшим усовершенствованием САУ является замыкание ее выхода (контрольные приборы) со входом (источник сигнала управления) для сравнения измеренных параметров управления с заданными и использования в качестве управляющего сигнала рассогласования между фактически и заданными величинами. Таким образом, возникает основной тип САУ – замкнутая система автоматического управления. Наиболее общая схема замкнутой САУ представлена на рис.1.3.



**Рисунок 1.3**

Для введения общей терминологии САУ используем развернутую схему системы на рис.1.4.



**Рисунок 1.4**

В САУ выходная величина  $y(t)$  воспроизводит входную величину  $g(t)$ , причем система управления реагирует на рассогласование  $x(t)$  между входной и выходной величинами. Обычно  $y(t)$  называют регулируемой величиной, а  $g(t)$  – задающим воздействием. САУ имеет главную обратную связь выхода со входом. Устройство, производящее вычитание  $x(t)=h(t)-z(t)$ , называют датчиком рассогласования. Система работает так, чтобы все время сводить к нулю рассогласование  $x(t)$ . Местная обратная связь обеспечивает заданные характеристики процесса управления. Объект регулирования находится под воздействием возмущающей величины  $f(t)$ .

В наиболее общем виде упрощенная схема САУ с единичной отрицательной обратной связью представлена на рис.1.5. Рассогласование  $x(t)=g(t)-y(t)$ .

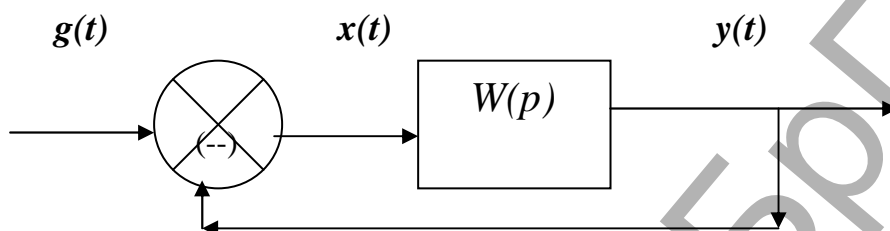


Рисунок 1.5

На рис.1.5  $W(p)$  обозначает *передаточную функцию* САУ.

## 1.2 Примеры систем автоматического управления

### 1.2.1 Система автоматического управления полетом самолета .

Автопилот имеет три канала управления: управление движением в вертикальной плоскости (по тангажу), управление движением в горизонтальной плоскости (по курсу) и управление поворотом вокруг собственной оси (по крену). Для примера на рис.1.6 представлена схема одного канала автопилота – курсового.

Корпус самолета (8) является объектом управления, гироскоп (6) с потенциометрической схемой (5,7) служит измерительным устройством угла отклонения (9) заданного курса от фактического.

Далее идут усилитель (4), приводной двигатель (3) и рулевая машинка (2). В качестве регулирующего органа служит руль направления (1).

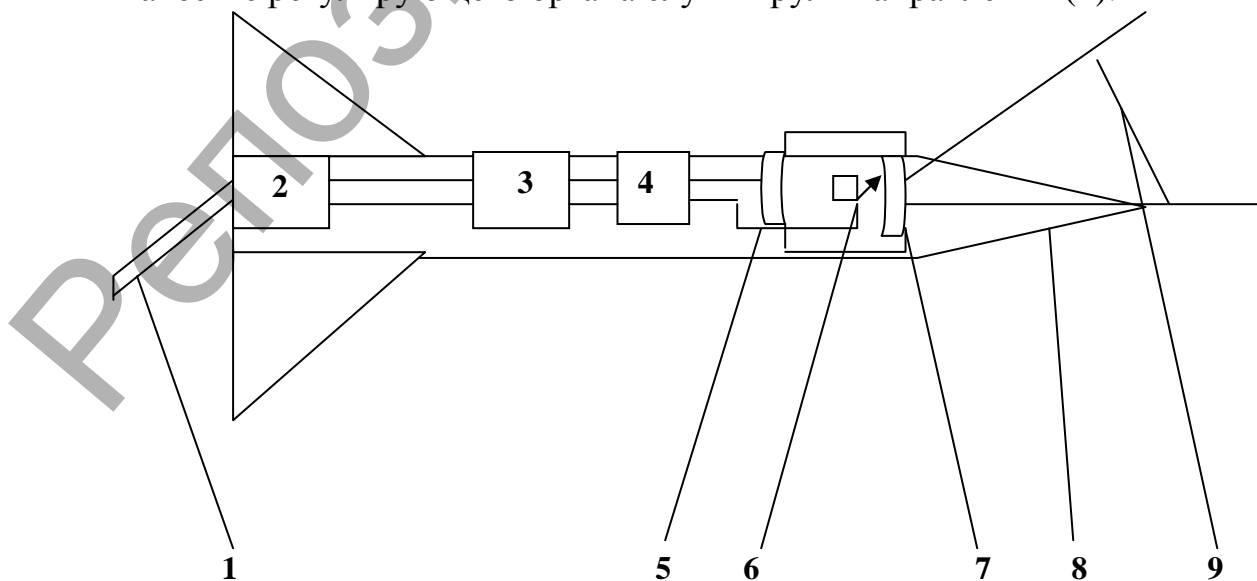


Рисунок 1.6

Гироскоп задает направление движения, сохраняя положение своей оси в пространстве неизменным. При отклонении самолета на угол (9) от заданного курса движок потенциометра (7) смещается с нулевой точки. С потенциометра через усилитель на двигатель рулевой машинки подается сигнал, пропорциональный отклонению самолета. Руль поворачивается таким образом, чтобы свети рассогласование с заданным курсом к нулю.

### 1.2.2 Система автоматического регулирования угловой скорости вращения вала электродвигателя.

На рис. 1.7 показана схема регулирования угловой скорости  $\omega$  вращения вала электродвигателя (Дв1), который является регулируемым объектом. Возмущающим воздействием в системе является изменение нагрузки на валу электродвигателя. Измерительным устройством скорости вращения вала электродвигателя служит тахогенератор ТГ, вырабатывающий напряжение  $U1$ , пропорциональное регулируемой величине – угловой скорости  $\omega$ . На потенциометре  $R1$  задатчика устанавливается напряжение  $U0$ , соответствующее требуемому значению угловой скорости. Рассогласование  $U2=U0-U1$  подается через электронный усилитель ЭУ на электромашинный усилитель ЭМУ. Электромашинный усилитель в соответствии с поступающим в его обмотку возбуждения  $OB1$  напряжением изменяет ток, питающий цепь якоря электродвигателя таким образом, чтобы ликвидировать изменение скорости вращения, вызванное возмущением нагрузки.

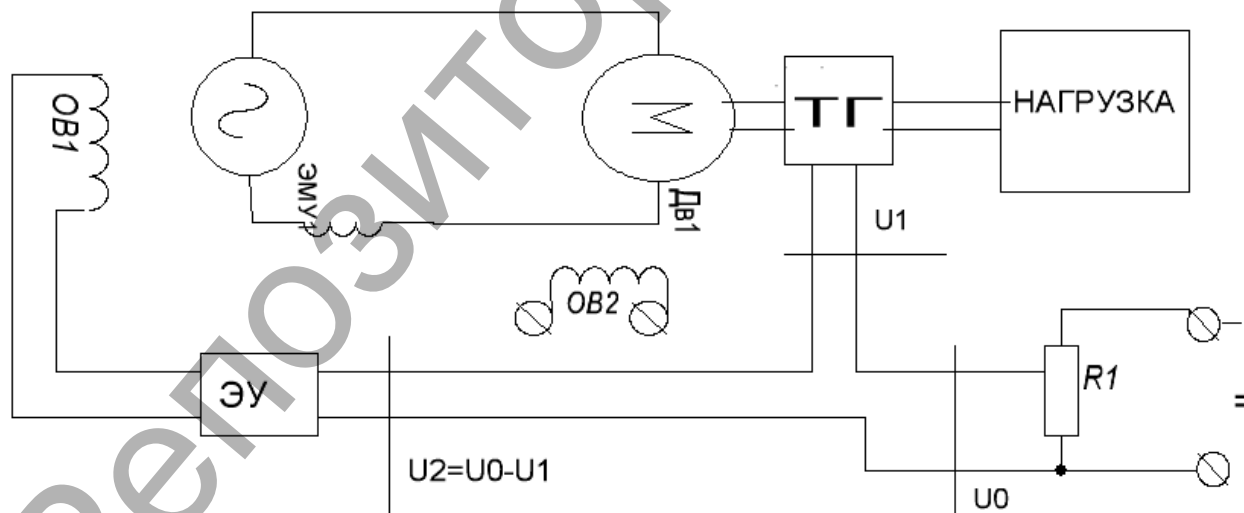


Рисунок 1.7

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Проектирование и анализ САУ базируется на ее математическом описании – описании процессов, происходящих в системе на языке математики, т.е. с помощью уравнений, графиков или таблиц. Для получения математического описания системы составляют описание ее отдельных элементов, которые называют звеньями. Звенья САУ содержат инерционности (движущиеся механические массы, электромагнитные устройства и реактивные электрические элементы), процессы в которых описываются в общем виде нелинейными дифференциальными уравнениями. Включение в контур САУ дискретных элементов и счетно-решающих устройств приводит к использованию дифференциально-разностных уравнений и других современных разделов математики.

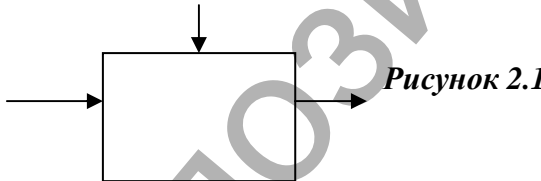
К описанию САУ предъявляются противоречивые требования. С одной стороны, описания должны быть как можно более полными и точными. С другой стороны, они должны быть простыми и понятными и должны позволять проследивать связь реальных параметров технических устройств с параметрами описывающих их уравнений.

Сформулированные требования привели к созданию специального аппарата для описания и анализа САУ – аппарата теории автоматического управления.

### 2.1 Уравнения динамики и передаточные функции САУ

В общем случае процессы в звеньях САУ и системах в целом описываются нелинейными дифференциальными уравнениями произвольного порядка.

Рассмотрим звено (рис. 2.1), которое можно описать дифференциальным уравнением второго порядка.

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}, x, \dot{x}) + f = 0 \quad (2.1)$$


В выражении (2.1)  $y$  – выходная величина,  $x$  – входная величина,  $f$  – возмущающая величина,  $\dot{y}$ ,  $\ddot{y}$  – первые производные по времени,  $\dot{x}$  – вторая производная по времени. Выражение (2.1) называют **уравнением динамики**.

В очень многих случаях исходные нелинейные уравнения можно заменить линейными, приближенно описывающими процессы в системе.

Процесс преобразования нелинейных описаний в линейные называют *линеаризацией*. В нормально функционирующей системе фактический текущий режим не намного отличается от требуемого (номинального). Отклонения входных и выходных величин от требуемых значений малы. Это позволяет считать зависимости величин в окрестности рабочей точки линейными и описывать процессы линейными уравнениями. Звенья и системы, описываемые линейными уравнениями, называют линейными звеньями и линейными САУ.



В рамках настоящего курса основное внимание будет уделено теории автоматического управления в применении к линейным САУ.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее звено САУ.

$$a_0 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = b_0 \dot{x} + b_1 x + c_0 f, \quad (2.2)$$

где  $a_i, b_j, c_k$  – постоянные коэффициенты.

Введем для операции дифференцирования обозначение  $p, d/dt = p$ . Используя его, уравнение (2.2) можно записать в виде

$$a_0 p^2 y + a_1 p y + a_2 y = b_0 p x + b_1 x + c_0 f \quad (2.3)$$

При записи и преобразовании уравнения (2.3) оператор  $p$  можно рассматривать как алгебраический множитель, а выражение  $py$  – как произведение, не обладающее свойством коммутативности, вместо  $py$  нельзя написать  $yp$ .

С учетом этого замечания перепишем (2.3), вынеся переменные  $y$  и  $x$  за скобки.

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) y = (b_0 p + b_1) x + c_0 f \quad (2.4)$$

Введем обозначения  $Q(p) = a_0 p^2 + a_1 p + a_2, R_1(p) = b_0 p + b_1, R_2(p) = c_0$ . Тогда (2.4) можно записать в более компактной форме

$$Q(p) y = R_1(p) x + R_2(p) f \quad (2.5)$$

В выражении (2.5)  $Q(p)$  называют *собственным оператором*,  $R_1(p)$  – *оператор управляющего воздействия*,  $R_2(p)$  – *оператор возмущения*.

**Передаточной функцией** системы или звена называют отношение оператора управляющего воздействия к собственному оператору.

$$W(p) = \frac{R_1(p)}{Q(p)} = \frac{b_0 p + b_1}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}. \quad (2.6)$$

Рассматривают также передаточную функцию системы по возмущению

$$W_e(p) = \frac{R_2(p)}{Q(p)} = \frac{c_0}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}. \quad (2.7)$$

Используя передаточные функции, выражение (2.2) можно записать в виде

$$y = W(p) x + W_e(p) f \quad (2.8)$$

Передаточная функция САУ в операторной форме отражает отношение выходной величины  $y$  ко входному воздействию  $x$ .

Строгое определение передаточной функции можно получить используя преобразование Лапласа. Передаточной функцией в форме изображения Лапласа называют отношение изображения по Лапласу временной функции выходной величины  $Y(s) = L\{y(t)\}$  к изображению по Лапласу временной функции управляющего воздействия  $X(s) = L\{x(t)\}$  при нулевых начальных условиях.

Применим преобразование Лапласа к выражению (2.2).

$$L\{a_0 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y\} = L\{b_0 \dot{x} + b_1 x + c_0 f\} \quad (2.9)$$

Используя свойства линейности и дифференцирования оригинала в преобразовании Лапласа, при нулевых начальных условиях получим

$$(a_0 s^2 + a_1 s + a_2) Y(s) = (b_0 s + b_1) X(s) + c_0 F(s) \quad (2.10)$$

Полагая  $F(s) = 0$  и определяя из (2.10) отношение изображений выходной величины ко входной, получим передаточную функцию в форме изображения Лапласа

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s + b_1}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2} \quad (2.11)$$

Сравнивая выражения (2.6) и (2.11) можно заметить, что по форме они совпадают с точностью до обозначений.

## 2.2 Структурные схемы систем автоматического управления

Структурной схемой в теории автоматического управления называют графическое изображение математической модели САУ в виде соединений звеньев. Звено на структурной схеме представляют в виде прямоугольника с указанием величин на входе и выходе звена, а так же обозначением передаточной функции внутри звена (рис.2.2)

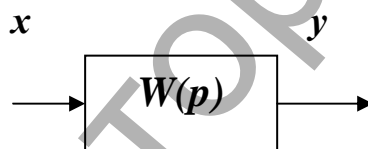


Рисунок 2.2

Сравнивающие и суммирующие звенья изображают в виде круга, разделенного на секторы (рис.2.3)

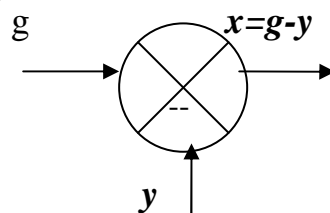


Рисунок 2.3

В сравнивающем звене сектор, на который подаётся вычитаемое затемняют или ставят знак минус.

При математическом описании САУ изображают в виде **структурной схемы**, соединительные линии между блоками схемы имеют стрелку, указывающую направление распространения сигнала. Все преобразования, необходимые для получения передаточных функций системы, производят по структурной схеме.

### Основные правила преобразования структурных схем

1. Последовательное соединение звеньев ( рис.2.4 ).

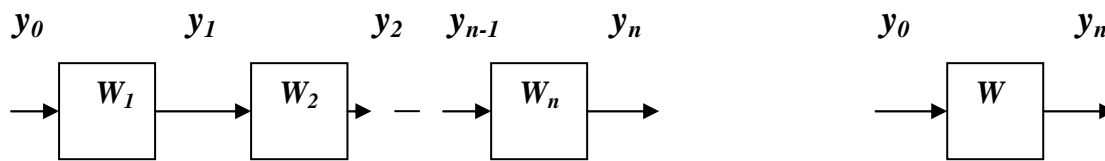


Рисунок 2.4

При последовательном соединении выходная величина каждого предшествующего звена является входным воздействием последующего звена.

При преобразовании структурных схем цепочку из последовательно соединённых звеньев можно заменить одним звеном с передаточной функцией  $W$ , равной произведению передаточных функций отдельных звеньев  $W_i$ .

$$W = W_1 W_2 \dots W_n \quad (2.12)$$

2. Параллельное соединение звеньев (рис.2.5).

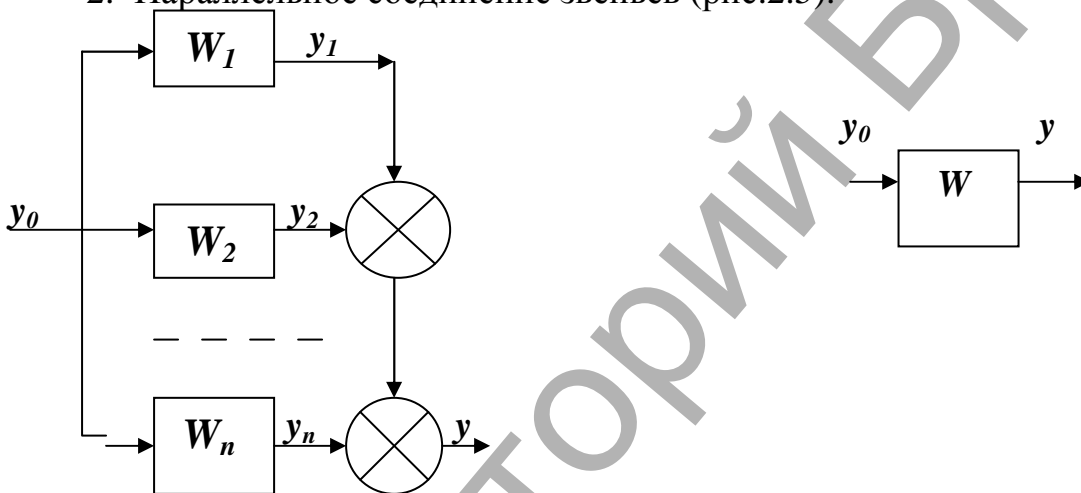
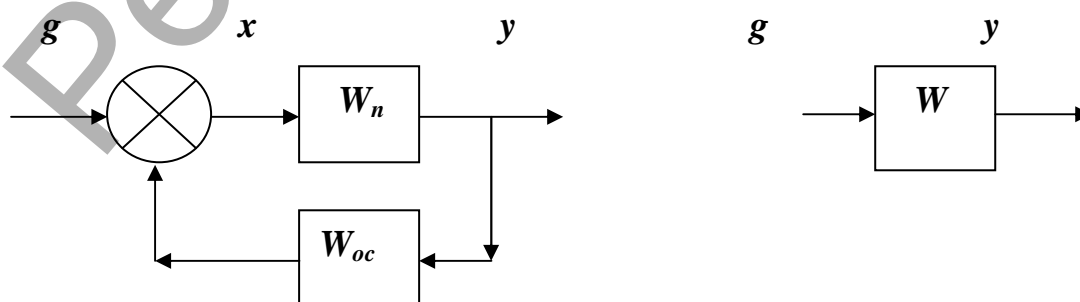


Рисунок 2.5

При параллельном соединении на вход всех звеньев подаётся один и тот же сигнал, а выходные величины складываются. Цепь из параллельных звеньев можно заменить одним звеном с передаточной функцией, равной сумме передаточных функций входящих в неё звеньев.

$$W = W_1 + W_2 + \dots + W_n \quad (2.13)$$

3. Звено, охваченное обратной связью (рис. 2.6).



$y_1$

Рисунок 2.6

Звено считается охваченным обратной связью, если его выходной сигнал через какое – либо другое звено подаётся на вход. При этом, если сигнал  $y_1$  обратной связи вычитается из входного воздействия ( $x = g - y_1$ ), обратную связь называют *отрицательной*. Если сигнал обратной связи суммируется с входным воздействием, то обратную связь называют положительной.

Если разомкнуть обратную связь перед звеном сравнения, то получим цепь из двух последовательно соединенных звеньев.

Передаточная функция разомкнутой системы  $W_p$  определяется как произведение передаточной функции прямой цепи  $W_n$  и передаточной функции обратной связи  $W_{oc}$  :  $W_p = W_n W_{oc}$  .

Передаточная функция системы с отрицательной обратной связью равна передаточной функции прямой цепи , делённой на единицу плюс передаточная функция разомкнутой системы.

$$W = W_n / ( 1 + W_p ) \quad (2.14)$$

Передаточная функция замкнутой цепи с положительной обратной связью равна передаточной функции прямой цепи, делённой на единицу минус передаточная функция разомкнутой цепи.

Если передаточная функция обратной связи равна единице  $W_{oc}=1$ , то систему называют системой с единичной обратной связью, передаточная функция при этом имеет вид  $W = W_n / ( 1 + W_n )$ , а структурная схема – вид на рис.2.7

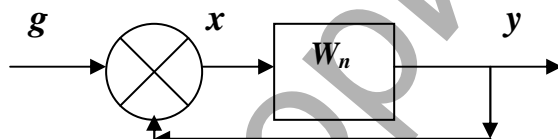


Рисунок 2.7

#### 4. Перенос сумматора.

При переносе сумматора по направлению прохождения сигнала необходимо добавить звено с передаточной функцией, равной передаточной функции звена, через которое переносится сумматор (рис.2.8).

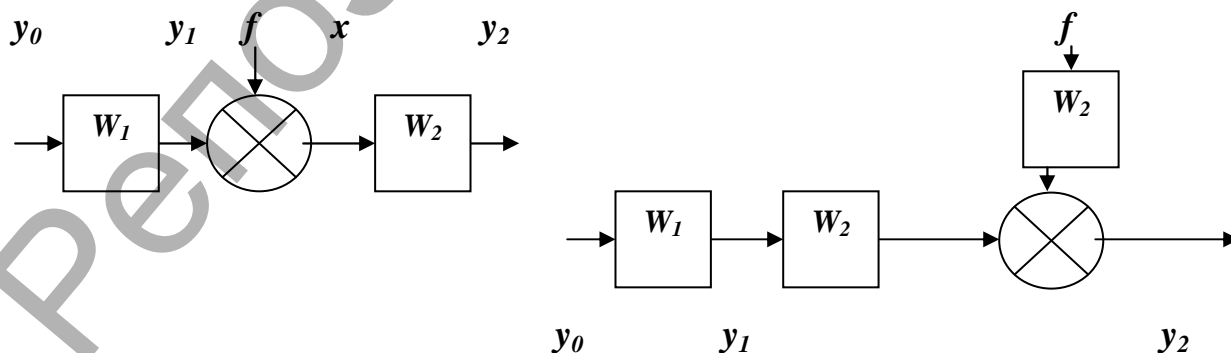


Рисунок 2.8

Если сумматор переносится против направления прохождения сигнала, то необходимо добавить звено с передаточной функцией, обратной передаточной функции звена, через которое переносится сумматор (рис.2.9).

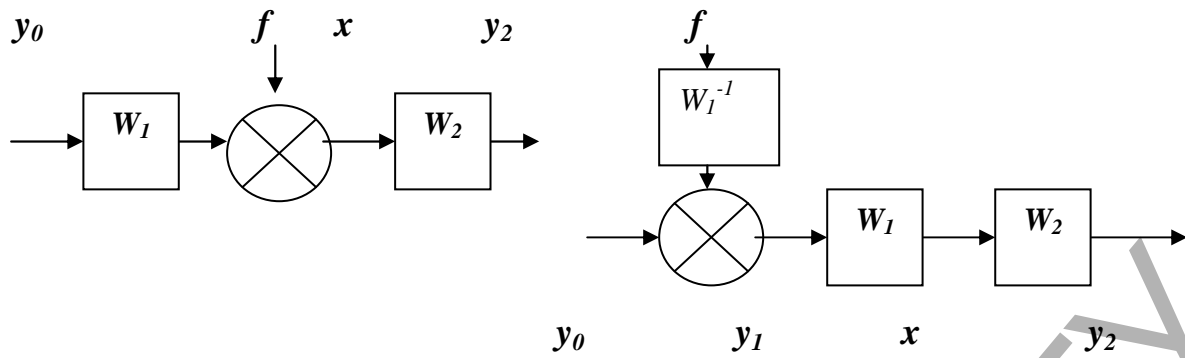


Рисунок 2.9

### 5. Перенос узла.

При переносе узла через звено по направлению прохождения сигнала добавляется звено с передаточной функцией, обратной передаточной функции звена, через которое перенесён узел (рис.2.10).

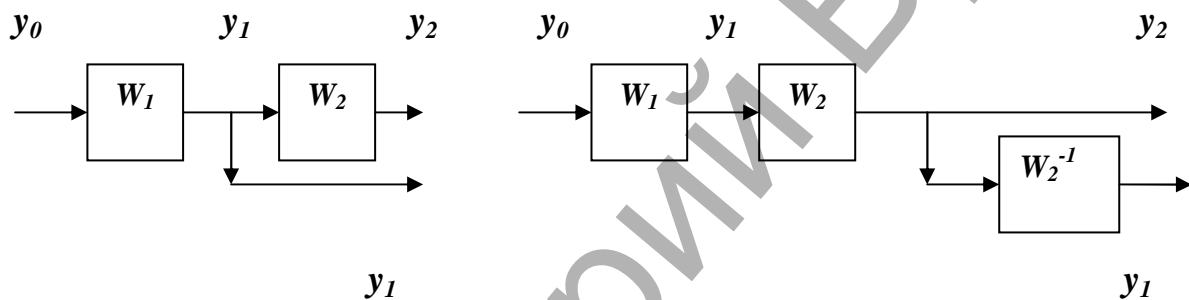


Рисунок 2.10

Если узел переносится против направления прохождения сигнала, то добавляется звено с передаточной функцией, равной передаточной функции звена, через которое переносится узел (рис.2.11).

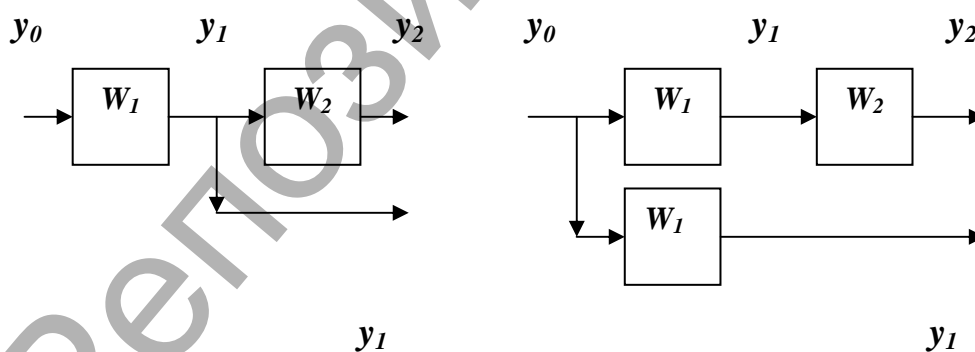


Рисунок 2.11

### 6. Определение передаточной функции одноконтурной системы.

Структурную схему замкнутой САУ называют одноконтурной, если при её размыкании на любом участке получается цепь из последовательно соединённых звеньев, не содержащая параллельных и обратных связей. На рис.2.12 приведен пример структурной схемы одноконтурной системы.

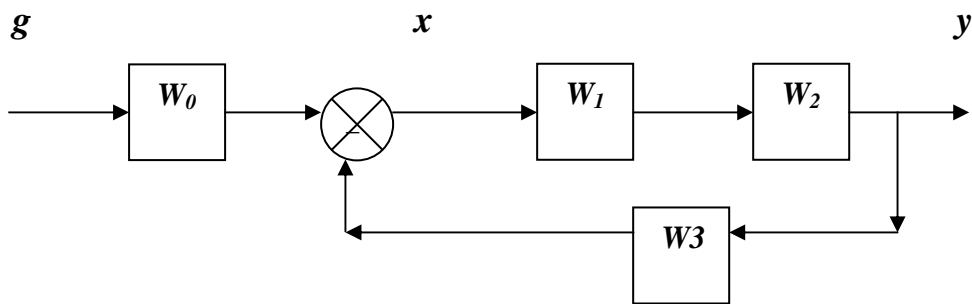


Рисунок 2.12

Участок цепи по ходу сигнала от входного воздействия  $g$  до выходного параметра  $y$   $W_0W_1W_2$  назовем *прямой цепью*, а цепь из последовательно соединённых звеньев, составляющих замкнутый контур  $W_1W_2W_3$  - *замкнутой цепью*. Передаточная функция одноконтурной системы с отрицательной обратной связью равна передаточной функции прямой цепи, деленной на единицу плюс передаточная функция замкнутой цепи.

$$W = \frac{W_0W_1W_2}{1 + W_1W_2W_3}$$

Для нахождения передаточной функции многоконтурной системы необходимо в общем случае переносом сумматоров и узлов освободиться от перекрещивающихся связей, а затем с использованием первых трёх правил преобразовать структурную схему в одноконтурную.

### 2.3 Частотные характеристики САУ

В общем случае дифференциальное уравнение линейной системы автоматического управления в операторной форме имеет вид

$$(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n)y = (b_0p^m + b_1p^{m-1} + \dots + b_m)x, \quad (2.15)$$

где  $a_0 \dots a_i \dots a_n$ ,  $b_0 \dots b_j \dots b_m$  – числовые коэффициенты;  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования;  $x$  – входное воздействие;  $y$  – выходная величина.

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{b_0p^m + b_1p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n} \quad (2.16)$$

Частотную передаточную функцию  $W(j\omega)$  получают из передаточной функции  $W(p)$  подстановкой вместо  $p \rightarrow j\omega$ , где  $j$  – мнимая единица,  $\omega$  – частота.

$$W(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n} \quad (2.17)$$

Частотная передаточная функция является комплекснозначной функцией действительной переменной  $\omega$ , которая имеет смысл круговой частоты периодического сигнала.

Функцию  $W(j\omega)$  можно представить в виде

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.18)$$

$$\text{где } A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}; \quad (2.19)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg(V(\omega)/U(\omega)) + k\pi, \quad k=0,1,2... \quad (2.20)$$

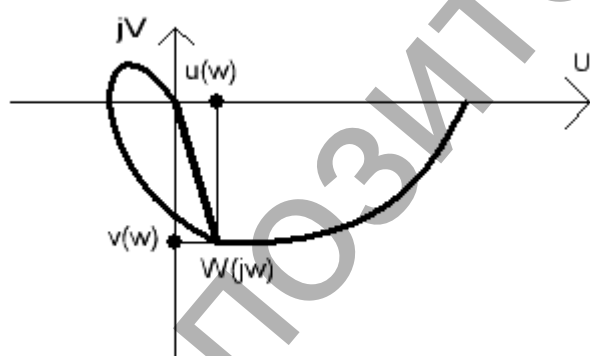
При вычислении  $\varphi(\omega)$  значение  $k$  определяют из дополнительных условий.

На комплексной плоскости частотная передаточная функция  $W(j\omega)$  определяет вектор  $OC$ , модуль которого равен  $A(\omega)$ , а аргумент (угол, образованный вектором с действительной положительной полуосью)  $\varphi(\omega)$ .

Кривую, которую описывает конец этого вектора при изменении частоты от нуля до бесконечности называют **амплитудно-фазовой частотной характеристикой** (АФЧХ) (рис.2.13).

Частотную передаточную функцию называют также амплитудно-фазовой частотной функцией. Её действительную часть  $U(\omega) = \text{Re } W(j\omega)$  и мнимую часть  $V(\omega) = \text{Im } W(j\omega)$  – соответственно вещественной и мнимой частотными функциями.

График вещественной частотной функции называют вещественной частотной характеристикой, график мнимой частотной функции – мнимой частотной характеристикой. Модуль  $A(\omega) = |W(j\omega)|$  называют амплитудной частотной функцией, а её график – амплитудной частотной характеристикой. Аргумент  $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$  называют фазовой частотной функцией, а её график – фазовой частотной характеристикой.



и синтеза параметров САУ.

Рисунок 2.13

Широкое применение для анализа и синтеза САУ имеют логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ). Свойства логарифмических функций дают определённые преимущества при графических построениях частотных характеристик и позволили создать ряд специфичных методов анализа и

$$\text{Функцию } L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| \quad (2.21)$$

называют логарифмической амплитудно – частотной функцией. График логарифмической амплитудно – частотной функции в логарифмическом масштабе частоты называют **логарифмической амплитудно – частотной характеристикой** (ЛАЧХ). График ЛАЧХ строят в координатах  $L(\omega) \div \lg \omega$  (рис.2.14) .

Единицей измерения  $L(\omega)$  является децибел ( дБ ), а единицей измерения логарифма частоты – декада. Декадой называют интервал, на котором частота изменяется в 10 раз.

Логарифмической фазовой частотной характеристикой ( ЛФЧХ ) называют график зависимости фазовой частотной функции  $\varphi(\omega)$  от логарифма частоты  $\lg \omega$

Ось ординат совмещают для построения ЛАЧХ преимущественно в первом и четвёртом квадранте координатной плоскости и ЛФЧХ в четвёртом квадранте (рис.2.14).

Рассмотрим физический смысл частотных характеристик. При гармонических воздействиях в устойчивых системах после окончания переходного процесса выходная величина так же изменяется

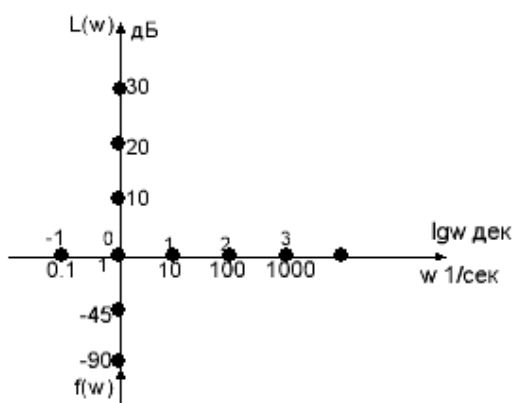


Рисунок 2.14

по гармоническому закону, но с другой амплитудой и фазой. При этом отношение амплитуд выходной и входной величин равно модулю частотной передаточной функции, а сдвиг фазы – её аргументу. Следовательно, амплитудная частотная характеристика показывает зависимость отношения амплитуд, а фазовая частотная характеристика – зависимость сдвига фаз от частоты входного гармонического сигнала.

## 2.4 Временные характеристики САУ

Временные характеристики относятся к описанию поведения регулируемых величин в системах автоматического управления во времени. Важнейшими из них являются переходная и импульсная переходная характеристики.

**Переходной функцией** системы называют функцию, описывающую изменение выходной величины системы во времени, когда на её вход подаётся единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях. Переходную функцию обычно обозначают  $h(t)$ . Переходная функция описывает реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие.

Единичное ступенчатое воздействие можно описать единичной функцией

$$1(t) = 1 \text{ при } t \geq 0, \quad (2.22)$$

$$0 \text{ при } t < 0.$$

**Переходная характеристика** является графиком переходной функции. График единичного ступенчатого воздействия и переходная характеристика представлены на рис.2.15.



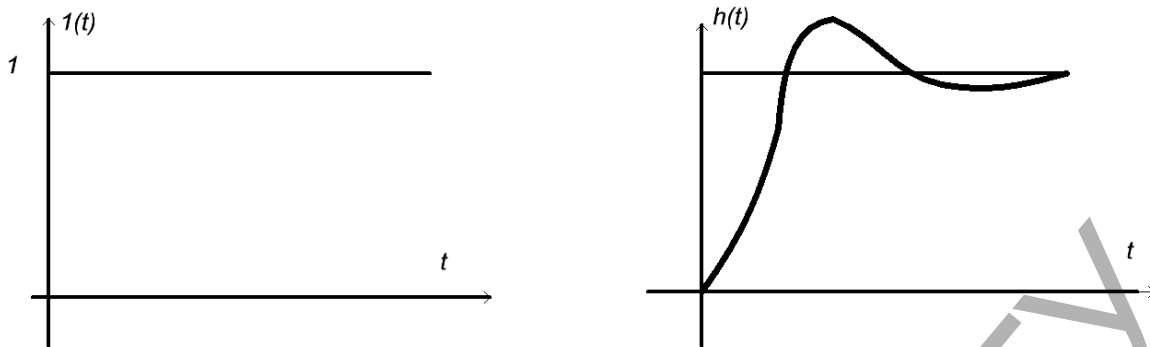


Рисунок 2.15

**Импульсной переходной** или **весовой** функцией системы называют функцию, описывающую реакцию системы на *единичное импульсное воздействие* при нулевых начальных условиях. Эту функцию обозначают  $w(t)$ . График импульсной переходной функции называют **импульсной переходной характеристикой**. При определении весовой функции используется понятие единичного импульса. В теории обобщённых функций единичный импульс задаётся функцией Дирака  $\delta(t)$ , которую называют также дельта - функцией. Физически единичный импульс можно представить как очень узкий импульс, ограничивающий единичную площадь. Отметим, что в теории обобщённых функций  $\delta(t)$  – функция является производной от единичной ступенчатой функции  $I(t)$ . Из приведённых соображений основное свойство  $\delta(t)$  описывается следующим выражением

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

## 2.5 Элементарные звенья и их характеристики

Звено САУ определяется как математическая модель элемента или группы элементов системы. Передаточная функция системы или звена имеет вид

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Передаточную функцию всегда можно представить как соединение типовых или элементарных звеньев, порядок многочленов числителя и знаменателя у которых не выше второго. Известно, что многочлен любого порядка можно разложить на простые множители. Эти множители имеют вид

$$kp, \quad d_0 p + d_1, \quad d_0 p^2 + d_1 p + d_2 \quad (2.23)$$

Передаточную функцию любого порядка можно представить как произведение простых множителей вида (2.23) и простых дробей вида (2.24).

$$k/p, \quad k/(d_0 p + d_1), \quad k/(d_0 p^2 + d_1 p + d_2) \quad (2.24)$$

Звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей (2.23) или простых дробей (2.24), называют **типовыми** или **элементарными звеньями**.

## 1. Пропорциональное или усилительное звено

Пропорциональным или усилительным называют звено, которое описывается уравнением  $y(t) = k x(t)$ .

Передаточная функция пропорционального звена

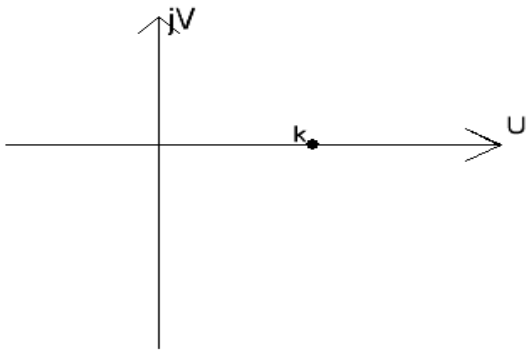
$$W(p) = k$$

Частотные и временные функции и характеристики звена имеют следующий вид.

Частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = k$$

Амплитудно - фазовая частотная характеристика



Амплитудно – фазовая частотная характеристика представляет собой точку на действительной оси комплексной плоскости

Вещественная частотная функция

$$U(\omega) = k$$

Мнимая частотная функция

$$V(\omega) = 0$$

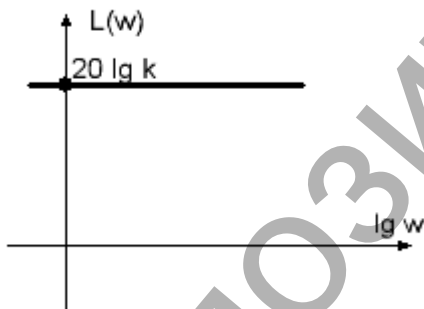
Амплитудная частотная функция

$$A(\omega) = k$$

Фазовая частотная функция

$$\varphi(\omega) = 0$$

Логарифмическая амплитудно – частотная функция



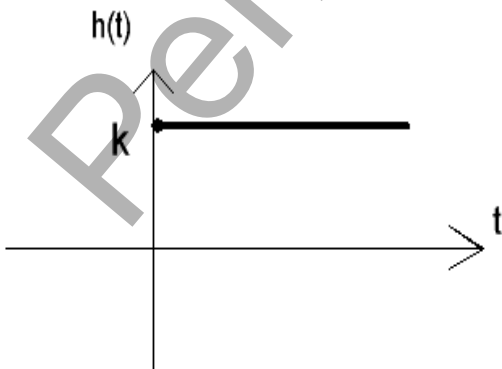
$$L(\omega) = 20 \lg k$$

Логарифмическая амплитудно – частотная характеристика параллельна оси частот и проходит на уровне  $20 \lg k$  (дБ).

Фазовая частотная характеристика совпадает с осью частот.

Переходная функция

$$h(t) = k I(t)$$



Переходная характеристика параллельна оси времени и проходит на уровне  $h(t) = k$ .

## 2. Интегрирующее звено

Интегрирующим называют звено, которое описывается уравнением  $py = kx$ .

Передаточная функция интегрирующего звена

$$W(p) = k/p$$

Частотные и временные функции и характеристики звена имеют следующий вид.

Частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = k/j\omega = -j k/\omega$$

Амплитудно-фазовая характеристика частотная

Амплитудно-фазовая характеристика совпадает с отрицательной мнимой полуосью на комплексной плоскости.

Вещественная частотная функция

$$U(\omega) = 0$$

Мнимая частотная функция

$$V(\omega) = -k/\omega$$

Амплитудная частотная функция

$$A(\omega) = k/\omega$$

Фазовая частотная функция

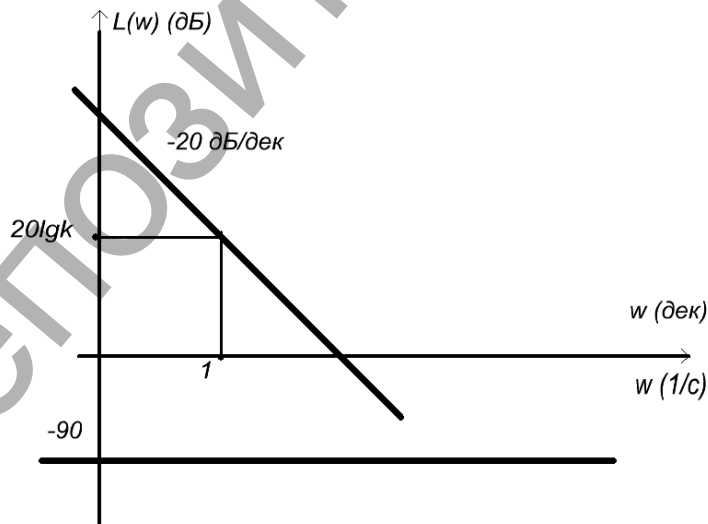
$$\varphi(\omega) = -\pi/2 = -90^\circ$$

Логарифмическая амплитудно – частотная функция

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega$$

Логарифмическая амплитудно – частотная характеристика - наклонная прямая, проходящая через точку с координатами  $\omega=1$  и  $L(\omega) = 20 \lg k$ . Из выражения  $L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega$  следует, что при увеличении частоты на одну декаду ордината  $L(\omega)$  уменьшается на 20 дБ.

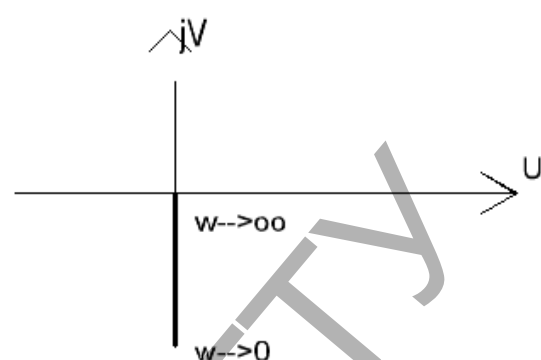
Наклон ЛАЧХ равен  $-20 \text{ дБ/дек}$ .



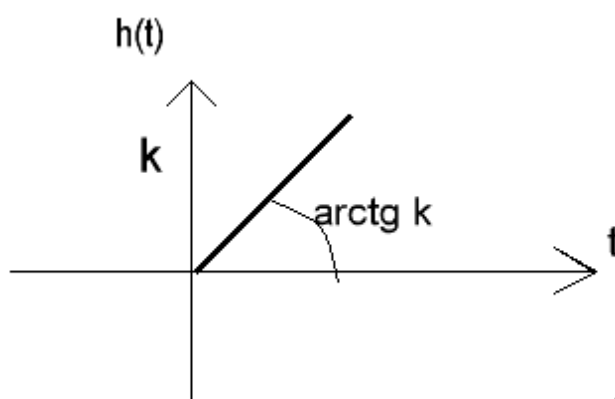
Фазовая частотная характеристика параллельна оси частот и проходит на уровне  $-\pi/2$  ( $-90^\circ$ ).

Переходная функция

$$h(t) = k t$$



Переходная характеристика представляет собой прямую, проходящую через начало координат с коэффициентом наклона  $k$ .



### 3. Дифференцирующее звено

Дифференцирующим называют звено, которое описывается уравнением  $y = kpx$ .

Передаточная функция дифференцирующего звена

$$W(p) = kp$$

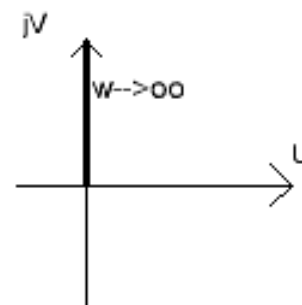
Частотные и временные функции и характеристики звена имеют следующий вид.

Частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = jk\omega$$

Амплитудно - фазовая частотная характеристика

Амплитудно – фазовая частотная характеристика совпадает с положительной мнимой полуосью на комплексной плоскости.



Вещественная частотная функция

$$U(\omega) = 0$$

Мнимая частотная функция

$$V(\omega) = k\omega$$

Амплитудная частотная функция

$$A(\omega) = k\omega$$

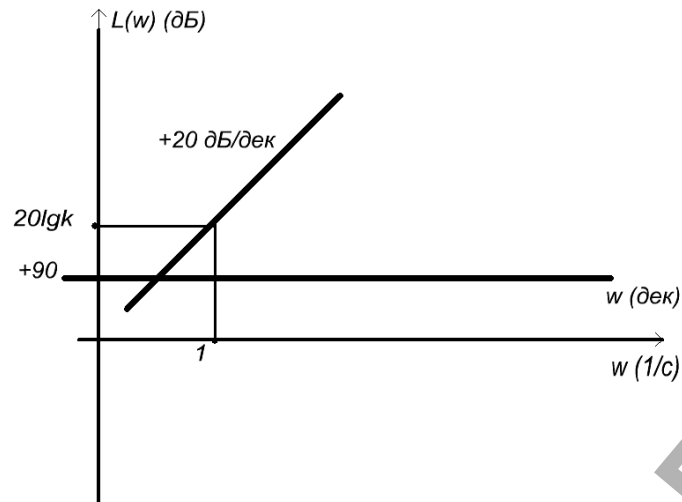
Фазовая частотная функция

$$\varphi(\omega) = \pi/2 = 90$$

Логарифмическая амплитудно – частотная функция

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega$$

Логарифмическая амплитудно – частотная характеристика – наклонная прямая, проходящая через точку с координатами  $\omega=1$  и  $L(\omega) = 20 \lg k$  и имеющая наклон  $+ 20 \text{ дБ/дек}$ .



Фазовая частотная характеристика параллельна оси частот и проходит на уровне  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ).

Переходная функция

$$h(t) = \delta(t).$$

#### 4. Аперриодическое звено

Аперриодическим или инерционным звеном первого порядка называют звено, которое описывается уравнением  $(Tp + 1) y = kx$

Передаточная функция аперриодического звена

$$W(p) = k/(Tp + 1),$$

где  $k$  – коэффициент усиления,  $T$  – постоянная времени.

Частотные и временные функции и характеристики звена имеют следующий вид.

Частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = k/(Tj\omega + 1).$$

Умножив числитель и знаменатель на комплексно – сопряженное знаменателю число, получим

$$W(j\omega) = \frac{k}{(T\omega)^2 + 1} - j \frac{kT\omega}{(T\omega)^2 + 1}$$

Амплитудно – фазовая частотная характеристика

Амплитудно – фазовая частотная характеристика представляет собой полуокружность.

Вещественная частотная функция

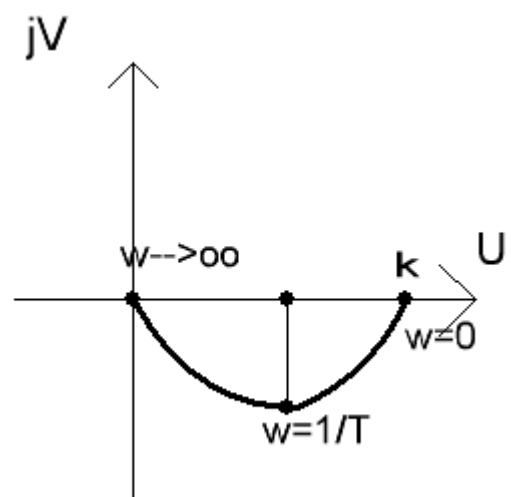
$$U(\omega) = k/[(T\omega)^2 + 1]$$

Мнимая частотная функция

$$V(\omega) = -kT\omega/[(T\omega)^2 + 1]$$

Амплитудная частотная функция

$$A(\omega) = k/\sqrt{(T\omega)^2 + 1}$$



Фазовая частотная функция

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T/k$$

Логарифмическая амплитудно – частотная функция

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(T\omega)^2 + 1} \quad (2.25)$$

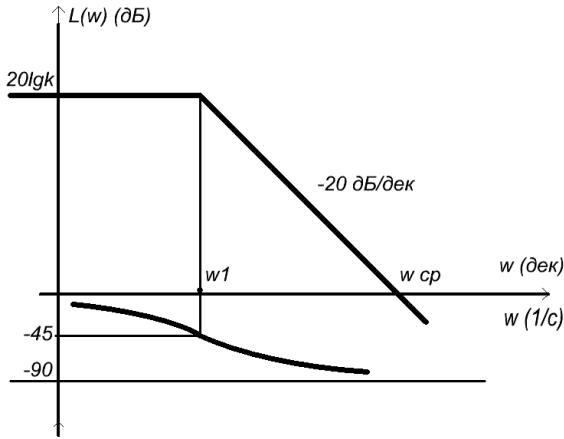
На практике, как правило строят так называемую асимптотическую логарифмическую амплитудно – частотную характеристику.

Уравнение асимптотической ЛАЧХ имеет вид

$$L(\omega) \approx 20 \lg k, \text{ если } \omega < \omega_1 = 1/T$$

$$L(\omega) \approx 20 \lg k - 20 \lg T \omega, \text{ если } \omega > \omega_1$$

Оно получается из уравнения (2.25), если в нём под корнем при  $\omega < \omega_1$  пренебречь первым слагаемым, а при  $\omega > \omega_1$  – вторым слагаемым.



Частоту  $\omega_1 = 1/T$ , при которой пересекаются асимптоты, называют сопрягающей частотой.

Согласно уравнению, асимптотическую ЛАЧХ строят следующим образом: до частоты  $\omega = \omega_1$  проводят прямую, параллельную оси частот на уровне  $L(\omega) = 20 \lg k$ , а далее через точку с координатами  $\omega = \omega_1$  и  $L(\omega) = 20 \lg k$  – прямую под наклоном  $-20 \text{ дБ/дек}$ .

Точная и асимптотическая ЛАЧХ имеют наибольшее различие при сопрягающей частоте, отклонение составляет примерно 3 дБ.

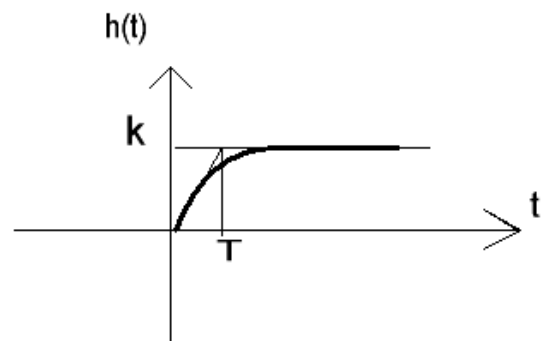
Точка пересечения характеристики с осью частот определяет частоту среза  $\omega_{cp}$ .

Фазовая частотная характеристика асимптотически стремится к нулю при  $\omega \rightarrow 0$  и к  $-\pi/2$  ( $-90^\circ$ ) при  $\omega \rightarrow \infty$ . При  $\omega = \omega_1$  фазовая частотная характеристика принимает значение  $-\pi/4$  ( $-45^\circ$ ).

Переходная функция получается как решение уравнения, описывающего апериодическое звено при  $x(t) = 1(t)$  и нулевом начальном условии  $x(0) = 0$ .

$$h(t) = k (1 - e^{-t/T})$$

Переходная характеристика представляет собой экспоненциальную кривую. По ней можно определить параметры апериодического звена: передаточный коэффициент, равный установившемуся значению  $h(\infty)$  и постоянную времени, равную значению  $t$  в точке пересечения касательной к характеристике в начале координат с асимптотой кривой переходного процесса.



## 5. Форсирующее звено

Форсирующим звеном первого порядка называют звено, которое описывается уравнением  $y=k(Tp + 1)x$

Передаточная функция форсирующего звена

$$W(p) = k(Tp + 1),$$

где  $k$  – коэффициент усиления,  $T$  – постоянная времени .

Частотные и временные функции и характеристики звена имеют следующий вид.

Частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = k(Tj\omega + 1).$$

Амплитудно - фазовая частотная характеристика

Амплитудно – фазовая частотная характеристика представляет собой прямую, параллельную мнимой оси и пересекающую действительную ось в точке  $U=k$  .

Вещественная частотная функция

$$U(\omega) = k$$

Мнимая частотная функция

$$V(\omega) = kT\omega$$

Амплитудная частотная функция

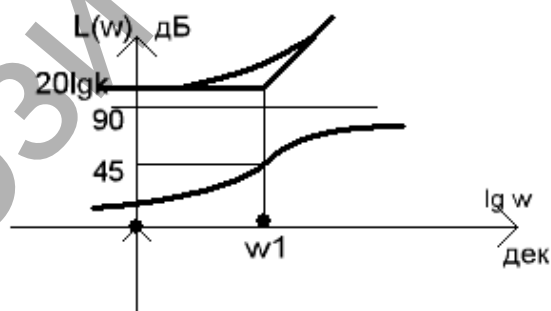
$$A(\omega) = k \sqrt{(T\omega)^2 + 1}$$

Фазовая частотная функция

$$\varphi(\omega) = \text{arctg } \omega T$$

Логарифмическая амплитудно – частотная характеристика

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{(T\omega)^2 + 1}$$

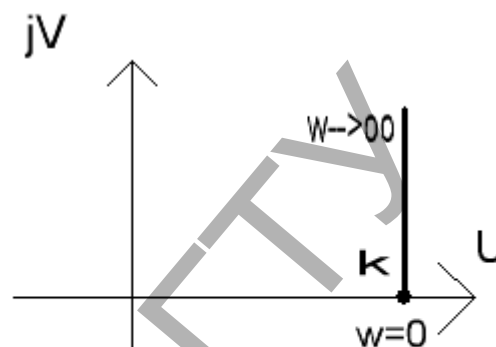


Уравнение асимптотической ЛАЧХ имеет вид

$$L(\omega) \approx 20 \lg k, \text{ если } \omega < \omega_1 = 1/T$$

$$L(\omega) \approx 20 \lg k + 20 \lg T \omega, \text{ если } \omega > \omega_1$$

Согласно уравнению, асимптотическую ЛАЧХ строят следующим образом: до частоты  $\omega = \omega_1$  проводят прямую, параллельную оси частот на уровне  $L(\omega) = 20 \lg k$ , а далее через точку с координатами  $\omega = \omega_1$  и  $L(\omega) = 20 \lg k$  – прямую под наклоном  $+20 \text{ дБ/дек}$ .



Точная и асимптотическая ЛАЧХ имеют наибольшее различие при сопрягающей частоте, отклонение составляет примерно 3 дБ.

Фазовая частотная характеристика асимптотически стремится к нулю при  $\omega \rightarrow 0$  и к  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ) при  $\omega \rightarrow \infty$ . При  $\omega = \omega_l$  фазовая частотная характеристика принимает значение  $\pi/4$  ( $45^\circ$ ). ЛФЧХ форсирующего звена можно получить зеркальным отражением ЛФЧХ апериодического звена относительно оси частот.

Переходная функция

$$h(t) = k [T \delta(t) + 1(t)].$$

### 6. Колебательное, консервативное и апериодическое второго порядка звенья

Колебательное звено описывается уравнением  $(T_0^2 p^2 + T_1 p + 1) y = k x$  или в другой форме  $(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1) y = k x$ , где  $T=T_0$ ,  $\xi = T_1 / 2T$ .

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}, \quad (2.26)$$

где  $k$  – коэффициент усиления,  $T$  – постоянная времени,  $\xi$  – коэффициент демпфирования.

Звено называют колебательным, если  $0 < \xi < 1$ , консервативным, если  $\xi = 0$ , апериодическим второго порядка, если  $\xi \geq 1$ .

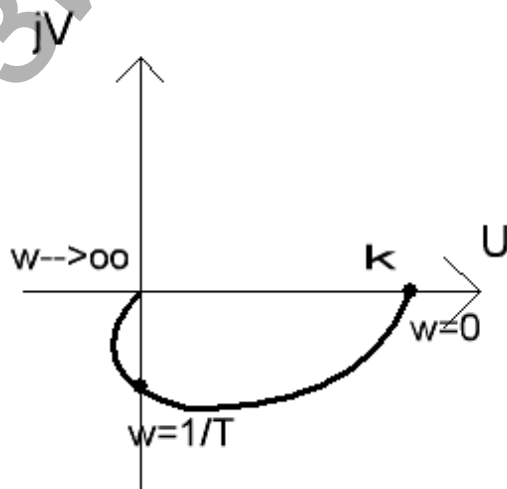
#### Колебательное звено.

Частотные и временные функции и характеристики звена имеют следующий вид.

Частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = k / [(1 - T^2 \omega^2) + j2\xi T \omega]$$

Амплитудно - фазовая частотная характеристика



Умножив числитель и знаменатель частотной передаточной функции на комплексно – сопряжённую знаменателю функцию, получим вещественную и мнимую частотные функции.

Вещественная частотная функция



$$U(\omega) = \frac{k(1 - T^2 \omega^2)}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2}$$

Мнимая частотная функция

$$V(\omega) = \frac{-2k\xi T \omega}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2}$$

Амплитудная частотная функция

$$A(\omega) = k / \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2}$$

Фазовая частотная функция

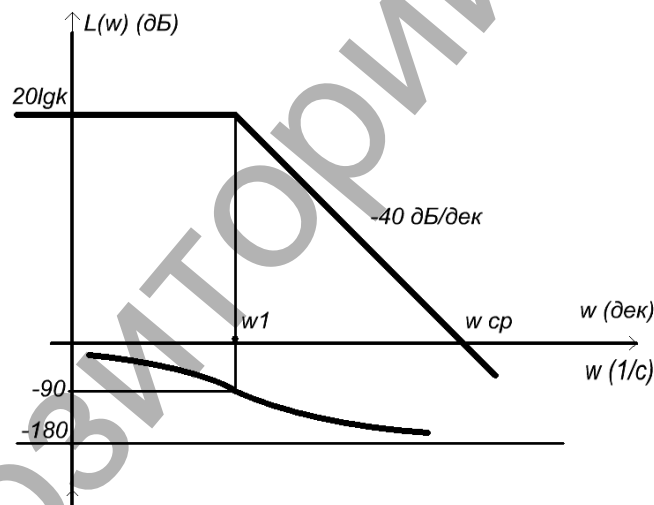
$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\xi \omega T}{1 - T^2 \omega^2} \text{ при } \omega \leq 1/T$$

$$\varphi(\omega) = -\pi/2 - \arctg \frac{2\xi \omega T}{1 - T^2 \omega^2} \text{ при } \omega > 1/T$$

Логарифмическая амплитудно – частотная функция

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2} \quad (2.26)$$

На практике, как правило, строят так называемую асимптотическую логарифмическую амплитудно – частотную характеристику.



Уравнение асимптотической ЛАЧХ имеет вид

$$L(\omega) \approx 20 \lg k, \text{ если } \omega < \omega_1 = 1/T$$

$$L(\omega) \approx 20 \lg k - 40 \lg T \omega, \text{ если } \omega > \omega_1$$

Оно получается из уравнения (2.26), если в нём под корнем при  $\omega < \omega_1$  оставить только единицу, а при  $\omega > \omega_1$  – слагаемое  $T^4 \omega^4$ . Частоту  $\omega_1 = 1/T$ , при которой пересекаются асимптоты, называют сопрягающей частотой.

Согласно уравнению, асимптотическую ЛАЧХ строят следующим образом: до частоты  $\omega = \omega_1$  проводят прямую, параллельную оси частот на уровне  $L(\omega) = 20 \lg k$ , а далее через точку с координатами  $\omega = \omega_1$  и  $L(\omega) = 20 \lg k$  прямую под наклоном  $-40$  дБ/дек.

Точная и асимптотическая ЛАЧХ имеют существенное различие при сопрягающей частоте, отклонение зависит от коэффициента демпфирования и составляет при  $\xi=0,1$  примерно 15 дБ.

Точка пересечения характеристики с осью частот определяет частоту среза  $\omega_{cp}$ .

Фазовая частотная характеристика асимптотически стремится к нулю при  $\omega \rightarrow 0$  и к  $-\pi$  ( $-180^\circ$ ) при  $\omega \rightarrow \infty$ . При  $\omega = \omega_c$  фазовая частотная характеристика принимает значение  $-\pi/2$  ( $-90^\circ$ ).

Переходная функция получается как решение уравнения, описывающего колебательное звено при  $x(t) = I(t)$  и нулевых начальных условиях  $y(0) = y'(0) = 0$ .

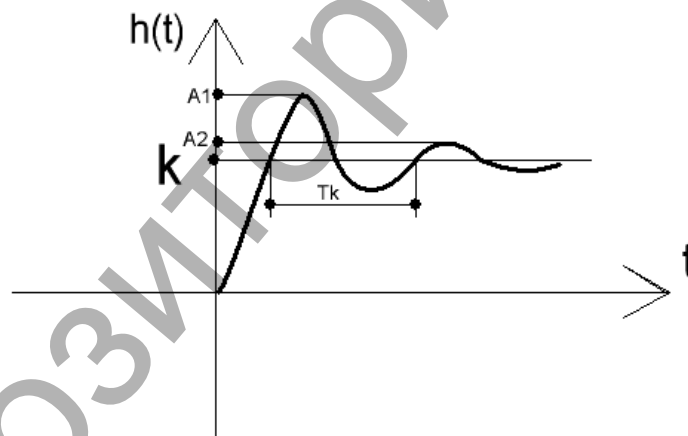
$$h(t) = k \left[ 1 - \frac{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t - \varphi_0) \right],$$

Где  $\alpha = \xi/T$ ,  $\beta = \sqrt{1 - \xi^2}/T$ ,  $\varphi_0 = \arctg[\sqrt{1 - \xi^2}/\xi]$ .

По переходной характеристике можно определить параметры колебательного звена следующим образом. Передаточный коэффициент  $k$  определяют по установившемуся значению переходной функции. Постоянную времени  $T$  и коэффициент демпфирования  $\xi$  можно найти из уравнений

$$\beta T_k = 2\pi, \quad A_1/A_2 = e^{\alpha T_k},$$

где  $T_k$  – период колебаний,  $A_1, A_2$  – амплитуды соседних колебаний относительно установившегося значения.



**Консервативное звено ( $\xi = 0$ )**

Передаточная функция

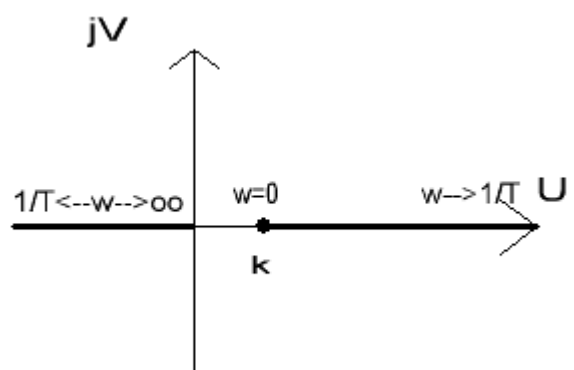
$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 1}$$

Частотные и временные функции и характеристики звена имеют следующий вид.

Частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = k / (1 - T^2 \omega^2)$$

Амплитудно - фазовая частотная характеристика



Вещественная частотная функция

$$U(\omega) = k(1 - T^2 \omega^2)$$

Мнимая частотная функция

$$V(\omega) = 0$$

Амплитудная частотная функция

$$A(\omega) = k / (1 - T^2 \omega^2)$$

Фазовая частотная функция

$$\varphi(\omega) = 0 \text{ при } \omega \leq 1/T$$

$$\varphi(\omega) = -\pi \text{ при } \omega > 1/T$$

Логарифмическая амплитудно – частотная функция

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg (1 - T^2 \omega^2) \quad (2.26)$$

На практике, как правило, строят так называемую асимптотическую логарифмическую амплитудно – частотную характеристику.

Уравнение асимптотической ЛАЧХ имеет вид

$$L(\omega) \approx 20 \lg k, \text{ если } \omega < \omega_1 = 1/T$$

$$L(\omega) \approx 20 \lg k - 40 \lg T \omega, \text{ если } \omega > \omega_1$$

Оно получается из уравнения (2.26),

если в нём при  $\omega < \omega_1$  оставить только единицу, а при  $\omega > \omega_1$  – слагаемое  $T^2 \omega^2$ . Частоту  $\omega_1 = 1/T$ , при которой пересекаются асимптоты, называют сопрягающей частотой.

Согласно уравнению, асимптотическую ЛАЧХ строят следующим образом: до частоты  $\omega = \omega_1$  проводят прямую, параллельную оси частот на уровне  $L(\omega) = 20 \lg k$ , а далее через точку с координатами  $\omega = \omega_1$  и  $L(\omega) = 20 \lg k$  – прямую под наклоном  $-40 \text{ дБ/дек}$ .

Точная и асимптотическая ЛАЧХ имеют существенное различие при сопрягающей частоте. Точная характеристика на частоте сопряжения  $\omega_1$  устремляется в бесконечность и испытывает разрыв.

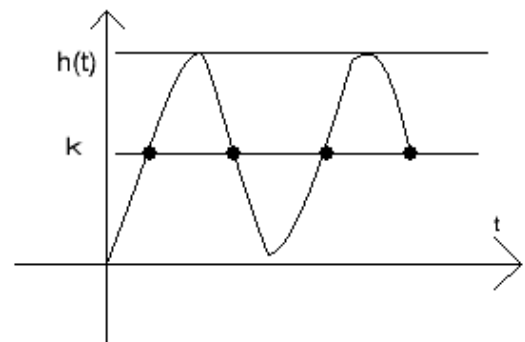
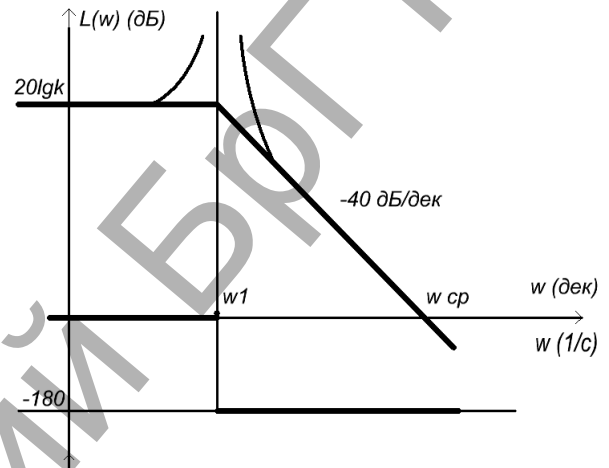
Точка пересечения характеристики с осью частот определяет частоту среза  $\omega_{cp}$ .

Фазовая частотная характеристика равна нулю при  $\omega \rightarrow 0$  и равна  $-\pi$  ( $-180^\circ$ ) при  $\omega \rightarrow \infty$ . При  $\omega = \omega_1$  фазовая частотная характеристика испытывает разрыв.

Переходная функция

$$h(t) = k (1 - \cos \omega_1 t)$$

Переходная характеристика представляет собой график гармонических колебаний.



### Апериодическое звено второго порядка ( $\xi \geq 1$ )

Передаточная функция звена может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

где  $T_{1,2} = T / (\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})$

Апериодическое звено второго порядка можно представить как последовательное соединение двух апериодических звеньев первого порядка. Оно не является элементарным звеном.

### 7. Неминимально – фазовые звенья

Звено называют минимально – фазовым, если все нули и полюса его передаточной функции имеют отрицательные или равные нулю вещественные части. Если хотя бы один нуль или полюс передаточной функции имеет положительную вещественную часть, то звено называется *неминимально – фазовым*.

Нулями передаточной функции  $W(p) = R(p) / Q(p)$  называют корни уравнения  $R(p) = 0$ , то есть такие значения  $p$ , при которых передаточная функция обращается в нуль, а полюсами – корни уравнения  $Q(p) = 0$ , то есть такие значения  $p$ , при которых передаточная функция обращается в бесконечность.

Все рассмотренные выше элементарные звенья относят к минимально – фазовым. Передаточные функции неминимально – фазовых звеньев имеют следующий вид.

$$W(p) = k / (Tp - 1), \quad W(p) = k(Tp - 1),$$

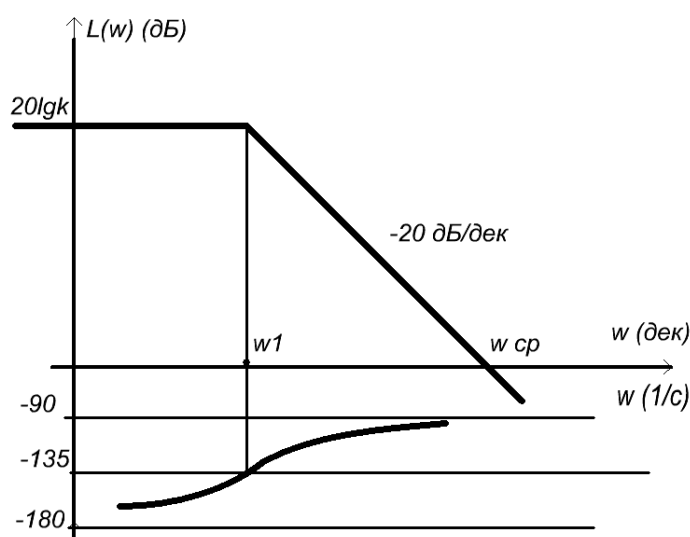
$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 - 2\xi Tp + 1}$$

Для неминимально – фазовых звеньев характерно то, что у них сдвиг фазы по модулю больше, чем у минимально – фазовых звеньев с аналогичной амплитудно – частотной характеристикой.

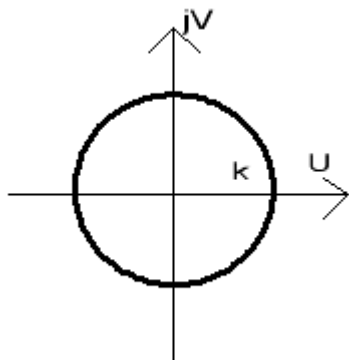
Для звена с передаточной функцией  $W(p) = k / (Tp - 1)$ , логарифмические частотные характеристики имеют следующий вид.

К неминимально – фазовым звеньям относят звено чистого запаздывания с передаточной функцией

$$W(p) = k e^{-\tau p}.$$



Частотная передаточная функция  $W(j\omega) = k e^{-j\tau\omega} = k(\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau)$ .



Амплитудно – фазовая частотная характеристика – окружность с центром в начале координат и радиусом  $k$ .

Вещественная частотная функция  
 $U(\omega) = k \cos \omega\tau$

Мнимая частотная функция  
 $V(\omega) = -k \sin \omega\tau$

Амплитудная частотная функция

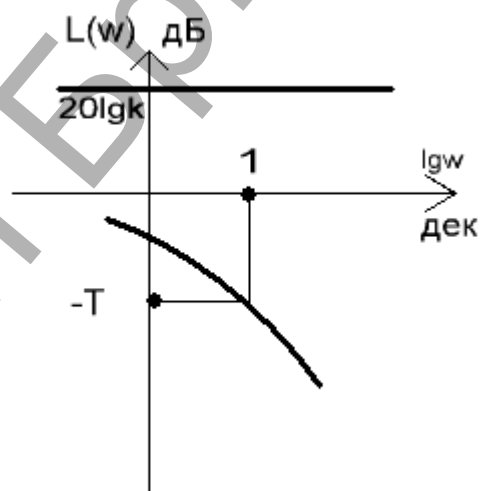
$$A(\omega) = k$$

Фазовая частотная функция

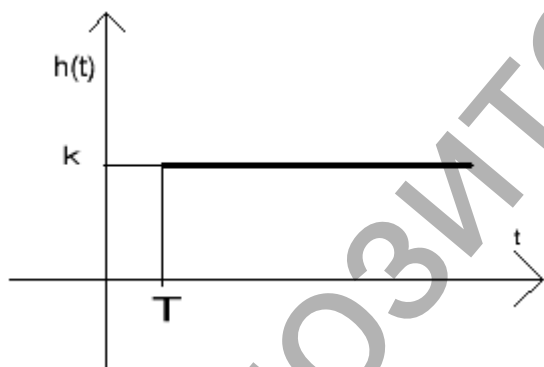
$$\varphi(\omega) = -\omega\tau$$

Логарифмическая амплитудно – частотная функция

$$L(\omega) = 20 \lg k$$



Фазовая частотная характеристика описывается графиком функции  $-\tau 10^{\omega}$ .



Переходная характеристика приведена на рисунке.

## 2.6 Построение логарифмических частотных характеристик

Передаточные функции разомкнутых одноконтурных систем можно представить как произведение передаточных функций элементарных звеньев.

$$W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p) \quad (2.27)$$

В этом случае модули  $A(\omega) = |W(j\omega)|$ ,  $A_i(\omega) = |W_i(j\omega)|$  связаны соотношением

n

$$A(\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(\omega). \quad (2.28)$$

Аргументы  $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$ ,  $\varphi_i(\omega) = \arg W_i(j\omega)$  связаны соотношением

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega). \quad (2.29)$$

Из (2.27) следует, что логарифмические амплитудно – частотные функции связаны соотношением

$$L(\omega) = \sum_{i=1}^n L_i(\omega), \quad (2.30)$$

где  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ ,  $L_i(\omega) = 20 \lg A_i(\omega)$ .

Из (2.30) вытекает следующее правило построения логарифмических частотных характеристик : строят ЛЧХ отдельных звеньев, а затем их графически складывают.

На практике используют несколько иной, более простой порядок построения ЛАЧХ, который так же следует из (2.30). Проиллюстрируем это на примере системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_3^2 p^2 + 2\xi T_3 p + 1)} = \frac{100(p+1)}{p(10p+1)(0,01p^2 + 0,1p + 1)}.$$

Логарифмическая амплитудно – частотная функция

$$L(\omega) = 40 - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{(10\omega)^2 + 1} + 20 \lg \sqrt{\omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{(1 - 0,01\omega^2)^2 + (0,1\omega)^2}.$$

Асимптотическая ЛАЧХ системы состоит из четырёх асимптот и строится следующим образом. Рассчитаем сопрягающие частоты

$$\omega_1 = 1/T_1 = 1/10 = 0,1; \quad \omega_2 = 1/T_2 = 1; \quad \omega_3 = 1/T_3 = 1/0,1 = 10$$

Здесь  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  – сопрягающие частоты аperiodического, форсирующего и колебательного звеньев соответственно. При построении асимптотической ЛАЧХ элементарных звеньев при частотах, меньших сопрягающей частоты, под корнем оставляют единицу, а остальными членами пренебрегают, а при частотах, больших сопрягающей, оставляют член с наивысшей степенью  $\omega$ .

В рассматриваемом примере при  $\omega < \omega_1$

$$L(\omega) \approx 40 - 20 \lg \omega$$

Это уравнение *первой асимптоты*. По этому уравнению первую асимптоту проводят через точку с координатами  $\omega = 1$  ( $\lg \omega = 0$ ) и  $L(\omega) = 20 \lg k$  с наклоном  $-20 \text{ дБ/дек}$ . Она заканчивается на первой сопрягающей частоте.

При  $\omega_1 \leq \omega < \omega_2$  имеем

$$L(\omega) \approx 40 - 20 \lg \omega - 20 \lg 10\omega = 20 - 40 \lg \omega$$

Это уравнение *второй асимптоты*. Её наклон изменяется на  $-20 \text{ дБ/дек}$ , что обусловлено апериодическим звеном, и составляет  $-40 \text{ дБ/дек}$ . Вторую асимптоту проводят от конца первой асимптоты до второй сопрягающей частоты.

При  $\omega_2 \leq \omega < \omega_3$  имеем

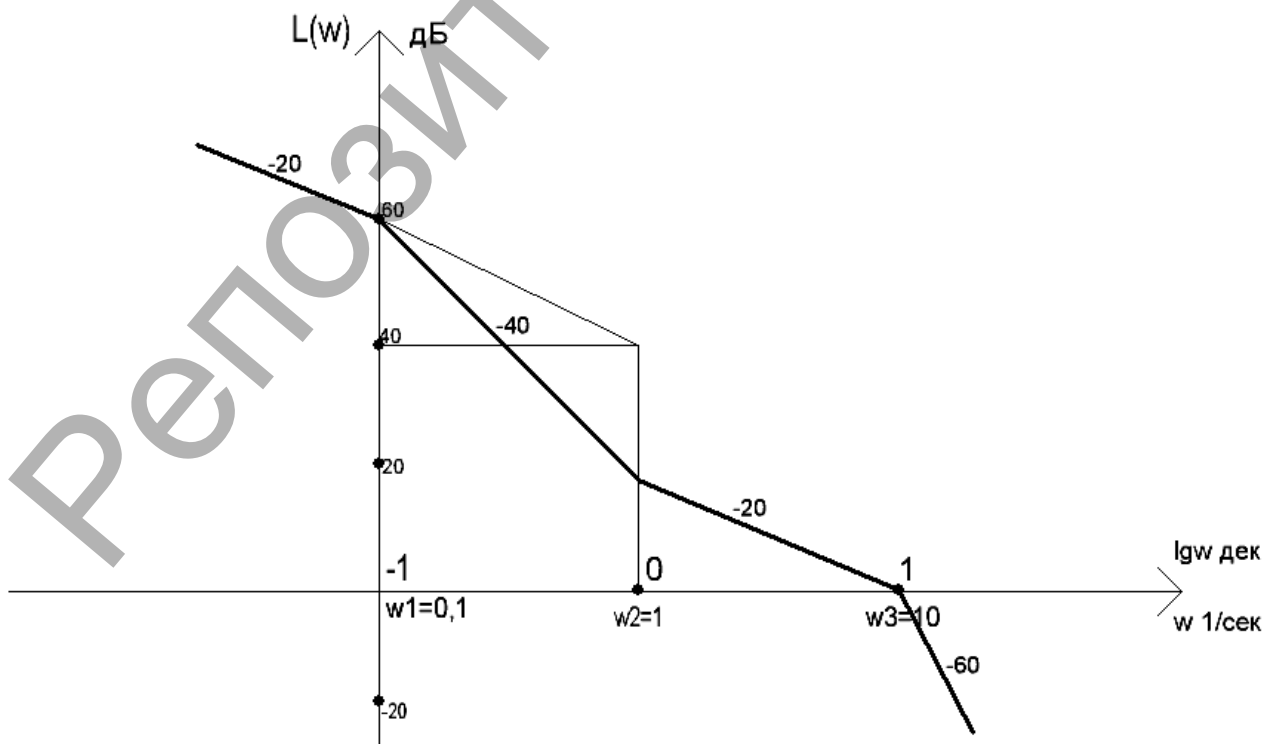
$$L(\omega) \approx 20 - 40 \lg \omega + 20 \lg \omega = 20 - 20 \lg \omega.$$

Это уравнение *третьей асимптоты*. Её наклон изменяется на  $+20 \text{ дБ/дек}$ , что обусловлено форсирующим звеном. Третью асимптоту проводят от конца второй до третьей сопрягающей частоты. С наклоном  $-20 \text{ дБ/дек}$ .

При  $\omega \geq \omega_3$

$$L(\omega) \approx 20 - 20 \lg \omega - 40 \lg 0,1\omega = 60 - 60 \lg \omega.$$

Это уравнение *последней четвертой асимптоты*. Её наклон меняется по отношению к третьей асимптоте на  $-40 \text{ дБ/дек}$  и обуславливается колебательным звеном. Четвёртая асимптота проходит от третьей сопрягающей частоты под наклоном  $-60 \text{ дБ/дек}$ .



Сформулируем порядок построения асимптотической ЛАЧХ.

1. Вычислить сопрягающие частоты и значение  $20 \lg k$ , где  $k$  – передаточный коэффициент системы, равный произведению передаточных коэффициентов звеньев.
  2. Построить первую асимптоту до первой сопрягающей частоты через точку с координатами  $\omega=1$ ,  $L(\omega)=20 \lg k$  с наклоном  $-n \cdot 20$  (дБ/дек), где  $n$  – число интегрирующих звеньев в передаточной функции системы.
  3. Построить вторую асимптоту от конца первой до второй сопрягающей частоты. Её наклон изменяется по сравнению с предыдущей на  $20$ ,  $-20$  или  $-40$  дБ/дек в зависимости от того, определяется ли сопрягающая частота форсирующим, апериодическим или колебательным звеном соответственно.
  4. Каждая последующая асимптота строится аналогично второй. Последняя асимптота ограничена только на сопрягающей частоте слева.
- Фазовые частотные характеристики строятся путем графического сложения кривых для элементарных звеньев системы.

### 3. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Для иллюстрации положений и методов предыдущей главы рассмотрим в качестве примера вывод дифференциальных уравнений и передаточных функций системы автоматического регулирования (САР) напряжения генератора постоянного тока. Отметим, что наиболее сложным этапом является вывод дифференциальных уравнений. Для выполнения этапа требуется знание процессов, происходящих в технических блоках системы и владение аппаратом математического анализа. Для записи передаточных функций необходимо владеть аппаратом преобразования Лапласа.

#### 3.1 Схема системы регулирования напряжения генератора

Принципиальная схема системы представлена на рис.3.1.



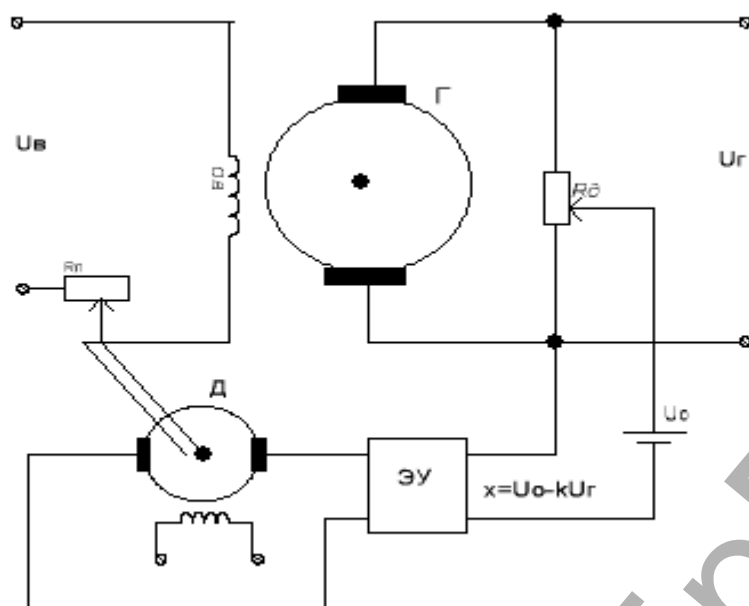


Рисунок 3.1

Система предназначена для обеспечения стабильного напряжения  $U_2$ , вырабатываемого генератором постоянного тока  $\Gamma$ . Генератор приводится во вращение от внешнего привода, в качестве которого могут быть паровая, водяная турбина или электродвигатель. Величина выходного напряжения  $U_2$  регулируется током в обмотке возбуждения  $OB$  генератора. Ток в этой цепи зависит от сопротивления потенциометра  $R_n$ , включенного последовательно с обмоткой возбуждения. Сопротивление потенциометра определяется положением движка, связанного с осью двигателя  $D$ . Якорная цепь двигателя постоянного тока  $D$  питается от электронного усилителя  $ЭУ$ , на вход которого подается сигнал рассогласования  $x$ . Сигнал рассогласования определяется как разность эталонного напряжения  $U_0$  и напряжения  $kU_2$ , пропорционального фактическому напряжению на выходе. Вычитаемая доля фактического напряжения снимается с потенциометра  $R_d$ , выполняющего роль делителя напряжения.

Требуемая величина выходного напряжения определяется эталонным напряжением  $U_0$  и положением движка делителя напряжения, задающим коэффициент  $k$ .

Система работает следующим образом. Когда под влиянием любых возмущений напряжение на выходе уходит от заданного значения, на входе электронного усилителя появится постоянное напряжение, величина и полярность которого зависят от разности заданного и фактического напряжений генератора. Двигатель  $D$  перемещает движок потенциометра  $R_n$  таким образом, чтобы изменение тока в обмотке возбуждения генератора привело к компенсации воздействия появившихся возмущений и возврату выходного напряжения к заданному значению.

Наличие в системе элементов с механическими и электромагнитными инерционностями делают поведение системы нетривиальным, выбор парамет-

ров технических звеньев неочевиден и без применения специальных методов теории автоматического управления невозможен.

На рис.3.2 представлена блок-схема системы. Схема отображает последовательность прохождения и преобразования сигнала между элементами системы без расшифровки описания процессов в блоках.

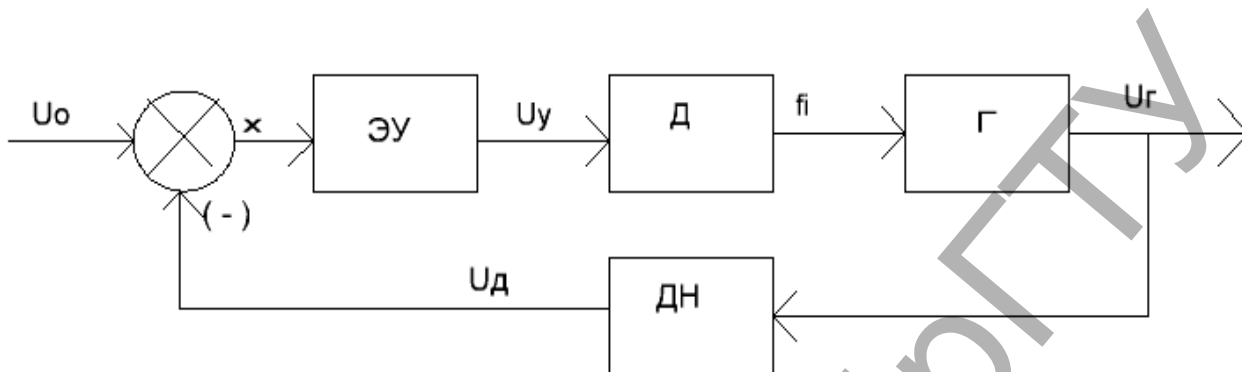


Рисунок 3.2.

Здесь обозначены звенья системы: **ЭУ** – электронный усилитель; **Д** – двигатель привода потенциометра в цепи возбуждения; **Г** – генератор, объект управления; **ДН** – делитель напряжения на выходе генератора. Сигналы на входе и выходе звеньев:  $U_o$  – эталонное напряжение;  $U_d$  – напряжение с делителя на выходе системы;  $x = U_o - U_d$  – рассогласование заданного и фактического значений напряжения на выходе;  $U_y$  – напряжение на выходе электронного усилителя для управления исполнительным двигателем;  $f_i(\varphi)$  угол поворота выходного вала исполнительного двигателя для перемещения движка потенциометра;  $U_g$  – напряжение на выходе генератора, выходной параметр системы.

Знак (-) у элемента сравнения обозначает отрицательную обратную связь.

### 3.2 Уравнения и передаточные функции звеньев САР напряжения генератора

Определим дифференциальные уравнения и передаточные функции отдельных элементов, входящих в рассматриваемую систему.

#### Генератор.

Управление генератором производится путём изменения переменного сопротивления  $R_n$ , включённого в цепь возбуждения (рис.3.1). Номинальное значение этого сопротивления  $R_{nn}$  обеспечивает номинальный ток в цепи возбуждения  $i_a = i_{вн}$ . Текущее значение сопротивления  $R_n = R_{nn} + \Delta R$ .

Отклонение  $\Delta R$  переменного сопротивления пропорционально углу поворота  $\varphi$  вала двигателя

$$\Delta R = -c_1 \varphi. \quad (3.1)$$

Здесь  $c_1$  – положительная постоянная, знак минус указывает, что при повороте вала двигателя в положительном направлении сопротивление  $R_n$  уменьшается и наоборот. Входной величиной генератора является угол  $\varphi$ , а выходной – напряжение  $U_g$  на нагрузке.

Принципиальная электрическая схема представлена на рис.3.3.

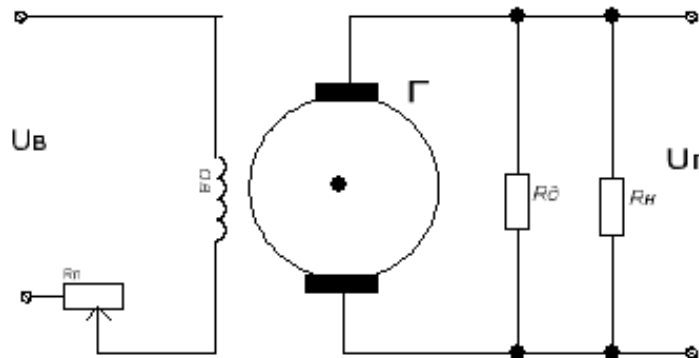


Рисунок 3.3

Составим уравнение динамики генератора без учета влияния второстепенных факторов, таких как гистерезис процессов намагничивания, вихревые токи и т.п. На рис.3.4 приведена эквивалентная электрическая схема генератора.

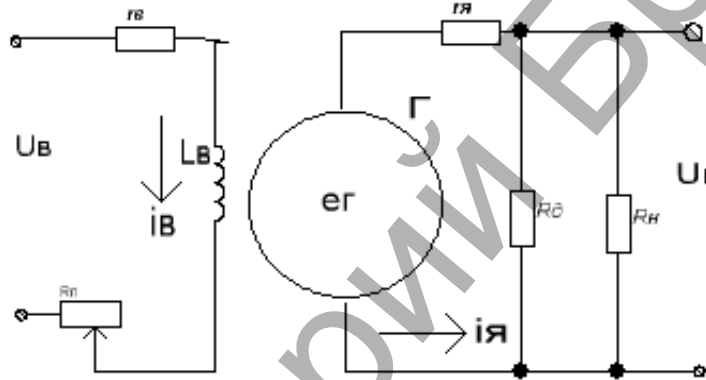


Рисунок 3.4

Здесь  $r_в$  и  $L_в$  - активное и индуктивное сопротивление обмотки возбуждения,  $e_2$  - э.д.с генератора,  $r_я$  - активное сопротивление обмотки якоря (его индуктивным сопротивлением пренебрегаем),  $R_н$  - сопротивление нагрузки. Дополнительное сопротивление  $R_д$  выбирается таким, что током через него по сравнению с током нагрузки можно пренебречь.

Уравнение равновесия напряжений в цепи обмотки возбуждения

$$u_в = (r_в + R_{нн} + \Delta R) i_в + L_в di_в / dt . \quad (3.2)$$

Для якорной цепи уравнения равновесия

$$e_2 = (r_я + R_н) i_я, \quad u_2 = R_н i_я . \quad (3.3)$$

В статическом режиме при номинальных значениях тока возбуждения  $i_{вн}$  и тока якорной цепи  $i_{ян}$  уравнения равновесия принимают вид

$$u_{вн} = (r_в + R_{нн}) i_{вн} \quad (3.4)$$

$$e_{2н} = (r_я + R_{нн}) i_{ян}, \quad u_{2н} = R_{нн} i_{ян} . \quad (3.5)$$

Подставим в уравнение равновесий для цепи возбуждения (3.2) выражение для текущего значения тока  $i_в = i_{вн} + \Delta i_в$  и выражение  $\Delta R = -c_1 \varphi$ . Отбрасывая малый член  $c_1 \Delta i_в \varphi$  более высокого порядка и учитывая (3.4), получим

$$T_в (d\Delta i_в / dt) + \Delta i_в = k_1 \varphi .$$

В операторной форме

$$(T_e p + 1) \Delta i_e = k_1 \varphi, \quad (3.6)$$

где

$$T_e = L_e / (r + R_{nn}), \quad k_1 = c_1 i_{en} (r_e + R_{nn}).$$

Э.д.с. генератора связана с током возбуждения нелинейной зависимостью

$$e_2 = F(i_e). \quad (3.7)$$

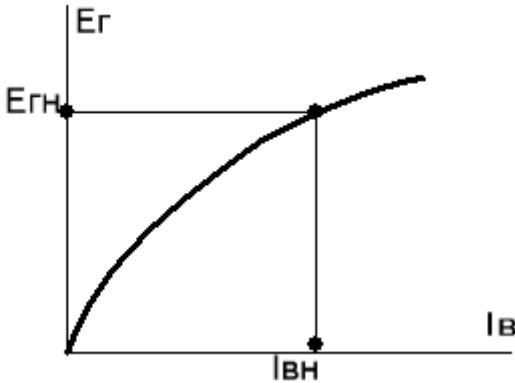


Рисунок 3.5

Произведя линеаризацию (3.7) в окрестностях рабочей точки, можно записать

$$e_2 = e_{2н} + c_2 \Delta i_e, \quad (3.8)$$

где  $c_2$  – значение производной функции (3.7) при номинальном значении тока возбуждения.

Используя (3.8) и (3.5), уравнения (3.3) можно преобразовать к виду

$$c_2 \Delta i_e = \left( \frac{r_я}{R_{nn}} + 1 \right) \Delta u_2 - \frac{r_я}{R_{nn}} \Delta R_n i_я. \quad (3.9)$$

Исключив из (3.6) и (3.9)  $\Delta i_e$ , получим уравнение, связывающее входную величину  $\varphi$ , возмущающее воздействие  $f = \Delta r_я i_я$  и выходную величину  $\Delta u_2$ .

$$(T_e p + 1) \Delta u_2 = k_{21} \varphi + k_{22} (T_e p + 1) f, \quad (3.10)$$

где  $k_{21} = k_1 c_2 / (r_я / R_{nn} + 1)$ ,  $k_{22} = r_я / (r_я + R_{nn})$ .

Из уравнения (3.10) в соответствии с (2.5) – (2.7) можно записать передаточные функции генератора по управляющему воздействию  $W(p)$  и по возмущающему воздействию  $W_f(p)$ . Передаточная функция по управляющему воздействию  $\varphi$  соответствует апериодическому звену

$$W(p) = k_{21} / (T_e p + 1).$$

Передаточная функция по возмущающему воздействию  $f$   $W_f(p) = k_{22}$  соответствует пропорциональному звену. Структурная схема генератора представлена на рис.3.6.

$$f \quad \Delta u_2$$

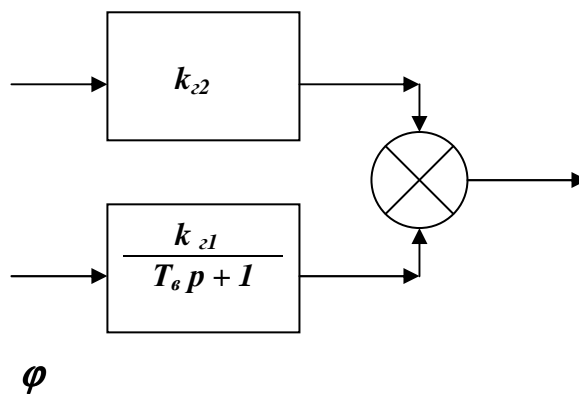


Рисунок 3.6.

### Двигатель

Принципиальная электрическая схема двигателя постоянного тока с независимым возбуждением приведена на рис.3.7.

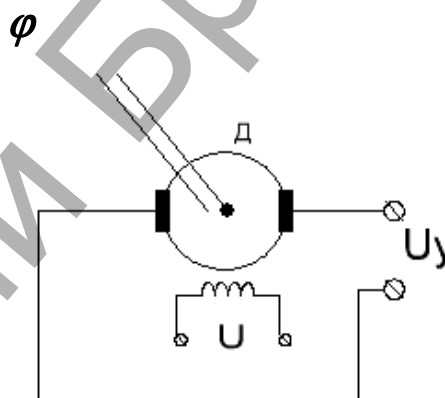


Рисунок 3.7

При управлении со стороны якорной цепи сигналом  $u_y$ , напряжение на обмотке возбуждения  $u = const$ . Эквивалентная электрическая схема якорной цепи приведена на рис.3.8.

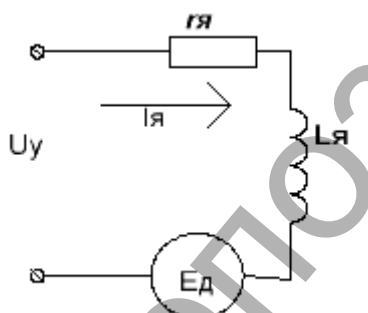


Рисунок 3.8

Здесь обозначены  $r_я$  и  $L_я$  – активное и индуктивное сопротивления обмотки якоря,  $i_я$  – ток якоря,  $e_d$  – э.д.с., наводимая в обмотке якоря при его вращении.

Уравнение равновесия напряжений в контуре цепи якоря двигателя

$$u_y = r_я i_я + L_я \frac{di_я}{dt} + e_d . \quad (3.11)$$

Э.д.с.  $e_d$  пропорциональна угловой скорости вращения вала двигателя

$$e_d = c_3 d\phi/dt.$$

Значение постоянной  $c_3$  зависит от тока возбуждения и конструкции двигателя.

Уравнение (3.11) с учётом этого можно записать в виде

$$di_я \quad c_я \quad d\phi$$

$$T_{я} \frac{di_{я}}{dt} + \frac{i_{я}}{r_{я}} = u_{y}.$$

или

$$(T_{я} p + 1) i_{я} + \frac{1}{r_{я}} p \varphi = \frac{c_3}{r_{я}} u_{y}, \quad (3.12)$$

где  $T_{я} = L_{я} / r_{я}$  – постоянная времени электрической цепи якоря.

Уравнение для моментов движения

$$J d^2 \varphi / dt^2 = M_{вр} - M_c \quad \text{или} \quad J p^2 \varphi = M_{вр} - M_c, \quad (3.13)$$

где  $J$  – момент инерции вала двигателя с учетом нагрузки;  $M_{вр}$  – вращающий момент;  $M_c$  – момент сопротивления. Вращающий момент пропорционален току якоря  $M_{вр} = c_4 i_{я}$ . Значение постоянной  $c_4$  зависит от тока возбуждения и конструкции двигателя. Исключив из (3.11), (3.12), и (3.13)  $M_{вр}$  и ток  $i_{я}$ , получим

$$(T_{я} p + 1) \left( \frac{J}{c_4} p^2 \varphi + \frac{1}{c_4} M_c \right) + \frac{c_3}{r_{я}} p \varphi = \frac{1}{r_{я}} u_{y}.$$

Это уравнение можно преобразовать к виду

$$(T_{я} T_{эм} p^2 + T_{эм} p + 1) p \varphi = k_{\delta 1} u_{y} - k_{\delta 2} (T_{я} p + 1) M_c, \quad (3.14)$$

где  $T_{эм} = J r_{я} / c_3 c_4$  – электромеханическая постоянная времени;  $k_{\delta 1} = c_3$ ;  $k_{\delta 2} = r_{я} / c_3 c_4$  – передаточные коэффициенты.

Принимая во внимание (2.5) – (2.7), из (3.14) можно записать передаточные функции двигателя.

Передаточная функция по управляющему воздействию  $u_{\delta}$

$$W(p) = \frac{k_{\delta 1}}{p (T_{я} T_{эм} p^2 + T_{эм} p + 1)}.$$

Передаточная функция по возмущению  $f$  (моменту сопротивления  $M_c$ )

$$W_f(p) = \frac{k_{\delta 2} (T_{я} p + 1)}{p (T_{я} T_{эм} p^2 + T_{эм} p + 1)}.$$

Передаточная функция по управлению составлена из пропорционального, интегрирующего и колебательного звеньев. Передаточная функция по возмущению – из пропорционального, апериодического, интегрирующего и колебательного звеньев. Структурная схема приведена на рис 3.9.

$M_c$

$\varphi$

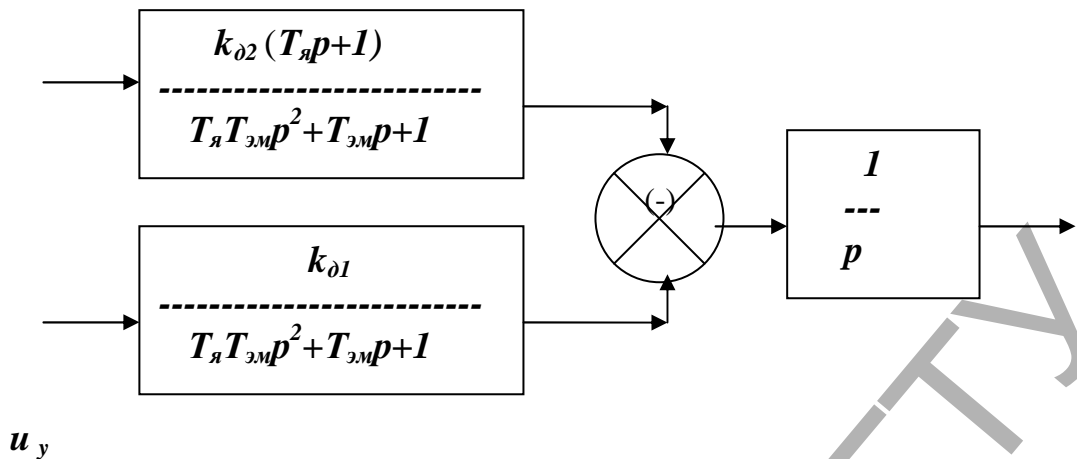


Рисунок 3.9

**Усилитель, звено сравнения, делитель напряжения**

Уравнение для усилителя

$$u_y = k_y x.$$

Для звена сравнения

$$x = u_o - u_\delta.$$

Уравнение для делителя напряжения

$$u_\delta = k_\delta u_z.$$

Уравнение генератора связывает  $\Delta u_z$  с воздействиями  $\varphi$  и  $f$ , поэтому необходимо преобразовать уравнения пропорциональных звеньев так, чтобы они включали отклонение  $\Delta u_z$ , а не  $u_z$ . С учетом того, что линеаризованные параметры можно представить в виде  $u = u_n + \Delta u$ , где  $u_n$  – номинальное значение, уравнения звена сравнения и делителя напряжения можно записать в виде  $\Delta u_\delta = k_\delta \Delta u_z$  и  $x = \Delta u_o - \Delta u_\delta$ .

Передаточные функции имеют вид:

для усилителя -  $W(p) = k_y$ ,

для двигателя -  $W(p) = k_\delta$ .

**Структурная схема и передаточные функции системы**

Структурная схема САР напряжения генератора составляется на основе блок – схемы (рис.3.2) по передаточным функциям отдельных звеньев и представлена на рис.(3.10).

Используя формулы для записи передаточных функций одноконтурных систем ( п.6 раздел 2.2 ), запишем передаточные функции системы регулирования напряжения.

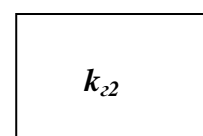
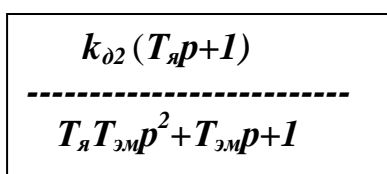
Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{k}{p (T_\epsilon p + 1) (T_y T_{эм} p^2 + T_{эм} p + 1)},$$

где  $k = k_y k_{\delta 1} k_{z1} k_\delta$  – передаточный коэффициент разомкнутой системы.

$M_c$

$f$



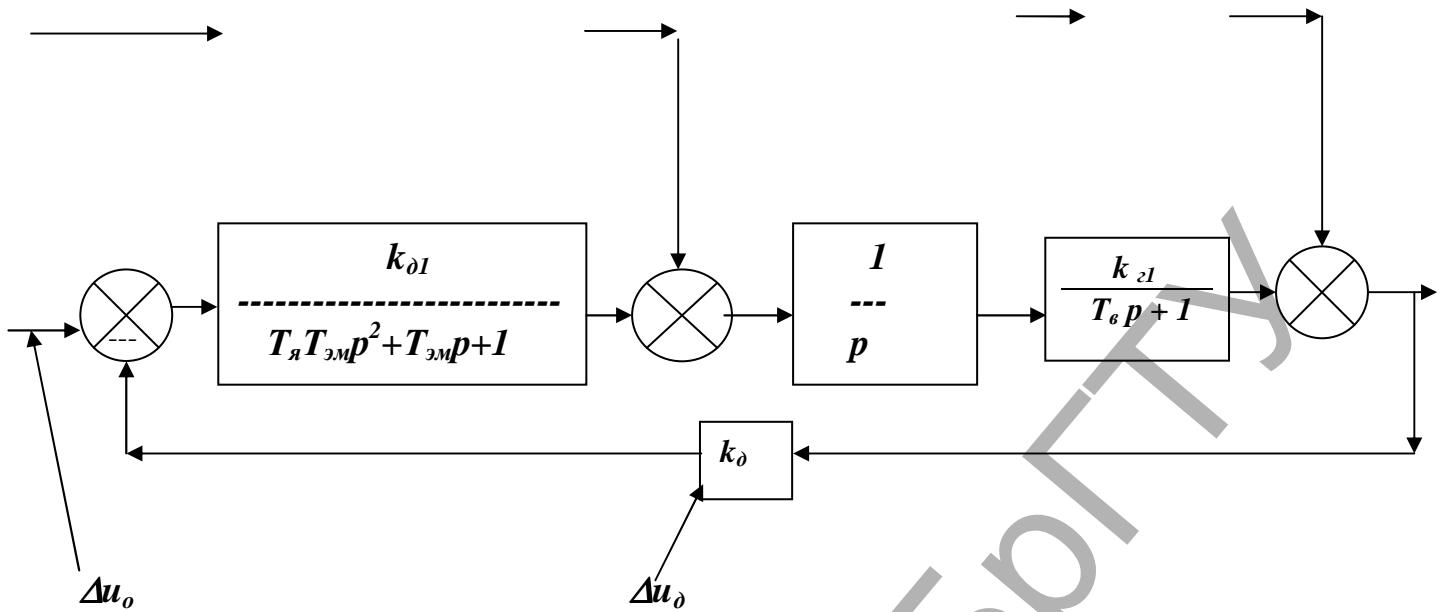


Рисунок 3.10

Передаточная функция прямой цепи по задающему воздействию  $\Delta u_o$

$$W_{n.u}(p) = W(p)/k_{\delta}$$

Передаточная функция прямой цепи по моменту сопротивления  $M_c$

$$W_{n.m}(p) = \frac{k_{\delta 2} k_{\delta 1} (T_{я} p + 1)}{p (T_{\epsilon} p + 1) (T_{я} T_{эм} p^2 + T_{эм} p + 1)}$$

Передаточная функция прямой цепи по возмущению  $f$

$$W_{n.f}(p) = k_{\delta 2}$$

Передаточная функция замкнутой системы относительно выхода  $\Delta u_2$  по задающему воздействию  $\Delta u_o$  записывается по выражению  $W_{uu} = W_{n.u}/(1+W)$ .

$$W_{uu}(p) = \frac{K_u}{a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4}$$

где  $k_u = k/k_{\delta}$ ,  $a_0 = T_{я} T_{эм} T_{\epsilon}$ ,  $a_1 = (T_{я} + T_{\epsilon}) T_{эм}$ ,  $a_2 = T_{эм} + T_{\epsilon}$ ,  $a_3 = 1$ ,  $a_4 = k$ .

Передаточная функция замкнутой системы по моменту сопротивления  $M_c$

$$W_{um} = W_{n.m}/(1+W) = \frac{b_0 p + b_1}{a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4}$$

где  $b_0 = k_{\delta 2} k_{\delta 1} T_{я}$ ,  $b_1 = k_{\delta 2} k_{\delta 1}$ .

Передаточная функция замкнутой системы по возмущению  $f$

$$W_{uf} = W_{n.f}/(1+W) = \frac{k_{\delta 2} (a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p)}{a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4}$$

Уравнение системы в форме преобразования Лапласа (раздел 2.1) имеет вид

$$U_2(s) = W_{uu}(s)U_0(s) + W_{um}(s)M(s) + W_{uf}(s)F(s)$$



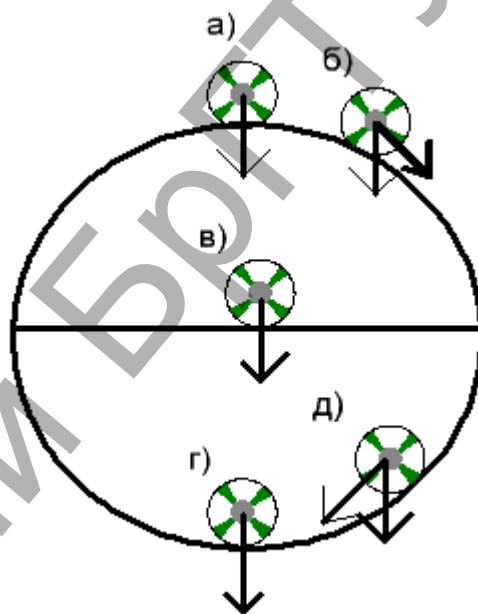
## 4. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

В ряду требований к системам автоматического управления основным является требование к характеру протекающих процессов, которое называют устойчивостью. Неустойчивое поведение системы не позволяет ей работать вообще, приводит к поломке устройств, авариям. При проектировании систем обеспечение устойчивости является главным критерием.

### 4.1 Условия устойчивости системы

Понятие *устойчивости САУ* связано со способностью системы возвращаться в состояние равновесия после исчезновения сил, которые вывели её из этого состояния. Проиллюстрировать это свойство можно положением шара на поверхности.

Рисунок 4.1



Положение шара г) в нижнем секторе является устойчивым, при выведении его из этого положения в д) шар под воздействием силы тяжести стремится к устойчивому положению. Положение а) является неустойчивым, так как малейшее возмущение вынуждает шар оставить это положение и вернуться к нему мешает сила тяжести (положение б). В положении в) шар находится в состоянии безразличного равновесия или на так называемой границе устойчивости.

Условие устойчивости здесь можно сформулировать следующим образом: система называется устойчивой, если из возмущённого состояния равновесия д) она с течением времени перейдёт в некоторую конечную область вблизи невозмущённого состояния равновесия г).

Распространим понятие устойчивости на случай движения некоторой системы. Пусть *состояние* системы определяется в любой момент времени некоторыми координатами  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ . Заданное движение системы определяется некоторым законом изменения координат  $x_{10}(t), x_{20}(t), \dots, x_{n0}(t)$ .

Аналогично случаю положения устойчивого равновесия заданное движение называют невозмущённым движением. Приложение внешних сил приведёт к отклонению фактических параметров от заданных  $x_1(t) \neq x_{10}(t), x_2(t) \neq x_{20}(t)$ , и т. д. Это движение будет возмущённым.

Заданное невозмущённое движение будет устойчивым, если в результате приложения внешних сил, которые затем снимаются, возмущённое движение по истечении некоторого времени придёт в заданную область:

$$|x_i(t) - x_{i0}(t)| \leq \varepsilon_i, \quad i = 1 \dots n.$$

Рассмотрим вопрос устойчивости в приложении к линейным САУ более подробно.

В общем случае дифференциальное уравнение линейной системы автоматического управления в операторной форме имеет вид

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) x, \quad (4.1)$$

где  $a_0 \dots a_i \dots a_n$ ,  $b_0 \dots b_j \dots b_m$  – числовые коэффициенты;  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования;  $x$  – входное воздействие;  $y$  – выходная величина.

Процесс регулирования описывается решением дифференциального уравнения, которое находится как сумма двух решений – *частного решения* неоднородного уравнения (4.1) с правой частью и *общего решения* уравнения без правой части, т.е. с левой частью, приравненной к нулю.

$$y(t) = y_{\text{частн}}(t) + y_{\text{общ}}(t). \quad (4.2)$$

В случае  $y_{\text{частн}}(t) = \text{const}$  его называют *установившимся значением*. В технике первую составляющую (4.2) называют *вынужденной*, а вторую – *переходной* составляющими движения системы  $y(t) = y_e(t) + y_n(t)$ .

Система называется устойчивой, если с течением времени при  $t \rightarrow \infty$  переходная составляющая будет стремиться к нулю  $y_n(t) \rightarrow 0$ .

Найдём эту составляющую. Для этого необходимо найти общее решение дифференциального уравнения (4.1) с нулевой правой частью.

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0. \quad (4.3)$$

Общее решение ищется в виде  $y_n(t) = y_{\text{общ}}(t) = C e^{\delta t}$ . Дифференцируя это выражение  $n$  раз и подставляя в (4.3), получим после сокращения на общий множитель  $C e^{\delta t}$

$$a_0 \delta^n + a_1 \delta^{n-1} + \dots + a_{n-1} \delta + a_n = 0. \quad (4.4)$$

Полученное алгебраическое уравнение называется характеристическим.

Его корни  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  определяют характер переходной составляющей решения дифференциального уравнения, а следовательно, характер переходного процесса в системе. Отметим, что левая часть (4.4) совпадает с левой частью (4.1), поэтому характеристическое уравнение получают, приравнявая левую часть (4.1) к нулю.

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (4.5)$$

Однако нужно помнить, что здесь  $p = \delta$  обозначает не символ дифференцирования, а некоторое комплексное число, являющееся корнем характеристического уравнения системы.

Переходная составляющая решения может быть записана в виде

$$y(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}, \quad (4.6)$$

где  $p_1, p_1, \dots, p_n$  – корни характеристического уравнения;

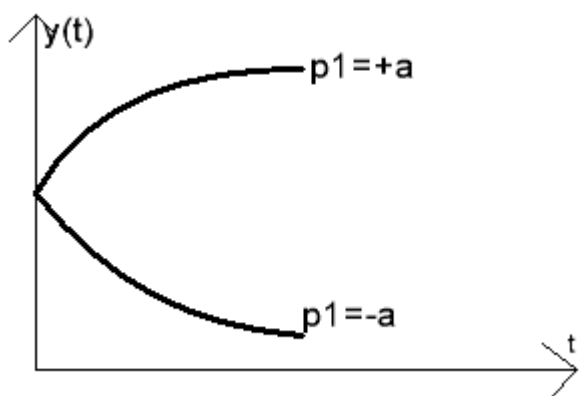
$C_1, C_2, \dots, C_n$  – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Корни характеристического уравнения определяются только левой частью уравнения (4.1), а постоянные интегрирования также правой частью этого уравнения. Поэтому скорость затухания и форма переходного процесса определяются как левой, так и правой частями дифференциального уравнения. Однако устойчивость системы определяет только факт затухания переходного процесса. Следовательно, устойчивость системы не зависит от правой части дифференциального

уравнения и определяется только характеристическим уравнением. Отметим, какими свойствами должны обладать корни для обеспечения необходимых и достаточных условий устойчивости системы.

Корни могут быть вещественными, комплексно – сопряжёнными и мнимыми.

1. Вещественный корень. Если вещественный корень  $p_1$  отрицательный



$p_1 = -\alpha$ , где  $\alpha$  - заведомо положительное число), то слагаемое  $C_1 e^{-\alpha t}$  в (4.6), определяемое этим корнем, будет затухать. При  $p = +\alpha$  соответствующее слагаемое будет нарастать, процесс будет расходиться.

Рисунок 4.2

2. Комплексно – сопряжённые корни. При отрицательной вещественной части два комплексно – сопряжённых корня будут иметь вид  $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ . Соответствующие слагаемые в (4.6) будут иметь вид

$C_1 e^{-(\alpha + j\beta)t} + C_2 e^{-(\alpha - j\beta)t} = A e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \psi)$ , где  $A$  и  $\psi$  - постоянные интегрирования, амплитуда и фаза затухающих колебаний. При этом мнимая часть корня  $\beta$  определяет круговую частоту колебаний, а вещественная часть корня  $\alpha$  - показатель затухания огибающей колебательного процесса.

При положительной вещественной части  $p_{1,2} = +\alpha \pm j\beta$  колебания будут расходящимися (рис.4.3).

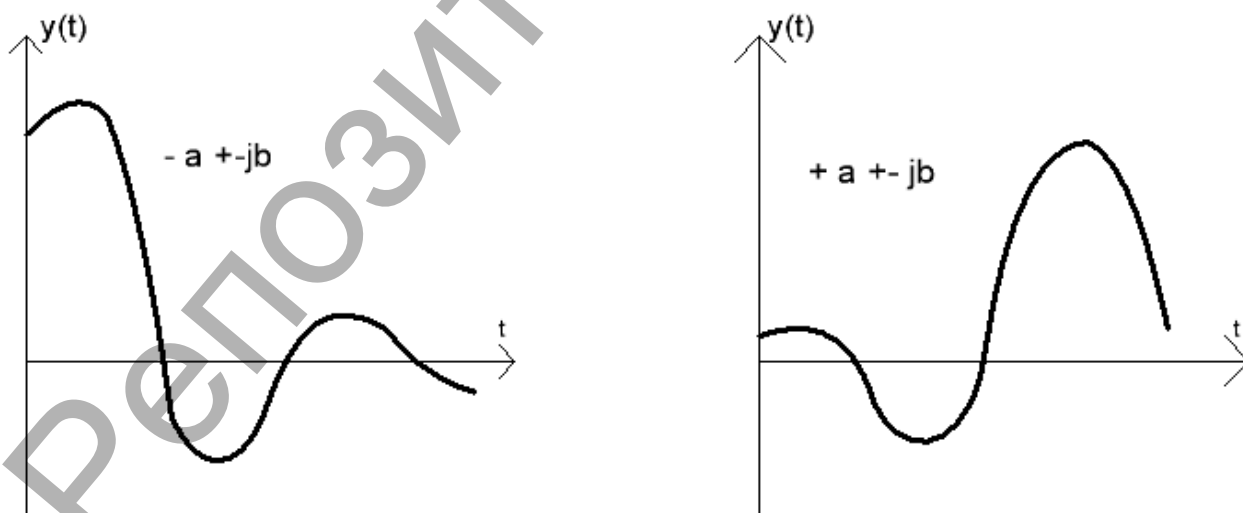


Рисунок 4.3

3. Мнимые корни. В этом случае корни имеют вид  $p = \pm j\beta$ . Слагаемое, определяемое этими корнями, имеет вид  $C_1 e^{j\beta t} + C_2 e^{-j\beta t} = A \sin(\beta t + \psi)$ . График этой составляющей представляет незатухающие колебания с постоянной амплитудой (рис.4.4).

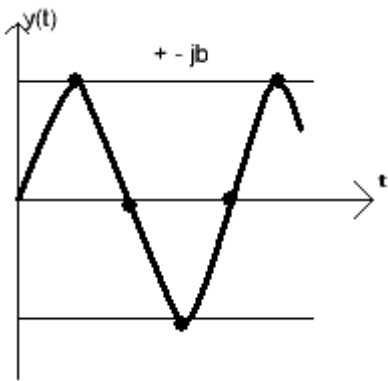


Рисунок 4.4

Из рассмотрения поведения системы в зависимости от значения корней можно сделать вывод: для затухания переходного процесса необходимо и достаточно чтобы вещественные части корней были отрицательными. Если хотя бы один корень будет иметь положительную вещественную часть, то переходный процесс будет расходиться, т.е. система будет неустойчивой.

Корни характеристического уравнения можно отобразить в виде точек на комплексной плоскости (рис.4.5).

Для устойчивости САУ необходимо и достаточно, чтобы все корни лежали слева от мнимой оси комплексной плоскости корней. Мнимая ось представляет собой граничную линию, вправо за которую не должны переходить корни характеристического уравнения.

Мнимая ось является *границей устойчивости*. Вся левая полуплоскость является *областью устойчивости системы*.

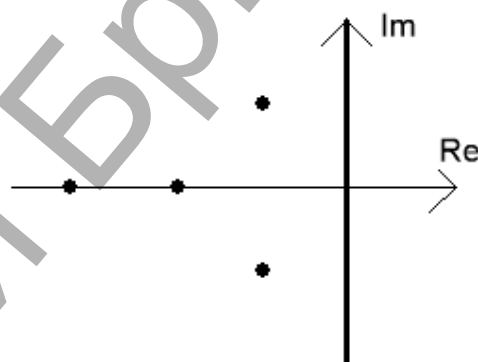


Рисунок 4.5

Особый случай представляют системы, имеющие нулевой корень. Это означает, что в характеристическом уравнении отсутствует свободный член  $a_n = 0$ .

Дифференциальное уравнение в этом случае имеет вид

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1}) p y = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) x.$$

Система будет устойчивой не относительно регулируемой величины  $y$ , а относительно её производной  $py$ . Величина отклонения регулируемой величины может быть любой. Такие системы называют *астатическими*. Степень астатизма определяется числом нулевых корней характеристического уравнения.

Корни характеристического уравнения выражаются через параметры блоков САУ весьма замысловатым образом. Поэтому желательно иметь для оценки устойчивости критерии, связанные с коэффициентами характеристического уравнения, которые более прозрачно связаны с параметрами блоков системы. Такие критерии называют *критериями устойчивости*.

Покажем, что *необходимым*, но не достаточным *условием устойчивости* системы является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения.

Это значит, что при положительности всех коэффициентов система может быть устойчивой, но не исключено и неустойчивое поведение. Если же хотя бы один коэффициент отрицателен, то система не может быть устойчивой. Для иллюстрации этого условия представим характеристическое уравнение следующим образом

$$a_0 (p - p_1) (p - p_2) \dots (p - p_n) = 0.$$

В устойчивой системе все корни отрицательны :  $p_1 = -\alpha_1$  ,  $p_2 = -\alpha_2$  и т.д. Тогда предыдущее выражение можно записать так

$$a_0 (p + \alpha_1) (p + \alpha_2) \dots (p + \alpha_n) = 0.$$

Если теперь раскрыть скобки и вернуться к исходному характеристическому уравнению, то все коэффициенты будут положительными, как результат умножения и сложения заведомо положительных чисел.

## 4.2 Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Разработка этого критерия непосредственно связана с развитием техники систем автоматического регулирования. Критерий разработан по просьбе словацкого профессора Ауреля Стодолы (1859 – 1942), занимавшегося исследованием процесса регулирования турбин, немецким математиком Адольфом Гурвицем (1859 – 1919) в 1895 году.

Критерий Гурвица состоит в вычислении определителей числовых матриц. Для характеристического уравнения составляется квадратная матрица коэффициентов, содержащая  $n$  строк и  $n$  столбцов.

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{array} \quad (4.6)$$

Таблица составляется следующим образом. По диагонали от верхнего левого до нижнего правого углов вписываются все коэффициенты характеристического уравнения по порядку от  $a_1$  до  $a_n$  . Каждая строка дополняется коэффициентами с возрастающими индексами слева направо так, чтобы чередовались строки с нечётными и четными индексами. В случае отсутствия коэффициента, а так же если его индекс меньше нуля или больше  $n$  , на его месте пишется  $0$  .

Критерий устойчивости сводится к тому, что при  $a_0 > 0$  должны быть больше нуля все  $n$  определителей Гурвица, получаемых из квадратной матрицы коэффициентов. Определители Гурвица составляются по следующему правилу.

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad (4.7)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \quad (4.8)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0 \quad (4.9)$$

.....

Последний определитель включает всю матрицу. Но так как в его последнем столбце все элементы, кроме нижнего, равны нулю, то последний определитель выражается через предпоследний следующим образом.

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0. \quad (4.10)$$

Раскрывая определители, фигурирующие в общей формулировке критерия устойчивости Гурвица, можно получить в виде частных случаев критерии устойчивости для систем первого, второго, третьего и более высоких порядков.

1. Уравнение первого порядка.

$$a_0 p + a_1 = 0$$

Условия критерия Гурвица для этого уравнения

$$a_0 > 0$$

$$\Delta_1 = a_1 > 0.$$

2. Уравнение второго порядка.

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$$

Для этого уравнения условия по критерию Гурвица

$$a_0 > 0$$

$$\Delta_1 = a_1 > 0$$

$$a_2 > 0, \quad \text{т.к. по условию (4.10) последний}$$

определитель сводится к условию положительности последнего коэффициента. Таким образом, для уравнения второго порядка необходимым и достаточным условием устойчивости является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения.

3. Уравнение третьего порядка.

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$$

Для этого уравнения условия критерия Гурвица

$$a_0 > 0$$

$$\Delta_1 = a_1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$a_3 > 0$$

При  $a_0 > 0, a_1 > 0, a_3 > 0$  условие  $\Delta_2 > 0$  может выполняться только при  $a_2 > 0$ . Таким образом, необходимое условие устойчивости выполняется. Однако оно не является достаточным. Требуется ещё выполнение соотношения между коэффициентами уравнения  $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ .

Для иллюстрации критерия Гурвица рассмотрим дистанционную следящую систему угла поворота вала. Принципиальная схема системы представлена на рисунке 4.6. Система предназначена для дистанционного управления углом поворота  $\nu_0$  вала электродвигателя  $D$ . Дистанционную передачу и сравнение сигналов, пропорциональных углам поворота, обеспечивает пара сельсинов: сельсин-датчик  $СД$  и сельсин-приёмник  $СП$ . На командной оси сельсина-датчика устанавливается заданный угол поворота  $\nu_1$ . Исполнительная ось сельсина-приёмника поворачивается валом двигателя через редуктор  $P$  на угол  $\nu_2$ .

В индикаторной цепи сельсинной пары возникает напряжение  $u_1$ , пропорциональное разности углов поворота

$$v = v_1 - v_2 \quad u_1 = k_1 v.$$

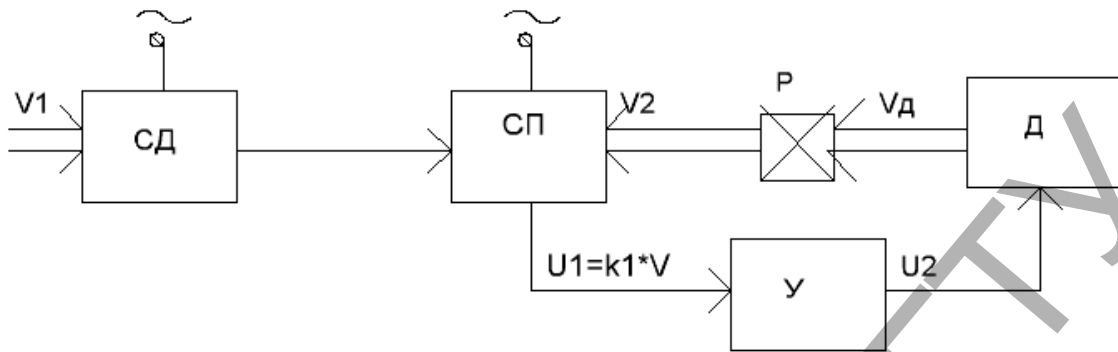


Рисунок 4.6

Через усилитель  $U$  напряжение управляет поворотом вала двигателя, вал поворачивается до тех пор, пока угол поворота вала не будет соответствовать углу поворота командной оси. Специальная конструкция сельсинной пары с единым электропитанием позволяет располагать датчик и приёмник на расстоянии друг от друга.

Блок – схема системы на рис.4.7.

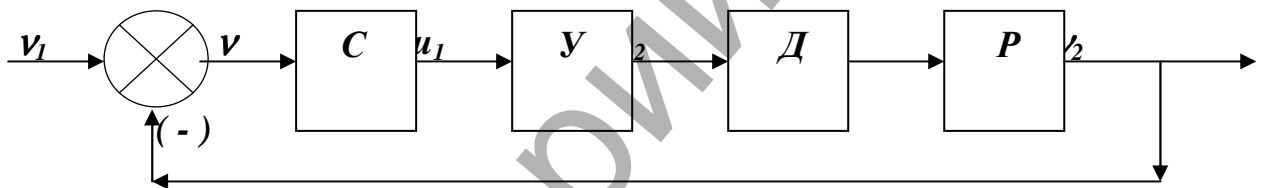


Рисунок 4.7

Передаточная функция сельсинов  $C$  равна коэффициенту передачи схемы

$$W_1(p) = k_1 \text{ ( в/рад )},$$

где  $v = v_1 - v_2$  - ошибка, равная разности углов командной и исполнительной осей.

Передаточная функция усилителя

$$W_2(p) = \frac{k_2}{T_y p + 1},$$

где  $k_2$  – коэффициент усиления,  $T_y$  – постоянная времени усилителя.

Передаточная функция двигателя  $D$  по углу поворота вала  $v_0$

$$W_3(p) = \frac{k_3}{p(T_m p + 1)} \text{ ( рад/в )},$$

где  $k_3$  – коэффициент передачи двигателя по скорости,

$T_m$  – электромеханическая постоянная времени двигателя.

Передаточная функция редуктора

$$W_4(p) = k_4.$$

Структурная схема системы представлена на рис.4.8.

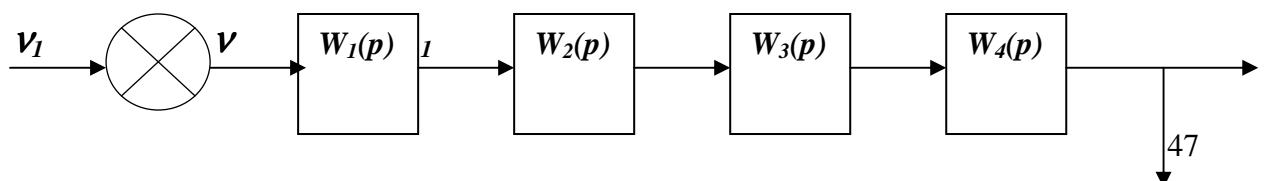




Рисунок 4.8

Передаточная функция разомкнутой цепи равна произведению передаточных функций отдельных звеньев

$$W(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_4(p) = \frac{K}{p(T_y p + 1)(T_m p + 1)},$$

где  $K = k_1 k_2 k_3 k_4$  – общий коэффициент усиления разомкнутой цепи.

Передаточная функция замкнутой системы  $W_3(p) = W(p) / (1 + W(p))$ .

$$W_3(p) = \frac{K}{T_y T_m p^3 + (T_y + T_m)p^2 + p + K}.$$

Характеристическое уравнение

$$T_y T_m p^3 + (T_y + T_m)p^2 + p + K = 0.$$

Постоянные времени – заведомо положительные числа, при правильном согласовании направления вращения двигателя со знаком рассогласования  $K > 0$ , поэтому условие положительности коэффициентов выполняется всегда.

Дополнительное условие  $a_1 a_2 > a_0 a_3$ , накладываемое на коэффициенты, сводится к неравенству

$$K < \frac{1}{T_m} + \frac{1}{T_y},$$

которое является условием устойчивости системы. Из этого неравенства следует, что увеличение постоянных времени отрицательно сказывается на устойчивости системы, т.к. при этом снижается значение коэффициента усиления, при котором система остаётся устойчивой.

В общем, кроме простых случаев, алгебраические критерии устойчивости не позволяют делать выводы о требованиях к параметрам системы для обеспечения устойчивости. Поэтому их практическое применение не нашло широкого распространения.

### 4.3 Критерий устойчивости Михайлова

Левая часть характеристического уравнения (4.5) представляет собой характеристический полином

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n. \quad (4.11)$$

При подстановке  $p = j\omega$  получим характеристический комплекс

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega) = D(\omega) e^{j\psi\omega}, \quad (4.12)$$

где вещественная часть будет содержать чётные степени  $\omega$

$$X(\omega) = a_n - a_{n-2} \omega^2 + \dots, \quad (4.13)$$



мнимая часть – нечётные степени  $\omega$

$$Y(\omega) = a_{n-1} \omega - a_{n-3} \omega^3 + \dots \quad (4.14)$$

$D(\omega)$  и  $\psi(\omega)$  представляют собой модуль и фазу (аргумент) характеристического комплекса.

Характеристический полином не будет иметь корней в правой полуплоскости, если полное приращение аргумента  $\psi(\omega)$  при изменении круговой частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  равно  $n\pi/2$ , где  $n$  – степень полинома  $D(p)$ . В этом случае система будет устойчивой. Покажем это.

При любом значении частоты  $\omega$  величина  $D(j\omega)$  определяет на комплексной плоскости вектор с проекциями  $X$  и  $Y$  по координатным осям. При непрерывном изменении частоты от нуля до бесконечности вектор будет описывать своим концом некоторую кривую ( годограф ), которую называют кривой Михайлова.

Выясним связь между видом кривой Михайлова и знаками вещественной части корней характеристического уравнения.

Для этого запишем характеристический полином в виде произведения сомножителей.

$$D(p) = a_0 (p - p_1) (p - p_2) \dots (p - p_n). \quad (4.15)$$

Характеристический вектор в этом случае можно представить в виде

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega - p_1) (j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n). \quad (4.16)$$

Каждый сомножитель в скобках представляет комплексное число. Следовательно, характеристический вектор представляет собой произведение  $n$  комплексных чисел. При перемножении аргументы комплексных чисел складываются. Поэтому результирующий угол поворота вектора  $D(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности будет равен сумме углов поворота отдельных сомножителей.

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n. \quad (4.17)$$

Определим значение каждого слагаемого в (4.17).

1. Пусть корень  $p_1$  является вещественным отрицательным  $p_1 = -\alpha_1$ , где  $\alpha_1 > 0$ .

Сомножитель в выражении (4.16), определяемый этим корнем, будет иметь вид  $(\alpha_1 + j\omega)$ . Построим годограф этого вектора на комплексной плоскости при изменении частоты от нуля до бесконечности (рис.4.9).

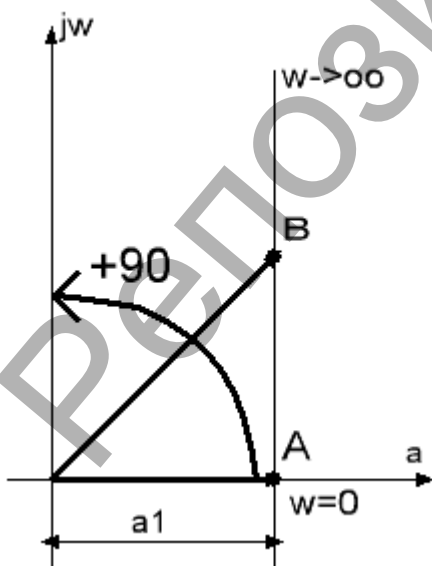
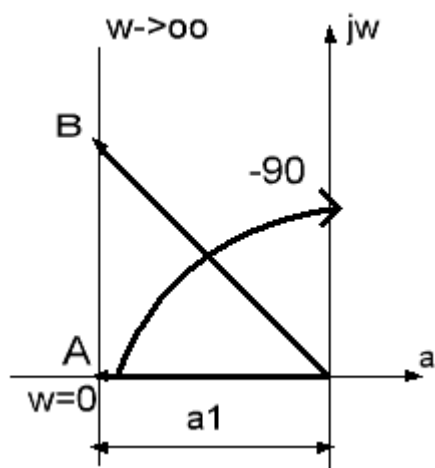


Рисунок 4.9

При  $\omega = 0$  вещественная часть  $\alpha = \alpha_1$ , мнимая  $j\omega = 0$ . Этому положению вектора соответствует точка  $A$  на оси вещественных. При возрастании частоты вещественная часть

остаётся неизменной, а мнимая принимает значение  $j\omega$  положение вектора соответствует точке  $B$  на рисунке. При увеличении частоты до бесконечности

конец вектора уходит в бесконечность, причём вектор поворачивается относительно начала координат против часовой стрелки. Углы поворота против часовой стрелки считают положительными. Результирующий угол составит  $\psi_1 = +\pi/2 = +90^\circ$ .



2. Пусть корень  $p_1$  является вещественным положительным  $p_1 = +\alpha_1$ , где  $\alpha_1 > 0$ . Тогда множитель, определяемый этим корнем, будет иметь вид  $(-\alpha_1 + j\omega)$ . Построения на рис.4.10 показывают, что результирующий угол поворота будет равен  $\psi_1 = -\pi/2 = -90^\circ$ . Знак минус соответствует повороту вектора по часовой стрелке.

Рисунок 4.10

3. Пусть два корня  $p_2$  и  $p_3$  представляют собой комплексно – сопряжённые величины с отрицательной вещественной частью  $p_{2,3} = -\alpha \pm j\beta$ .

Сомножители в выражении (4.16), определяемые этими корнями, имеют вид  $(\alpha - j\beta + j\omega)(\alpha + j\beta + j\omega)$ . При  $\omega = 0$  начальные положения двух векторов определяются точками  $A_2$  и  $A_3$  (рис.4.11).

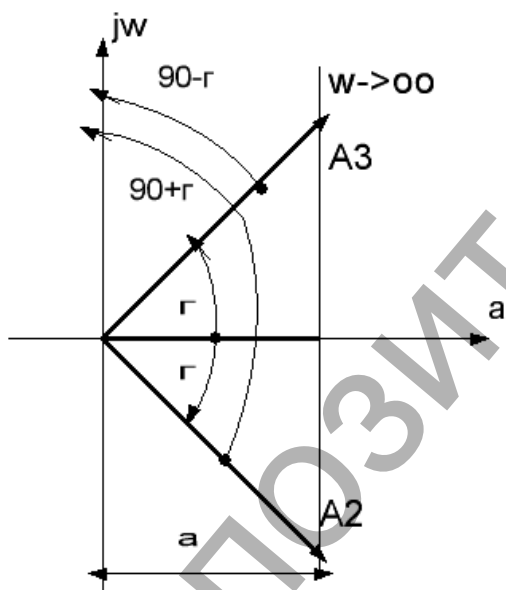


Рисунок 4.11

Первый вектор  $A_2$  повернут относительно оси вещественных часовой стрелке на угол  $\gamma = \arctg \beta/\alpha$ , а второй вектор  $A_3$  - на тот же угол против часовой стрелки. При изменении частоты от нуля до бесконечности концы обоих векторов уходят в бесконечность и в пределе совпадают с осью мнимых.

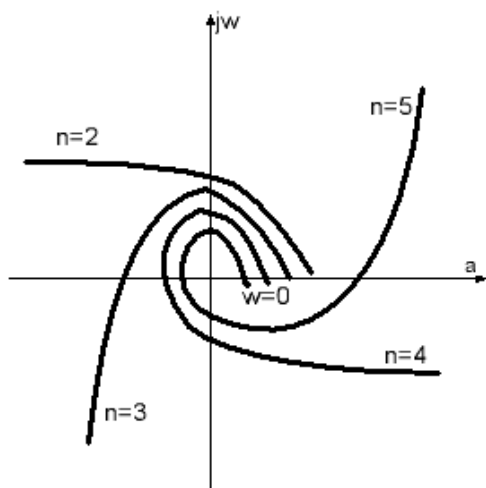
Результирующий угол поворота первого вектора  $\psi_2 = \pi/2 + \gamma$ . Результирующий угол поворота второго вектора  $\psi_3 = \pi/2 - \gamma$ . Вектор, соответствующий произведению векторов  $A_2$  и  $A_3$   $(\alpha - j\beta + j\omega)(\alpha + j\beta + j\omega)$ , повернётся на угол  $\psi_2 + \psi_3 = 2(\pi/2)$ .

4. Пусть два комплексно – сопряжённых корня имеют положительную вещественную часть  $p_{2,3} = +\alpha \pm j\beta$ . Проведя построения, аналогичные рис.4.12, можно получить, что результирующий угол поворота произведения  $(\alpha - j\beta + j\omega)(\alpha + j\beta + j\omega)$  будет равен  $\psi_2 + \psi_3 = -2(\pi/2)$ .

С учётом вышеприведённых соотношений А.В.Михайловым сформулирован следующий критерий устойчивости для линейных систем любого порядка.

Для устойчивости системы  $n$  – го порядка необходимо и достаточно, чтобы вектор  $D(j\omega)$ , описывающий кривую Михайлова, при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности имел угол поворота  $n (\pi/2)$ .

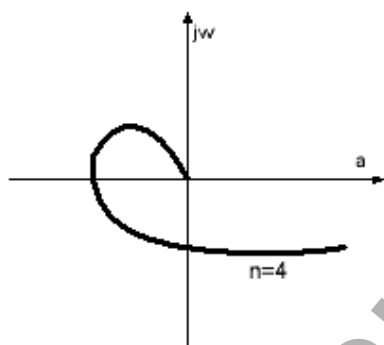
Для устойчивых систем кривая Михайлова имеет плавную спиралевидную форму, причём конец её уходит в бесконечность в том квадранте комплексной плоскости, номер которого соответствует степени характеристического уравнения.



Для неустойчивых систем последовательность прохода квадрантов нарушается, вследствие чего угол поворота вектора  $D(j\omega)$  оказывается меньше  $n (\pi/2)$ . Вид кривых Михайлова для устойчивых систем с разным порядком  $n$  характеристического уравнения показан на рис.4.12.

Рисунок 4.12

Приведённые соображения позволяют сформулировать критерий Михайлова следующим образом : для устойчивой системы кривая Михайлова, начинаясь на положительной полуоси вещественных, последовательно проходит  $n$  квадрантов, где  $n$  – порядок характеристического уравнения замкнутой системы.



Рассмотрим вид кривой Михайлова для частных случаев значений корней характеристического уравнения.

В случае нулевого корня система находится на границе устойчивости. Свободный член характеристического полинома  $a_n = 0$ , система обладает астатизмом первого порядка. Кривая Михайлова идёт из начала координат (рис.4.13).

Рисунок 4.13

В случае пары чисто комплексных корней характеристический полином

обращается в нуль при подстановке  $p = j\omega_0$   $D(j\omega_0) = X(\omega_0) + jY(\omega_0) = 0$ . Отсюда вытекает два равенства :  $X(\omega_0) = 0$ ,  $Y(\omega_0) = 0$ . Это означает, что точка  $\omega = \omega_0$  попадает в начало координат (рис.4.14). Система на границе устойчивости. При этом  $\omega_0$  является частотой незатухающих колебаний.

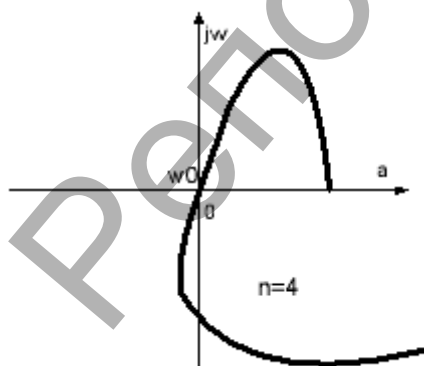


Рисунок 4.14

#### 4.4 Критерий устойчивости Найквиста

В основе критерия Найквиста также лежит построение годографа, но за основу берётся передаточная функция разомкнутой системы, которая может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_n}, \quad (4.18)$$

причём степень числителя не может быть выше степени знаменателя  $m < n$ .

Частотная передаточная функция разомкнутой системы

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

представляет собой комплексную функцию. Если изменять частоту от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то геометрическое место точек конца вектора, соответствующего комплексному значению функции при каждом значении  $\omega$  образует амплитудно – фазовую характеристику разомкнутой системы (рис.4.15).

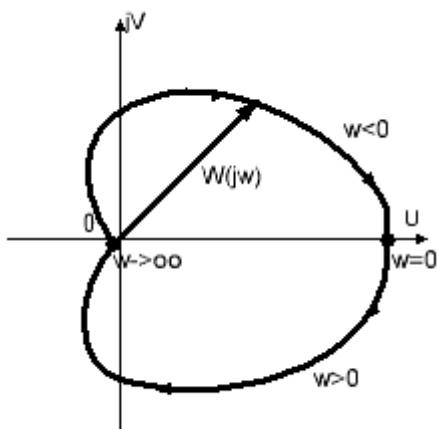


Рисунок 4.15

Ветвь этой характеристики, соответствующая отрицательным частотам, является зеркальным отражением ветви, соответствующей положительным частотам, относительно оси вещественных. Стрелки вдоль кривой показывают направление возрастания частоты.

В реальных системах всегда удовлетворяется условие  $m < n$ . Поэтому при частоте, стремящейся к бесконечности, модуль частотной передаточной функции всегда стремится к нулю и точка с частотой  $\omega \rightarrow \pm\infty$  попадает в начало координат.

Для формулировки необходимых и достаточных требований к амплитудно-частотной характеристике разомкнутой системы, при выполнении которых САУ в замкнутом состоянии будет устойчива, ограничим вначале для простоты рассмотрение кругом статических систем. Это означает, что знаменатель передаточной функции (4.18) не содержит в качестве сомножителя оператор  $p$ . Кроме того, будем пока рассматривать устойчивые в разомкнутом состоянии системы. Это значит, что полюса (4.18), т.е. корни уравнения

$$c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_n = 0 \quad (4.19)$$

лежат в левой полуплоскости.

Введём в рассмотрение вспомогательную функцию

$$W_I(p) = 1 + W(p) = \frac{Q(p) + R(p)}{Q(p)} = \frac{D(p)}{Q(p)}, \quad (4.20)$$

где числитель

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n \quad (4.21)$$

представляет собой характеристический полином замкнутой системы.

Сделаем подстановку  $p = j\omega$  и определим комплекс

$$W_1(j\omega) = D(j\omega)/Q(j\omega).$$

Амплитудно – фазовая характеристика  $W_1(j\omega)$  на комплексной плоскости при изменении частоты от  $+\infty$  до  $-\infty$  представлена на рис.4.16.

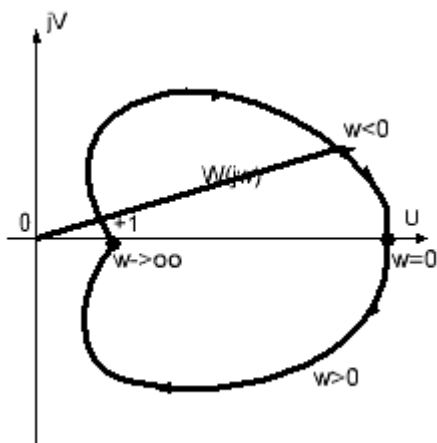


Рисунок 4.16

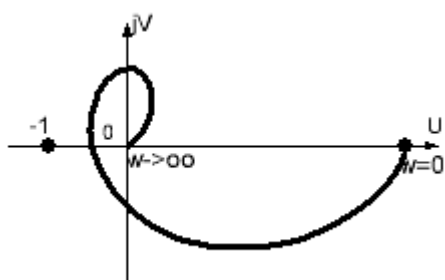
Рассмотрим результирующий угол поворота вектора при изменении частоты от  $+\infty$  до  $-\infty$ . Этот угол представляет собой изменение аргумента  $W_1(j\omega)$ , который равен разности аргументов числителя и знаменателя  $\psi =$

$\psi_1 - \psi_2$ . Числитель представляет собой характеристический комплекс. Для устойчивой замкнутой системы по критерию Михайлова приращение аргумента составляет  $\psi_1 = n\pi/2$ , но при этом частота изменялась от 0 до  $\infty$ . В данном случае приращение аргумента составит  $\psi_1 = n\pi$

Знаменатель  $W_1(j\omega)$  представляет собой комплекс той же степени  $n$ , причём при устойчивости разомкнутой системы результирующий угол поворота вектора  $Q(j\omega)$  будет равен  $\psi_2 = n\pi$ . Следовательно, результирующий угол поворота вектора  $W_1(j\omega)$  будет равен нулю  $\psi = \psi_1 - \psi_2 = 0$ . Это означает, что для устойчивой системы годограф вектора  $W_1(j\omega)$  не должен охватывать начало координат.

Частотная передаточная функция  $W(j\omega)$  отличается от вспомогательной  $W_1(j\omega)$  на единицу. Годограф  $W(j\omega)$  смещён на единицу влево вдоль оси вещественных. Исходя из этого, критерий Найквиста формулируется следующим образом. Для устойчивой замкнутой системы амплитудно – фазовая характеристика разомкнутой системы (рис.4.16) не должна охватывать точку с координатами  $(-1, j0)$ .

Для определения устойчивости достаточно построить АФХ только для положительных частот, т.к. ветвь для отрицательных частот получается зеркальным отображением относительно оси вещественных.

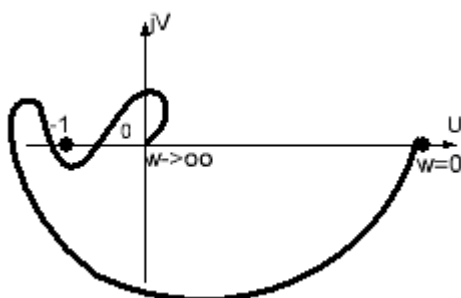


Систему называют абсолютно устойчивой, если свойство устойчивости сохраняется при любом уменьшении коэффициента передачи разомкнутой цепи.

Кривая Найквиста в этом случае имеет вид, представленный на рис.4.17.

Рисунок 4.17

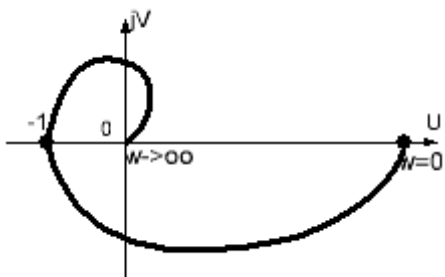
Случай системы



условно устойчивой представлен на рис.4.18.

Рисунок 4.18

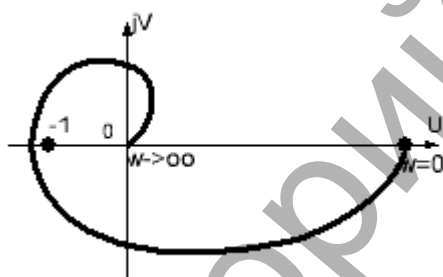
На рис.4.19



представлен случай, когда система находится на границе устойчивости. Граница устойчивости соответствует паре чисто мнимых корней характеристического уравнения, процесс представляет собой незатухающие колебания.

Рисунок 4.19

Для Найквиста



неустойчивой системы кривая представлена на рис.4.20.

Рисунок 4.20

Для астатизмом

передаточная функция может быть представлена в следующем виде (4.22).

$$W(p) = \frac{K(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + 1)}{p(c_0 p^{n-1} + c_1 p^{n-2} + \dots + 1)} \quad (4.22)$$

Пусть все корни знаменателя передаточной функции, кроме нулевого  $p = 0$ , лежат в левой полуплоскости, т.е. система в разомкнутом состоянии является устойчивой. Амплитудно – фазовая характеристика разомкнутой системы имеет разрыв непрерывности в точке  $\omega = 0$ . В этой точке модуль  $A(0) \rightarrow \infty$ , а фаза делает скачок на  $180^\circ$ . АФХ абсолютно – устойчивой системы с астатизмом первого порядка приведена на рис.4.21.

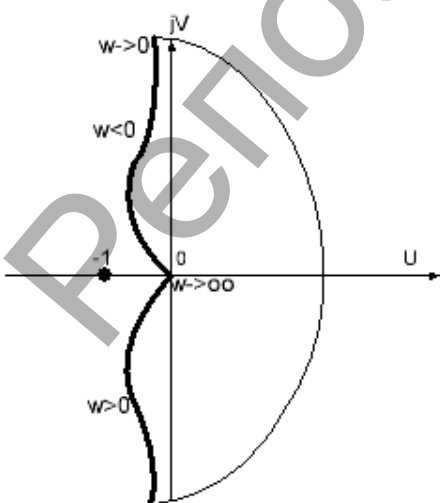


Рисунок 4.21

Характеристика начинается в начале координат при  $\omega \rightarrow -\infty$  и затем уходит в бесконечность при  $\omega \rightarrow 0$  (верхняя ветвь). Далее ха-

характеристика дополняется полуокружностью бесконечно большого радиуса так, чтобы вектор повернулся по часовой стрелке на угол  $\pi$ . Нижняя часть характеристики соответствует изменению частоты от 0 до  $+\infty$ . АФХ не охватывает точку  $(-1, j0)$ , система в замкнутом состоянии будет устойчивой.

В общем случае система в разомкнутом состоянии может быть неустойчивой. Неустойчивость системы в разомкнутом состоянии не означает, что замкнутая система обязательно неустойчива. Критерий устойчивости Найквиста в этом случае формулируется иначе. Пусть знаменатель передаточной функции содержит  $m$  корней в правой полуплоскости и  $n-m$  в левой. Тогда при изменении частоты от  $-\infty$  до  $+\infty$  для устойчивой в замкнутом состоянии системы результирующий угол поворота годографа вектора  $W(j\omega)$  относительно точки  $(-1, j0)$  должен составить  $\psi = m 2\pi$

АФХ должна охватить точку  $(-1, j0)$  столько раз, сколько корней в правой полуплоскости имеет знаменатель передаточной функции разомкнутой системы.

Практическое преимущество критерия Найквиста заключается в том, что он служит основой для использования логарифмических частотных характеристик для определения устойчивости системы.

#### 4.5 Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

Критерий Найквиста позволяет использовать для определения устойчивости замкнутой системы не амплитудно – фазовую характеристику разомкнутой системы, а логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики.

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

Для иллюстрации использования ЛЧХ воспользуемся передаточной функцией и логарифмическими характеристиками из раздела 2.6.

$$W(p) = \frac{k(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_3^2 p^2 + 2\xi T_3 p + 1)} = \frac{100(p+1)}{p(10p+1)(0,01p^2 + 0,1p+1)}$$

Логарифмическая амплитудная и фазовая частотные характеристики для этой передаточной функции представлены на рис.4.22.

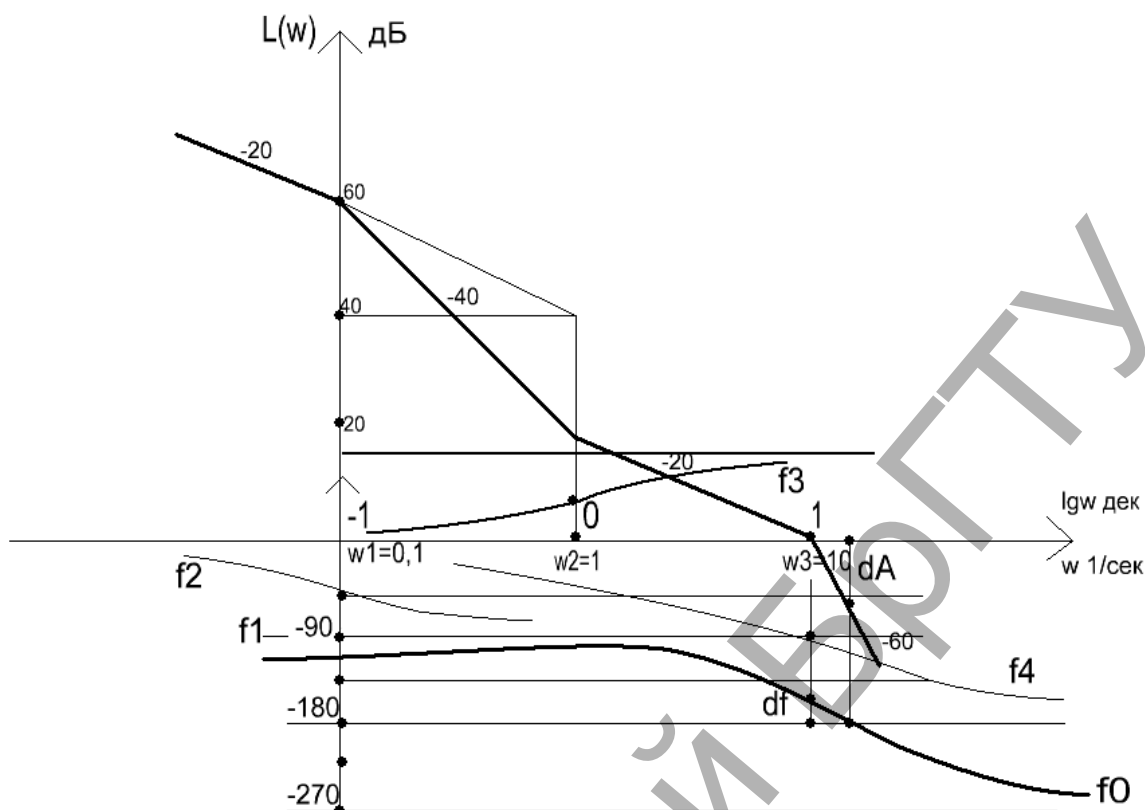


Рисунок 4.22

Построение ЛАЧХ было рассмотрено в 2.6. ЛФЧХ построена сложением характеристик элементарных звеньев:  $f_1$  – интегрирующего ( $-90^\circ$ );  $f_2$  – апериодического;  $f_3$  – форсирующего;  $f_4$  – колебательного. Частота среза системы, при которой значение АФХ становится меньше единицы, совпадает с  $\omega_3$ . Результирующая ЛФЧХ  $f_0$  пересекает уровень  $-180^\circ$  правее частоты среза и асимптотически устремляется к  $-270^\circ$ .

При рассмотрении характера поведения АФХ устойчивых систем на рис.4.17 и рис.4.21 следует отметить, что модуль АФХ становится меньше единицы только при значениях угла (фазы) меньших по значению, чем  $-\pi$  ( $-180^\circ$ ).

Исходя из этого, можно сформулировать критерий устойчивости на основе рассмотрения логарифмических частотных характеристик. Для устойчивости системы в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы фазовая частотная характеристика пересекала уровень  $-180^\circ$  правее частоты среза ЛАЧХ.

Для условно устойчивых систем с АФХ на рис.4.18 фазовый сдвиг может пересекать уровень  $-180^\circ$  чётное число раз левее частоты среза.

Анализ устойчивости по ЛАЧХ позволяет определить запас устойчивости по фазе  $df$  и запас устойчивости по амплитуде (по коэффициенту усиления)  $dA$  (см. рис.4.22).



## 5. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

### 5.1 Оценка качества переходного процесса при единичном ступенчатом воздействии

При проектировании систем автоматического управления приходится решать задачу обеспечения требуемых показателей качества переходного процесса – быстродействия, колебательности, перерегулирования, характеризующих точность и плавность протекания процесса. Предполагается, что САУ описывается системой линейных дифференциальных уравнений. При воздействии  $g(t)$  на входе системы (рис.5.1) выходную величину  $y(t)$  можно представить

$$y(t) = y_{св}(t) + y_е(t), \quad (5.1)$$

где  $y(t)$  – решение дифференциального уравнения, описывающего систему;  $y_{св}(t)$  – общее решение, соответствующее однородному дифференциальному уравнению, свободная или переходная составляющая ;  $y_е(t)$  – частное решение, вынужденная составляющая выходной величины, обусловленная законом изменения  $g(t)$  .

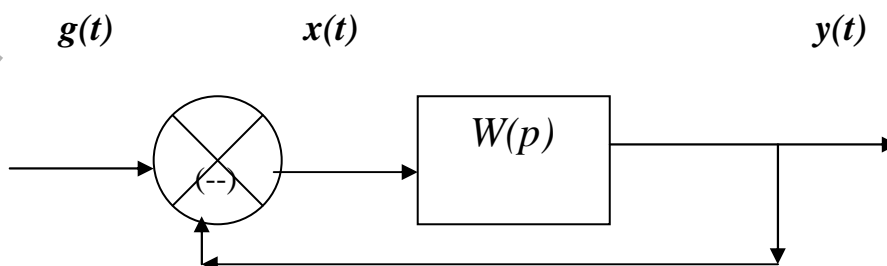


Рисунок 5.1

Если уравнение не имеет кратных корней, то

$$y_{cb}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}, \quad (5.2)$$

где  $C_i$  – постоянная интегрирования, которая определяется параметрами системы и начальными условиями;  $p_i$  – корни характеристического уравнения замкнутой системы  $D(p) = 0$ .

Качество регулирования можно оценить по составляющим реакции системы  $y_{cb}(t)$  и  $y_в(t)$ . Отсюда различают две группы показателей: первая группа – показатели качества переходного процесса  $y_{cb}(t)$ ; вторая – показатели, характеризующие вынужденную (установившуюся) составляющую, по которой оценивают точность системы.

Показатели качества, определяемые непосредственно по кривой переходного процесса, называют прямыми оценками качества. Часто используют косвенные оценки, полученные иным путём, не требующим нахождения кривой переходного процесса.

Косвенные методы оценки качества регулирования в линейных САУ разделяют на три группы: корневые, интегральные и частотные.

Переходный процесс в системе является её реакцией на внешнее воздействие, которое в общем случае может быть сложной функцией времени. Обычно рассматривают поведение системы при следующих типовых воздействиях: единичной ступенчатой функции  $I(t)$ , единичной импульсной функции  $\delta(t)$  и гармонического синусоидального сигнала.

Наиболее распространены прямые оценки качества, полученные по кривой переходного процесса  $h(t)$ , т.е. при воздействии единичной ступенчатой функции.

$$I(t) = 1 \text{ при } t \geq 0, \\ 0 \text{ при } t < 0.$$

Общий вид переходной характеристики представлен на рис.5.2.

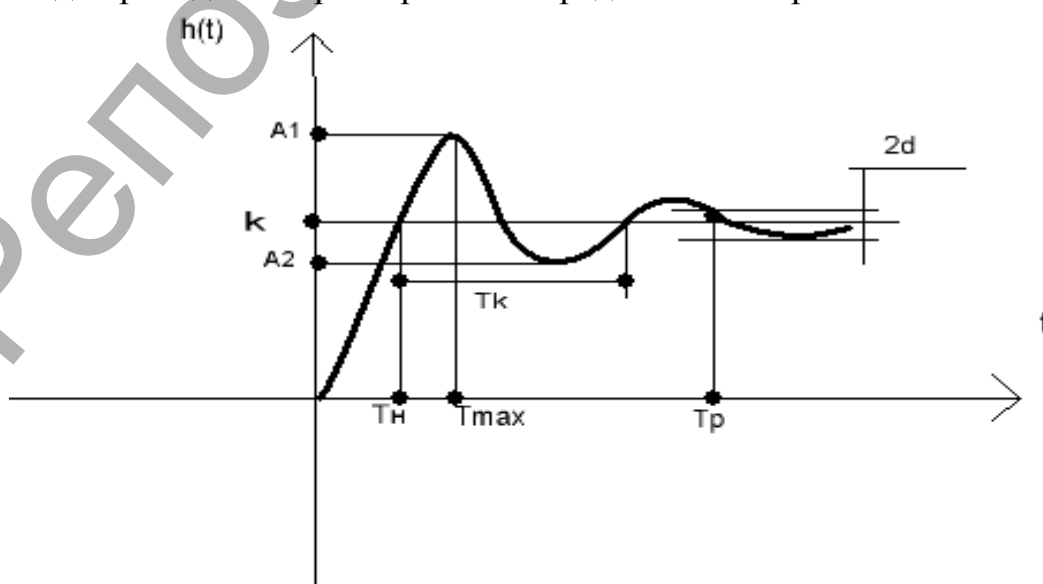


Рисунок 5.2

К прямым оценкам качества относят следующие характеристики.

1. Время регулирования  $t_p$  - минимальное время, по истечении которого регулируемая величина будет оставаться близкой к установившемуся значению  $k$  с заданной точностью  $d$ .

$$|h(t) - k| \leq d.$$

Значение  $d$  задаётся в процентах или долях от установившегося значения  $k$ .

2. Перерегулирование  $\sigma$  - максимальное отклонение переходной характеристики от установившегося значения выходной величины, выраженное в относительных долях или процентах.

$$\sigma = (A_1 - k) / k.$$

Допустимое перерегулирование в каждом конкретном случае будет подсказано опытом эксплуатации системы, обычно  $\sigma = (10 \dots 30)\%$ , иногда достигает 70 %, иногда недопустимо совсем.

3. Частота колебаний  $\omega = 2\pi / T_k$ , где  $T_k$  - период колебаний для переходных характеристик, имеющих колебательный характер.

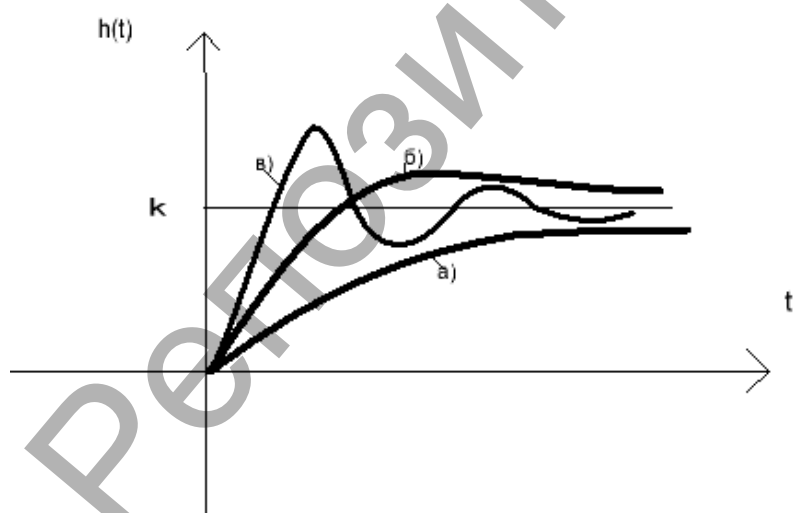
4. Число колебаний  $n$ , которое имеет переходная характеристика за время регулирования. При проектировании систем чаще всего допускают  $n = 1 \dots 2$ , а иногда и до 3...4, но в некоторых системах колебания недопустимы.

5. Время достижения первого максимума  $T_{max}$ .

6. Время нарастания переходного процесса  $T_n$  - абсцисса первой точки пересечения кривой переходного процесса  $h(t)$  с уровнем установившегося значения  $k$ .

7. Декремент затухания  $\chi$ , равный отношению модулей двух смежных перерегулирований

$$\chi = |A_1 - k| / |A_2 - k|.$$



Переходные процессы в системах при единичном ступенчатом воздействии делятся на три вида: монотонные, апериодические и колебательные (рис.5.3).

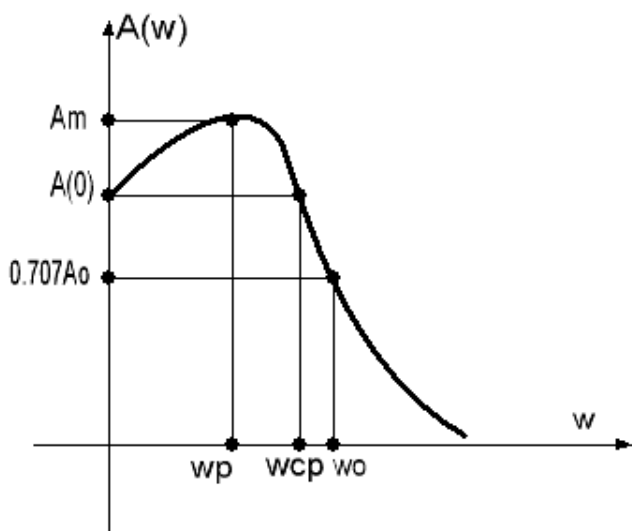
Рисунок 5.3

У монотонных процессов (кривая *а*) на рис.5.3) первая производная выходной величины  $h(t)$  не меняет знак, у апериодических (кривая *б*) знак производной меняется не более одного раза, а у колебательных (кривая *в*) первая производная меняет свой знак периодически.

## 5.2 Оценка качества регулирования по частотным характеристикам

Косвенные оценки качества САУ можно получить по амплитудно – фазовой, амплитудно – частотной, фазо – частотной и логарифмическим частотным характеристикам.

По амплитудно – частотной характеристике ( рис.5.4 ) можно определить показатель колебательности  $M$ , резонансную частоту  $\omega_p$ , полосу пропускания системы  $\omega_b$ , частоту среза  $\omega_{cp}$ .



Показатель колебательности  $M$  – это отношение максимального значения амплитудно – частотной характеристики замкнутой системы  $A_m$  к её значению  $A(0)$  при  $\omega = 0$ .

$$M = A_m / A(0).$$

Показатель колебательности характеризует склонность системы к колебательному характеру переходной характеристики.

Рисунок 5.4

Частота  $\omega_p$ , при которой амплитудно – частотная характеристика замкнутой системы имеет максимум, называется резонансной частотой системы, на этой частоте сигналы проходят через систему с наибольшим усилением.

Полоса пропускания системы – это интервал частот от  $\omega = 0$  до  $\omega = \omega_b$ , для которой выполняется условие  $A(\omega_b) = 0,707 A(0)$ . Полоса пропускания не должна быть слишком широкой, иначе система будет воспроизводить высокочастотные помехи.

Частота среза  $\omega_{cp}$  - это частота, при которой амплитудно – частотная характеристика системы принимает значение, равное  $1$ ,  $A(\omega_{cp}) = 1$ . Эта частота характеризует длительность переходного процесса. Чем меньше частота среза – тем меньше быстродействие системы.

$$t_p \approx (1...2) 2\pi / \omega_{cp} .$$

Время достижения переходной характеристикой первого максимума

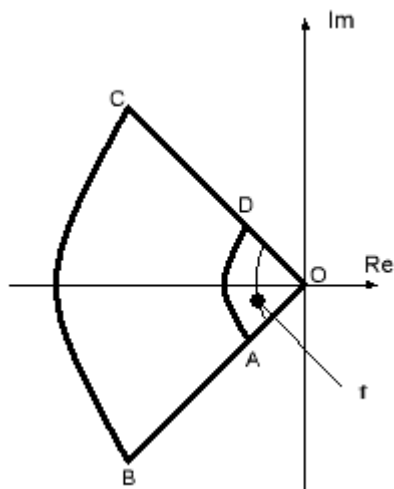
$$t_{max} \approx \pi / \omega_{cp} .$$

Склонность системы к колебаниям характеризуется запасами устойчивости по модулю и фазе, определение которых дано в разделе 4.5 на основе логарифмических амплитудно – и фазово – частотных характеристик. В хорошо демпфированных системах запас устойчивости по амплитуде находится в пределах от 6 до 20 дБ, а запас по фазе – от 30 до 60 °.

### 5.3 Корневые методы оценки качества регулирования.

В общем случае на характер переходного процесса влияют и числитель и знаменатель передаточной функции замкнутой системы. Если числитель не

имеет нулей, т.е. представляет собой постоянную величину, то характер переходных процессов можно оценивать по полюсам, т.е. по корням характеристического уравнения замкнутой системы  $D(p) = 0$ .



Для приближённой оценки качества переходного процесса в системе нужно на комплексной плоскости корней выделить ту область, в которой располагаются корни характеристического уравнения (рис.5.5).

Рисунок 5.5

Область  $ABCD$  ограничена дугами  $AD$  и  $BC$  и отрезками  $AB$  и  $DC$ .

Радиус дуги  $OA$  равен наименьшему модулю корней  $m$ , радиус дуги  $OB$  - наибольшему модулю  $M$ . Лучи  $OB$  и  $OC$  образуют угол  $\varphi$ , внутри которого располагаются все корни.

Существуют способы определения границ области, в которой располагаются корни характеристического уравнения.

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Если коэффициенты  $a_i$  положительны и если все отношения последующего коэффициента  $a_{i+1}$  к предыдущему  $a_{i+1} / a_i$  располагаются между положительными числами  $m$  и  $M$ , то и модули всех корней так же заключены между числами  $m$  и  $M$ , т.е.  $m \leq |p_i| \leq M$ .

Другой способ заключается в определении верхней границы модулей корней  $M$

$$M \leq a_{i \max} / a_0,$$

где  $a_{i \max}$  - наибольший коэффициент уравнения.

Степенью устойчивости  $\eta$  называют расстояние от мнимой оси до ближайшего корня. Составляющая переходного процесса, соответствующая степени устойчивости  $\eta$ , запишется в виде

$$y_\eta(t) = C_\eta e^{-\eta t} \sin \beta t.$$

Переходный процесс можно считать закончившимся тогда, когда затухнет составляющая, определяемая степенью устойчивости. Если ближайший к оси мнимых корень является вещественным, то время регулирования можно оценить следующим образом.

$$t_p \approx \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta}.$$

Если принять  $\Delta = 0,05 C_\eta$ , то  $t_p \approx 3 / \eta$ .

Колебательностью системы  $\mu$  называют тангенс угла, образованного отрицательной вещественной полуосью и вектором корня, у которого отношение мнимой части к действительной максимально.

## 5.4 Частотные методы оценки качества регулирования

Между переходной характеристикой и частотными характеристиками системы имеется аналитическая зависимость. Если на линейную САУ воздействует гармонический сигнал, то установившееся значение выходной величины будет гармоническим. При воздействии на систему единичной ступенчатой функции  $g(t) = 1(t)$  выходная величина, являющаяся переходной характеристикой системы  $h(t)$ , определяется через вещественную или мнимую частотные характеристики системы.

$$y(t) = h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega, \quad (5.3)$$

где  $P(\omega)$  – вещественная частотная функция замкнутой САУ.

Если частотную передаточную функцию замкнутой системы представить в виде

$$W(j\omega) = \frac{u_1(\omega) + jv_1(\omega)}{u_2(\omega) + jv_2(\omega)},$$

то

$$P(\omega) = \frac{u_1 u_2 + v_1 v_2}{u_2^2 + v_2^2}.$$

График  $P(\omega)$  называют вещественной частотной характеристикой системы.

$$y(t) = h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega + P(0), \quad (5.4)$$

где  $Q(\omega)$  – мнимая частотная функция замкнутой системы.

Точное определение выражения для переходной характеристики по (5.3) и (5.4) достаточно сложно, но линейно – кусочной аппроксимацией вещественной или мнимой частотных характеристик можно получить достаточно простые выражения для приближённого построения переходной характеристики.

Рассмотрим основные свойства вещественных частотных характеристик и соответствующих им переходных процессов. Эти свойства следуют из (5.3).

1. Свойство линейности. Если вещественную частотную характеристику можно представить суммой

$$P(\omega) = \sum_{i=1}^n P_i(\omega), \quad (5.5)$$

то и переходная характеристика может быть представлена суммой

$$h(t) = \sum_{i=1}^n h_i(t), \quad (5.6)$$

где  $h_i(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P_i(\omega) \sin \omega t d\omega.$

$\pi \ 0 \ \omega$

2. Соответствие масштабов по оси ординат. Если умножить  $P(\omega)$  на постоянный множитель  $a$ , то соответственно  $y(t)$  так же умножается на  $a$ .

3. Соответствие масштабов по оси абсцисс. Если аргумент  $\omega$  в соответствующем выражении частотной характеристики умножить на постоянное число  $a$  (рис. 5.6), то аргумент в соответствующем выражении  $y(t)$  будет делиться на это число (рис.5.6а).

$$y(t) = h(t/a) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(a\omega)}{\omega} \sin \alpha t d\omega, \quad (5.7)$$

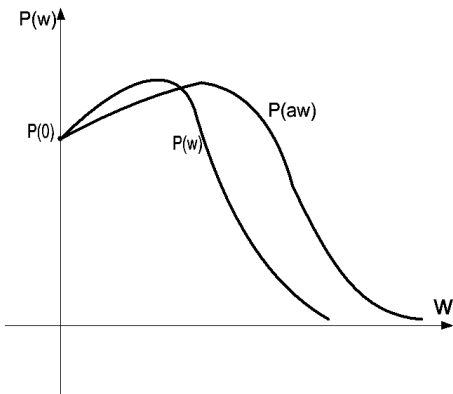


Рисунок 5.6

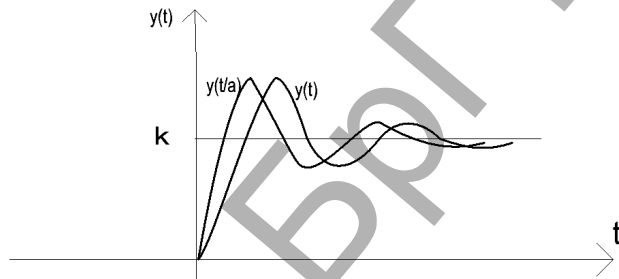


Рисунок 5.6а

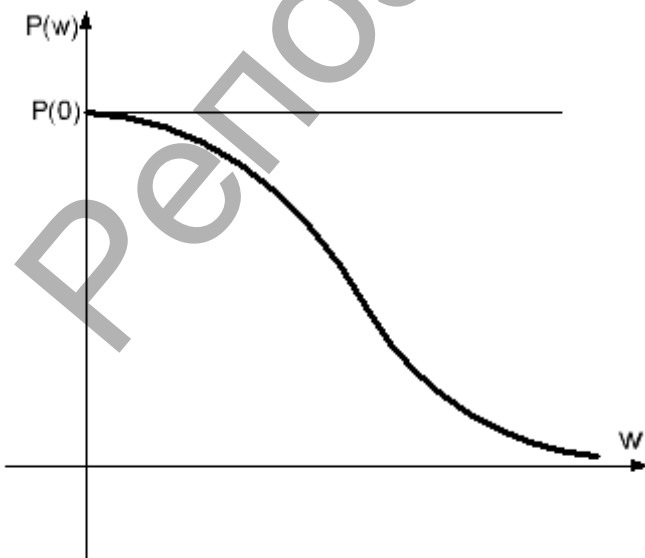
4. Начальное значение вещественной частотной характеристики равно конечному значению переходной характеристики.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} P(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t).$$

Начальное значение мнимой частотной характеристики  $Q(0) = 0$ .

5. Конечное значение вещественной частотной характеристики равно начальному значению переходной характеристики.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} P(\omega) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0} h(t).$$



6. Для того, чтобы переходная характеристика системы имела перерегулирование  $\sigma \leq 18\%$ , вещественная частотная характеристика должна быть положительной невозрастающей функцией частоты (рис.5.7), т.е.  $P(\omega) > 0, dP(\omega)/d\omega \leq 0$ .

Рисунок 5.7

7. Для того, чтобы переходный процесс имел монотонный характер, вещественная частотная

характеристика должна быть непрерывной положительной функцией частоты с отрицательной убывающей по абсолютной величине производной (рис.5.7), т.е.  $P(\omega) > 0, |dP(\omega)/d\omega| < 0$ .

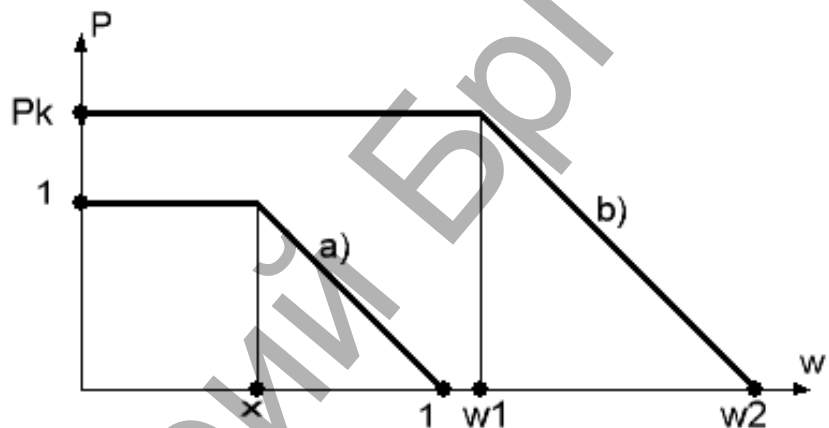
8. Определение максимально возможного значения перерегулирования переходного процесса  $\sigma_{max}$  по максимуму вещественной частотной характеристики  $P_{max}$ .

$$\sigma_{max} = (1,18 P_{max} - P(0)) / P(0).$$

### 5.5 Метод трапеций для построения переходной характеристики

В инженерной практике применяется метод построения переходной характеристики, основанный на представлении вещественной частотной характеристики суммой трапеций. В основе метода лежит понятие единичной трапеции (рис.5.8 а).

Рисунок 5.8



Две стороны трапеции совпадают с координатными осями, третья параллельна оси абсцисс, четвёртая имеет наклон  $\chi = \omega_1 / \omega_2$ . Если принять такую единичную трапецию за вещественную частотную характеристику, то ей соответствует некоторая переходная характеристика  $h^1_\chi(\tau)$ . Координаты функций  $h^1_\chi(\tau)$  в диапазоне  $\tau$  от 0 до  $2\omega_2$  для различных значений  $\chi$  рассчитаны и сведены в таблицы, приведённые в литературе по ТАУ.

Для трапеции с другой высотой  $P_k$  и основанием  $\omega_2$  (рис.5.8 б) для наклона  $\chi$  координаты точек переходной характеристики пересчитываются из табличных по формуле  $h_k = P_k h^1_\chi(\tau)$  для ординаты и  $t = \tau / \omega_2$  для абсциссы каждой точки. Основанием для этого являются свойства 2 и 3 об изменении масштабов (раздел 5.4).

Сущность метода заключается в следующем. Вещественную характеристику  $P(\omega)$  аппроксимируют прямолинейными отрезками таким образом, чтобы вблизи экстремумов кривой отрезки прямых были параллельны горизонтальной оси  $\omega$  (рис.5.9).

Из координатных осей, отрезков, аппроксимирующих вещественную частотную характеристику и их продолжений до оси ординат можно построить несколько трапеций, частично наложенных друг на друга.



На рис. 5.9 это три трапеции с высотами  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  и основаниями  $\theta - \omega_2$ ,  $\theta - \omega_4$ ,  $\theta - \omega_6$ . На рис.5.10 эти трапеции вычерчены таким образом, чтобы основание каждой из них расположилось вдоль оси  $\omega$ .

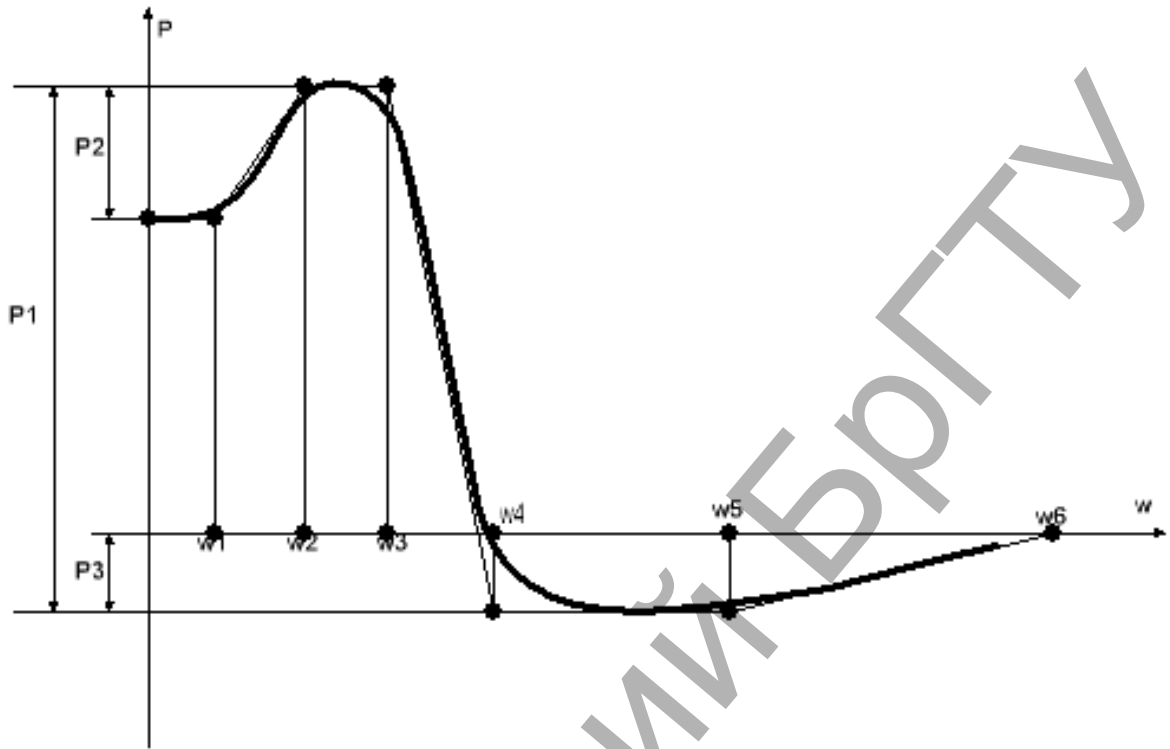


Рисунок 5.9

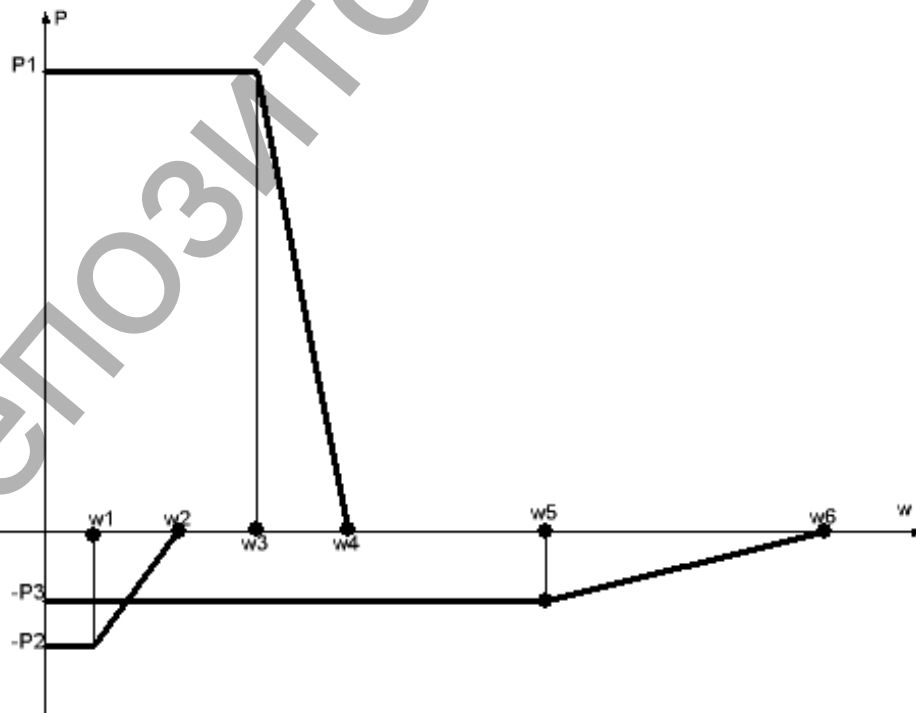


Рисунок 5.10

Для каждой из трапеций пересчитывают координаты точек переходных характеристик.

Для первой трапеции  $\chi_1 = \omega_1 / \omega_2$ ,  $h_1 = P_1 h^1_{\chi_1}(\tau)$ ,  $t = \tau / \omega_2$ .

Для второй трапеции  $\chi_2 = \omega_3 / \omega_4$ ,  $h_2 = -P_2 h^1_{\chi_2}(\tau)$ ,  $t = \tau / \omega_4$ .

Для третьей трапеции  $\chi_3 = \omega_5 / \omega_6$ ,  $h_3 = -P_3 h^1_{\chi_3}(\tau)$ ,  $t = \tau / \omega_6$ .

Суммируя графически переходные характеристики (рис.5.11), получим переходную характеристику системы  $h(t) = \sum h_i(t)$ .

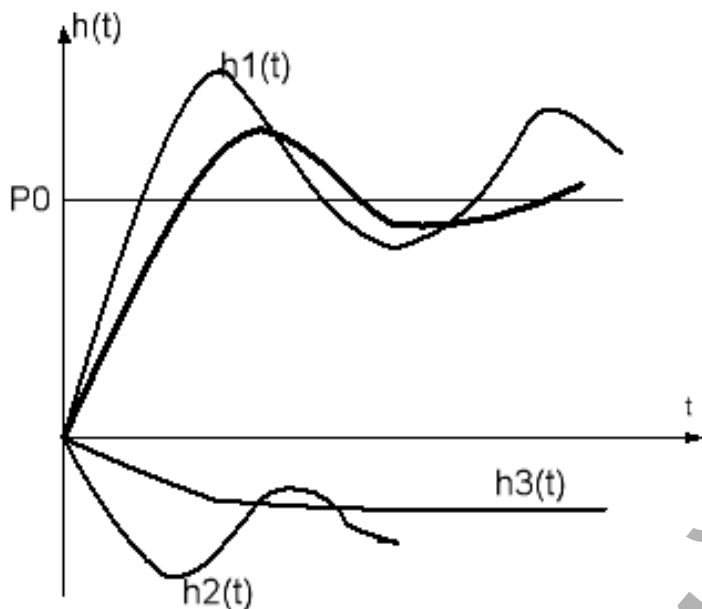


Рисунок 5.11.

## 6. СИНТЕЗ САУ

В ТАУ можно выделить две характерные задачи:

1) в заданной САУ найти и оценить переходные процессы - это задача анализа САУ;

2) по заданным переходным процессам и основным показателям разработать САУ - это задача синтеза САУ.

Вторая задача сложнее ввиду своей неоднозначности, многое определяется творческими способностями проектировщика. Поэтому обычно задачу синтеза САУ ставится ограниченно. Считается, что основная часть системы уже задана, что обычно имеет место. Требуется синтезировать корректирующие звенья, то есть выбрать их схему и параметры. При этом необходимо, чтобы в результате коррекции САУ обеспечивался требуемый запас устойчивости; точность управления в установившихся режимах и качество управления в динамических режимах.

### 6.1. Включение корректирующих устройств

Корректирующее устройство можно включить последовательно, параллельно-согласно или параллельно-встречно (по схеме с обратной связью), как это представлено на рис.6.1.

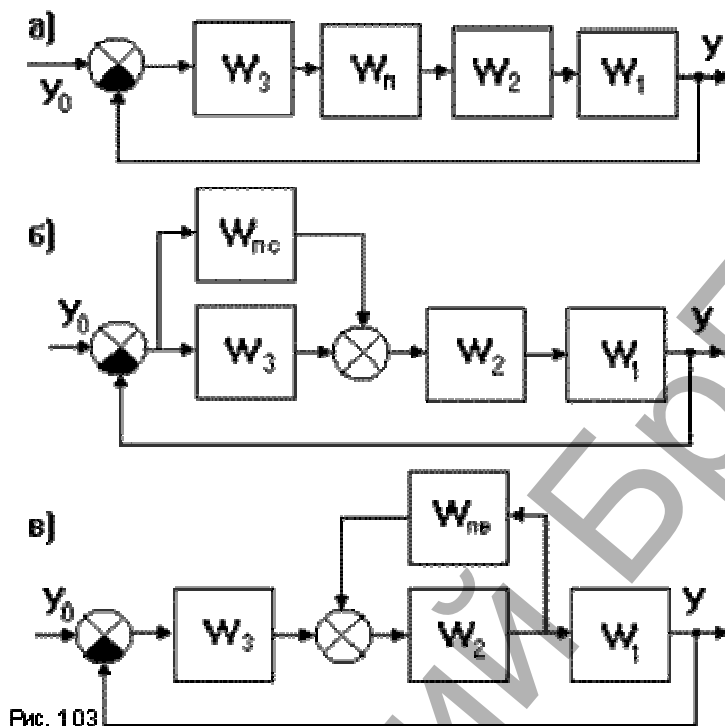


Рисунок 6.1

Последовательное корректирующее устройство с передаточной функцией  $W_n$  включается обычно после предварительного усилителя.

На рис.6.1а предварительный усилитель имеет передаточную функцию  $W_3$ , выходной каскад усилителя -  $W_2$ , исполнительный элемент -  $W_1$ .

Параллельно-согласное корректирующее устройство с передаточной функцией  $W_{nc}$  (рис.6.1б) может иногда при меньшей сложности обеспечить нужное преобразование сигнала. Например, для коррекции свойств САУ часто требуются дифференцирующие и форсирующие звенья, которые конструктивно очень сложны. В то же время параллельно-согласное включение предварительного усилителя ( $W_3 = K_3$ ) и простого апериодического звена с передаточной функцией

$$W_{nc} =$$

позволяет реализовать функцию реального форсирующего звена. Такое соединение можно заменить эквивалентным форсирующим звеном с передаточной функцией

$$W_{\phi} = W_3 + W_{nc} = K_3 + \dots =$$

$$= K$$

$\phi$

где  $T_{\phi 1} = \dots$ ;  $T_{\phi 2} = T_{nc}$ ;  $K_{\phi} = K_3 + K_{nc}$ .

Наибольшими возможностями в плане коррекции свойств САУ обладает корректирующее устройство с передаточной функцией  $W_{\text{пв}}$ , включенное по схеме с отрицательной или положительной обратной связью, охватывающей один из звеньев САУ, как правило, исполнительный элемент или выходной каскад усилителя (усилитель мощности) (рис.6.1в). Такие обратные связи называются местными. При этом передаточная функция эквивалентного звена:

$$W_{\text{эkv}} = \dots$$

Обычно передаточную функцию выходного каскада усилителя  $W_2$  выбирают из условия  $|W_2 \cdot W_{\text{нв}}| \gg 1$  в широком диапазоне частот, поэтому  $W_{\text{эkv}} \approx 1/W_{\text{нв}}$ . То есть свойства участка цепи с параллельно-встречным включением корректирующего устройства определяются только свойствами данного корректирующего устройства. Это основное достоинство данного способа включения. Влия-

ние плохих свойств какого-либо необходимого для САУ звена, например, его нелинейности, могут быть практически полностью устранены. Местные корректирующие обратные связи делятся на жесткие и гибкие.

*Жесткая обратная связь* действует на систему как в переходном, так и в установившемся режиме, то есть  $W_{жс}(0) \neq 0$ . Она реализуется безынерционным или инерционным звеном:

$$W_{жс} = K_{жс} \text{ или } W_{жс} = \frac{\tau}{p+1}$$

*Гибкая обратная связь* действует только в переходном режиме, она реализуется либо дифференцирующим, либо реальным дифференцирующим звеном:

$$W_z = K_z \text{ или } W_z = \tau p$$

Например, если интегрирующее звено  $W_u = K_u/p$  охвачено жесткой обратной связью звеном  $W_{жс} = K_{жс}$ , то

$$W_{экв} =$$

где  $K_{экв} = 1/K_{жс}$ ,  $T_{экв} = 1/(K_u K_{экв} K_{жс})$ . То есть жесткая обратная связь превращает интегрирующее звено в апериодическое. В случае гибкой обратной связи звеном  $W_z = K_z p$  получаем

$$W_{\text{экв}} = \frac{K_{\text{гкн}}}{1 + K_{\text{гкн}}}, \quad \text{где } K_{\text{экв}} =$$

$$\frac{1}{1 + K_{\text{гкн}}}$$

То есть гибкая обратная связь не изменяет структуру интегрирующего звена, но уменьшает его коэффициент передачи.

Таким образом, даже простейшие обратные связи способны существенно изменить свойства типовых динамических звеньев. Еще больший эффект дают сложные отрицательные и положительные обратные связи. Если основные элементы регулятора по своей природе позволяют создать обратную связь, то динамические свойства этих элементов часто могут быть изменены в нужном направлении.

## 6.2. Синтез корректирующих устройств

Корректирующие устройства синтезируют на основании требований к свойствам САУ. Для этого необходимо знать передаточную функцию реальной САУ  $W_{\text{реал}}$ , которая чем-то не удовлетворяет разработчика, и желаемую передаточную функцию  $W_{\text{жел}}$ , которой должна обладать САУ в результате корректировки ее свойств. При синтезе корректирующих устройств сначала определяют передаточную функцию возможного последовательного корректирующего устройства, исходя из соотношения:  $W_n = W_{\text{жел}}/W_{\text{реал}}$ .

Затем выясняют, при каких передаточных функциях параллельно-согласного  $W_{nc}$  и параллельно-встречного  $W_{nv}$  корректирующих устройств будет получен тот же эффект. После этого решают, какое из них более целесообразно и проще создать. При этом, исходя из рис.6.1, можно записать:

$$W_{\text{жел}} = W \cdot W_n = W_1 \cdot W_2 \cdot (W_3 + W_{nc}) = W \cdot (1 + W_{nc}/W_3) = W/(1 + W_2 \cdot W_{nv}),$$

где  $W = W_1 \cdot W_2 \cdot W_3$ . Из этого соотношения можно определить формулы перехода от одного корректирующего устройства к другому.

## 6.3. Коррекция свойств САУ изменением параметров звеньев

Рассмотрим примеры коррекции свойств некоторой исходной замкнутой САУ (рис.6.2), передаточная функция которой в разомкнутом состоянии:

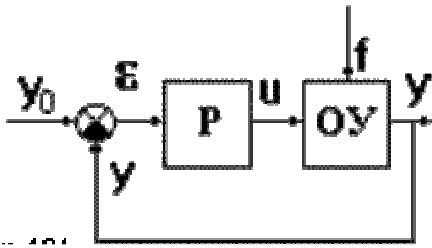


Рисунок 6.2

$$W(p) =$$

Для этого воспользуемся критерием Найквиста. Значения параметров звеньев в каждом конкретном случае будем оговаривать отдельно.

### 6.3.1. Изменение коэффициента передачи

Для увеличения точности статической САУ надо увеличивать коэффициент передачи  $K$ . С ростом  $K$  увеличивается жесткость статической характеристики САУ (рис.6.3), то есть уменьшается статическая ошибка  $\varepsilon$ .

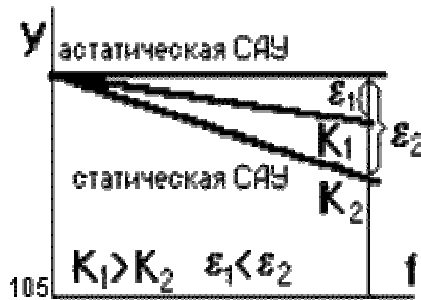


Рисунок 6.3

На рис.6.4 сплошными линиями показаны частотные характеристики исходной разомкнутой САУ при  $T_1 = 0.5с$ ,  $T_2 = 0.02с$ ,  $T_3 = 0.002с$ ,  $K = 10$ .

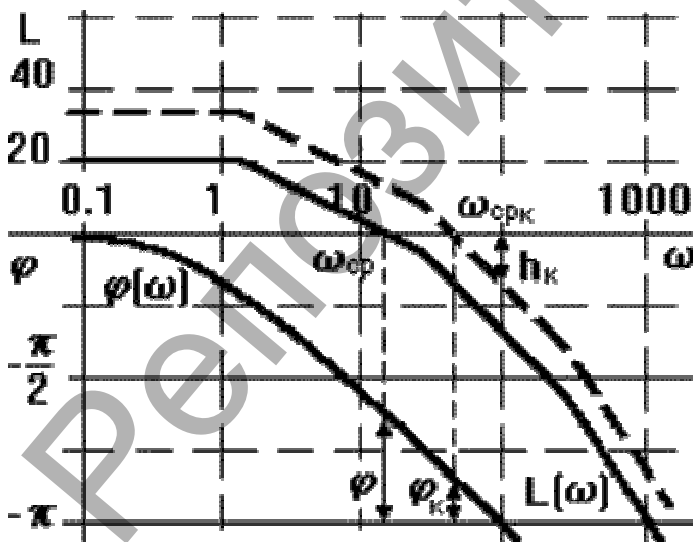


Рисунок 6.4

При увеличении коэффициента передачи  $K$  в  $N$  раз ЛАЧХ, не меняя своей формы, поднимается вверх на  $20lgN$  (на рисунке изображена пунктирной линией). При этом ЛФЧХ остается без изменения. Из рисунка видно, что с увеличением коэффи-

коэффициента передачи запас устойчивости по модулю уменьшается с  $h \approx 30 \text{ дБ/дек}$  до  $h_k \approx 15 \text{ дБ/дек}$ , по фазе - с  $\varphi \approx 60^\circ$  до  $\varphi_k \approx 15^\circ$ .

То есть при повышении точности САУ путем увеличения коэффициента передачи необходимы мероприятия по повышению запаса устойчивости. Это главный недостаток такой коррекции. К достоинствам можно отнести повышение быстродействия САУ, так как частота среза  $\omega_{ср}$  увеличивается, следовательно постоянная времени САУ уменьшается.

### 6.3.2. Изменение постоянной времени звена САУ

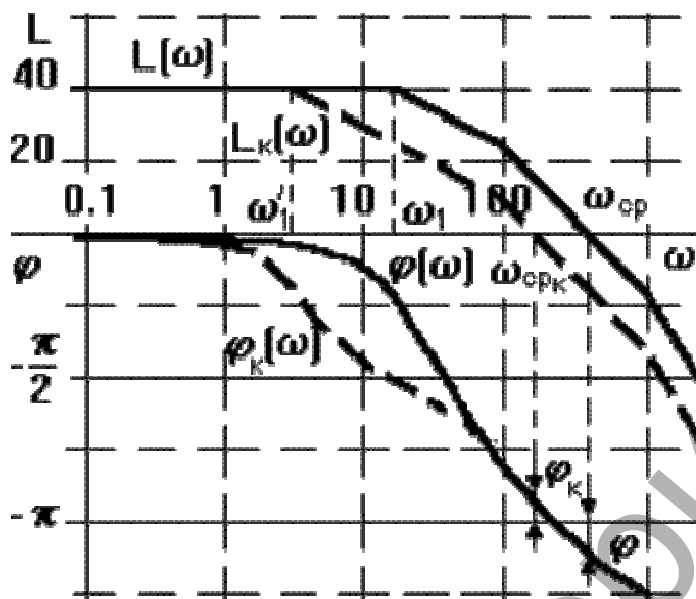
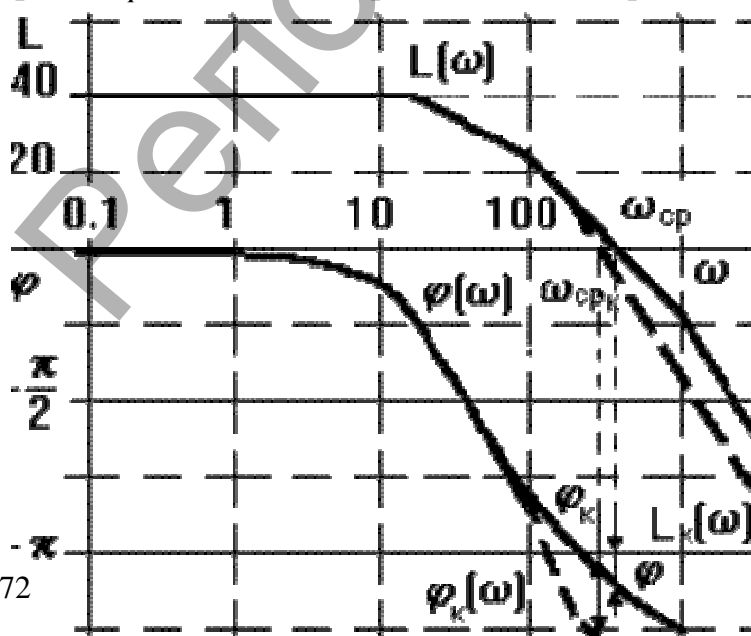


Рисунок 6.5

На рис.6.5 сплошными линиями изображены ЛЧХ разомкнутой САУ с параметрами:  $T_1 = 0.05 \text{ с}$ ,  $T_2 = 0.01 \text{ с}$ ,  $T_3 = 0.001 \text{ с}$ ,  $K = 100$ . Из рисунка видно, что САУ неустойчива. При увеличении постоянной времени  $T_1$  в 5 раз

( $T_1' = 0.2 \text{ с}$ ) ЛАЧХ и ЛФЧХ приобретают вид, показанный на рисунке пунктирной линией. При этом видим, что замкнутая САУ становится устойчивой. Заметим, что сопрягающая частота  $\omega_1$  данного звена располагается левее частоты среза  $\omega_{ср}$ . Если бы она располагалась правее частоты среза, то есть, если бы мы



увеличивали постоянную времени, например, третьего звена  $T_3$ , то это привело бы к уменьшению запаса устойчивости. Частотные характеристики для этого случая приведены на рис.6.6.



**Рисунок 6.6**

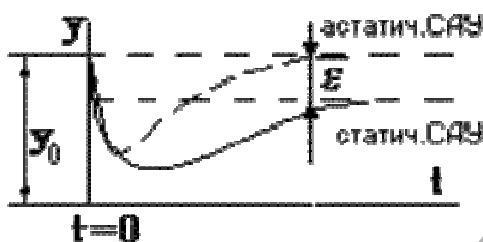
Аналогичное влияние оказывает постоянная времени колебательного звена. Влияние постоянной времени форсирующего звена обратное, то есть, если сопрягающая частота форсирующего звена располагается левее частоты среза, то увеличение его постоянной времени уменьшает запас устойчивости САУ, если правее, то запас устойчивости увеличивается. Указанные зависимости справедливы лишь при условии, что сопрягающая частота расположена на некотором удалении (около одной декады) от частоты среза. Бывают и исключения из этого правила.

### 6.4. Коррекция свойств САУ включением последовательных корректирующих звеньев

Это один из наиболее распространенных путей коррекции свойств САУ, особенно в случае структурно неустойчивых САУ. Рассмотрим несколько типичных случаев.

#### 6.4.1. Включение интегрирующего звена в статическую САУ

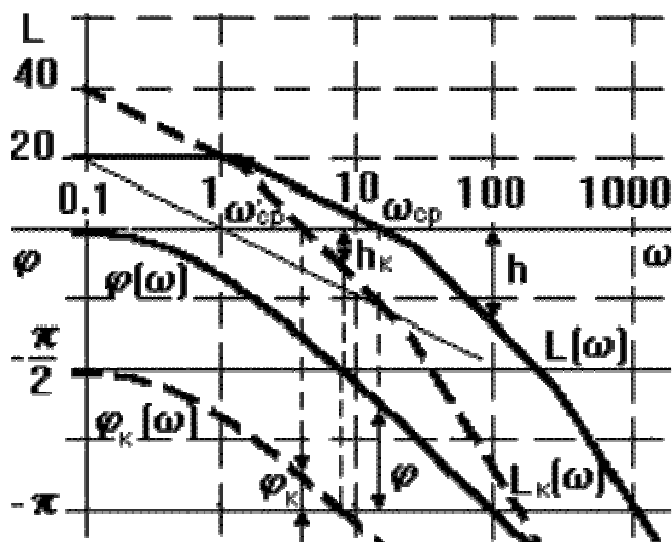
Если в статическую САУ последовательно с регулятором включить астатическое звено с передаточной функцией  $W = 1/p$ , то САУ станет астатической, то есть теоретически она будет иметь нулевую статическую ошибку  $\varepsilon_{уст} = 0$  (рис.6.7). Если в исходной САУ  $T_1 = 0.5с$ ,  $T_2 = 0.02с$ ,  $T_3 = 0.002с$ ,  $K = 10$ , то



включение последовательного астатического звена приведет к изменению частотных характеристик, как это показано на рис.6.8 пунктирными линиями.

**Рисунок 6.7**

Видим, что все ветви ЛАЧХ приобрели дополнительный наклон в  $-20дб/дек$ . ЛФЧХ интегрирующего звена есть горизонтальная линия  $\varphi = -\pi/2$ , поэтому ЛФЧХ разомкнутой САУ после включения данного звена опускается вниз на  $90^\circ$ . Из рисунка видно, что запас устойчивости по модулю данной САУ снижается с  $h \approx 25дб$  до  $h_k \approx 10дб$ , по фазе - с  $\varphi \approx 60^\circ$  до  $\varphi_k \approx 20^\circ$ .



**Рисунок 6.8**

Можно сделать вывод: введение в статическую САУ последовательного интегрирующего звена переводит ее в разряд астатических САУ, повышая тем самым точность управления, но требует, как правило, специальных мер по повышению запаса устойчивости САУ, например, можно уменьшить коэффициент передачи САУ. Кроме снижения запасов устойчивости существенным недостатком данного способа коррекции САУ явля-

ется снижение частоты среза  $\omega_{ср}$ , следовательно, увеличение постоянной времени переходного процесса, то есть уменьшение быстродействия САУ.

### 6.5. Включение апериодического звена

Пусть в исходной САУ  $T_1 = 0.05с$ ,  $T_2 = 0.01с$ ,  $T_3 = 0.001с$ ,  $K = 40$ . Введем

в прямую цепь апериодическое звено с передаточной функцией  $W_a(p) = 1/(T_a p + 1)$ , где  $T_a = 8с$ , то есть постоянная времени корректирующего звена больше, чем постоянные времени остальных звеньев САУ (рис.6.9). ЛАЧХ дополнительного звена представлена на рисунке тонкой сплошной линией. ЛАЧХ и ЛФЧХ скорректированной САУ представлены пунктирными линиями.

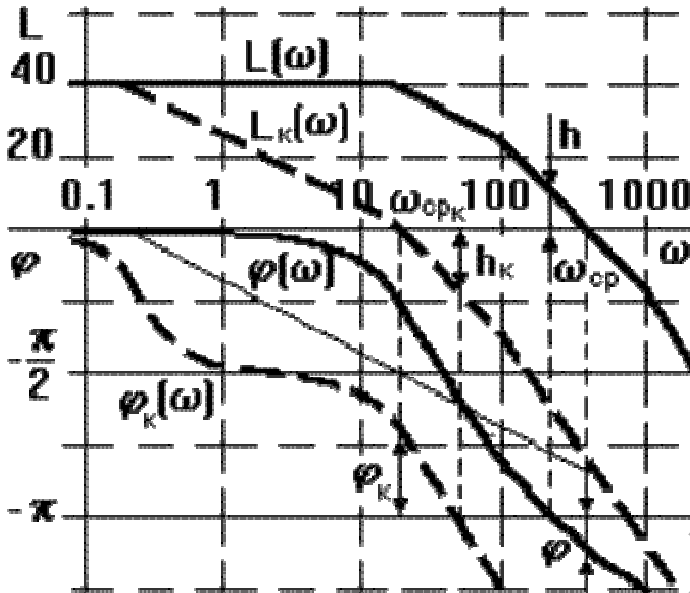


Рисунок 6.9

Из рисунка видно, что изначально неустойчивая САУ после коррекции стала устойчивой. Вообще введение в прямую цепь апериодического звена с постоянной времени значительно большей, чем у звеньев исходной САУ, повышает запас устойчивости САУ. К достоинствам можно отнести также снижение высокочастотных помех и колебательности переходных процессов, о чем свидетельствует смещение вниз высокочастотной части ЛАЧХ. Поэтому такой прием повышения запаса устойчивости называется *демпфированием с подавлением высоких частот*. Недостаток - уменьшается частота среза  $\omega_{ср}$ , то есть снижается быстродействие системы.

### 6.6. Включение форсирующего звена

Передаточная функция идеального форсирующего звена  $W_f(p) = T_f(p)p + 1$ .

При  $T_f = 0.005с$  его ЛАЧХ выглядит так, как это показано на рис.6.10, тонкой сплошной линией. Частотные характеристики скорректированной САУ показаны пунктирными линиями.

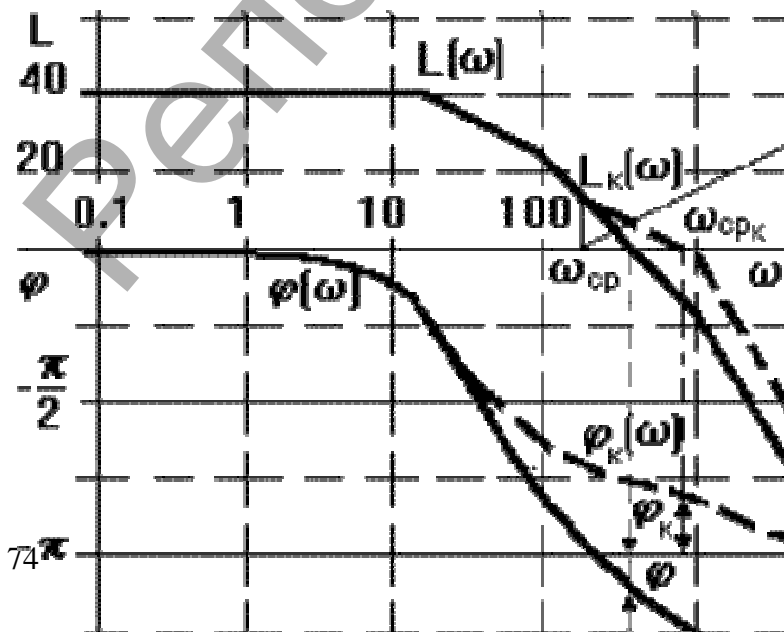


Рисунок 6.10

Из рисунка видно, что изначально неустойчивая САУ после коррекции стала устойчивой. Кроме того, увеличилась частота среза, то есть повысилось быстродействие системы. Это достоинства данного способа корректировки. Вместе с тем высокочастотная часть ЛАЧХ сместилась вверх, то есть усилилось влияние высокочастотных помех. Поэтому данный способ называется *демпфированием с поднятием высоких частот*. Это серьезный недостаток, ограничивающий применение данного способа корректировки.

### 6.7. Включение звена со сложной передаточной функцией

Введем в исходную систему дополнительное звено со сложной передаточной функцией:

$$W_d(p) = \frac{1}{(T_{20}p + 1)(T_{30}p + 1)(T_{40}p + 1)}, \quad \text{где } T_{10} = T_{20} = 0.01, T_{30} = 0.1, T_{40} = 0.001.$$



Рисунок 6.11

### 6.8. Последовательная коррекция по задающему воздействию

Астатизма, то есть отсутствия статической ошибки, статической САУ можно достичь не только включением интегрирующего звена. Рассмотрим несколько иных путей. Последовательной коррекцией по задающему воздействию называется включение в цепь задающего воздействия до замкнутого контура

корректирующего звена со специально подобранной передаточной функцией  $W_k$  (рис.6.12).



Рис. 114

Рисунок 6.12

Передаточная функция замкнутой САУ в этом случае находится из выражения:

$$W_{\text{экв}}(p) = \frac{1+W_p}{1+K_p}$$

В установившемся режиме:

$$K_{\text{экв}}(p) = \frac{K_k K_p}{1+K_p}$$

$$\frac{1+K_p}{K_p}$$

Если принять  $K_k(p) = \frac{K_p}{1+K_p} = 1 + \dots$ , то в итоге получаем  $K_{\text{экв}}(p) = 1$ , то есть  $y_{\text{уст}}(p) = K_{\text{экв}}(p) \cdot y_0(p) = y_0(p)$ , то есть статическая ошибка равна нулю.

САУ, оставаясь статической, ведет себя как астатическая. При этом, так как корректирующее звено вынесено за пределы замкнутого контура, условия устойчивости и быстродействие не ухудшаются. Корректирующее звено может быть обычным пропорциональным звеном.

Недостаток этого способа в том, что астатизм обеспечивается только при строго определенных  $K_k(p)$ . Любые неточности, особенности из-за изменения параметров в процессе эксплуатации САУ ведут к появлению статической ошибки, в то время как астатизм, достигнутый введением интегрирующих звеньев, сохраняется и при изменении параметров САУ.

## 6.9. Коррекция с использованием неединичной обратной связи

Астатизм САУ относительно задающего воздействия можно обеспечить также использованием неединичной обратной связи, когда корректирующее устройство включается в цепь главной обратной связи (рис.6.13).

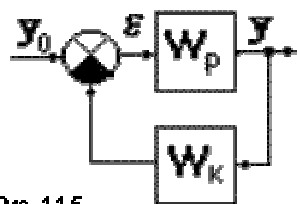


Рисунок 6.13

Рис. 115

При этом

$$W_{экр}(p) =$$

В установившемся режиме:

$$y = y_0(p).$$

Если принять  $K_k(p) =$  , то получим

$$\underline{\quad p \quad}$$

$$y = \quad y_0 = y_0 = y_0(p),$$

то есть  $K_{экр}(p) = 1$ . Преимущества и недостатки данного способа коррекции те же, что и в предыдущем случае.

### 6.10. Компенсация возмущающего воздействия

Если возмущающее воздействие доступно измерению, то точность управления можно существенно повысить, включив в САУ цепь компенсации возмущающего воздействия (рис.6.14), обеспечив тем самым комбинированное регулирование.

Компенсирующую цепь обычно включают между входным и выходным каскадами усилителя.

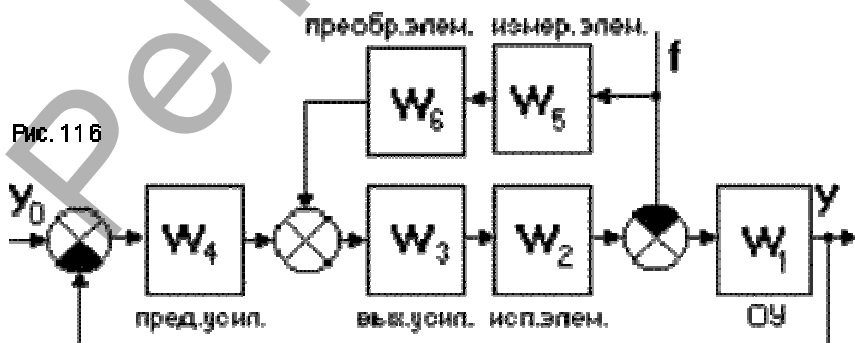


Рисунок 6.14

Составим передаточную функцию относительно возмущающего воздействия:

$$W_{fy}(p) = \dots + \dots = \dots,$$

где  $W = W_1 \cdot W_2 \cdot W_3 \cdot W_4$  - передаточная функция прямой цепи.

Если  $W_2 \cdot W_3 \cdot W_5 \cdot W_6 = 1$ , то  $W_{fy}(p) = 0$ , то есть любое возмущение  $f$  не будет оказывать никакого влияния на выходную величину  $y$ . В этом случае говорят, что регулируемая величина *инвариантна* (независима) относительно возмущения  $f$ .

САУ, в которых выходная величина не зависит от возмущений, называется *инвариантной*. *Абсолютно инвариантной САУ* называется САУ, в которой  $W_{fy}(p)$  тождественно равна нулю (как в установившемся, так и в переходном режимах). Это обеспечить очень сложно, поэтому обычно ограничиваются упрощенным исполнением регулятора по возмущению, что обеспечивает частичное выполнение принципа инвариантности. При этом достигается условие  $W_{fy}(p) = K_{fy} \ll 1$ , то есть  $K_{fy} \approx 0$  и влияние возмущения  $f$  на управляемую величину очень мало. В этом случае говорят, что достигается инвариантность с точностью до малой величины  $\varepsilon$ .

Этот вид регулирования имеет большие достоинства, так как в результате уменьшения влияния возмущения снижаются требования к замкнутому контуру регулирования. Это позволяет уменьшить передаточный коэффициент разомкнутой САУ, а следовательно, повысить запас устойчивости замкнутой САУ. Сама компенсирующая цепь не влияет на устойчивость замкнутого контура, но она в свою очередь сама должна быть устойчивой.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в настоящем курсе понятия и методы относятся к линейным непрерывным системам. В реальных приложениях САУ редко бывают линейными. Всё разнообразие систем можно отнести к нескольким большим классам. Однако подавляющее большинство методов анализа для всех классов базируется на изложенных здесь линейных методах.

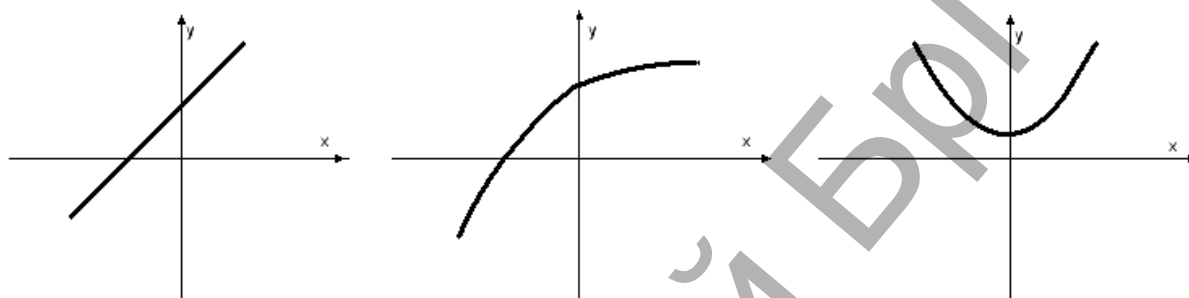
Основными признаками деления автоматических систем на большие классы по характеру внутренних динамических процессов являются следующие:

- 1) непрерывность или дискретность динамических процессов во времени;
- 2) линейность или нелинейность уравнений, описывающих динамику процессов регулирования.

По первому признаку автоматические системы делятся на *системы непрерывного действия*, *системы дискретного действия* (импульсные и цифровые) и *системы релейного действия*.

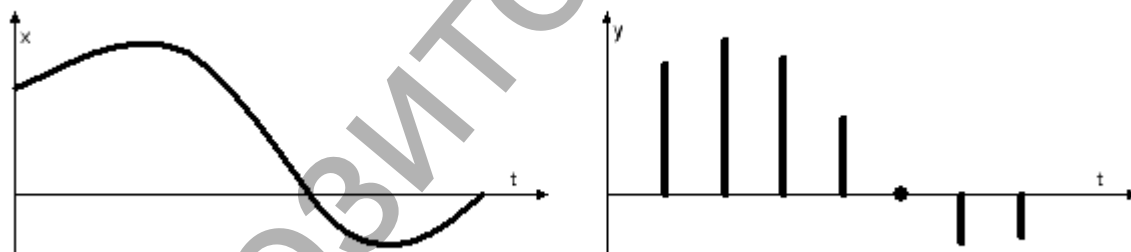
По второму признаку каждый из указанных классов (кроме релейного) делится на *системы линейные и нелинейные*. Релейные системы целиком относятся к категории нелинейных систем.

*Системой непрерывного действия* называется такая система, в каждом из звеньев которой непрерывному изменению входной величины во времени соответствует непрерывное изменение выходной величины. Примеры графиков непрерывных статических зависимостей выходной величины от входной приведены на рис 7.1.



**Рисунок 7.1**

*Системой дискретного действия* называется такая система, у которой хотя бы в одном из звеньев при непрерывном изменении входной величины выходная величина имеет вид отдельных импульсов, появляющихся через некоторые промежутки времени (рис.7.2).



**Рисунок 7.2**

Звено, преобразующее непрерывный входной сигнал в последовательность импульсов, называется импульсным. К дискретным автоматическим системам относятся системы импульсного регулирования, а так же системы с цифровыми вычислительными устройствами.

*Системой релейного действия* называется такая система, у которой имеется звено с релейной характеристикой. Примеры графиков статической зависимости выходного параметра от входной величины для релейных звеньев приведены на рис.7.3.

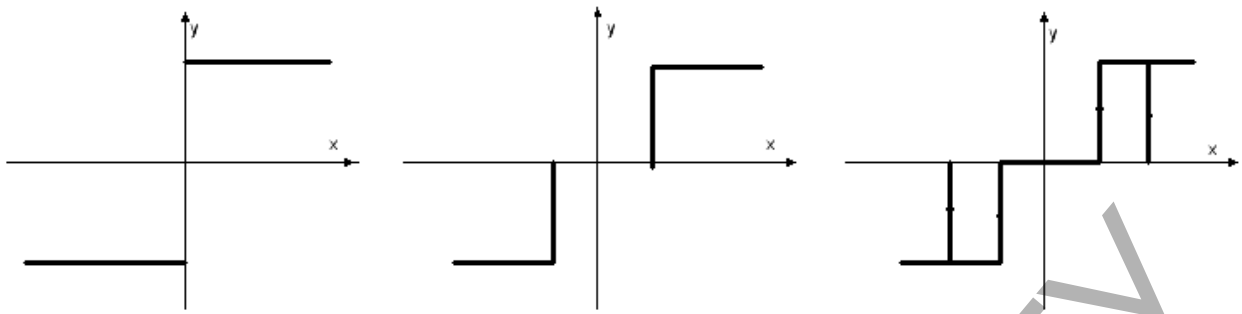


Рисунок 7.3

Обратимся теперь ко второму признаку классификации автоматических систем.

*Линейной системой* называется такая система, динамика всех звеньев которой описывается линейными алгебраическими, дифференциальными или разностными уравнениями. При этом статические характеристики всех звеньев должны быть линейными (первый график на рис.7.1), т.е. должны иметь вид прямой линии.

Если динамика всех звеньев описывается обыкновенными линейными уравнениями с постоянными коэффициентами, то систему называют *обыкновенной линейной системой*. Если в уравнении динамики какого-либо звена имеются коэффициенты, зависящие от времени, то речь ведут о *линейной системе с переменными параметрами*. Если звено описывается линейным уравнением в частных производных (например, волновые процессы), то говорят о *линейной системе с распределёнными параметрами*. В отличие от этого, обыкновенная линейная система является системой со сосредоточенными параметрами.

Если какое-либо звено системы обладает временным запаздыванием или временной задержкой передачи сигнала, то система является *линейной системой с запаздыванием*.

Динамика *импульсных систем* описывается линейными разностными уравнениями. В отличие от обыкновенных линейных систем, все названные системы объединяют названием *особые линейные системы*.

*Нелинейной системой* называется такая система, у которой хотя бы в одном звене нарушается линейность статической характеристики. Нелинейными могут быть системы с переменными параметрами, с распределёнными параметрами, с запаздыванием, импульсные и цифровые системы.

При исследовании, расчёте и синтезе САУ нужно иметь в виду, что наиболее полно разработаны теория и методы для обыкновенных линейных систем. Поэтому стремятся свести задачу к такой форме, чтобы максимально использовать методы исследования обыкновенных линейных систем. Обычно уравнения динамики всех звеньев системы приводят к обыкновенным линейным, и только для некоторых звеньев учитываются особые или нелинейные свойства. Система при исследовании разбивается на два блока, в одном из которых объединяется весь комплекс обыкновенных линейных звеньев, а другой представлен особым или нелинейным звеном.



Однако это не значит, что нужно строить только линейные системы. Введение в контур управления особых линейных и нелинейных звеньев может придать системе лучшие качества. Особенно богатыми возможностями обладают системы со специально вводимыми нелинейностями и дискретные системы, в том числе с цифровыми дискретными устройствами, а так же самонастраивающиеся, экстремальные и самоорганизующиеся системы.

## 8. ЛИТЕРАТУРА

1. Бесекерский, В.А. Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов, – М.: Профессия, 2003.
2. Васильев, Д.В. Системы автоматического управления / Д.В. Васильев, В.Г. Чуич. – М: Высшая школа, 1967.
3. Воронов, А.А. Основы теории автоматического управления. – М.: Энергия, 1965.
4. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования / Под ред. В.В. Солодовникова. – М.: Машиностроение, 1967.

5. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления /  
Под ред. В.А. Бесекерского. – М.: Наука, 1969.

Репозиторий БрГТУ

Учебное издание

*Ярошевич Анатолий Васильевич*

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

## *Конспект лекций*

для студентов специальности

**1 – 36 01 01 «Технология машиностроения»**

Ответственный за выпуск: Ярошевич А.В.

Редактор: Строкач Т.В.

Компьютерная верстка: Боровикова Е.А.

Корректор: Никитчик Е.В.

---

Подписано к печати 27.02.2012 г. Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Бумага «Снегурочка». Усл. п. л. 4,65. Уч. изд. л. 5,0.

Тираж 50 экз. Заказ № 255.

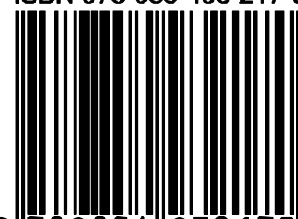
Отпечатано на ризографе учреждения образования

«Брестский государственный технический университет».

224017, Брест, ул. Московская, 267.

Лицензия № 02330/0549435 от 8.04.2009 г.

ISBN 978-985-493-217-0



9 789854 932170

Репозиторий БрГТУ

**ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО  
УПРАВЛЕНИЯ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ  
СИСТЕМАМИ**

**К  
О  
Н  
С  
П  
Е  
К  
Т  
  
Л  
Е  
К  
Ц  
И  
Й**

