МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ.

ЧАСТЬ V.

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Брест 2012

УДК 517.9 (076.5)

В этой части практикума содержатся краткие теоретические сведения, основные формулы, решения типовых задач по всем темам разделов «Кратные интегралы», «Криволинейные интегралы» учебной программы по математике для технических специальностей, а также задания для аудиторных и домашних работ к каждому практическому занятию по этим темам. Издается в 7 частях. Часть 5.

Составители: Р. А. Гоголинская, ассистент,
В. Т. Джура, ассистент,
Е. В. Кузьмина, старший преподаватель,
И.В. Лизунова, доцент,
Л. Т. Мороз, доцент.

Рецензент: Матысик О.В., заведующий кафедрой алгебры и геометрии Учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м. н., доцент.

Содержание

Двойной интеграл

Основные сведения

Определение двойного интеграла

На плоскости Оху рассмотрим некоторую замкнутую область D, ограниченную замкнутой линией L.

Пусть в D задана непрерывная функция $z = f\left(x, y\right)$. Произвольными линиями разобьем D на n элементарных областей S_i, площади которых ΔS_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$ (рис. 1).

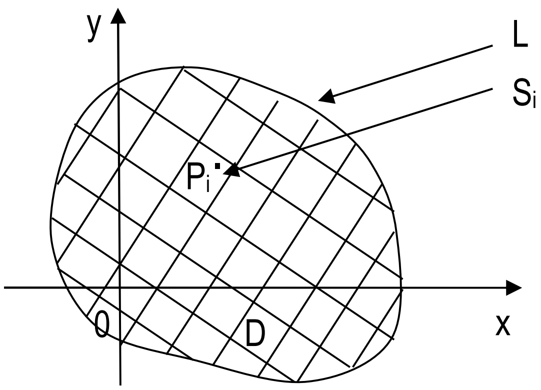


Рисунок 1

В каждой области S_i выберем произвольную точку $P_i\left(x_i, y_i\right)$. ***Диаметром*** d_i области S_i называется длина наибольшей из хорд, соединяющих граничные точки S_i.

Выражение вида:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right)\Delta S_i \tag{1}$$

называется ***n-й интегральной суммой для функции*** $z = f\left(x, y\right)$ ***в области D***.

Вследствие произвольного разбиения области D на элементарные области S_i и случайного выбора в них точек P_i можно составить бесчисленное множество указанных сумм. Однако, согласно теореме существования и единственности, если функция $z = f\left(x, y\right)$, например, непрерывна в D и линия L – кусочно-гладкая, предел всех этих сумм, найденных при условии $d_i \to 0$, всегда существует и единственен.

Двойным интегралом функции $z = f\left(x, y\right)$ ***по области D*** называется $\lim\limits_{d_i \to 0} I_n$, обозначаемый $\iint\limits_D f\left(x, y\right) dS$.

Таким образом, по определению

$$\iint\limits_D f\left(x, y\right) dS = \lim_{d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right)\Delta S_i \qquad (2).$$

Здесь и далее будем предполагать, что функция $z = f\left(x, y\right)$ непрерывна в области D и линия L – кусочно-гладкая, поэтому указанный в формуле (2) предел всегда существует.

Свойства двойного интеграла

1. $\iint\limits_D cf(x,y)dS = c\iint\limits_D f(x,y)dS \ \ (c = const)$.
2. $\iint\limits_D \left[f(x,y) \pm g(x,y)\right]dS = \iint\limits_D f(x,y)dS \pm \iint\limits_D g(x,y)dS$.
3. Если $f(x,y) \le g(x,y)$, то $\iint\limits_D f(x,y)dS \le \iint\limits_D g(x,y)dS$.
4. $\left|\iint\limits_D (x,y)dS\right| \le \iint\limits_D \left|f(x,y)\right|dS$.
5. $\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_{D'} f(x,y)dS + \iint\limits_{D''} f(x,y)dS$, где D' и D'' – области, на которые разбита область D некоторой кривой.
6. Если в D $m \le f(x,y) \le M$, то

$$m\,S_D \le \iint\limits_D f(x,y)dS \le M\,S_D,$$

откуда $\iint\limits_D f(x,y)dS = \mu S_D \ \ (m \le \mu \le M)$, S_D – площадь области D.

В прямоугольных декартовых координатах $dS = dxdy$.

Геометрический смысл двойного интеграла

1. Если $f(x,y) > 0$, то двойной интеграл от функции $z = f(x,y)$ по области D равен объему тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$, с боков цилиндрической поверхностью с образующими параллельными оси Oz (направляющей служит граница L области D), снизу – плоскостью $z = 0$.

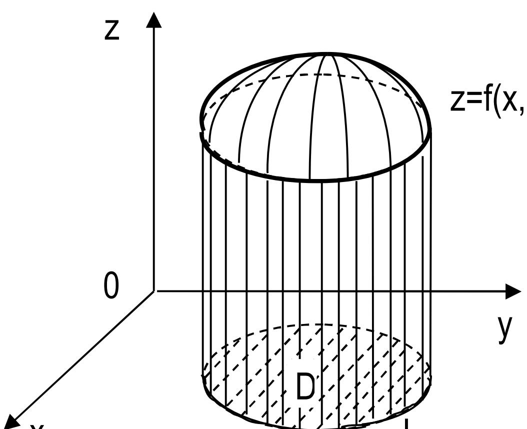


Рисунок 2

2. Площадь S области D может быть найдена по формуле

$$S = \iint\limits_D dxdy.$$

Физический смысл двойного интеграла

Двойной интеграл от функции $z = f(x,y) > 0$ по области D представляет собой массу пластинки D, если плотностью этой пластинки в точке $P(x,y)$ считать функцию $f(x,y)$.

Приведение двойного интеграла к повторному в случае криволинейной области

Различают два основных вида области интегрирования:

1. Область первого вида D' ограниченную слева и справа прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ соответственно, снизу – кривой $y = \varphi_1(x)$, сверху – кривой $y = \varphi_2(x)$ $[\varphi_2(x) \ge \varphi_1(x)]$, каждая из которых пересекается с вертикалью $x = \alpha$ $(a \le \alpha \le b)$ только в одной точке (область является правильной относительно оси Oy) (Рис. 3).

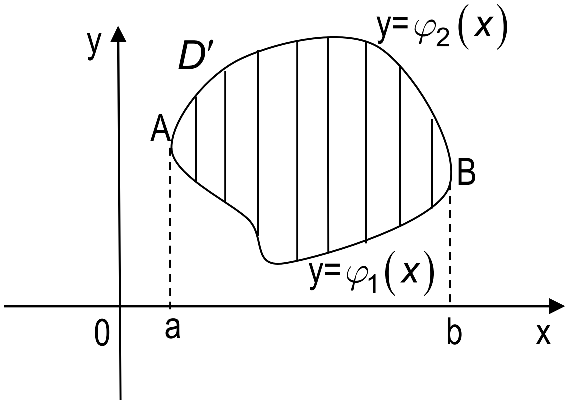


Рисунок 3

2. Область второго вида D'' ограниченную снизу и сверху прямыми $y = c$, $y = d$ соответственно, слева – кривой $x = \psi_1(y)$, справа – кривой $x = \psi_2(y)$ $[\psi_2(y) \ge \psi_1(y)]$, каждая из которых пересекается с горизонталью $y = \beta$ $(c \le \beta \le d)$ только в одной точке (область правильная относительно Ox). (Рис. 4).

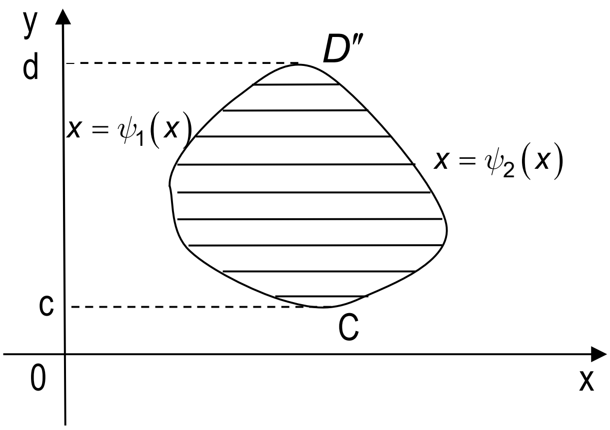


Рисунок 4

Если для функции $f(x,y)$, определенной в области D', существует двойной интеграл, то выполняется равенство

$$\iint\limits_{D'} f(x,y)\,dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \qquad (1).$$

В случае области второго вида D'' (правильной относительно оси Ox)

$$\iint\limits_{D''} f(x,y)\,dS = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \qquad (2).$$

Если область интегрирования не является целиком правильной ни относительно оси Ox, ни относительно оси Oy, то стараются разбить на части, каждая из которых относится к одной из этих видов (рис. 5 а, б, в).

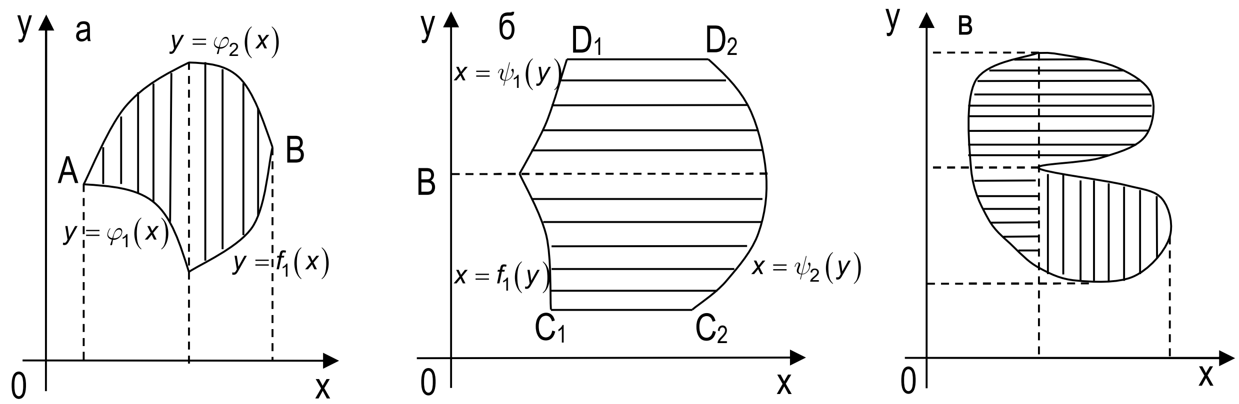


Рисунок 5

В повторном интеграле (1) интегрирование производится сначала по у, при этом х считается постоянным; пределы интегрирования $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ представляет собой правые части уравнений линий $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, ограничивающих область D' снизу и сверху соответственно.

В результате интегрирования получается функция от х, которую потом интегрируют по х в постоянных пределах a и b.

В повторном интеграле (2) интегрирование производится сначала по х от $\psi_1(y)$ до $\psi_2(y)$, при этом у считается постоянным, затем полученную функцию от у интегрируют по у в пределах от с до d.

Замечание 1. В повторном интеграле (1) нижний предел интегрирования по х равен наименьшей абсциссе точки границы области D' (рис. 3), верхний предел b равен наибольшей абсциссе.

Замечание 2. В повторном интеграле (2) постоянные пределы интегрирования с и d являются наименьшей и наибольшей ординатами точек границы области D'' (рис. 4).

Пример 1.

Вычислить $\iint\limits_D xy\,dxdy$, где D является прямоугольником с границами $x=4$, $x=8$, $y=1$, $y=2$.

Решение.

По формуле (1) имеем $\iint\limits_D xydxdy=\int\limits_4^8 dx\int\limits_1^2 xydy$.

Так как $\int\limits_1^2 xydy = x\dfrac{y^2}{2}\Big|_1^2=\dfrac{x}{2}(4-1)=\dfrac{3}{2}x$,

то $\int\limits_4^8 dx\int\limits_1^2 xy\,dy=\int\limits_4^8\dfrac{3}{2}x\,dx=\dfrac{3}{2}\int\limits_4^8 x\,dx=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x^2}{2}\Big|_4^8=\dfrac{3}{4}(64-16)=36$.

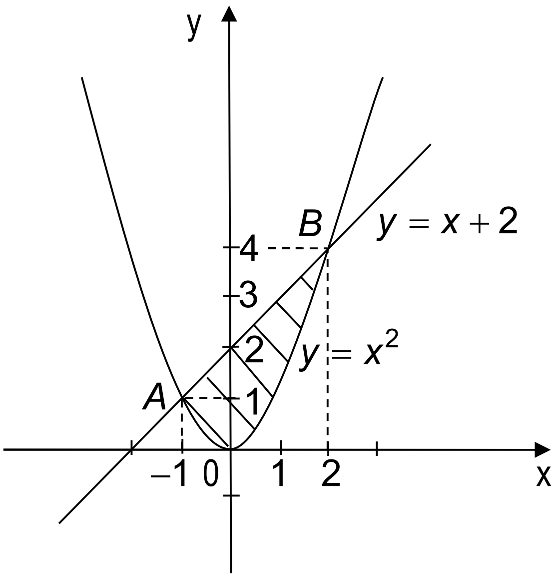
Следовательно, $\iint\limits_D xy\,dxdy=36$.

Замечание. Тот же результат можно получить и по формуле (2): $\iint\limits_D xy\,dxdy = \int\limits_1^2 dy \int\limits_4^8 xy\,dx$. Действительно, $\int\limits_4^8 xy\,dx = y\,\frac{x}{2}\Big|_4^8 = y\,\frac{64-16}{2} = 24y$,

поэтому $\int\limits_1^2 dy \int\limits_4^8 xydx = \int\limits_1^2 24ydy = 12y^2\Big|_1^2 = 12(4-1) = 36$.

<u>*Пример 2.*</u>

Вычислить $\iint\limits_D x^3y\,dxdy$, D ограничено линиями $y = x^2$, $y = x + 2$.



Решение.

Построим область D.

Найдем точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = x + 2$: $x^2 = x + 2$; $x^2 - x - 2 = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $y_1 = 1$, $y_2 = 4$.

Следовательно, точки пересечения $A(-1;1)$ и $B(2;4)$.

Эта область является правильной относительно оси Оу: снизу она ограничена кривой $y = x^2$, сверху – $y = x + 2$, $-1 \le x \le 2$.

Следовательно,

$$\iint\limits_D x^3y\,dxdy = \int\limits_{-1}^2 dx \int\limits_{x^2}^{x+2} x^3y\,dy = \int\limits_{-1}^2 dx\,\frac{x^3y^2}{2}\Bigg|_{x^2}^{x+2} = \int\limits_{-1}^2 \frac{x^3}{2}\left((x+2)^2 - x^4\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^2 \left(x^5 + 4x^4 + 4x^3 - x^7\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^6}{6} + 4\frac{x^5}{5} + x^4 - \frac{x^8}{8}\right)\Bigg|_{-1}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{64}{6} + \frac{4\cdot 32}{5} + 16 - 32\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{5} + 1 - \frac{1}{8}\right)\right) = 10\frac{1}{80}.$$

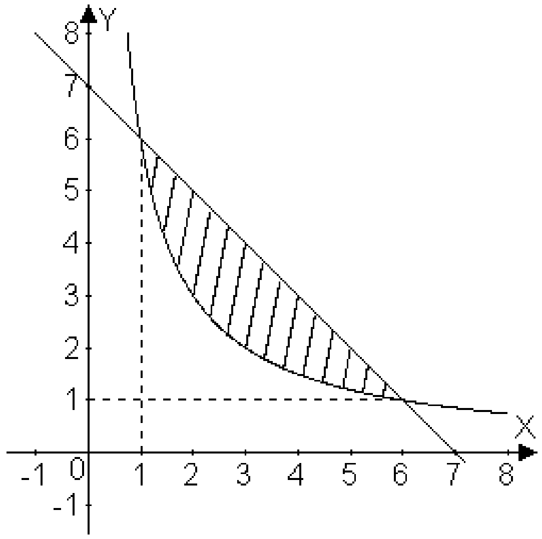
<u>*Пример 3.*</u>

Вычислить $\iint\limits_D dxdy$, D ограничено линиями $xy = 6$, $x + y = 7$.

Решение.

Найдем точки пересечения гиперболы $xy = 6$ и прямой $x + y = 7$. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 - y \\ (7-y)y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 - y \\ 7y - y^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 - y \\ y^2 - 7y + 6 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} y_1 = 1,\ y_2 = 6 \\ x_1 = 6,\ x_2 = 1. \end{matrix}$$



Следовательно, точки пересечения $A(1;6)$ и $B(6;1)$.

Эту область можно рассматривать как область первого D' и второго D'' вида.

Область D снизу ограничена кривой $y=\frac{6}{x}$ (выражен у из уравнения гиперболы), сверху – отрезком прямой $y=7-x$ (у выражен из уравнения прямой), $1\le x\le 6$. Это частный случай области первого вида (рис. 3).

$$\iint\limits_D x\,dxdy=\int\limits_1^6 dx\int\limits_{\frac{6}{x}}^{7-x} x\,dy=\int\limits_1^6 dx\left(xy\right)\Bigg|_{\frac{6}{x}}^{7-x}=\int\limits_1^6\left(x\left(7-x\right)-x\cdot\frac{6}{x}\right)dx=$$

$$=\int\limits_1^6\left(7x-x^2-6\right)dx=\left(7\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-6x\right)\Bigg|_1^6=18\cdot 7-\frac{6^3}{3}-36-\frac{7}{2}+\frac{1}{3}+6=\frac{125}{6}.$$

<u>Пример 4.</u>

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

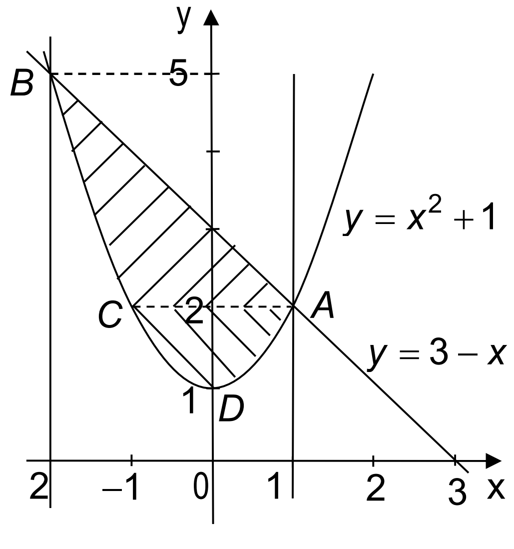
$$\int\limits_{-2}^{1} dx\int\limits_{x^2+1}^{3-x} f\left(x,y\right)dy\,.$$

Решение.

Область интегрирования D ограничена линиями:

$x=1;\quad y=x^2+1.$

$x=-2;\ \ y=3-x.$



Найдем точки пресечения параболы $y=x^2+1$ и прямой $y=3-x$.

$$\begin{cases} y=x^2+1; \\ y=3-x. \end{cases}$$

$x^2+1=3-x$

$x^2+x-2=0.$

$x_1=1,\ x_2=-2$

$y_1=2\ \ y_2=5.$

Получили $A(1;2)$, $B(-2;5)$.

Область D – область первого вида, к области второго вида она не относится, но ее можно разбить на две области второго вида прямой $y=2$.

Область второго вида с границей ABC слева ограничена кривой $x=-\sqrt{y-1}$ (х выразим из уравнения $y=x^2+1$: $x^2=y-1$, $x=\pm\sqrt{y-1}$, для $x<0$ $x=-\sqrt{y-1}$, для $x\ge 0$ $x=\sqrt{y-1}$) справа – линией $x=3-y$ (х выражено из уравнения $y=3-x$), снизу – линией $y=2$. Область с границей ABC – частный случай области второго вида (рис. 4), $2\le y\le 5$.

Область с границей ACD – второго вида, слева она ограничена кривой $x=-\sqrt{y-1}$, справа – кривой $x=\sqrt{y-1}$, сверху – линией $y=2$, $1\le y\le 2$. Значит, интеграл можно представить в виде суммы двух интегралов:

$$\int_{-2}^{1}dx\int_{x^2+1}^{3-x}f(x,y)dy=\int_{1}^{2}dy\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}}f(x,y)dx+\int_{2}^{5}dy\int_{-\sqrt{y-1}}^{3-y}f(x,y)dx.$$

<u>*Пример 5.*</u>

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_{0}^{4}dx\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}}f(x,y)dy.$$

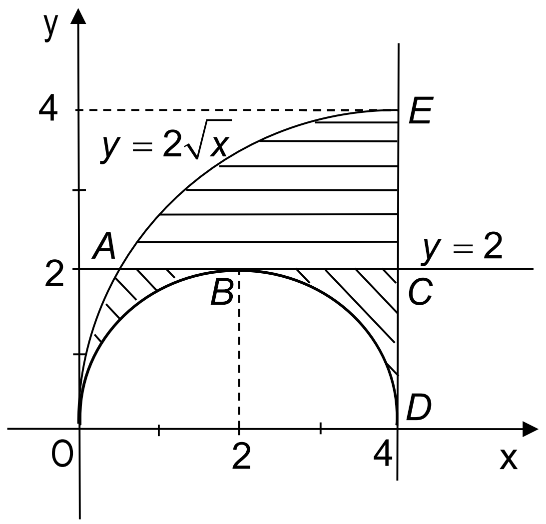
Решение.

Область D интегрирования ограничена линиями: $x=0$; $x=4$

$y=\sqrt{4x-x^2}$; $y=2\sqrt{x}$.

$y=\sqrt{4x-x^2}$ – уравнение окружности с центром $(2;0)$ радиуса $r=2$; $y\ge 0$.

$y=2\sqrt{x}$ – уравнение параболы с вершиной в начале координат, $y\ge 0$.



Рассмотрим область D относительно оси Ох.

Разобьем ее прямой $y=2$ на три области, правильные относительно Ох.

Область с границей AEC слева ограничена кривой $y=2\sqrt{x}$, необходимо выразить х: $x=\dfrac{y^2}{4}$; справа она ограничена линией $x=4$, снизу – линией $y=2$, $2\le y\le 4$.

Область ABO слева ограничена кривой $x=\dfrac{y^2}{4}$, справа – дугой окружности, из уравнения которой $x-2=\pm\sqrt{4-y^2}$, т.к. для этой области $x<2$, поэтому $x=2-\sqrt{4-y^2}$. Сверху область ограничена линией $y=2$, $0\le y\le 2$.

Область с границей BCD справа ограничена линией $x = 4$, слева $x = 2 + \sqrt{4 - y^2}$ (т.к. $x \geq 2$), сверху – линией $y = 2$, $0 \leq y \leq 2$.

Т.о. данный интеграл можно представить как сумму трех интегралов:

$$\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy = \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^2 dy \int_{2+\sqrt{4-y^2}}^{4} f(x,y)dx +$$

$$+\int_2^4 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{4} f(x,y)dx.$$

Задания.

1. Вычислить: $\iint\limits_D \frac{y}{x^3}dxdy$, $D = [1,2;4,8]$. $\left(\text{\textit{Ответ:} } 9.\right)$

2. Вычислить: $\iint\limits_D \left(x^2 + y\right)dxdy$, если область D ограничена линиями $y = x^2$ и $y^2 = x$. $\left(\text{\textit{Ответ:} } \frac{33}{140}.\right)$

3. Вычислить: $\iint\limits_D x\cos(x + y)dxdy$, если область D ограничена линиями $y = 0$ и $x = \pi$, $y = x$. $\left(\text{\textit{Ответ:} } -\frac{\pi}{2}.\right)$

4. Вычислить: $\iint\limits_D x\,dxdy$, если область D ограничена линиями $y = x^2$ и $y = 2x$. $\left(\text{\textit{Ответ:} } \frac{4}{3}.\right)$

5. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x,y)dy$. $\left(\text{\textit{Ответ:} } \int_0^4 2y \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.\right)$

6. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy$. $\left(\text{\textit{Ответ:} } \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x,y)dx.\right)$

7. Записать в виде одного повторного интеграла следующее выражение: $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} 2y \int\limits_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{2}^{5} dy \int\limits_{-\sqrt{y-1}}^{3-y} f(x,y)\,dx$.

$\left(\textit{Ответ: } \int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x^2+1}^{3-y} f(x,y)\,dy . \right)$

Домашнее задание.

1. Вычислить $\iint\limits_{D} xy\,dxdy$, $D = [2,4;1,2]$. $\left(\textit{Ответ: } 9. \right)$
2. Вычислить: $\iint\limits_{D} x\,dxdy$, если область D ограничена линиями $x = 0$, $y = 0$, $y = \sqrt{4 - x^2}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{8}{3}. \right)$
3. Вычислить: $\iint\limits_{D} x^2 dxdy$, если область D ограничена линиями $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$. $\left(\textit{Ответ: } 2. \right)$
4. Вычислить: $\iint\limits_{D} x^4 y\,dxdy$, если область D ограничена линиями $xy = 1$, $y = x$, $x = 2$. $\left(\textit{Ответ: } 7\frac{19}{21}. \right)$
5. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_{0}^{1} 2y \int\limits_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy . \right)$
6. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$. $\left(\textit{Ответ: } \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy . \right)$
7. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x}^{2x} f(x,y)\,dy$. $\left(\textit{Ответ: } \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\,dx + \int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,dx . \right)$

8. Записать в виде одного повторного интеграла следующее выражение: $\int\limits_{-1}^{3} dx \int\limits_{2}^{\frac{x+5}{2}} f(x,y)dy + \int\limits_{3}^{6} dx \int\limits_{2}^{6-\frac{2}{3}x} f(x,y)dy$.

$\left(\textit{Ответ:} \int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{2y-5}^{9-\frac{3}{2}y} f(x,y)dx. \right)$

Замена переменных в двойном интеграле. Переход к полярным координатам

Пусть переменные x, y связаны с переменными u, v соотношениями $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, где $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ – непрерывные и дифференцируемые функции, взаимно-однозначно отображающие область D плоскости Oxy на область D' плоскости $O'uv$, при этом **якобиан**

$$J = J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

сохраняет постоянный знак в D. Тогда верна формула замены переменных в двойном интеграле

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J|dudv.$$

Известно, что прямоугольные декартовы (x, y) и полярные (ρ,φ) координаты связаны между собой следующими соотношениями:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ (\rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Если в двойном интеграле перейти от декартовых к полярным координатам, то получим формулу (так как якобиан $J = \rho$)

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\, d\rho d\varphi \qquad (1)$$

Представление двойного интеграла в виде повторного в правой части формулы (1) приводит с разным пределам в зависимости от того, где находится полюс O полярной системы координат: вне, внутри или на границе области D.

1. Если полюс O полярной системы координат находится вне области D, ограниченной лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ и линиями, уравнения которых $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, где $\rho_1(\varphi)$, $\rho_2(\varphi)$ $(\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi))$ – функции, заданные на отрезке $[\alpha,\beta]$ (рис. 1), то

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\, d\rho \qquad (2)$$

2. Если полюс О находится внутри области D и уравнение границы области D в полярной системе координат имеет вид $\rho = \rho(\varphi)$, то в формуле (2) $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, $\rho_1(\varphi) = 0$, $\rho_2(\varphi) = \rho(\varphi)$ (рис. 2).

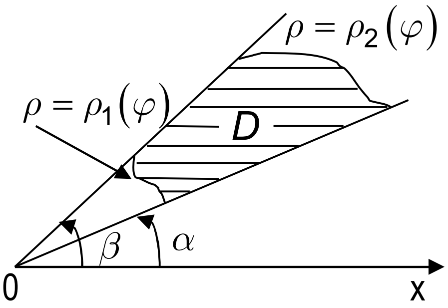


Рисунок 1

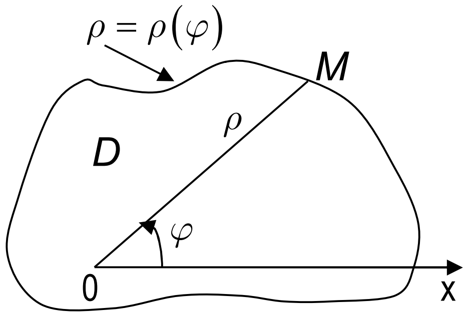


Рисунок 2

3. Если полюс О находится на границе области D и уравнение ее границы в полярной системе координат имеет вид $\rho = \rho(\varphi)$, то в формуле (2) $\rho_1(\varphi) = 0$, $\rho_2(\varphi) = \rho(\varphi)$, а α и β могут принимать разные значения (рис. 3, 4).

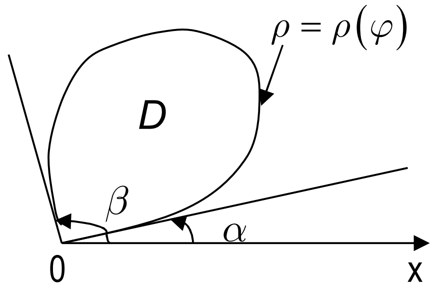


Рисунок 3

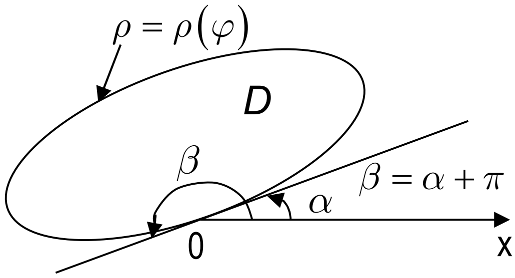


Рисунок 4

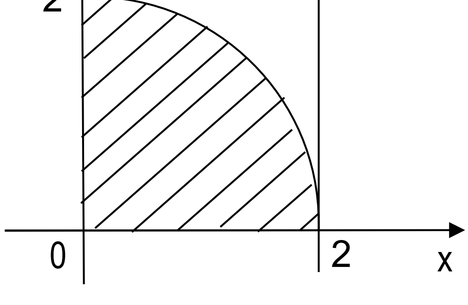
Пример 1.

Вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos\sqrt{x^2 + y^2}\, dy .$$

Решение.

Область D ограничена линиями:



$$x = 0,\quad x = 2$$

$$y = 0,\quad y = \sqrt{4 - x^2}.$$

Область D это четверть круга, расположенного в первой четверти, радиуса 2 с центром в начале координат.

При переходе к полярным координатам φ изменяется в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а ρ изменяется от 0 до 2. Следовательно,

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \rho\cos\rho\, d\rho.$$

$$\int_0^2 \rho\cos\rho\, d\rho = \left|\begin{matrix} u=\rho; & du = d\rho; \\ dv = \cos\rho d\rho; & v=\sin\rho \end{matrix}\right| = \rho\sin\rho\Big|_0^2 - \int_0^2 \sin\rho\, d\rho = 2\sin 2 + \cos\rho\Big|_0^2 =$$
$= 2\sin 2 + \cos 2 - 1.$

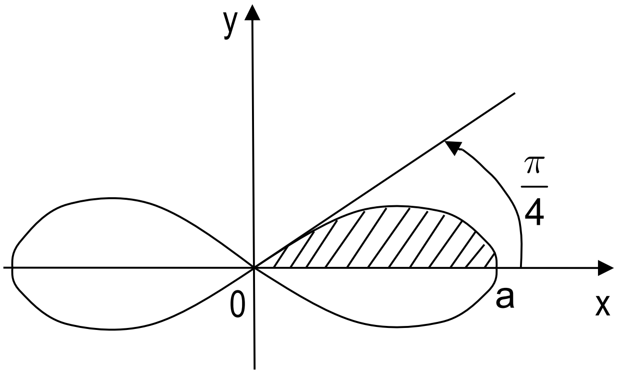
Следовательно, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \rho\cos\rho\, d\rho = \frac{\pi}{2}(2\sin 2 + \cos 2 - 1).$

Пример 2.

Вычислить двойной интеграл, переходя к полярным координатам

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right) dxdy,$$

D ограничена линиями $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right)$, $y=0$, $(x>0,\ y>0)$.



Решение.

Так как $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, то

$\left(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\right)^2 =$

$= a^2\left(\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi\right)$, $\Rightarrow$

$\rho^4 = a^2\rho^2\cos 2\varphi$; $\Rightarrow$ $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$,

$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ – уравнение лемнискаты.

В области интегрирования φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{4}$, а ρ изменяется от 0 до $a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Следовательно,

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right) dxdy = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho^3 d\rho = \int_0^{\pi/4} \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/4} \cos^2 2\varphi\, d\varphi = \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos 4\varphi}{2} d\varphi = \frac{a^4}{8}\left(\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{\pi a^4}{32}.$$

Задания.

Вычислить двойные интегралы, используя полярные координаты.

1. $\iint_D \frac{ydxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, D ограничена линиями $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$ $(y \ge 0)$.

   $\left(\textit{Ответ: 8.}\right)$

2. $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$, D – круг $x^2+y^2\le 1$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \pi(e-1).\right)$

3. $\iint\limits_D \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, D определена неравенствами

$\frac{\pi^2}{4}\le x^2+y^2\le 4\pi^2$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -2\pi.\right)$

4. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, D ограничена лемнискатой

$\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ -2\pi.\right)$

5. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, D ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $x+y=1$,

$x+y=2$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ 1.\right)$

Домашнее задание.

1. Вычислить $\iint\limits_D arctg\frac{y}{x}dxdy$, где D – часть кольца, ограниченного линиями $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y=\sqrt{3}x$.

   $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{\pi^2}{6}.\right)$

2. Вычислить $\iint\limits_D (12-x-y)dxdy$, если область D ограничена окружностью $x^2+y^2=9$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ 108\pi.\right)$

3. Вычислить $\iint\limits_D (4-x-y)dxdy$, если область D ограничена окружностью $x^2+y^2=2x$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ 3\pi.\right)$

4. Переходя к полярным координатам, вычислить $\iint\limits_D y\,dxdy$, где D – полукруг диаметра a с центром в точке $C\left(\frac{a}{2};0\right)$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{a^3}{12}.\right)$

5. Вычислить $\iint\limits_D xy\,dxdy$, D ограничена лемнискатой

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2xy. \quad \left(\text{Ответ: } \frac{a^4}{6}. \right)$$

Приложения двойных интегралов

1. Вычисление площадей с помощью двойных интегралов.

Площадь S плоской области D, можно найти по формуле

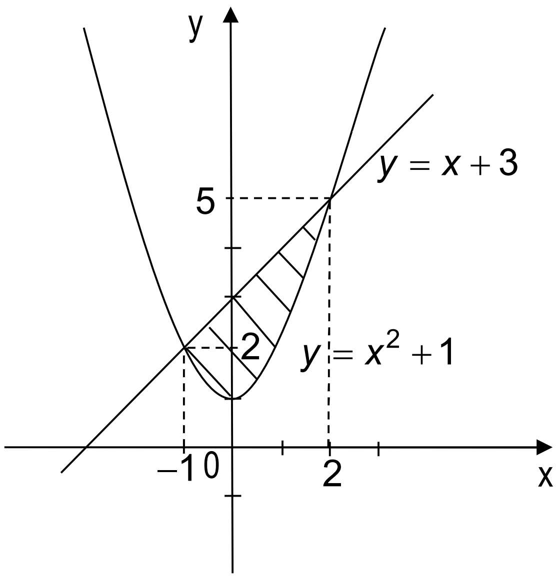
$$S = \iint\limits_D dxdy.$$

В полярных координатах $S = \iint\limits_D \rho d\varphi d\rho$.

<u>*Пример 1.*</u>

С помощью двойного интеграла найти площадь плоской области D, ограниченной линиями: $y = x^2+1$, $x - y + 3 = 0$.

Решение.



Найдем точки пересечения параболы $y = x^2+1$ и прямой $y = x+3$:
$x^2+1 = x+3$; $x^2 - x - 2 = 0$.

$x_1 = 2$; $x_2 = -1$.

$y_1 = 5$; $y_2 = 2$.

Следовательно, $A(2;5)$, $B(-1;2)$.

Область D – область первого вида;

$$S = \int_{-1}^{2} dx \int_{x^2+1}^{x+3} dy = \int_{-1}^{2} \left(x+3-x^2-1\right)dx = \left.\left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{2} = 2+4-\frac{8}{3}-$$

$$-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right) = 6-\frac{8}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3} = 4,5.$$

<u>*Пример 2.*</u>

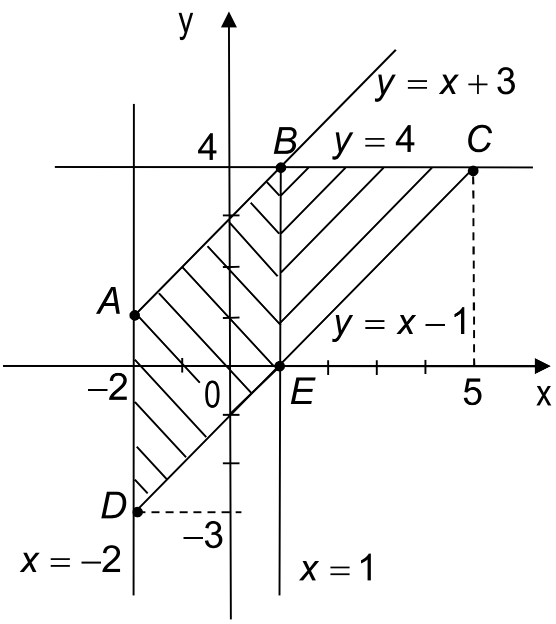
С помощью двойного интеграла найти площадь плоской области D, ограниченной линиями: $x - y + 3 = 0$, $x - y - 1 = 0$, $x + 3 = 0$, $y - 4 = 0$.

Решение.

$y = x + 3$.

$y = x - 1$.

Вершины четырехугольника $A(-2;1)$; $B(1;4)$; $C(5;4)$; $D(-2;-3)$.



Разобьем данную область прямой $x=1$ на 2 области первого вида.

$$S=\int\limits_{-2}^{1}dx\int\limits_{x-1}^{x+3}dy+\int\limits_{1}^{5}dx\int\limits_{x-1}^{4}dy=$$

$$=\int\limits_{-2}^{1}\left(x+3-x+1\right)dx+\int\limits_{1}^{5}\left(4-x+1\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-2}^{1}4dx+\int\limits_{1}^{5}\left(5-x\right)dx=4x\Big|_{-2}^{1}+\left(5x-\right.$$

$$\left.-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{5}=4+8+25-\frac{25}{2}-\left(5-\frac{1}{2}\right)=20.$$

2. Вычисление объемов тел.

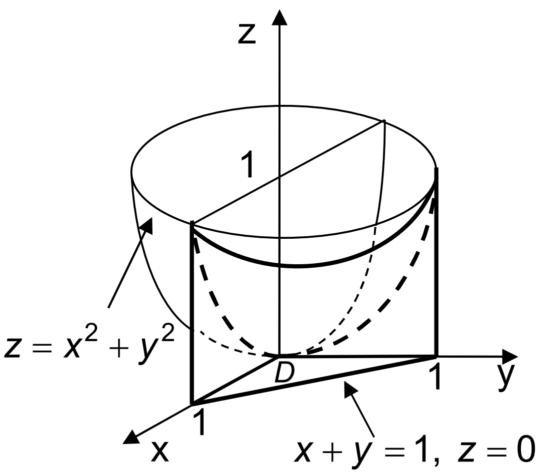
Объем V цилиндра, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z=f\left(x,y\right)$, снизу плоскостью $z=0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости Oxy область D, равен

$$V=\iint\limits_{D}f\left(x,y\right)dxdy.$$

Пример 3.

Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью $x+y=1$, параболоидом вращения $z=x^2+y^2$ и координатными плоскостями.

Решение.



Данное тело ограничено координатными плоскостями, плоскостью $x+y=1$, параллельной оси Oz, и параболоидом вращения $z=x^2+y^2$.

$V=\iint\limits_{D}f\left(x,y\right)dxdy$, где область D ограничена треугольником, лежащим в плоскости Oxy, для которого $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x$.

Следовательно,

$$V=\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{1-x}\left(x^2+y^2\right)dy=\int\limits_{0}^{1}\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1-x}dx=\int\limits_{0}^{1}\left(x^2-x^3+\frac{\left(1-x\right)^3}{3}\right)dx=$$

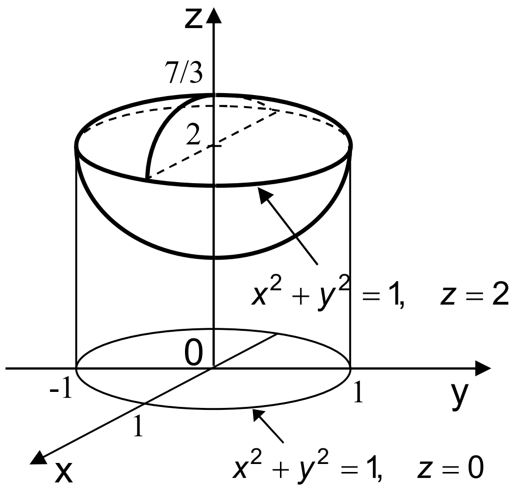
$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{\left(1-x\right)^4}{12}\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{6}.$$

Пример 4.

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2-z+1=0$, $x^2+y^2+3z=7$.

Решение.

Данное тело ограничено двумя параболоидами. Линия пересечения параболоидов определяется системой их уравнений:



$$\begin{cases} z=1+x^2+y^2; \\ 3z=7-x^2-y^2. \end{cases}$$

Исключим из этих уравнений z:

$3\left(1+x^2+y^2\right)=7-x^2-y^2$;

$3+3x^2+3y^2=7-x^2-y^2$; $4x^2+4y^2=4$;

$x^2+y^2=1$.

Из первого уравнения при $x^2+y^2=1$ имеем $z=2$.

Итак, линией пересечения является окружность $x^2+y^2=1$, $z=2$. (пересечение прямого кругового цилиндра $x^2+y^2=1$ и плоскости $z=2$).

Проекция этой линии на плоскости Oxy так же является окружностью $x^2+y^2=1$, $z=0$.

Искомый объем равен разности объемов двух цилиндрических тел с одним основанием и ограниченных сверху и снизу соответственно поверхностями $z=\frac{1}{3}\left(7-x^2-y^2\right)$, $z=1+x^2+y^2$, т.е.

$$V=V_1-V_2=\iint\limits_S \frac{1}{3}\left(7-x^2-y^2\right)dxdy-\iint\limits_S\left(1+x^2+y^2\right)dxdy,$$

где D – круг $x^2+y^2\le 1$.

Переходя к полярным координатам, находим

$$V=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\frac{1}{3}\left(7-\rho^2\right)\rho d\rho-\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(\rho+\rho^3\right)d\rho=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}\left(7\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 d\varphi-$$

$$-\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 d\varphi=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{4}\right)d\varphi-\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)d\varphi=\frac{1}{3}\cdot\frac{13}{4}\cdot 2\pi-\frac{3}{4}\cdot 2\pi=\frac{2}{3}\pi.$$

Приложения двойных интегралов в механике

1. Масса и статические моменты пластинки.

Если D – область плоскости Oxy, занятая пластинкой, а $\gamma(x,y)$ – поверхностная плотность пластинки в точке $P(x,y)$, то ее масса M выражается формулой

$$M = \iint\limits_D \gamma(x,y)\,dxdy,$$

а статические моменты M_x и M_y относительно осей Ox и Oy определяются двойными интегралами

$$M_x = \iint\limits_D y \cdot \gamma(x,y)\,dxdy, \quad M_y = \iint\limits_D x \cdot \gamma(x,y)\,dxdy.$$

Если пластинка однородна, то $\gamma(x,y) = const$; эту постоянную часто полагают равной единице.

2. Координаты центра тяжести пластины.

Если $C(x_0, y_0)$ – центр тяжести пластины, то $x_0 = \dfrac{M_y}{M}$, $y_0 = \dfrac{M_x}{M}$, где M – масса пластинки; M_x и M_y – статические моменты пластинки относительно осей Ox и Oy.

Если пластина однородна $\gamma(x,y) = const$.

Тогда ***формулы для определения координат центра***:

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint\limits_D x\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy}; \quad y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint\limits_D y\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy}.$$

Моменты инерции пластинки относительно осей Ox ***и*** Oy соответственно определяются формулами:

$$I_x = \iint\limits_D y^2\gamma(x,y)\,dxdy, \quad I_y = \iint\limits_D x^2\gamma(x,y)\,dxdy.$$

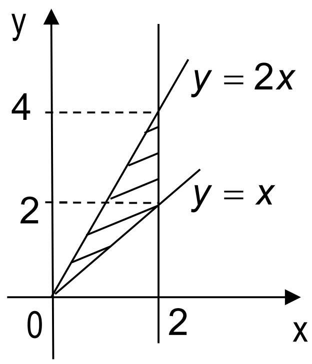
Момент инерции пластинки относительно начала координат

$$I_0 = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\gamma(x,y)\,dxdy = I_x + I_y.$$

<u>Пример 5.</u>

Найти координаты центра масс пластинки, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$, если ее плотность $\gamma(x,y) = xy$.

Решение.



Найдем массу M пластинки:

$$M = \iint_D \gamma(x,y)\,dxdy = \iint_D xydxdy = \int_0^2 dx \int_x^{2x} xydy =$$

$$= \int_0^2 x \frac{y^2}{2}\Big|_x^{2x} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x\left(4x^2 - x^2\right)dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^2 x^3 dx = \frac{3}{2}\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 6.$$

Найдем статические моменты M_x и M_y:

$$M_x = \iint_D y \cdot xydxdy = \iint_D xy^2dxdy = \int_0^2 dx \int_x^{2x} xy^2dy = \int_0^2 x\frac{y^3}{3}\Big|_x^{2x} dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 x\left(8x^3 - x^3\right)dx = \frac{1}{3}\int_0^2 x^4 dx = \frac{7}{3}\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{224}{15}.$$

$$M_y = \iint_D x\gamma(x,y)\,dxdy = \int_0^2 dx \int_x^{2x} x^2ydy = \int_0^2 x^2\frac{y^2}{2}\Big|_x^{2x} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\left(4x^2 - x^2\right)dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^2 x^4 dx = \frac{3}{2}\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{96}{10} = \frac{48}{5};$$

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{48}{5 \cdot 6} = \frac{8}{5}; \quad y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{224}{15 \cdot 6} = \frac{112}{45}.$$

Пример 6.

Найти моменты инерции однородной полукруглой пластины $0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}$ относительно осей Ox и Oy.

Решение.

Полагая $\gamma(x,y) = 1$, находим

$$I_x = \iint_D y^2dxdy = \int_{-R}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2dy = \int_{-R}^{R} \frac{y^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = \frac{1}{3}\int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^R \left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} x = R\sin t;\ dx = R\cos t\,dt \\ \alpha = 0;\ \beta = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(R^2-R^2\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}\cdot R\cos t\,dt=\frac{2}{3}R^4\int_0^{\pi/2}\left(\cos^3 t\right)\cos t\,dt=$$

$$=\frac{2}{3}R^4\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt=\frac{2}{3}R^4\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\left(1+2\cos 2t+\cos^2 2t\right)dt=\frac{R^4}{6}t\Big|_0^{\pi/2}+$$

$$+\frac{R^4}{6}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}+\frac{R^4}{6}\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 4t}{2}dt=\frac{1}{6}R^4\left(\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi/2}+\frac{1}{8}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}R^4\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{6}R^4\,\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi R^4}{8};$$

$$I_y=\iint_D x^2dxdy=\int_{-R}^{R}dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}x^2dy=\int_{-R}^{R}x^2y\Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dx=\int_{-R}^{R}x^2\sqrt{R^2-x^2}dx=$$

$$=2\int_0^R x^2\sqrt{R^2-x^2}dx=\left|\begin{array}{l}x=R\sin t;\ dx=R\cos t\,dt;\\ \alpha=0;\ \beta=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right|=$$

$$=2\int_0^{\pi/2}R^2\sin^2 t\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}\cdot R\cos t\,dt=2R^4\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t dt=$$

$$=2R^4\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 2t}{4}dt=\frac{R^4}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{R^4}{4}\left(t\Big|_0^{\pi/2}-\frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2}\right)=$$

$$=\frac{R^4}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi R^4}{8}.$$

Итак, $I_x=\dfrac{\pi R^4}{8}$; $I_y=\dfrac{\pi R^4}{8}$.

Задания.

1. Вычислить площади фигур, ограниченных следующими линиями:

   1) $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x=4$. $\left(\textit{Ответ: } \dfrac{16}{3}.\right)$

   2) $y=2-x$, $y^2=4x+4$. $\left(\textit{Ответ: } \dfrac{64}{3}.\right)$

   3) $\rho=a\sin 2\varphi$, $a>0$. $\left(\textit{Ответ: } \dfrac{1}{2}\pi a^2.\right)$

4) $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2-2ax=0$, $y=0$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \right)$

2. Вычислить объемы тел, ограниченных указанными поверхностями:
   1) плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=4$, $y=4$ и параболоидом $z=1+x^2+y^2$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ 186\frac{2}{3}. \right)$

   2) параболоидом $z=x^2+y^2$ и плоскостями $z=0$, $y=1$, $y=2x$, $y=6-x$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ 78\frac{15}{32}. \right)$
3. Вычислить координаты центра масс фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y^2=x$, если плотность фигуры $\mu(x,y)=xy$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ x_0=\frac{9}{14};\ y_0=\frac{3}{56}. \right)$

Домашнее задание.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=4x-x^2$, $y=2x^2-5x$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{27}{2}. \right)$
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=4-y^2$, $x+2y-4=0$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{4}{3}. \right)$
3. Переходя к полярным координатам, найти площадь области, ограниченной линиями $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $y=x$, $y=0$.
   $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ 3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right). \right)$
4. Вычислить объем тел, ограниченных указанными поверхностями:
   1) цилиндром $x^2+y^2=4$ и плоскостями $z=0$, $z=x+y+10$.
   $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ 40\pi. \right)$

   2) $x^2+y^2=1$, $z=0$, $x+y+z=4$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ 4\pi. \right)$
5. Вычислить координаты центра масс однородной фигуры, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y=-x^2+2x$, $y=0$.
   $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ x_0=1,\ y_0=\frac{1}{4}. \right)$

Тройной интеграл

Основные сведения

Рассмотрим замкнутую пространственную область (V) и функцию $f(x,y,z)$, определенную в этой области. Область (V) разобьем произвольно на n элементарных областей (V_1), (V_2), …, (V_n) с диаметрами d_1, d_2, …, d_n и объемами $\triangle V_1$, $\triangle V_2, \ldots, \triangle V_n$. В каждой элементарной области (V_i) возьмем произвольную точку $P_i(x_i,y_i,z_i)$ и образуем произведение $f(x_i,y_i,z_i)\triangle V_i$.

Интегральной суммой для функции $f(x,y,z)$ по области (V) называется сумма вида $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\triangle V_i$.

Тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ области (V) называется конечный предел интегральной суммы при условии, что $\max d_k \to 0$ $(n \to \infty)$:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\triangle V_i \qquad (1)$$

Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в области (V), то указанный предел существует и конечен (он не зависит от способа разбиения области (V) на элементарные области и от выбора точек P_i).

Основные свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

В прямоугольных декартовых координатах тройной интеграл обычно записывают в виде

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$$

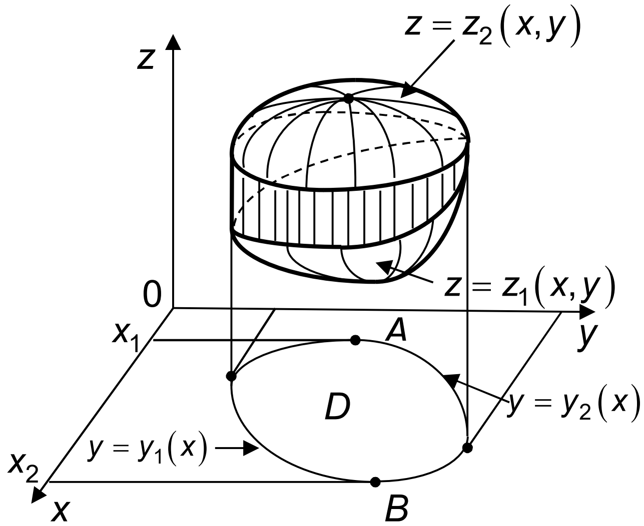
(так как $dV = dxdydz$).

Если область интегрирования (V) определяется неравенствами:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \le x \le x_2 \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{array}\right\} \qquad (2)$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ – непрерывные функции своих аргументов, то тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \quad (3)$$



Область (V) ограничена сверху поверхностью $z = z_2(x,y)$, снизу – поверхностью $z = z_1(x,y)$, а с боков – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz (рис.), вырезающий на плоскости Oxy область D, определенную неравенствами $x_1 \le x \le x_2$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$.

Порядок интегрирования может быть изменен; тройной интеграл можно вычислить шестью различными способами.

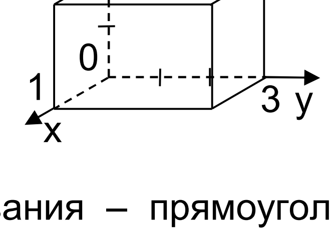
В частном случае, если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ являются постоянными y_1, y_2, z_1, z_2, то область интегрирования представляет собой прямоугольный параллелепипед и тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)dz \quad (3')$$

Для вычисления тройного интеграла в прямоугольных координатах применяется также формула, которая иногда упрощает вычисления:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \iint\limits_{D_x} f(x,y,z)dydz, \quad (4)$$

где область D_x – проекция на Oyz сечения области (V) плоскостью, параллельной плоскости Oyz и проходящей через произвольную точку интервала $(x_1; x_2)$.



<u>*Пример 1.*</u> Вычислить тройной интеграл

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^2 (x+y+z)dz.$$

Решение.

Пределы интегрирования в каждом из интегралов являются постоянными. Область интегрирования – прямоугольный параллелепипед с измерениями $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$, одна из вершин которого находится в начале координат.

$$\int_0^1 dx\int_0^3 dy\int_0^2 (x+y+z)dz=\int_0^1\left\{\int_0^3\left[\int_0^2 (x+y+z)dz\right]dy\right\}dx.$$

Вычисляем внутренний интеграл, находящийся в квадратных скобках, считая x и y постоянными:

$$\int_0^2 (x+y+z)dz=\left(xz+yz+\frac{z}{2}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=2}=2x+2y+2=2(x+y+1).$$

Второй интеграл, находящийся в фигурных скобках, принимает вид

$$\int_0^3\left[\int_0^2 (x+y+z)dz\right]dy=\int_0^3 2(x+y+1)dy=2\int_0^3 (x+y+1)dy.$$

Находим этот интеграл, считая x постоянным:

$$2\int_0^3 (x+y+1)dy=2\left(xy+\frac{y^2}{2}+y\right)\Bigg|_{y=0}^{y=3}=6x+15.$$

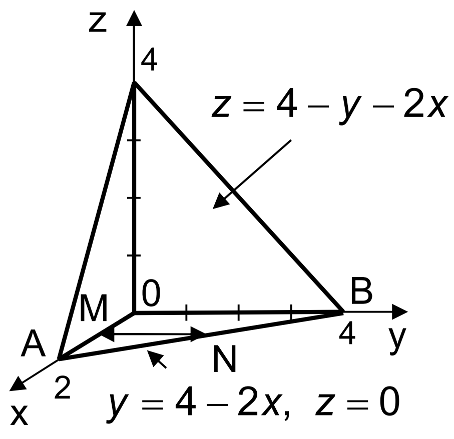
Вычисляем внешний интеграл:

$$\int_0^1\left\{\int_0^3\left[\int_0^2 (x+y+z)dz\right]dy\right\}dx=\int_0^1 (6x+15)dx=\left(3x^2+15x\right)\Big|_0^1=18.$$

Итак, $\int_0^1 dx\int_0^3 dy\int_0^2 (x+y+z)dz=18$.

Замечание. Интегрировать можно и в другом порядке. В частности

$$\int_0^2 dz\int_0^3 dy\int_0^1 (x+y+z)dx=\int_0^2 dz\int_0^3\left(y+z+\frac{1}{2}\right)dy=\int_0^2 (6+3z)dz=18.$$



Пример 2. Вычислить $\iiint\limits_V ydxdydz$, где (V) – треугольная пирамида, ограниченная плоскостью $2x+y+z-4=0$ и плоскостями координат.

Решение.

Расставим пределы интегрирования. Плоскость $2x+y+z-4=0$ пересекает плоскость Oxy по прямой $2x+y+z-4=0$, $z=0$ или $2x+y-4=0$, $z=0$. В плоскости Oxy эта прямая, проходящая через точки A и B, определяется уравнением $2x+y-4=0$.

Треугольник ОАВ и его внутренние точки являются областью D_{xy} изменения переменных x и y (в эту область проектируется данная пирамида на плоскость Oxy). Очевидно, x изменяется в промежутке $[0,2]$, т.е. $0 \le x \le 2$, при фиксированном x из этого промежутка (абсцисса точки M) y будет изменятся от 0 (ордината точки M) до $4-2x$ (ордината точки N) (получена из уравнения прямой $2x+y-4=0$). При фиксированных x и y из области D_{xy} z будет изменятся от 0 до $4-y-2x$ (получено из уравнения $2x+y+z-4=0$). Таким образом

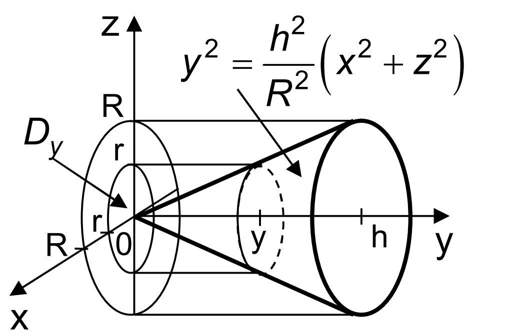
$$\iiint\limits_{(V)} ydxdydz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{4-2x} dy \int\limits_0^{4-y-2x} ydz .$$

Поскольку $\int\limits_0^{4-y-2x} ydz = yz\Big|_{z=0}^{z=4-y-2x} = y(4-y-2x) = 4y-y^2-2xy$;

$$\int\limits_0^{4-2x} \left(4y-y^2-2xy\right)dy = \left(2y^2-\frac{y^3}{3}-xy^2\right)\Bigg|_{y=0}^{y=4-2x} = y^2\left(2-\frac{y}{3}-x\right)\Bigg|_{y=0}^{y=4-2x} = (4-2x)^2\left(2-\frac{4-2x}{3}-x\right) = \frac{1}{6}(4-2x)^3,$$ то

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{4-2x} dy \int\limits_0^{4-y-2x} ydz = \int\limits_0^2 \frac{1}{6}(4-2x)^3 dx = -\frac{1}{12}\frac{(4-2x)^4}{4}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{12}\frac{4^4}{4} = \frac{16}{3}.$$

<u>*Пример 3.*</u> Вычислить $\iiint\limits_{(V)} y\,dxdydz$, где область (V) ограничена конусом $y^2 = \frac{h^2}{R^2}\left(x^2+z^2\right)$ и плоскостью $y=h$.



Решение.

Применим второй способ решения, для чего перепишем формулу (4) меняя в этой формуле роли переменных x и y, получаем

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \iint\limits_{D_y} (x,y,z)dxdz, \quad (4')$$

где D_y – проекция на Oxz сечения области (V) плоскостью, параллельной плоскости Oxz, проходящей через произвольную точку интервала $(y_1; y_2)$.

В нашем случае формула (4') имеет вид:

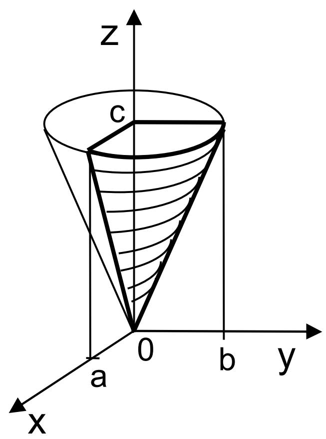
$\iiint\limits_{(V)} ydxdydz = \int\limits_0^h ydy \iint\limits_{D_y} dxdz$, где D_y – круг радиуса $r = \dfrac{Ry}{h}$ (выражение для радиуса r получено из подобия соответствующих треугольников, действительно, $\dfrac{R}{r} = \dfrac{h}{y} \Rightarrow r = \dfrac{Ry}{h}$.)

Так как двойной интеграл $\iint\limits_{D_y} dxdz$ выражает площадь области D_y, которая равна $\pi r^2 = \dfrac{\pi R^2 y^2}{h^2}$, то $\iint\limits_{D_y} dxdz = \dfrac{\pi R^2 y^2}{h^2}$. Следовательно,

$$\iiint\limits_{(V)} y\,dxdydz = \int\limits_0^h ydy \iint\limits_{D_y} dxdz = \int\limits_0^h \frac{\pi R^2 y^3}{h^2} dy = \frac{\pi R^2}{h^2} \frac{y^4}{4}\Bigg|_0^h = \frac{\pi R^2 h^2}{4}.$$

<u>Пример 4.</u>

Вычислить $\iiint\limits_{(V)} \dfrac{xy}{\sqrt{z}} dxdydz$, где (V) – область, ограниченная конусом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ $(x \ge 0, y \ge 0)$, плоскостью $z = c$ и координатными плоскостями.



Решение.

Будем интегрировать сначала по x, затем по y и, наконец, по z, для чего воспользуемся формулой

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{z_1}^{z_2} dz \int\limits_{y_1(z)}^{y_2(z)} dy \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)dx,$$

аналогичной формуле (3) для случая области (V), определяемой неравенствами: $z_1 \le z \le z_2$, $y_1(z) \le y \le y_2(z)$, $x_1(y,z) \le x \le x_2(y,z)$.

Область (V) проектируется на плоскость Oyz в виде треугольника, ограниченного прямыми $y = 0$, $z = c$, $y = \dfrac{b}{c} z$. Эта область определяется неравенствами: $0 \le z \le c$, $0 \le y \le \dfrac{b}{c} z$, $0 \le x \le a\sqrt{\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$, поэтому

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{xy}{\sqrt{z}}dxdydz = \int\limits_0^c \frac{dz}{\sqrt{z}} \int\limits_0^{\frac{b}{c}z} ydy \int\limits_0^{a\sqrt{\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}}} xdx .$$

Так как $\displaystyle\int\limits_0^{a\sqrt{\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}}} xdx = \frac{a^2}{2}\left(\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$,

$$\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{b}{c}z}\left(\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)ydy = \frac{a^2}{2}\left(\frac{z^2}{c^2}\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4b^2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=\frac{b}{c}z} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{z^2}{2c^2}\frac{b^2}{c^2}z^2-\frac{1}{4b^2}\frac{b^4z^4}{c^4}\right) = \frac{a^2}{2}\left(z^4\frac{b^2}{2c^4}-\frac{z^4b^2}{4c^4}\right) = \frac{1}{8}\frac{a^2b^2}{c^4}z^4, \text{ то}$$

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{xy}{\sqrt{z}}dxdydz = \frac{a^2b^2}{8c^4}\int\limits_0^C z^{\frac{7}{2}}dz = \frac{a^2b^2}{8c^4}z^{\frac{9}{2}}\cdot\frac{2}{9}\Bigg|_{z=0}^{z=c} = \frac{a^2b^2}{36c^4}\sqrt{c^9} = \frac{1}{36}a^2b^2\sqrt{c}\,.$$

Задания.

1. Вычислить $\iiint\limits_{(V)} x^2y^2zdxdydz$, если область (V) определяется неравенствами $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$, $0 \le z \le xy$. $\left(\textit{Ответ: } \dfrac{1}{110}.\right)$
2. Вычислить $\iiint\limits_{(V)} \dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, если область (V) ограничена $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$. $\left(\textit{Ответ: } \dfrac{1}{2}\left(\ln 2-\dfrac{5}{8}\right).\right)$.
3. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$, если область (V) ограничена поверхностями: (V): $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, $x+y=1$, $z=3x^2+2y^2$.
4. Вычислить $\iiint\limits_{(V)} z^3dxdydz$, (V) ограничена конусом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$ $(x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$, плоскостью $z=c$ и координатными плоскостями. $\left(\textit{Ответ: } \dfrac{abc^4}{6}.\right)$

Домашнее задание.

1. Расставить пределы интегрирования в интеграле $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$, если область (V) ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+3y+4z=12$.
2. Вычислить $\iiint\limits_{(V)} zdxdydz$, (V) определена неравенствами: $0\le x\le \frac{1}{2}$, $x\le y\le 2x$, $0\le z\le \sqrt{1-x^2-y^2}$. $\left(\text{\textit{Ответ:} } \frac{7}{192}.\right)$.
3. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$, если (V): $x\ge 0$, $y=3x$, $y=3$, $z\ge 0$, $x=3\sqrt{z}$.
4. Вычислить $\iiint\limits_{(V)} (x+2y+3z+4)dxdydz$, (V): $0\le x\le 3$, $0\le y\le 2$, $0\le z\le 1$. $\left(\text{\textit{Ответ:} } 54.\right)$

Замена переменных в тройном интеграле
Переход к сферическим и цилиндрическим координатам

Если ограниченная замкнутая область (V) пространства *Oxyz* взаимно однозначно отображается на область (V') пространства $O'uvw$ с помощью непрерывно дифференцируемых функций

$$x=x(u,v,w),\ y=y(u,v,w),\ z=z(u,v,w) \qquad (1)$$

и якобиан J в области (V') не обращается в нуль:

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}\ne 0,$$

то справедлива формула

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{(V')} f\left[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right]|J|dudvdw. \qquad (2)$$

В частности, при переходе от декартовых координат x, y, z к цилиндрическим координатам ρ, φ, z (рис. 1), связанными формулами:

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z$$
$$\left(0\le\rho<+\infty,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ -\infty<z<+\infty\right),$$

якобиан преобразования $J=\rho$, поэтому

$$\iiint\limits_{(V)} f\left(x,y,z\right)dxdydz=\iiint\limits_{(V')} f\left(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z\right)\rho\, d\rho d\varphi dz. \qquad (3)$$

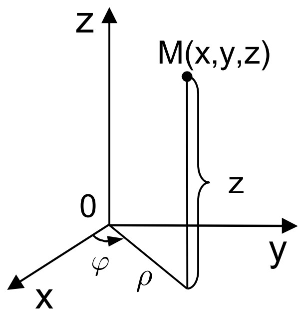


Рисунок 1

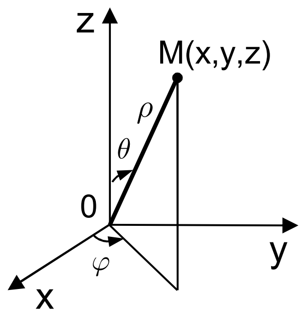


Рисунок 2

При переходе от декартовых координат x, y, z к сферическим координатам ρ, φ, θ (рис. 2), связанными соотношениями

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ z=\rho\cos\theta$$

$$\left(0\le\rho<+\infty,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi,\ \ 0\le\theta\le\pi\right),$$

якобиан преобразования $J=\rho^2\sin\theta$ и формула (2) принимает вид

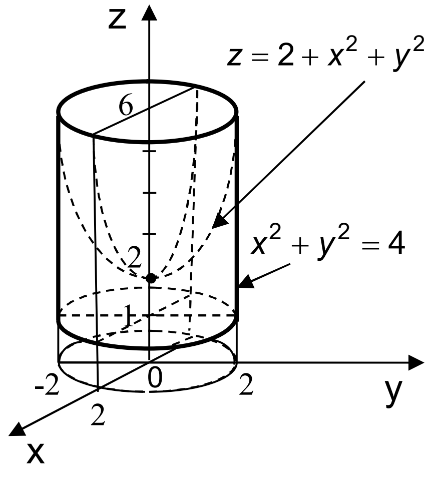
$$\iiint\limits_{(V)}\left(x,y,z\right)dxdydz=\iiint\limits_{(V')} f\left[\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta\right]\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta. \qquad (4)$$

В обобщенных сферических координатах $x=a\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z=c\rho\cos\theta$, $J=abc\rho^2\sin\theta$.

$$\iiint\limits_{(V)}\left(x,y,z\right)dxdydz=\iiint\limits_{(V')} f\left[\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta\right]\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

<u>*Пример 1.*</u> Вычислить $I=\iiint\limits_{(V)}\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, если область интегрирования (V) ограничена поверхностями $x^2+y^2=4$, $z=1$, $z=2+x^2+y^2$.

Решение.



Перейдем в заданном интеграле к цилиндрической системе координат:

$$I=\iiint\limits_{(V)}\rho\rho d\rho d\varphi dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^2 d\rho\int\limits_1^{2+\rho^2}dz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho^2\left(1+\rho^2\right)d\rho=\varphi\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2\left(\rho^2+\rho^4\right)d\rho=$$

$$=2\pi\left(\frac{\rho^3}{3}+\frac{\rho^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=\frac{272}{15}\pi.$$

<u>Пример 2.</u> Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} z\,dxdydz$, где (V) – область, ограниченная верхней частью конуса $\dfrac{x^2+y^2}{R^2}=\dfrac{z^2}{h^2}$ и плоскостью $z=h\,(h>0)$.

Решение.

Введем цилиндрические координаты по формулам:

$$x=\rho\cos\varphi,\; y=\rho\sin\varphi,\; z=z.$$

Уравнение конуса принимает вид $\dfrac{\rho^2}{R^2}=\dfrac{z^2}{h^2}$ или $z=\pm\dfrac{h}{R}\rho$.

Новые переменные в области (V') изменяются в следующих пределах: ρ от 0 до *R*, φ от 0 до 2π, z от $\dfrac{h}{R}\rho$ до *h*. По формуле (3)

$$\iiint\limits_{(V)} z\,dxdydz=\int\limits_0^R d\rho\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_{\frac{h}{R}p}^{h}\rho z\,dz=\int\limits_0^R\left\{\int\limits_0^{2\pi}\rho\frac{z}{2}\Bigg|_{z=\frac{h}{R}\rho}^{z=h}d\varphi\right\}d\rho=$$

$$=\int\limits_0^R\left\{\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{h^2}{2}-\frac{h^2}{2R^2}\rho^2\right)\rho\,d\varphi\right\}d\rho=\frac{\pi h^2}{R^2}\int\limits_0^R\left(R^2-\rho^2\right)p\,dp=\frac{\pi h^2}{R^2}R^2\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^R-$$

$$-\frac{\pi h^2}{R^2}\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^R=\frac{\pi h^2R^2}{2}-\frac{\pi h^2R^2}{4}=\frac{\pi h^2R^2}{4}.$$

<u>Пример 3.</u> Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, где область (V) есть шар $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Решение.

Перейдем к сферическим координатам:

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\; y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\; z=\rho\cos\theta \qquad (*)$$

В области (V'), являющейся образом области (V) при преобразовании (*), переменные ρ, φ и θ меняются в следующих пределах: ρ от 0 до *R*, φ от 0 до 2π, θ от 0 до π.

Так как подинтегральная функция

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)+\rho^2\cos^2\theta=\rho^2\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)=\rho^2,$$

а якобиан преобразования (*) равен $J=\rho^2\sin\theta$, то по формуле (4)

$$\iiint\limits_{(V)}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=\int\limits_0^R d\rho\int\limits_0^{\pi}d\theta\int\limits_0^{2\pi}\rho^2\rho^2\sin\theta\,d\varphi=\int\limits_0^R\rho^4d\rho\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=$$

$$=2\pi\int\limits_0^R\rho^4d\rho\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi}=2\pi(1+1)\frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^R=\frac{4\pi R^5}{5}.$$

Пример 4. Вычислить $\iiint\limits_{(V)} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz$, где область (V) ограничена эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Решение.

Введем обобщенные сферические координаты по формулам:

$$x = a\rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = c\rho\cos\theta \qquad (5)$$

Якобиан $J = abc\rho^2\sin\theta$.

Подинтегральная функция по формулам (5) преобразуется к виду

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} = \sqrt{1-\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi-\rho^2\cos^2\theta} =$$

$=\sqrt{1-\rho^2\sin^2\theta-\rho^2\cos^2\theta}=\sqrt{1-\rho^2}$, а уравнение эллипсоида запишется так: $\rho^2=1$ или $\rho=1$.

В области (V') переменные ρ, θ, φ изменяются в следующих пределах: ρ от 0 до 1, θ от 0 до π, φ от 0 до 2π. По формуле (2)

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}abc\rho^2\sin\theta d\rho =$$

$$= abc\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\rho^2 d\rho.$$

С помощью подстановки $\rho=\sin t$ находим первый интеграл:

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\rho^2 d\rho = \left| \begin{array}{ll} \rho=\sin t; & d\rho=\cos t dt \\ \sqrt{1-\sin^2 t}; & \alpha=0; \beta=\frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int\limits_0^{\pi/2} \cos t\cdot\sin^2 t\cos t dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t dt = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{1}{8}\int\limits_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)dt = \frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}.$$

Далее, $\int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta = -\cos\theta\Big|_0^{\pi} = 1+1=2$.

Поэтому $\iiint\limits_{(V)} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz = abc\frac{\pi}{16}\cdot 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi^2 abc}{4}$.

Задания.

Вычислить тройной интеграл с помощью цилиндрических или сферических координат.

1. $\iiint\limits_{(V)}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, (V): $x^2+y^2+z^2=4$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$.

$\left(\text{ \textit{Ответ:} } \dfrac{16\pi}{5}.\right)$

2. $\iiint\limits_{(V)}\dfrac{y^2zdxdydz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$, (V): $y\geq 0$, $y\leq\sqrt{3}x$, $z=3\left(x^2+y^2\right)$, $z=3$.

$\left(\text{ \textit{Ответ:} } 3\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)\big/20.\right)$

3. $\iiint\limits_{(V)}\dfrac{xydxdydz}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$, (V): $z=x^2+y^2$, $y\geq 0$, $y\leq x$, $z=4$.

$\left(\text{ \textit{Ответ:} } \dfrac{4}{3}.\right)$

4. $\iiint\limits_{(V)}\dfrac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, (V): $x^2+y^2=4y$, $y+z=4$, $z\geq 0$.

$\left(\text{ \textit{Ответ:} } \dfrac{1472}{45}.\right)$

5. $\iiint\limits_{(V)}x^2dxdydz$, (V): $1\leq x^2+y^2+z^2\leq 16$, (V): $y\geq 0$, $y\leq x$, $z\geq 0$.

$\left(\text{ \textit{Ответ:} } \dfrac{341(\pi+2)}{20}.\right)$

Домашнее задание.

Вычислить тройной интеграл с помощью цилиндрических или сферических координат.

1. $\iiint\limits_{(V)}\dfrac{x^2zdxdydz}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}$, (V): $x^2+y^2+z^2=16$, $z\geq 0$.

$\left(\text{ \textit{Ответ:} } \dfrac{16\pi}{3}.\right)$

2. $\iiint\limits_{(V)} \frac{xzdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, (V): $z=2\left(x^2+y^2\right)$, $y\ge 0$, $y\le \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $z=18$.

$\left(\textit{Ответ:}\ 81. \right)$

3. $\iiint\limits_{(V)} \frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, (V): $x^2+y^2=2x$, $x+z=2$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{4}{5}. \right)$

4. $\iiint\limits_{(V)} \frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, (V): $1\le x^2+y^2+z^2\le 9$, $y\ge 0$, $y\le \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $z\ge 0$.

$\left(\textit{Ответ:}\ \frac{13\pi}{8}. \right)$

Приложения тройного интеграла

Вычисление объемов, массы тела. Центра масс и моменты инерции тела

Объем V области (V) выражается формулой

$$V=\iiint\limits_{(V)} dxdydz \tag{1}$$

В сферических координатах этот интеграл имеет вид

$$V=\iiint\limits_{(V')} \rho^2 \sin\theta\, d\rho d\theta d\varphi, \tag{2}$$

а в цилиндрических координатах

$$V=\iiint\limits_{(V'')} \rho\, d\rho d\varphi dz \tag{3}$$

Если тело занимает объем V и $\gamma=\gamma(x,y,z)$ – плотность его в точке $M(x,y,z)$, то ***масса тела***:

$$m=\iiint\limits_{(V)} \gamma(x,y,z)dxdydz \tag{4}$$

Координаты центра масс этого тела определяются по формулам:

$$x_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_{(V)} \gamma xdxdydz,\ y_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_{(V)} \gamma xdxdydz,\ z_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_{(V)} \gamma xdxdydz \tag{5}$$

Если тело однородно, в формулах (5) можно положить $\gamma = 1$. ***Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей*** определяются интегралами

$$I_{xy} = \iiint\limits_{(V)} \gamma z^2 dxdydz\,,\ I_{xz} = \iiint\limits_{(V)} \gamma y^2 dxdydz\,,\ I_{yz} = \iiint\limits_{(V)} \gamma x^2 dxdydz \qquad (6)$$

Момент инерции тела относительно некоторой оси Ou определяется интегралом

$$I_u = \iiint\limits_{(v)} \gamma r^2 dxdydz\,, \qquad (7)$$

где r – расстояние точки $N(x, y, z)$ тела от оси Ou.

В частности, ***моменты инерции тела относительно координатных осей Ox, Oy, Oz*** определяются формулами:

$$I_x = \iiint\limits_{(V)} \gamma\left(y^2 + z^2\right)dxdydz\,,\ I_y = \iiint\limits_{(V)} \gamma\left(x^2 + z^2\right)dxdydz\,,$$

$$I_z = \iiint\limits_{(V)} \gamma\left(x^2 + y^2\right)dxdydz \qquad (8)$$

Момент ***инерции тела относительно начала координат*** определяется формулой

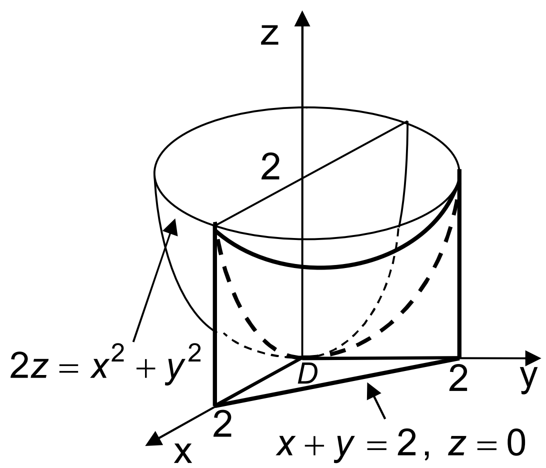
$$I_0 = \iiint\limits_{(V)} \gamma\left(x^2 + y^2 + z^2\right)dxdydz \qquad (9)$$

Очевидно, имеют место следующие соотношения:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}\,,\ I_y = I_{yx} + I_{yz}\,,\ I_z = I_{zx} + I_{zy}\,,\ I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}\,.$$

<u>Пример 1.</u> С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $2z = x^2 + y^2$.

Решение.



Уравнение $2z = x^2 + y^2$ определяет параболоид вращения, остальные поверхности – плоскости.

По формуле (1):

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{\left(x^2+y^2\right)/2} dz =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} z\Big|_0^{\frac{x^2+y^2}{2}} dy =$$

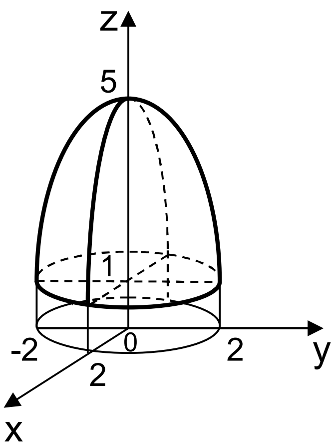
$$=\frac{1}{2}\int_0^2 dx\int_0^{2-x}\left(x^2+y^2\right)dy=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2-x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^2(2-x)+\frac{1}{3}\left(2-x^3\right)\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(2x^2-x^3+\frac{1}{3}\left(2-x^3\right)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{12}\left(2-x^4\right)\right)\Bigg|_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{16}{3}-4+\frac{1}{12}16\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}=\frac{4}{3}.$$

<u>*Пример 2.*</u> Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=1$, $z=5-x^2-y^2$.

Решение.



По заданным уравнениям поверхностей в декартовых координатах строим область (V). Тогда в цилиндрической системе координат искомый объем

$$V=\iiint\limits_{(V')}\rho d\rho d\varphi dz,$$

где (V'): $\left\{0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 2,\ 1\le z\le 5-\rho^2\right\}$.

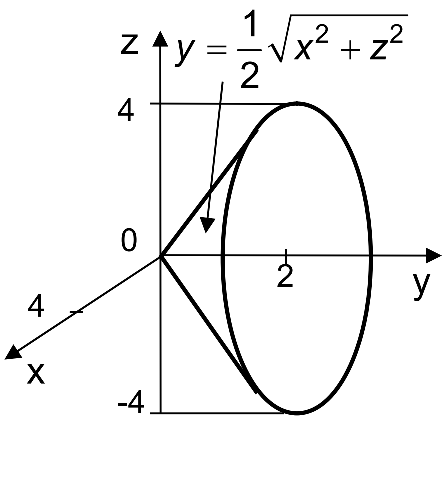
Следовательно,

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho d\rho\int_1^{5-\rho^2}dz=2\pi\int_0^2\left(4\rho-\rho^3\right)d\rho=2\pi\left(2\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=8\pi.$$

<u>*Пример 3.*</u> Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $y=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+z^2}$, $y=2$.

Решение.

Данное тело симметрично относительно оси Оу, поэтому $x_c=z_c=0$, а



$$y_c=\frac{\iiint\limits_{(V)}ydxdydz}{\iiint\limits_{(V)}dxdydz},$$

где масса тела $M=\iiint\limits_{(V)}dxdydz$, при условии, что плотность $\gamma(x,y,z)=1$.

Переходим к цилиндрическим координатам по формулам $x=\rho\cos\varphi$, $z=\rho\sin\varphi$, $y=y$. Тогда

$$\iiint\limits_{(V)} ydxdydz=\iiint\limits_{(V')} y\rho\, d\rho d\varphi dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4\rho d\rho\int_{\frac{\rho}{2}}^2 ydy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4\rho d\rho\frac{y^2}{2}\Bigg|_{\frac{\rho}{2}}^{2}=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4\rho\left(2-\frac{\rho^2}{8}\right)d\rho=\int_0^{2\pi}\left(\rho^2-\frac{\rho^4}{32}\right)\Bigg|_0^4 d\varphi=2\pi\left(16-\frac{64\cdot 4}{32}\right)=16\pi.$$

Найдем массу М тела $(\gamma=1)$.

$$M=\iiint\limits_{(V)} dxdydz=\iiint\limits_{(V')}\rho d\varphi d\rho dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4\rho d\rho\int_{\frac{\rho}{2}}^2 dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4\rho\left(2-\frac{1}{2}\rho\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^4\left(2\rho-\frac{\rho^2}{2}\right)d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\rho^2-\frac{\rho^3}{6}\right)\Bigg|_0^4=2\pi\left(16-\frac{64}{6}\right)=\frac{32}{3}\pi.$$

Следовательно, $y_c=\dfrac{16\pi\cdot 3}{32\pi}=\dfrac{3}{2}$ и центр масс $C\left(0;\dfrac{3}{2};0\right)$.

Пример 4. Вычислить моменты инерции однородного шара радиусом R и весом P относительно его центра и диаметра.

Решение.

Так как объем шара $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$, то его постоянная плотность $\gamma=\dfrac{3P}{4g\pi R^3}$. Поместим центр шара в начале координат, тогда его поверхность будет определяться уравнением $x^2+y^2+z^2=R^2$. Момент инерции относительно центра шара удобно вычислить в сферических координатах:

$$I_0=\gamma\iiint\limits_{(V)}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=\gamma\iiint\limits_{(V')}\rho^4\sin\theta d\rho d\varphi d\theta=$$

$$=\gamma\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^R\rho^4 d\rho=\gamma\cdot 2\pi\cdot 2\frac{R^5}{5}=\frac{4\pi}{5}R^5\cdot\frac{3P}{4g\pi R^3}=\frac{3}{5}\frac{P}{g}R^2.$$

Так как вследствие однородности и симметрии шара его моменты инерции относительно любого диаметра равны, вычислим момент инерции относительно диаметра, лежащего, например, на оси Oz:

$$I_z = \gamma \iiint\limits_{(v)} \left(x^2 + y^2\right) dxdydz = \gamma \iiint\limits_{(V')} \rho^2 \sin^2\theta \cdot \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \gamma \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \int\limits_0^{R} \rho^4 d\rho = \gamma \cdot 2\pi \frac{R^5}{5} \int\limits_0^{\pi} \left(\cos^2\theta - 1\right) d\left(\cos\theta\right) =$$

$$= \gamma \cdot 2\pi \frac{R^5}{5} \left(\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta \right) \Bigg|_0^{\pi} = 2\pi\gamma \frac{R^5}{5}\frac{4}{3} = \frac{8}{3}\pi \frac{R^5}{5} \frac{3P}{4g\pi R^3} = \frac{2}{5}\frac{P}{g}R^2.$$

Задания.

1. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертеж.

   1) (V): $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2 - x - y$, $z \ge 0$ $\left(\textit{Ответ: } 2\pi. \right)$

   2) (V): $z \ge 0$, $z = 4 - x$, $x = 2\sqrt{y}$, $y = 2\sqrt{x}$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{176}{15}. \right)$

2. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область (V), ограниченную указанными поверхностями:

   1) (V): $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 8$ $\left(\textit{Ответ: } (0{,}0{,}6). \right)$

   2) (V): $z = 5\left(x^2 + y^2\right)$, $x^2 + y^2 = 2$, $z = 0$ $\left(\textit{Ответ: } \left(0{,}0{,}\frac{10}{3}\right). \right)$

3. Вычислить момент инерции относительно указанной оси координат однородного тела, занимающего область (V) ограниченную данными поверхностями. Плотность тела γ принять равной 1.

   1) (V): $x = y^2 + z^2$, $x = 2$, Ox $\left(\textit{Ответ: } \frac{4\pi}{3}. \right)$

   2) (V): $y^2 = x^2 + z^2$, $y = 2$, Oy $\left(\textit{Ответ: } \frac{16\pi}{5}. \right)$

Домашнее задание.

1. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертеж.

   1) (V): $x^2 + y^2 = 4$, $z = 4 - x - y$, $z \ge 0$ $\left(\textit{Ответ: } 16\pi. \right)$

   2) (V): $x \ge 0$, $z \ge 0$, $z = y$, $x = 4$, $y = \sqrt{25 - x^2}$ $\left(\textit{Ответ: } \frac{118}{3}. \right)$

2. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область (V), ограниченную указанными поверхностями.

1) (V): $x=6\sqrt{y^2+z^2}$, $y^2+z^2=9$, $x=0$ $\left(\text{\textit{Ответ:}}\left(\frac{27}{4},0,0\right).\right)$

2) (V): $z=8\left(x^2+y^2\right)$, $z=32$ $\left(\text{\textit{Ответ:}}\left(0,0,\frac{64}{3}\right).\right)$

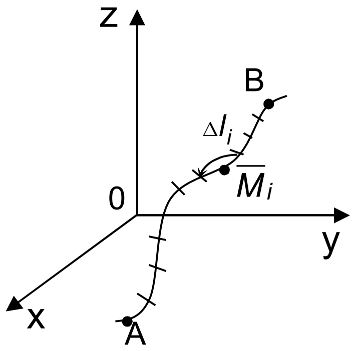
3. Вычислить момент инерции относительно указанной оси координат однородного тела, занимающего область (V), ограниченную данными поверхностями. Плотность тела γ принять равной 1.

1) (V): $x=y^2+z^2$, $x=9$, Ox $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{243\pi}{2}.\right)$

2) (V): $x^2=y^2+z^2$, $x=2$, Ox $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{16\pi}{5}.\right)$

Криволинейный интеграл I рода. Вычисление

Рассмотрим пространственную кусочно-гладкую кривую L, ограниченную точками A и B, и определенную на ней непрерывную функцию $f(x,y,z)\equiv f(M)$, где $M(x,y,z)$ – точка кривой. Дугу AB разобьем точками M_1, $M_2,\ldots$, M_{n-1} на n элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ $(i=1,2,3,\ldots,n,\ M_0\equiv A,\ M_n\equiv B)$, длины которых обозначим соответственно через Δl_1, $\Delta l_2,\ldots$, Δl_n. На каждой из элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ выберем произвольно точку $\overline{M_i}(\overline{x}_i,\overline{y}_i,\overline{z}_i)$ и составим сумму



$$I_n=\sum_{i=1}^{n}f(\overline{x}_i,\overline{y}_i,\overline{z}_i)\Delta l_i, \tag{1}$$

называемую ***интегральной суммой кривой L функции*** $f(x,y,z)$.

Криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x,y,z)$ по кривой L называется предел интегральной суммы (1) при $n\to\infty$ и max $\Delta l_i\to 0$:

$$\int_L f(x,y,z)dl=\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{\max\Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\overline{x}_i,\overline{y}_i,\overline{z}_i)\Delta l_i \tag{2}$$

На кривой L, целиком лежащей в плоскости Oxy, функции f от координаты z не зависит, поэтому по определению

$$\int_L f(x,y)dl=\lim_{\max\Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\overline{x}_i,\overline{y}_i)\Delta l_i \tag{3}$$

Если подынтегральную функцию $f > 0$ рассматривать как линейную плотность кривой L, то криволинейный интеграл первого рода представляет собой массу кривой L.

Вычисление криволинейного интеграла первого рода (КРИ-I) сводится к вычислению определенного интеграла.

Если пространственная кривая L задана параметрами уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$, то

$$\int\limits_L f(x,y,z)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f^2\left[x(t),y(t),z(t)\right]\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt \qquad (4)$$

так как в этом случае дифференциал дуги $dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt$.

Если кривая L лежит в плоскости xOy, то

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left[x(t),y(t)\right]\sqrt{x'^2 + y'^2}dt \qquad (5)$$

В частности, для плоской кривой, заданной уравнением $y = y(x)$, где $a \le x \le b$, имеем $dl = \sqrt{1 + y'^2}dx$, поэтому

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f\left[x,y(x)\right]\sqrt{1 + y'^2}dx \qquad (6)$$

Если плоская кривая задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$ в полярных координатах, то $dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\varphi$.

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\varphi \qquad (7)$$

Основные свойства криволинейного интеграла первого рода

1. По самому определению КРИ – I не зависит от направления пути интегрирования:
$$\int\limits_{AB} f(M)dl = \int\limits_{BA} f(M)dl;$$
2. $\int\limits_L \left[f_1(M) \pm f_2(M)\right]dl = \int\limits_L f_1(M)dl \pm \int\limits_L f_2(M)dl$;
3. $\int\limits_L c \cdot f(M)dl = c\int\limits_L f(M)dl \quad (c = const)$;
4. Если путь интегрирования L разбит на части L_1, $L_2, \ldots,$ L_n, то
$$\int\limits_L f(M)dl = \int\limits_{L_1} f(M)dl + \int\limits_{L_2} f(M)dl + \ldots + \int\limits_{L_n} f(M)dl.$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L xy^2 dl$, где L – отрезок прямой между точками $A(0;0)$, $B(4;3)$.

Решение.

Прямолинейный отрезок AB лежит в плоскости Oxy, на нем задана функция $f(x,y) = xy^2$. Уравнение прямой AB имеет вид $y = \frac{3}{4}x$.

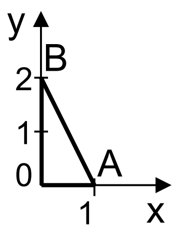
Так как $y' = \frac{3}{4}$, то $dl = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}dx = \frac{5}{4}dx$.

По формулам (6) получаем

$$\int\limits_L xy^2 dl = \int\limits_0^4 x\left(\frac{3}{4}x\right)^2 \cdot \frac{5}{4}dx = \int\limits_0^4 \frac{45}{64}x^3 dx = \frac{45}{64}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^4 = \frac{45}{64}\cdot\frac{4^4}{4} = 45.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_L (2x+y)dl$, где L – контур треугольника ABO с вершинами $A(1,0)$, $B(0,2)$, $O(0,0)$.

Решение.



В соответствии с четвертым свойством криволинейного интеграла первого типа

$$\int\limits_L (2x+y)dl = \int\limits_{AB}(2x+y)dl + \int\limits_{BO}(2x+y)dl + \int\limits_{OA}(2x+y)dl.$$

На отрезке AB $y = -2x+2$, поэтому $y' = -2$,

$$dl = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{5}dx.$$

На отрезке BO $x = 0$, $x' = 0$, $dl = \sqrt{1+x'^2}\ dy = dy$, на отрезке OA $y = 0$, $y' = 0$, $dl = \sqrt{1+y'^2}dx = dx$.

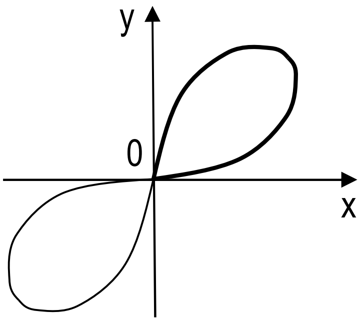
Принимая во внимание первое свойство криволинейного интеграла и используя формулы (6) и (8), получаем

$$\int\limits_L (2x+y)dl = \int\limits_0^1 2\sqrt{5}dx + \int\limits_0^2 ydy + \int\limits_0^1 2xdx = 2\sqrt{5}x\Bigg|_0^1 + \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^2 + x^2\Bigg|_0^1 = 3+2\sqrt{5}.$$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_L (x+y)dl$, где L – лепесток лемнискаты $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$, расположенный в первом координатном углу.

Решение.

Линия L задана уравнением в полярных координатах, поэтому здесь целесообразно воспользоваться формулой (7)



$$\rho' = a \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin 2\varphi}} \cdot \cos 2\varphi = \frac{a\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}},$$

$$dl = \sqrt{a^2 \sin 2\varphi + \frac{a^2\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}d\varphi = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\varphi}}d\varphi =$$

$$= \frac{a^2 d\varphi}{a\sqrt{\sin 2\varphi}} = \frac{a^2 d\varphi}{p}.$$

Заметив, что $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, т.е. $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, по формуле (7) получим

$$\int\limits_L (x+y)dl = \int\limits_0^{\pi/2} (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)\frac{a^2 d\varphi}{\rho} = a^2 \int\limits_0^{\pi/2} (\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi =$$

$$= a^2(\sin\varphi - \cos\varphi)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2(1 - 0 - (0-1)) = 2a^2.$$

<u>*Пример 4.*</u> Вычислить $\int\limits_L (2x+4y-4z+7)dl$, где L – отрезок прямой между точками $M_1(8,9,3)$, $M_2(6,10,5)$.

Решение.

Составим уравнения прямой, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\frac{x-8}{6-8} = \frac{y-9}{10-9} = \frac{z-3}{5-3} \text{ или } \frac{x-8}{-2} = \frac{y-9}{1} = \frac{z-3}{2} \quad (=t).$$

Таким образом, получены параметрические уравнения прямой: $x = 8 - 2t$, $y = 9 + t$, $z = 3 + 2t$, точка M пробегает отрезок M_1M_2, когда t изменяется от 0 до 1, т.е. $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

Так как $x' = -2$, $y' = 1$, $z' = 2$, то $dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt = \sqrt{4+1+4}dt = 3dt$.

По формуле (4)

$$\int\limits_L (2x+4y-4z+7)dl = \int\limits_0^1 \left[2(8-2t) + 4(9+t) - 4(3+2t) + 7\right]3dt =$$

$$= 3\int\limits_0^1 (47-8t)dt = 3\left(47t - 4t^2\right)\Bigg|_0^1 = 3(47-4) = 129.$$

Задания.

1. Вычислить $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, если L – отрезок прямой $y=\frac{1}{2}x-2$, заключенный между точками $A(0,-2)$ и $B(4;0)$.

   $\left(\textit{Ответ: } \sqrt{5}\ln 2. \right)$

2. Вычислить $\oint\limits_L xydl$, если L – контур прямоугольника с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(4;2)$, $D(0,2)$. $\left(\textit{Ответ: } 24. \right)$

3. Вычислить $\oint(x^2+y^2)dl$, где L – окружность $x^2+y^2=4$. $B(4;0)$.

   $\left(\textit{Ответ: } 16\pi. \right)$

4. Вычислить $\int\limits_L \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dl$, где L – дуга кардиоиды $\rho=2(1+\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{16}{3}. \right)$

5. Вычислить $\int\limits_{L_{AB}} ydl$, L_{AB} – дуга астроиды $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, заключенная между точками $A(1;0)$ и $B(0;1)$. $B(4;0)$.

   $\left(\textit{Ответ: } 0{,}6. \right)$

6. Вычислить $\int\limits_L \frac{z^2dl}{x^2+y^2}$, где L – первый виток винтовой линии $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=2t$. $B(4;0)$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{16}{3}\sqrt{2}\pi^3. \right)$

Домашнее задание.

1. Вычислить $\int\limits_L \sqrt{2-z^2}\left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dl$, L – дуга кривой $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$, $0\le t\le 2\pi$. $B(4;0)$. $\left(\textit{Ответ: } 4\pi^2(1+\pi^2). \right)$

2. Вычислить $\int\limits_{L_{OB}} \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, где L_{OB} – отрезок прямой, соединяющий точки $O(0,0)$ и $B(2,2)$. $\left(\text{Ответ: } \frac{\pi}{2}. \right)$

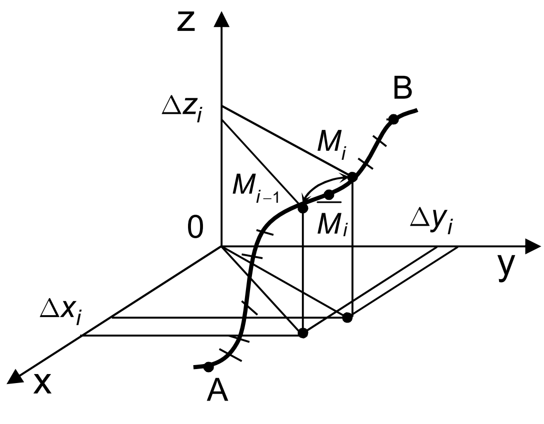
3. Вычислить $\int\limits_{L} arctg\frac{y}{x}dl$, где L – дуга кардиоиды $p=(1+\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. $\left(\text{Ответ: } (\pi+2)\sqrt{2}-8. \right)$

4. Вычислить $\oint\limits_{L} \sqrt{x^2+y^2}dl$, где L – окружность $x^2+y^2=2y$.

$\left(\text{Ответ: } 8. \right)$

5. Вычислить $\int\limits_{L_{AB}} \left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{y}\right)dl$, где L_{AB} – дуга астроиды $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ между точками $A(1,0)$ и $B(0,1)$. $\left(\text{Ответ: } 1. \right)$

Криволинейный интеграл II рода. Вычисление



Пусть дана дуга пространственной кусочно – гладкой кривой L, ограниченная точками A и B (см. рис.), и определенные на ней непрерывные функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$.

Дугу AB разобьем точками $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, …, $M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1})$ на n элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ $(i=1,2,3,\ldots,n,\quad M_0\equiv A,\quad M_n\equiv B)$.

На каждой дуге $M_{i-1}M_i$ выберем произвольно точку $\overline{M}_i(\overline{x}_i,\overline{y}_i,\overline{z}_i)$ и значения функций в этой точке $P(\overline{x}_i,\overline{y}_i,\overline{z}_i)\equiv P(\overline{M}_i)$, $Q(\overline{x}_i,\overline{y}_i,\overline{z}_i)\equiv Q(\overline{M}_i)$, $R(\overline{x}_i,\overline{y}_i,\overline{z}_i)\equiv R(\overline{M}_i)$ умножим не на длину дуги $M_{i-1}M_i$ (как это было в случае криволинейного интеграла первого рода), а на проекции этой дуги соответственно на оси Ox, Oy, Oz, которые обозначим через $\triangle x_i$, $\triangle y_i$, $\triangle z_i$, причем $\triangle x_i=x_i-x_{i-1}$, $\triangle y_i=y_i-y_{i-1}$, $\triangle z_i=z_i-z_{i-1}$.

Из полученных произведений составим сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n}\left[P\left(\overline{M}_i\right)\triangle x_i + Q\left(\overline{M}_i\right)\triangle y_i + R\left(\overline{M}_i\right)\triangle z_i\right], \qquad (1)$$

называемую ***интегральной суммой по координатам для функций*** $P(x,y,z)$***,*** $Q(x,y,z)$***,*** $R(x,y,z)$***.***

Криволинейным интегралом второго рода (КРИ – II), взятым по кривой L или по пути AB, называется предел интегральной суммы (1) при $n \to \infty$, $\max(\triangle x_i) \to 0$, $\max|\triangle y_i| \to 0$, $\max|\triangle z_i| \to 0$:

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \lim_{n\to\infty} I_n =$$
$$= \lim_{\substack{\max|\triangle x_i|\to 0\\ \max|\triangle y_i|\to 0\\ \max|\triangle z_i|\to 0}} \sum_{i=1}^{n}\left[P\left(\overline{M}_i\right)\triangle x_i + Q\left(\overline{M}_i\right)\triangle y_i + R\left(\overline{M}_i\right)\triangle z_i\right] \qquad (2)$$

На кривой L, целиком лежащей в плоскости Oxy, функции P, Q, R, не зависят от z, $\triangle z_i = 0$, $dz = 0$, поэтому

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\substack{\max|\triangle x_i|\to 0\\ \max|\triangle y_i|\to 0}} \sum_{i=1}^{n}\left[P\left(\overline{M}_i\right)\triangle x_i + Q\left(\overline{M}_i\right)\triangle y_i\right] \qquad (3)$$

Если функции P, Q, R рассматривать как проекции некоторой переменной силы $\vec{F}$ на координатные оси, то криволинейный интеграл второго рода выражает работу силы $\vec{F} = (P,Q,R)$, точка приложения которой описывает кривую L.

КРИ – II зависит от выбора направления обхода кривой: если изменить направление обхода, то интеграл меняет знак:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = -\int_{BA} Pdx + Qdy + Rdz \qquad (4)$$

Вычисление КРИ – II также к вычислению определенного интеграла.

Если линия L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$ и значению t_1 соответствует точка A, а значению t_2 – точка B, то

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2}\left\{P\left[x(t),y(t),z(t)\right]x'(t) + Q\left[x(t),y(t),z(t)\right]y'(t) + R\left[x(t),\right.\right. \qquad (5)$$
$$\left.\left. y(t),z(t)\right]z'(t)\right\}dt$$

В частности, для кривой L, лежащей в плоскости Oxy,

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left\{ P\left[x(t),y(t)\right]x'(t) + Q\left[x(t),y(t)\right]y'(t) \right\} dt \quad (6)$$

Если плоская кривая L задана уравнении $y = y(x)$ $(a \le x \le b)$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{a}^{b} \left\{ P\left[x,y,z\right] = Q\left[x,y(x)\right] + Q\left[x,y(x)\right]y'(x) \right\} dx \quad (7)$$

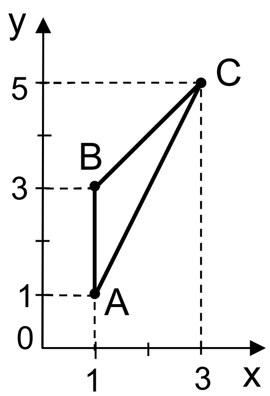
<u>*Пример 1.*</u> Вычислить криволинейный интеграл второго типа $\int\limits_{L} x^2 dx + xy^2 dy$, где L – отрезок прямой от точки $A(0,1)$ до точки $B(1,2)$.

Решение.

Уравнение прямой, проходящей через точки A и B, имеет вид $y = x + 1$, поэтому на отрезке AB $dy = dx$. Подставим в подынтегральную функцию вместо y его выражение через x $\quad (y = x + 1)$. При перемещении от A к B x меняется от 0 до 1. По формуле (7) получаем

$$\int\limits_{L} x^2 dx + xy^2 dy = \int\limits_{0}^{1} x^2 dx + x(x+1)^2\,dx = \int\limits_{0}^{1} \left[x^2 + x\left(x^2 + 2x + 1\right) \right] dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \left(x^2 + x^3 + 2x^2 + x\right) dx = \int\limits_{0}^{1} \left(x^3 + 3x^2 + x\right) dx = \left. \left(\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} \right) \right|_0^1 = \frac{7}{4}.$$



<u>*Пример 2.*</u> Вычислить $\int\limits_{L} \left(x^3 + y\right)dx + \left(x + y^3\right)dy$, где L – ломаная ABC, причем $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(3;5)$.

Решение.

Сделаем чертеж

Так как контур интегрирования L состоит из отрезков AB и BC, то

$$\int\limits_{L} \left(x^3 + y\right)dx + \left(x + y^3\right)dy = \int\limits_{AB} \left(x^3 + y\right)dx + \left(x + y^3\right)dy +$$

$$+ \int\limits_{BC} \left(x^3 + y\right)dx + \left(x + y^3\right)dy.$$

На отрезке AB, уравнение которого $y = 1$, $dy = 0$; на отрезке BC, уравнение которого $x = 3$, $dx = 0$.

$$\int\limits_L \left(x^3+y\right)dx+\left(x+y^3\right)dy=\int\limits_1^3\left(x^3+1\right)dx+(x+1)\cdot 0+\int\limits_1^5\left(3^3+y\right)\cdot 0+\left(3+y^3\right)dy=$$

$$=\int\limits_1^3\left(x^3+1\right)dx+\int\limits_1^5\left(3+y^3\right)dy=\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\Bigg|_1^3+\left(3y+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_1^5=190.$$

<u>*Пример 3.*</u> Вычислить $\int\limits_L y^2dx+\left(x^2+z\right)dy+\left(x+y+z^2\right)dz$, где L – отрезок прямой в пространстве от точки $A(1;0;2)$ до точки $B(3;1;4)$.

Решение.

Составим уравнение прямой, проходящей через точки A и B:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-0}{1-0}=\frac{z-2}{4-2}\ (=t);$$

из параметрических уравнений прямой $x=1+2t$, $y=t$, $z=2+2t$ получаем: $dx=2dt$, $dy=dt$, $dz=2dt$.

Из этих же уравнений видно, что при перемещении от точки A к точке B параметр t меняется от 0 до 1. По формуле (5) находим

$$\int\limits_L y^2dx+\left(x^2+z\right)dy+\left(x+y+z^2\right)dz=\int\limits_0^1 t^2 2dt+\left[(1+2t)^2+(2+2t)\right]dt+$$

$$+\left[(1+2t)+t+(2+2t)^2\right]2dt=\int\limits_0^1\left[2t^2+\left(1+4t+4t^2+2+2t\right)+\right.$$

$$\left.+2\left(1+3t+4+8t+4t^2\right)\right]dt=\int\limits_0^1\left(14t^2+28t+13\right)dt=\left(\frac{14t^3}{3}+14t^2+13t\right)\Bigg|_0^1=\frac{95}{3}.$$

<u>*Пример 4.*</u> Вычислить $I=\oint\limits_L 2x(y-1)dx+x^2dy$, где L – контур фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$ и прямой $y=9$ при положительном направленными обхода.

Решение.

Если кривая интегрирования L замкнута, за положительное направление обхода по L принимается такое направление при котором ближайшая к наблюдателю часть области, ограниченной контуром, оказывается лежащей слева от наблюдателя.

В соответствии со свойствами криволинейных интегралов второго рода имеем $I=\int\limits_{L_1}2x(y-1)dx+x^2dy+\int\limits_{L_2}2x(y-1)dx+x^2dy$, где L_1 – дуга параболы $y=x^2$, L_2 – отрезок прямой $y=9$.

Так как парабола и прямая пересекаются в точках $(-3;9)$ и $(3;9)$, то

$$I=\int_{-3}^{3}\left(2x\left(x^2-1\right)+x^2\cdot 2x\right)dx+\int_{3}^{-3}2x(9-1)dx=\int_{-3}^{3}\left(4x^3-2x\right)dx+16\int_{3}^{-3}xdx=0.$$

Задания.

Вычислить данные криволинейные интегралы.

1. $\int\limits_{L_{AB}}\left(x^2-2xy\right)dx+\left(y^2-2xy\right)dy$, где L_{AB} – дуга параболы $y=x^2$ от точки $A(-1;1)$ до точки $B(1,1)$. $\left(\text{ }\textit{Ответ:}\text{ -6. }\right)$

2. $\int\limits_{L_{AB}}\dfrac{x^2dy-y^2dx}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{y^5}}$, где L_{AB} – дуга астроиды $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$ от точки $A(2,0)$ до точки $B(0,2)$. $\left(\textit{Ответ: }\dfrac{3\sqrt[3]{2\pi}}{8}.\right)$

3. $\int\limits_{L_{AB}}\left(x^2-y^2\right)dx+xydy$, где L_{AB} – отрезок прямой АВ; $A(1,1)$; $B(3,4)$. $\left(\textit{Ответ: }11\dfrac{5}{6}.\right)$

4. $\int\limits_{L_{OB}}xy^2dx+yz^2dy-x^2zdz$, где L_{OB} – отрезок прямой ОВ; $O(0,0,0)$; $B(-2,4,5)$. $\left(\textit{Ответ: }91.\right)$

5. $\int\limits_{L_{AB}}2xydx+y^2dy+z^2dz$, где L_{AB} – дуга одного витка L_{AB} винтовой линии $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=2t$; $A(1,0,0)$, $B(1,0,4\pi)$. $\left(\textit{Ответ: }64\pi^3/3.\right)$

6. $\oint\limits_{L}ydx-xdy$, где L – дуга эллипса $x=3\cos t$, $y=2\sin t$, "пробегаемая” в положительном направлении обхода. $\left(\textit{Ответ: }-12\pi.\right)$

Домашнее задание.
Вычислить данные криволинейные интегралы:

1. $\int\limits_{L_{OA}} \left(x^2+y^2\right)dx+2xydy$, где L_{OA} – дуга кубической параболы $y=x^3$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$. $\left(\text{ \textit{Ответ:} } \dfrac{4}{3}.\right)$
2. $\oint\limits_{L}(x+2y)dx+(x-y)dy$, L – окружность $x=2\cos t$, $y=2\sin t$ при положительном направлении обхода. $\left(\text{ \textit{Ответ:} } -4\pi.\right)$
3. $\int\limits_{L_{AB}} xdx+ydy+(x-y+1)dz$, где L_{AB} – отрезок прямой AB; $A(1,1,1)$; $B(2,3,4)$. $\left(\text{ \textit{Ответ:} } 7.\right)$
4. $\int\limits_{L_{AB}} xdy-ydx$, где L_{AB} – дуга астроиды $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$ от точки $A(2;0)$ до точки $B(0,2)$. $\left(\text{ \textit{Ответ:} } \dfrac{3\pi}{4}.\right)$
5. $\oint\limits_{L} xdy-ydx$, где L – контур треугольника с вершинами $A(-1;0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ при положительном направлении обхода.
$\left(\text{ \textit{Ответ:} } 2.\right)$

Приложения криволинейных интегралов

Длина дуги AB плоской или пространственной линии вычисляется по формуле

$$l=\int\limits_{AB} dl \tag{1}$$

В частности, если пространственная линия задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ $(t_1\le t\le t_2)$, то

$$l=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt \tag{2}$$

Площадь S фигуры, расположенной в плоскости xOy и ограниченной замкнутой линией L,

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx \qquad (3)$$

Масса m материальной дуги L определяется формулой

$$m = \int_L \gamma(x,y,z)\,dl\,, \qquad (4)$$

где $\gamma(x,y,z)$ – линейная плотность вещества в точке $M(x,y,z)$ этой дуги.

Прямоугольные декартовы ***координаты центра тяжести материальной дуги L*** находятся по формулам:

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_L x\gamma(x,y,z)dl\,,\ y_0 = \frac{1}{m}\int_L y\gamma(x,y,z)dl\,,\ z_0 = \frac{1}{m}\int_L z\gamma(x,y,z)dl\,, \qquad (5)$$

где m определяется формулой (4).

Если $\vec{F} = X(x,y,z)\vec{i} + Y(x,y,z)\vec{j} + Z(x,y,z)\vec{k}$ – переменная сила, совершающая ***работу*** A ***вдоль пути L***, и функции X, Y, Z непрерывны, то

$$A = \int_L X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz \qquad (6)$$

В случае, когда сила $\vec{F}$ имеет потенциал, т.е. если существует функция $u(x,y,z)$ (потенциальная или силовая функция) такая, что $\frac{\partial u}{\partial x} = x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Y$, $\frac{\partial u}{\partial z} = z$, то работа, независимо от пути L,

$$A = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} Xdx + Ydy + Zdz = \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} du = u(x_2,y_2,z_2) - u(x_1,y_1,z_1), \qquad (6')$$

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ – начальная точка пути; $M_2(x_2,y_2,z_2)$ – конечная.

Функцию $u(x,y,z)$ можно найти по формуле

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} X(x,y,z)dx + \int_{y_0}^{y} Y(x_0,y,z)dy + \int_{z_0}^{z} Z(x_0,y_0,z)dz\,,$$

где $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – некоторая фиксированная точка в области (V), в которой функции X, Y, Z непрерывны вместе со своими частными производными и в которой содержится линиями L.

Замечание. Если линия L – плоская и лежит в плоскости Oxy, то формулы (1), (4) – (6') упрощаются (соответствующие функции не зависит от z).

Пример 1. Найти массу материальной дуги кривой $2y = x^2$ между точками $A(0,0)$, $B\left(1,\frac{1}{2}\right)$, если линейная плотность вещества в точке $M(x,y)$ пропорциональна абсциссе этой точки.

Решение.

Применим формулу (4), для чего сначала найдем выражение линейной плотности $\gamma(x,y)$ и дифференциала дуги dl. Из условия следует, что линейная плотность выражается формулой $\gamma(x,y) = kx$, где k – коэффициент пропорциональности.

Из уравнения линии $y = \frac{1}{2}x^2$ находим $y' = x$, поэтому $dl = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{1+x^2}dx$. Согласно формуле (4)

$$m = \int_L \gamma(x,y,z)dl = \int_0^1 kx\sqrt{1+x^2}dx = \frac{k}{2}\int_0^1 \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+x^2\right) =$$

$$= \frac{3k}{4}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{k\left(2\sqrt{2}-1\right)}{3}.$$

Пример 2. Найти работу, производимую силой $\vec{F} = 4x^6\vec{i} + xy\vec{j}$ вдоль дуги кривой $y = x^3$ от точки $O(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

Решение.

Проекции силы X и Y на координатные оси равны: $X(x,y) = 4x^6$, $Y(x,y) = xy$.

Чтобы найти работу, необходимо воспользоваться частным случаем формулы (6): $A = \int_L X(x,y)dx + Y(x,y)dy$.

$$A = \int_L 4x^6dx + xydy = \int_0^1 \left(4x^6 + x\cdot x^3\cdot 3x^2\right)dx = \int_0^1 7x^6dx = x^7\Big|_0^1 = 1.$$

Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования

Если L – кусочно-гладкий контур, ограничивающий на плоскости Oxy область D, а $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – функции, непрерывные в замкнутой области D и имеющие в ней непрерывные частные производные, то справедлива ***формула Грина***

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \qquad (7)$$

где обход контура выбирается так, чтобы область D оставалась слева.

Криволинейный интеграл

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \tag{8}$$

где контур L целиком лежит внутри некоторой односвязной области D, в которой функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными, не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{9}$$

В этом случае подинтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y)$$

и

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(x_2,y_2) - u(x_1,y_1), \tag{10}$$

где $M_1(x_1,y_1)$ – начальная; $M_2(x_2,y_2)$ – конечная точки пути интегрирования.

В частности, криволинейный интеграл по замкнутому контуру в этом случае равен нулю:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{11}$$

Криволинейный интеграл

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz, \tag{12}$$

где L – контур, целиком лежащий в односвязной области (V), в которой функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными, не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда выполняются равенства:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \tag{13}$$

В этом случае подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции:

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = du(x,y,z),$$

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} Pdx + Qdy + Rdz = u(x_2,y_2,z_2) - u(x_1,y_1,z_1) \tag{14}$$

В частности, криволинейный интеграл по замкнутому контуру в этом случае равен нулю:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

<u>Пример 1.</u> Вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру $\oint_L xdx + ydy$, где L – эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение.

Воспользуемся параметрическими уравнениями эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $\left(0 \le t \le 2\pi\right)$.

Так как $dx = -a\sin t dt$, $dy = b\cos t\, dt$, то

$$\oint xdx + ydy = \int_0^{2\pi} a\cos t\left(-a\sin t dt\right) + b\sin t\left(b\cos t\right)dt = a^2\int_0^{2\pi}\cos t\; d\left(\cos t\right) +$$

$$+b^2\int_0^{2\pi}\sin t\; d\left(\sin t\right) = \frac{a^2\cos^2 t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} + b^2\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

Замечание. Условие (9) здесь выполнено (так как $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$), подынтегральное выражение – полный дифференциал функции $u\left(x, y\right) = \frac{x^2 + y^2}{2}$; $xdx + ydy = d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$, поэтому по формуле (10)

$$\oint_L xdx + ydy = \frac{1}{2}\left[\left(x_0^2 + y_0^2\right) - \left(x_0^2 + y_0^2\right)\right] = 0,$$

где $M_0\left(x_0, y_0\right)$ – произвольная точка эллипса.

<u>Пример 2.</u> С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2}dx + y\left[xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\right]dy$, где L – контур прямоугольника с вершинами $A\left(3,2\right)$, $B\left(6,2\right)$, $C\left(6,4\right)$, $D\left(3,4\right)$.

Решение.

Преобразуем сначала этот интеграл по формуле Грина. Поскольку

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial\left\{y\left[xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\right]\right\}}{\partial x} = y\left(y + \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right) = y\left(\frac{y\sqrt{x^2 + y^2} + 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right),$$

по формуле (7) имеем:

$$\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dx + y\left[xy + \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dy =$$

$$= \iint\limits_{(D)} \left[y\left(\frac{y\sqrt{x^2+y^2}+1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]dxdy = \iint\limits_{(D)} y^2 dxdy,$$

где область (D) ограничена контуром L, т.е. прямоугольника ABCD.

Вычислим полученный двойной интеграл по прямоугольнику ABCD:

$$\iint\limits_{(D)} y^2dxdy = \int\limits_3^6 dx \int\limits_2^4 y^2dy = \int\limits_3^6 \frac{y^3}{3}\Big|_2^4 dx = \frac{56}{3}\int\limits_3^6 dx = \frac{56}{3}x\Big|_3^6 = 56.$$

<u>*Пример 3.*</u> Вычислить $I = \oint\limits_L y\left(1-x^2\right)dx + \left(1+y^2\right)xdy$, где контур L – окружность $x^2+y^2=4$, в положительном направлении обхода.

Решение.

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой Грина:

$$I = \iint\limits_D \left(1+y^2-1+x^2\right)dxdy = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy,$$

где D – круг, определенный неравенством $x^2+y^2 \le 4$. Имеем

$$I = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy = \begin{vmatrix} x=\rho\cos\varphi, \ dxdy=\rho d\rho d\varphi \\ y=\rho\sin\varphi, \ 0\le\varphi\le 2\pi, \ 0\le\rho\le 2 \end{vmatrix} = \iint\limits_{D'} \rho^3 d\rho d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^2 d\varphi = 4\cdot 2\pi = 8\pi.$$

Задания.

1. Вычислить дину дуги $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x \ \left(1\le x\le 4\right)$.

   $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{4}(15+2\ln 4).\right)$

2. Вычислить массу дуги кривой $y=\ln x$ плотностью $\gamma = x^2$, если концы дуги определяются следующими значениями $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{8}$.

   $\left(\textit{Ответ: } \frac{19}{3}.\right)$

3. С помощью криволинейного интеграла второго рода вычислить площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $x=a\left(t-\sin t\right)$, $y=a\left(1-\cos t\right)$ и осью Ox. $\left(\textit{Ответ: } 3\pi a^2.\right)$

4. Вычислить работу силы $\vec{F} = \left(x^2 + y^2 + 1\right)\vec{i} + 2xy\vec{j}$ вдоль дуги параболы $y = x^3$, заключенной между точками $A(0,0)$ и $B(1,1)$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{196}{105}. \right)$

5. Применив формулу Грина, вычислить $\oint\limits_L y^2dx + (x+y)^2 dy$, где L – контур треугольника ABC с вершинами в точках $A(3,0)$, $B(3,3)$ и $C(0,3)$. $\left(\textit{Ответ: } 18. \right)$

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} \left(3x^2y - 4xy^2\right)dx + \left(x^3 - 4x^2y + 3y^2\right)dy$, где $B(1,1)$, предварительно определив функцию $u(x,y)$, полным дифференциалом которой является подинтегральное выражение.

$\left(\textit{Ответ: } 2,\ u(x,y) = x^3y - 2x^2y^2 + y^3 + c. \right)$

Домашнее задание.

1. Вычислить длину дуги линии $y = \ln\sin x$ $\left(\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$.

$\left(\textit{Ответ: } \ln\sqrt{3}. \right)$

2. Вычислить массу дуги линии $y = x^4$, $0 \le x \le 1$, $\gamma(x,y) = kx^5$.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{b}{144}\left(17\sqrt{17} - 1\right). \right)$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осями координат и дугой эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, расположенной в первом квадрате.

$\left(\textit{Ответ: } \frac{\pi ab}{4}. \right)$

4. Вычислить площадь области D, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{3}. \right)$

5. Вычислить работу силы $\vec{F} = x\vec{i} + \frac{1}{y^2}\vec{j}$ вдоль пути L, L – дуга кривой $xy = 1, (1 \le x \le 4)$ (в направлении возрастания параметра).

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{9}{2}. \right)$

6. Применив формулу Грина, вычислить интеграл $\oint\limits_{L_{ABC}} y^2dx + (x+y)^2 dy$ по контуру треугольника ABC с вершинами $A(2{,}0)$, $B(2{,}2)$ и $C(0{,}2)$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \frac{16}{3}. \right)$

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} (3y^2 + 4y)dx + (6xy + 4x - 4y)dy$, где $A(0{,}1)$, $B(1{,}2)$ предварительно определив функцию $u(x,y)$, полным дифференциалом которой является подинтегральное выражение.

$\left(\text{\textit{Ответ:}}\ 14,\ u(x,y) = 3x^2y + 4xy - 2y^2 + c. \right)$

Литература

1. Бугров, Я.С. Сборник задач по высшей математике / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Высш. шк., 1983.
2. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак. – Мн.: Навука и тэхніка, 1991.
3. Руководство к решению задач по высшей математике: в 2-х частях / Под ред. Е. И. Гурского. – Мн.: Выш. шк., 1990. – Часть 2.
4. Тузик, А. И. Высшая математика. Интегрирование функций одной и нескольких переменных. – Брест, 2000.
5. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2-х частях / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 1986. – Часть 2.
6. Демидовича, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1990.
7. Запорожец, Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высш. шк., 1966.
8. Кудрявцев, В.А. Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986.
9. Жевняк, Р.М. Высшая математика: Функции многих переменных. Интегральное исчисление функций одной и многих переменных. Векторный анализ / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. – Мн.: Выш. шк., 1993.
10. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: в 3-х частях / Под ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 1991. – Часть 3.
11. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа: в 2-х частях. – М.: Высш. шк., 1981. – Часть 2.

Учебное издание

Составители:
Гоголинская Рената Альдефонсовна
Джура Валентина Тимофеевна
Кузьмина Елена Викторовна
Лизунова Ирина Владимировна
Мороз Людмила Трофимовна

ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

ЧАСТЬ V

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Ответственный за выпуск: Мороз Л.Т.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная верстка: Горун Л.Н.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 10.08.2012 г. Бумага «Снегурочка».Формат 60х84 $^{1}/_{16}$.
Гарнитура Arial. Усл. п. л. 3,49. Уч. изд. л. 3,75. Заказ №967.
Тираж 75 экз. Отпечатано на ризографе Учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, Брест, ул. Московская, 267.