

качественные сети, то среди запроектированных сетей сгущения, съемочных и разбивочных сетей часто встречаются построения, хвосты и удовлетворяющие требованиям инструкции на необходимую точность измерений, но имеющие недостаточную точность определения положения пунктов, что вызвано их плохой геометрией. Поэтому важна оценка качества построения геодезических сетей на стадии проектирования – до выполнения полевых работ.

В связи с развитием компьютерных технологий стало возможным при проектировании геодезических сетей использовать алгоритмы строгих способов уравнивательных вычислений. Сегодня известны следующие способы математической обработки результатов геодезических измерений: параметрический, корреляционный, рекуррентный, видоизмененные, комбинированные и упрощенные. Строгие способы уравнивания позволяют решать следующие задачи:

- а) уравнивание геодезических сетей на основе метода наименьших квадратов;
- б) уравнивание обширных геодезических сетей с использованием так называемого «подвижного блока»;
- в) задачи оптимального проектирования геодезических сетей произвольной конструкции и главное:
- г) учёт погрешностей исходных данных (что важно при поэтапном развитии геодезических сетей).

1. Применение рекуррентного способа уравнивания для предварительного расчета точности проектов геодезических сетей. В настоящее время многие специалисты в области математической обработки результатов геодезических измерений занимаются анализом чисел обусловленности. В их исследованиях наметилось два основных направления – предрасчет чисел обусловленности по схеме геодезической сети и установление допусков на величину чисел обусловленности.

Числа обусловленности применимы для получения характеристик геодезических сетей с недостаточным числом необходимых исходных данных.

Еще одна возможность применения чисел обусловленности – исследование влияния отдельных факторов на качество сети в целом, изменяя в модели геодезической сети лишь элементы, соответствующие влиянию конкретного фактора и вычисляя их, можно получить количественную величину этого влияния на качество.

Рассмотрим вопросы, связанные с вычислением спектрального числа обусловленности на основе рекуррентных формул, необходимых для предварительного расчёта чисел обусловленности различных корреляционных матриц.

Рекуррентные формулы обычно просты, и их можно успешно использовать при проектировании геодезических сетей, анализируя их качество без использования строгих способов уравнивания, т.е. не прибегая к вычислениям на персональных компьютерах.

Научно обоснованное проектирование геодезических измерений предусматривает составление оптимального плана работ. Такой план призван обеспечить получение искомого величин с необходимой точностью. Особенно это важно для инженерно-геодезических сетей и сетей специального назначения. При решении этих задач применяют методы математического программирования. Важными критериями оптимальности планов являются числа обусловленности [1].

Для характеристики матрицы нормальных уравнений, с точки зрения ее обусловленности, существуют различные качественные показатели, называемыми числами обусловленности. Числа обусловленности играют решающую роль при оценке результатов решения систем уравнений [1].

В зависимости от принятой нормы, числа обусловленности могут быть определены различными способами. Наиболее часто используются следующие числа: число обусловленности (1), числа Тюринга (2) и (3), число Годда (4) и спектральное число обусловленности (5):

$$C_1 = \|K\|_1 \cdot \|K^{-1}\|_1, \quad (1)$$

$$C_2 = \frac{1}{n} N(K) \cdot N(K^{-1}), \quad (2)$$

$$C_3 = \frac{1}{n} M(K) \cdot M(K^{-1}), \quad (3)$$

$$C_4 = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}, \quad (4)$$

$$C_5 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \quad (5)$$

где K – симметричная матрица;

K^{-1} – обратная матрица;

$\|K\|_1$ – первая норма матрицы [2];

n – порядок матрицы K ;

$N(K) = \sqrt{S_p(A^T A)}$; $M(K) = n \cdot \max(a_{i,j})$;

$|\lambda_1|$, $|\lambda_2|$ – максимальное и минимальное по модулю собственные значения матрицы K ;

σ_1 , σ_2 – максимальное и минимальное сингулярные числа матрицы K .

Числа обусловленности зависят от следующих факторов: числа определяемых и исходных пунктов, нарушения сплошности геодезической сети, формы геометрических фигур сети, состава измерений, расположения исходных пунктов, соотношения точности измерений.

Спектральное число обусловленности используется наиболее часто и является одним из самых надежных [1]. Чем больше число обусловленности, тем менее устойчива матрица нормальных уравнений.

Экспериментальные исследования и их анализ. Предлагаем рекуррентные формулы для вычисления спектрального числа обусловленности C_5 для различных корреляционных матриц K размера $n \times n$.

Рассмотрим матрицу

$$K_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & r & r & \dots & r \\ r & 1 & r & \dots & r \\ r & r & 1 & \dots & r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r & r & r & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Для любых $r < 1$ и $n > 2$ найдена рекуррентная формула для определения спектрального числа обусловленности для матрицы (6)

$$C_5 = n \left(\frac{r}{r-1} \right) - 1. \quad (7)$$

Синякина Наталья Васильевна, кандидат технических наук, доцент кафедры оснований, фундаментов, инженерной геологии и геодезии Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Будо Андрей Юрьевич, аспирант кафедры прикладной геодезии и фотограмметрии Полоцкого государственного университета.

Крейда Николай Николаевич, инженер-геодезист ОАО «Минскпромстрой», соискатель кафедры прикладной геодезии и фотограмметрии Полоцкого государственного университета.

Беларусь, ПГУ, 211440, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29.

Для матрицы

$$K_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & r & r & \dots & 0 \\ r & 1 & r & \dots & r \\ r & r & 1 & \dots & r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & r & r & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (8)$$

получена следующая формула

$$C_5 = rS + 1, \quad (9)$$

значения коэффициента S приведены в таблице 1.

Таблица 1. Величины S для различных значениях n

n	3	4	5	6	10
S	$\sqrt{2}$	2,56	3,64	4,70	8,82

Вычислим спектральное число обусловленности κ_5 для симметричной матрицы K (см. формулу (6)) с тремя нулями в нижнем левом и верхнем правом углах матрицы, аналогичной (8). В этом случае при $n = 3$ матрица $K_{3 \times 3} = E$, для которой $\kappa_5 = 1$. Остальные значения κ_5 при разных значениях r приведены в таблице 2.

Рекуррентная формула для вычисления κ_5 по данным таблицы 2 будет аналогична равенству (7).

В таблице 3 приведены κ_5 для матрицы K с шестью нулями в нижнем левом и верхнем правом углах матрицы. В этом случае при $n = 4$ матрица $K_{4 \times 4} = E$ (единичной матрице), для которой κ_5 при разных значениях r приведены в таблице 3.

Исследования показали, что поиск рекуррентной формулы для вычисления κ_5 по данным таблицы 3 проблематичен.

Найти рекуррентную формулу для спектрального числа обусловленности κ_5 для матрицы (8), аналогичную (7), не удалось.

Таким образом, рекуррентная формула (7) может найти широкое применение в геодезии для вычисления κ_5 в корреляционных (содержащих на диагонали единицы) матрицах. Такие матрицы характерны для геодезических сетей, создаваемых спутниковыми методами.

2. Анализ изоповерхностей целевой функции для пространственных геодезических засечек. Различные виды засечек широко используются при производстве топографических съемок, при выполнении разбивочных работ и при выверке строительных конструкций и технологического оборудования.

Теоретическое обоснование целесообразности применения методов нелинейного программирования для поиска и фильтрации грубых погрешностей измерений в геодезических построениях дано во многих работах [3, 4, 5], что позволяет использовать целевую функцию на всех этапах математической обработки результатов геодезических измерений.

Вычисление предварительных координат, уравнивание геодезических сетей и оценку точности можно выполнить путём минимизации целевой функции. Для этих целей можно использовать следующие методы нелинейного программирования: слепого поиска, релаксации, градиентный метод спуска, метод Ньютона с использованием матрицы Гессе, модифицированный метод Ньютона с использованием Якобиана и метод Гаусса [4].

Профессор д.т.н. В.И. Мицкевич предложил поиск эллипса погрешностей по изолиниям целевой функции методами нелинейного программирования. Сущность метода заключается в следующем. Допустим, что минимизация целевой функции завершена в некоторой точке, тогда эллипсом погрешностей будет служить изолиния, значение целевой функции для которой будет иметь некоторое приращение Δ относительно точки минимума. Уравнение изолинии в пространстве, согласно теореме П. Веркмейстера, будет таким:

$$(x, y, z) = const.$$

Ориентировка эллипса погрешностей определяется прямым поиском с использованием вспомогательной окружности путём минимизации целевой функции по касательной к окружности. Полуоси эллипса погрешностей получаются путём минимизации целевой функции, которая будет равна нулю во всех точках изолинии, отождествляемой с эллипсом погрешностей. Минимизация функции выполняется методами нелинейного программирования по главным направлениям полуосей эллипса погрешностей.

Преимущества данного способа в том, что он позволяет находить элементы эллипсов погрешностей при различных целевых функциях в соответствии с принятым приращением целевой функции Δ [4].

Алгоритмы оценки точности положения пунктов с помощью эллипсов погрешностей применяются при проектировании геодезических сетей. Например, программа OZENKA используется в учебном процессе на геодезическом факультете Полоцкого государственного университета, а также при оценке проектов и уравнивании геодезических сетей в программном комплексе CREDO (СП «Кредо-Диалог» г. Минск), который является одним из передовых программных продуктов на территории РБ и РФ.

Решение, уравнивание и оценка точности пространственных геодезических засечек подробно рассматривались в [3]. Без метода слепого поиска невозможна автоматизация процесса вычисления предварительных координат в таких методах, как методы Гаусса и Ньютона, требующих достаточно точных начальных координат.

В настоящей статье анализируются изоповерхности целевой функции

$$(x, y, z) = \sum_{i=1}^N (P_n)_i |L_i(x, y, z)|^n \quad (10)$$

для пространственной линейной засечки с целью определения области сходимости итераций. Последнее является очень важным для нахождения начального значения координат точки в пространстве. Пространственная линейная засечка является одним из способов определения координат пунктов геодезической сети, измерения в которой выполнены с помощью электронных тахеометров.

Таблица 2. Значения κ_5 при различных значениях n и r

n	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$	$r=8$	$r=9$	$r=10$
4	17,9	6,85	5,08	4,35	3,95	3,70	3,53	3,41	3,32
5	91,8	25,3	15,0	11,9	10,5	9,63	9,06	8,67	8,37
6	67,6	45,3	24,0	18,6	16,2	14,8	13,8	13,2	12,7

Таблица 3. Значения κ_5 при различных значениях n и r

n	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$	$r=8$	$r=9$	$r=10$
5	4,47	6,20	7,93	9,66	11,4	13,1	14,8	16,6	18,3
6	68,0	31,5	17,6	13,8	12,0	11,0	10,3	9,86	9,51

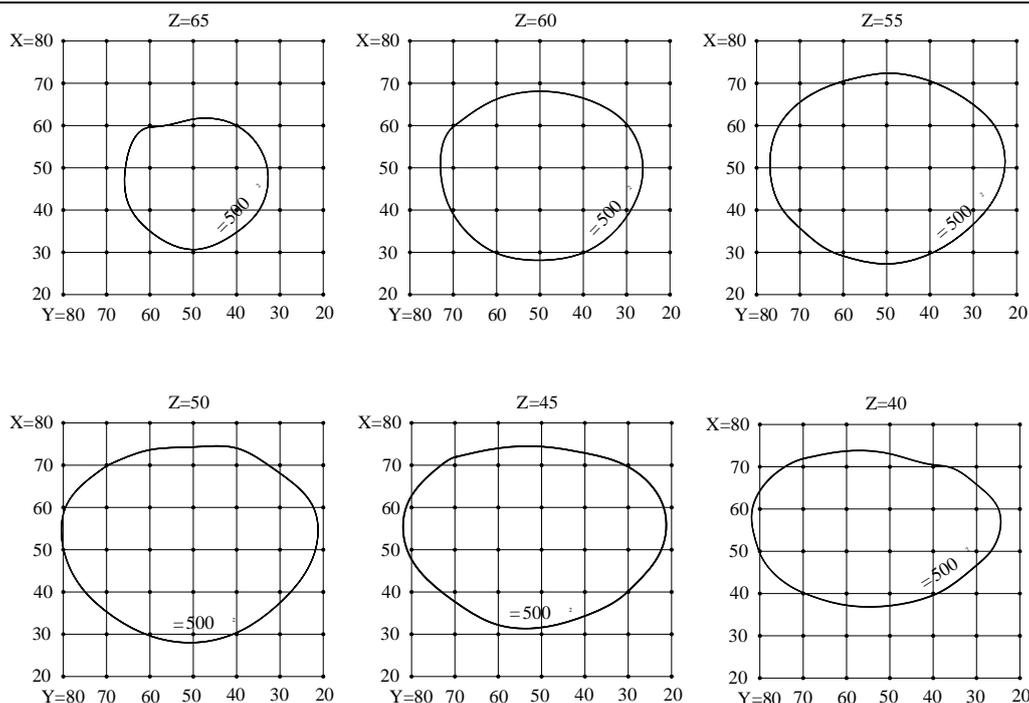


Рис. 1. Изолинии для целевой функции $(x, y, z) = 500 \text{ м}^2$

Особенности минимизации целевой функции в пространственной системе координат. Рассмотрим решение наземной пространственной линейной засечки со следующими исходными данными:

- координаты исходных пунктов: $X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$; $X_2 = 80 \text{ м}$; $Y_2 = 45 \text{ м}$; $Z_2 = 0 \text{ м}$;
- $X_3 = 0 \text{ м}$; $Y_3 = 90 \text{ м}$; $Z_3 = 0 \text{ м}$;
- результаты измерений длин линий от исходных пунктов на определяемый пункт: $S_1 = 89,525 \text{ м}$; $S_2 = 59,312 \text{ м}$; $S_3 = 82,529 \text{ м}$.

Начальные координаты пункта для выполнения приближений методами нелинейного программирования [5] найдём методом простого поиска. С этой целью построим регулярную сетку для различных значений Z и различных координат x, y (см. рис. 1). Здесь приведены изолинии для $(x, y, z) = 500 \text{ м}^2$.

Полная картина изоповерхностей $=\text{const}$ в четырёхмерном пространстве показана на рис. 2.

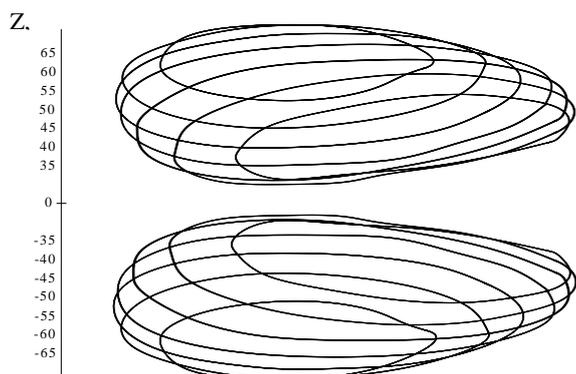


Рис. 2. Изолинии для целевой функции $(x, y, z) = \text{const}$

На основе рис. 2 можно сделать вывод, что пространственная линейная засечка неоднозначна (имеется два симметричных минимума целевой функции с координатами: $x_1 = y_1 = z_1 = 51,69 \text{ м}$ и $x_{11} = y_{11} = 51,69 \text{ м}$, $z_{11} = -51,69 \text{ м}$), а также видно, что изоповерхности

функции $=500 \text{ м}^2$ представляют два трёхосных эллипсоида, разделённых поверхностью $x = y = z = 0$.

Если целевая функция имеет локальный минимум, то поиск глобального минимума должен выполняться с учётом ограничений на область допустимых значений параметров.

Наиболее просто учитываются ограничения методом штрафных функций следующим путём:

1. В исходной информации указывают Z_0 для барьерной уровневой поверхности.
2. Задают координаты начальной точки минимизации $1(x_1, y_1, z_1)$ в допустимой области решений с учётом всех используемых ограничений.
3. Вычисляют вспомогательный коэффициент

$$\text{sign}_1 = \begin{cases} 1, & z_i \geq Z_0 \\ -1, & z_i < Z_0 \end{cases} \quad (11)$$

значение которого не изменяют на протяжении всех итераций.

4. Для некоторой исследуемой точки (x_p, y_p, z_p) вычисляют коэффициент

$$\text{sign}_2 = \begin{cases} 1, & z_p \leq Z_0 \\ -1, & z_p > Z_0 \end{cases} \quad (12)$$

Точка $1(x_1, y_1, z_1)$ и точка (x_p, y_p, z_p) будут лежать в одной области, если $\text{sign}_1 + \text{sign}_2 = 0$.

Заключение. На основе проведенных экспериментально-теоретических исследований можно сделать следующие выводы:

1. Числа обусловленности позволяют охарактеризовать качество проектируемых геодезических сетей. Спектральное число обусловленности можно вычислять с помощью рекуррентных формул.
2. Предложена рекуррентная формула (7) для вычисления спектрального числа обусловленности, которое может быть использовано при оценке качества плановых и пространственных инженерно-геодезических сетей, создаваемых спутниковыми методами. Чем меньше это число, тем выше точность определения положения пунктов геодезической сети.
3. Решение пространственных геодезических засечек, которые широко используются при выполнении съёмочных и разбивоч-

- ных работ, следует сопровождать анализом изоповерхностей целевой функции.
- Методика построения изоповерхностей может осуществляться слепым поиском независимо от вида целевой функции и типа пространственной засечки. Изоповерхности близкие к шару или эллипсоиду позволяют судить об обусловленности матриц Гессе.
 - Пространственные линейные засечки должны решаться с применением штрафных функций, с целью нахождения глобального минимума.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- Герасименко, М.Д. Проектирование и обработка измерений с применением собственных значений матриц / М.Д. Герасименко. – Владивосток, 1982. – 224 с.

- Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р.Гантмахер – М.: Наука, 1967. – 578 с.
- Грищенко, Е.В. Решение, уравнивание и оценка точности пространственных геодезических засечек методом Lp-оценок / Е.В. Грищенко, Л.Ф. Зуева, Н.В. Синякина // Вестник Брестского госуд. ун-та. – 2007. – №5(47): Физика, математика, информатика. – С. 49–50.
- Мицкевич, В.И. Математическая обработка геодезических сетей методами нелинейного программирования / В.И.Мицкевич – Новополоцк: Полоцкий госуд. ун-т, 1997. – 64 с.
- Химмельблау, Д.М. Прикладное нелинейное программирование / Д.М. Химмельблау: пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 534 с.

29.01.10

BUDO A.Y., ZUEVA L.F., KREJDA N.N., SINIAKINA N.V. Quality analysis of projected planned and spatial breaking geodetic nets on the basis of equation calculation methods

Two trends of research are considered in the article.

1) About precalculation of spectral number of conditionality for symmetric correlation matrixes. The number of conditionality plays a main role at an estimation of results of the decision of systems of the equations irrespective of as we apply it with use of own values of matrixes. The decision of an algebraic problem of own values play a fundamental role not only in the theory of matrixes, but also in many other things areas, as mathematics, and in applied sciences. Development of recurrent formulas for the decision of a task in view allows to automate calculation of number of conditionality. However, it is possible only for some correlation matrixes.

2) Analysis isosurface of criterion function for spatial geodetic notches in three-dimensional system of coordinates. It is considered the basic methods of the analysis and the decision of a task for spatial notches. The technique of construction isosurface in three-dimensional system of coordinates in four-dimensional space is offered. The method of penal functions, by a universal method solving the task possessing property of a duality is offered.

624.012

. .

Введение. В настоящее время в связи с переходом на строительство монолитных каркасов, особенно в высотном строительстве, актуальным является выполнение предварительного напряжения перекрытий в построечных условиях. Для этих целей широко применяют постнапряженные конструкции с натяжением напрягающих элементов на бетон.

Введение в Республике Беларусь европейских норм проектирования, или так называемых «Конструктивных Еврокодов» (Structural Eurocodes), требует разработки Национальных Приложений, в рамках которых должны быть определены национальные параметры и требования к расчетам (National Determined Parameters, NDP).

Нормирование приращений в напрягаемой арматуре без сцепления с бетоном в предельной стадии – одно из этих требований. Следует отметить, что в отличие от норм ряда стран и предложений отдельных исследователей, EN1991-1-1[12] рекомендует принимать постоянное значение $\Delta f_{ps} = 100 / \dots$. В представленной статье рассмотрены и проанализированы предложения и рекомендации различных норм и исследователей на фоне опытных данных, а также сформулированные теоретические предпосылки, рекомендуемые для расчета приращений напряжений в арматуре без сцепления на основе модифицированной блочной модели.

1. Анализ предложений по расчету изгибаемых предварительно напряженных элементов без сцепления напрягаемой арматуры с бетоном. При отсутствии сцепления арматуры с окружающим бетоном приращение напряжений в арматуре от действия эффектов от нагрузки распределяется одинаково по всей длине стержня. Это обстоятельство изменяет характер трещинообразования элементов, ведет к увеличению прогибов и ширины раскрытия

трещин. При этом разрушение таких элементов происходит, как правило, при меньших нагрузках в результате раздавливания бетона сжатой зоны. Прочностные свойства напрягаемой арматуры зачастую оказываются недоиспользованными [4].

Несмотря на то, что бетонные элементы, подвергаемые предварительному обжатию арматурой без сцепления с бетоном, в большинстве случаев имеют конструктивное армирование, его в большинстве случаев не учитывают в расчетах. Вместе с тем, если часть арматуры (напрягаемой или ненапрягаемой) имеет сцепление с бетоном, это может существенно повлиять на характер трещинообразования и разрушения такого элемента.

Чтобы оценить сопротивление элемента со смешанным армированием в предельном состоянии, необходимо определить прирост напряжений в свободной арматуре (арматуре, не имеющей сцепления с бетоном).

Согласно Politalski [14], польские нормы [13] и Eurocode 2 [12] рекомендуют принимать прирост напряжений в арматуре без сцепления в предельном состоянии равным 100МПа. Аналогичное значение было принято и в старых американских нормах ACI 318-63. Актуальное издание этих норм [11] рекомендует рассчитывать величину приращения напряжений как зависимость от трех параметров: прочности на сжатие бетона, коэффициента армирования преднапряженной арматурой и отношения пролета к высоте элемента.

$$\Delta f_{ps} = 70 + f_c' / (100 \cdot \rho_p) \leq 420 \quad L/d_p \leq 35$$

$$\Delta f_{ps} = 70 + f_c' / (300 \cdot \rho_p) \leq 200 \quad L/d_p > 35 \text{ (1)}$$

Очевидно, что уравнения, предлагаемые ACI [11], позволяют обеспечить прирост напряжений в предельной стадии в достаточно

Тур Светлана Александровна, аспирант кафедры строительных конструкций Брестского государственного технического университета. Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.