

- ский, В.Н. Семиошко/ Квант. электрон. - 1984. - Т. 11, ¹ 10. - С. 2041-2048.
6. Miller D.A.B., Smith S.D., Seaton C.T. Optical bistability in semiconductors/ IEEE J. Quant. Electr. - 1981. - V. 17, ¹ 3 - P. 312 - 317.
 7. Miller D.A.B., Seaton C.T., Prise M.E., Smith S.D., Band-gap-resonant nonlinear refraction in III-V semiconductors/ Phys. Rev. Lett. - 1981. - V. 47, ¹ 3 - P. 197 - 200.
 8. Thompson G.H.B. The physics of semiconductor laser devices. - N.Y.; L.: J. Wiley and Sons, 1980, P.185-186.
 9. Стриммерные лазеры на твердом теле/ Н. Г. Басов, А. Г. Молчанов, А.С. Насибов и др./ ЖЭТФ.- 1976. - Т.70, В.5. - С. 1750-1761.
 10. Диджюлис А.А., Шатковский Е.В. Разогрев электронно-дырочной плазмы при стримерном разряде в полупроводниках/ Физика и техника полупроводников. - 1988.- Т. 22, ¹ 8. - С. 1412-1415.
 11. Langer D.W. Temperature and pressure dependence of the index of refraction of CdS// J. of Appl. Phys. -1966. - V.37, P.3530-3532.

УДК 530.1

Прокопеня А.Н., Чопчиц Н.И., Краглер Р.

ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПРОТЯЖЕННОГО ТЕЛА ПО ПОВЕРХНОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ТРЕНИЯ

Хорошо известно, что локальные в макроскопическом смысле коэффициенты сухого трения в модели Кулона-Амонтона имеют пространственные флуктуации, масштаб которых зависит от обработки поверхностей пар трения (типичный интервал значений 10^{-4} - 10^{-3} м) и относительная величина которых достигает 0,1. Поэтому задача анализа движения протяженного тела по шероховатой поверхности с переменным коэффициентом трения является весьма актуальной, тем более, что к этому же классу задач приводит рассмотрение проблем оптимального управления движением за счет управления коэффициентом трения.

Рассмотрим одномерную задачу, в которой однородный брусок массой m , длиной $2l$ и высотой $2b$ въезжает с участка горизонтальной поверхности с коэффициентом трения μ_2 на участок с коэффициентом трения μ_1 . Рассмотрим вначале случай двухточечного контакта с опорой в передней и задней точках бруска (на рис. 1 отмечены силы, действующие на брусок, и указано направление скорости его центра инерции \vec{v}_C). Считая деформации участков опоры, контактирующих с бруском, малыми и пренебрегая тем самым угловым ускорением бруска, имеем следующую систему уравнений, описывающих скольжение бруска:

из которой находим

$$\begin{aligned} N_1 &= mg \frac{l + \mu_2 b}{(\mu_2 - \mu_1)b + 2l}, \\ N_2 &= mg \frac{l - \mu_1 b}{(\mu_2 - \mu_1)b + 2l}. \end{aligned} \quad (1)$$

Из (1) ясно, что при выполнении условия $l > \mu_1 b$ контакт с опорой осуществляется как в передней, так и в задней точках бруска и уравнение движения центра инерции имеет вид:

$$m \frac{d^2 x_C}{dt^2} = - \frac{mgl(\mu_1 + \mu_2)}{(\mu_2 - \mu_1)b + 2l}, \quad \frac{d^2 y_C}{dt^2} = 0.$$

При $\mu_1 b = l$ сила нормальной реакции опоры в задней точке бруска обращается в ноль $N_2 = 0$ и начинается опрокидывание бруска относительно передней точки контакта (точка B). В обозначениях рис. 2 уравнения движения бруска при условии, что точка B скользит по опоре, имеют вид:

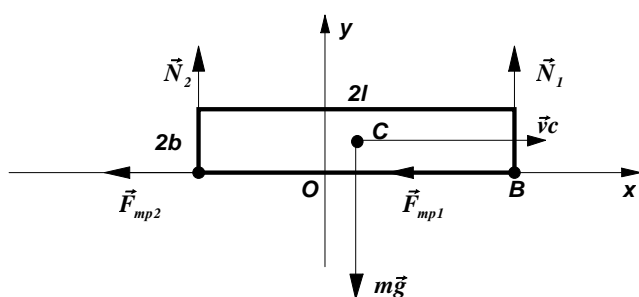


Рисунок 1.

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = mg, \\ -F_{mp} b - (N_2 - N_1)l = 0, \\ F_{mp} = F_{mp1} + F_{mp2} = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2, \end{cases}$$

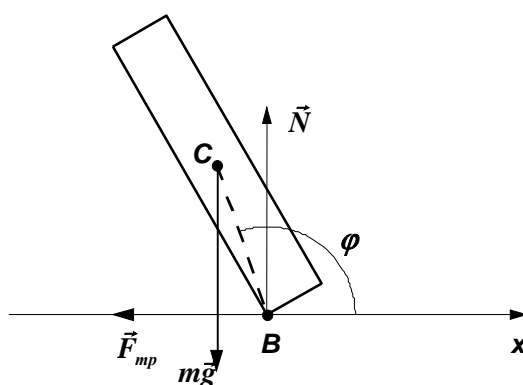


Рисунок 2.

Прокопеня Александр Николаевич. Доцент, к. ф.-м. н. каф. физики Брестского государственного технического университета.

Чопчиц Николай Игнатьевич. Доцент каф. физики Брестского государственного технического университета. Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская 267.

Краглер Роберт. Д. ф.-м. н., профессор Высшей технической школы, г. Равенсбург-Вайнгартен, Германия.

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_C}{dt^2} = -\mu_1 N, \\ \frac{d^2 y_C}{dt^2} = -mg + N, \\ I_C \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -N\rho(\cos \varphi + \mu_1 \sin \varphi), \end{cases} \quad (2)$$

где $\rho = \sqrt{l^2 + b^2}$, $I_C = \frac{1}{3} m(l^2 + b^2)$ – момент инерции

бруска относительно оси, проходящей через центр инерции бруска перпендикулярно плоскости рисунка. Система (2) должна быть дополнена уравнением кинематической связи $y_B = y_C - \rho \sin \varphi$, из которого вытекает, что вследствие $y_B = 0$ (условие контакта точки B с опорой) имеем:

$$\frac{d^2 y_C}{dt^2} = -\rho \sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \rho \cos \varphi \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

Заметим, что поскольку согласно (1) силы N_1 и N_2 не зависят от координат правого конца бруска, опрокидывание начинается сразу же в момент контакта бруска с участком поверхности с коэффициентом трения μ_1 при выполнении условия $\mu_1 b \geq l$, так что начальные условия для системы (2)

имеют вид: $x_{C0} = -l$, $v_{xC0} = v_0$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \text{arctg} \frac{l}{b}$,

$\frac{d\varphi_0}{dt} = 0$. Система (2) аналитически не решается, а при чис-

ленном решении требуется известная аккуратность в слежении, во-первых, за выполнением условия $N_1 \geq 0$, ибо при невыполнении этого условия контакт бруска с опорой теряется и уравнение движения становится тривиальным, и, во-

вторых, за выполнением условия $\frac{dx_B}{dt} > 0$ или, что эквива-

лентно, $\frac{dx_C}{dt} + \rho \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} > 0$, которое выражает наличие скольжения точки B относительно опоры и при невыполнении этого условия мы получаем тривиальную задачу о вращении бруска вокруг неподвижной оси, проходящей через точку B с соответствующими начальными условиями.

Рассмотрим теперь случай движения, когда контакт бруска с опорой осуществляется по всей площади соприкосновения. Заметим, что до сих пор не решена в общей постановке при произвольных соотношениях между упругими характеристиками опоры и тела и наличии силы трения даже соответствующая статическая задача [1]. Введем поэтому естественные и широко используемые предположения о том, что, во-первых, упругие константы опоры на участках с различными коэффициентами трения одинаковы и велики, так что вертикальные перемещения бруска малы, и, во-вторых, что упругие константы бруска значительно больше, чем опоры, что позволяет считать форму бруска прямоугольной на всех этапах движения. Указанным предположениям нетрудно придать количественный смысл, но мы на этом останавливаться не будем. При указанных предположениях плотность силы нормальной реакции опоры, распределенной по длине бруска, является линейной функцией $N(x) = N_0 + Cx$, где x –

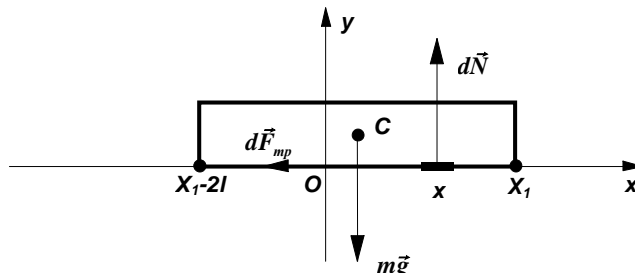


Рисунок 3.

локальная координата вдоль бруска, а N_0 и C – некоторые подлежащие определению константы, причем $[N_0] = H \cdot m^{-1}$, $[C] = H \cdot m^{-2}$. Выберем начало координат на границе контакта участков с различными коэффициентами трения. Пусть x_I – координата правого конца бруска. Тогда в обозначениях рис. 3 и при сделанных выше предположениях имеем:

$$mg = \int_{x_{I-2l}}^{x_I} (N_0 + Cx) dx = N_0 2l + 2Cl(x_I - l). \quad (3)$$

Момент распределенных сил нормальной реакции опоры относительно оси, проходящей через центр инерции с учетом того, что $x - x_C = x - x_I + l$, равен:

$$M_N = \int_{x_{I-2l}}^{x_I} (N_0 + Cx)(x - x_I + l) dx = \frac{2Cl^3}{3}. \quad (4)$$

Суммарная сила трения, действующая на брусок, равна:

$$\begin{aligned} F_{mp} &= \mu_1 \int_0^{x_I} (N_0 + Cx) dx + \mu_2 \int_{x_{I-2l}}^0 (N_0 + Cx) dx = \\ &= \mu_1 (N_0 x_I + \frac{Cx_I^2}{2}) - \mu_2 \left[N_0 (x_I - 2l) + \frac{C(x_I - 2l)^2}{2} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

а ее момент относительно той же оси $M_{mp} = -F_{mp} b$. Поскольку при указанных выше предположениях угловое ускорение бруска все время пренебрежимо мало, имеем из (4) и (5):

$$\mu_1 (N_0 x_I + \frac{Cx_I^2}{2}) - \mu_2 \left[N_0 (x_I - 2l) + \frac{C(x_I - 2l)^2}{2} \right] = \frac{2Cl^3}{3b}. \quad (6)$$

Решая совместно (3) и (6), находим:

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{mg}{2l} \frac{4l^3 + 12bl^2 \mu_2 - 12blx_I \mu_2 - 3bx_I^2 (\mu_1 - \mu_2)}{4l^3 + 3bx_I^2 (\mu_1 - \mu_2) - 6bx_I l (\mu_1 - \mu_2)} \\ C &= \frac{mg}{l} \frac{3b((\mu_1 - \mu_2)x_I + \mu_2 2l)}{4l^3 + 3bx_I^2 (\mu_1 - \mu_2) - 6bx_I l (\mu_1 - \mu_2)}, \end{aligned}$$

так что линейная плотность силы нормальной реакции имеет вид:

$$N(x) = \frac{mg}{2l} \frac{4l^3 + 12bl^2\mu_2 - 12blx_1\mu_2 - 3bx_1^2(\mu_1 - \mu_2) + 6(x_1(\mu_1 - \mu_2) + 2l\mu_2)x}{4l^3 + 3bx_1^2(\mu_1 - \mu_2) - 6bx_1l(\mu_1 - \mu_2)} \quad (7)$$

Учитывая выражение (5) для силы трения и вводя в (7) координату центра инерции $x_C = x_1 - l$, уравнение движения центра инерции в случае, когда контакт осуществляется по всей плоскости опоры, запишем в виде:

$$\frac{d^2x_C}{dt^2} = -\frac{2gl^2(x_C(\mu_1 - \mu_2) + l(\mu_1 + \mu_2))}{4l^3 + 3bx_C^2(\mu_1 - \mu_2) - 3bl^2(\mu_1 - \mu_2)}$$

или

$$v_x \frac{dv_x}{dx} = -\frac{2gl^2(x(\mu_1 - \mu_2) + l(\mu_1 + \mu_2))}{4l^3 + 3bx^2(\mu_1 - \mu_2) - 3bl^2(\mu_1 - \mu_2)}, \quad (8)$$

где для краткости использованы обозначения $x = x_C$,

$v_{Cx} = v_x$. Уравнение (8) интегрируется в квадратурах и результат, полученный с использованием системы компьютерной алгебры Mathematica, имеет вид:

$$\begin{aligned} & 3b\sqrt{(\mu_1 - \mu_2)(4l - 3b(\mu_1 - \mu_2))}(v_0^2 - v_x^2) = \\ & = 4\sqrt{3b}gl^2(\mu_1 + \mu_2) \left[\operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{3b\mu}{4l - 3b\mu}} \frac{x}{l} \right) + \right. \\ & \left. + \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{3b(\mu_1 - \mu_2)}{4l - 3b(\mu_1 - \mu_2)}} \right) \right] + \\ & + 2gl^2\sqrt{(\mu_1 - \mu_2)(4l - 3b(\mu_1 - \mu_2))} \times \\ & \times \ln \left[1 + \frac{3bx^2}{4l^3}(\mu_1 - \mu_2) - \frac{3b}{4l}(\mu_1 - \mu_2) \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

В более простом случае перехода бруска с гладкой на шероховатую поверхность, когда $\mu_2 = 0$, $\mu_1 = \mu$, соотношение (9) принимает вид, полученный ранее в [2]:

$$\begin{aligned} & 3b\sqrt{\mu(4l - 3b\mu)}(v_0^2 - v_x^2) = \\ & = 4\sqrt{3b}gl^2\mu \left[\operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{3b\mu}{4l - 3b\mu}} \frac{x}{l} \right) + \right. \\ & \left. + \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{3b\mu}{4l - 3b\mu}} \right) \right] + \\ & + 2gl^2\sqrt{\mu(4l - 3b\mu)} \ln \left[1 + \frac{3b(x^2 - l^2)}{4l^3} \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

Дальнейшее интегрирование уравнений (9), (10) для получения кинематического закона движения может быть выполнено лишь численно. Для использования соответствующей процедуры **NDSolve** в системе Mathematica уравнение (10), например, нужно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} = & [v_0^2 - \frac{4gl^2\sqrt{\mu}}{\sqrt{3b(4l - 3b\mu)}} \left(\operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{3b\mu}{4l - 3b\mu}} \frac{x}{l} \right) + \right. \\ & \left. + \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{3b\mu}{4l - 3b\mu}} \right) \right) - \frac{2gl^2}{3b} \ln \frac{4l^3 + 3b(x^2 - l^2)}{4l^3}]^{-\frac{1}{2}}. \quad (11) \end{aligned}$$

При этом численное решение $t = t(x)$ уравнения (11) необходимо искать на отрезке $x \in [-l, x_{min}]$, где x_{min} – меньшее из значений координаты центра инерции бруска, при которых либо его скорость обращается в нуль, либо начинается опрокидывание бруска.

Представляет интерес исследование условий, при которых начинается поворот бруска вокруг оси, проходящей через передний конец бруска, при его прохождении через границу раздела двух участков поверхности с различными коэффициентами трения. Поскольку координата правого конца бруска при этом изменяется в пределах отрезка $x_1 \in [0, 2l]$, из

(7) следует, что $N(x)$ – возрастающая функция. Следовательно, началу опрокидывания бруска соответствует обращение плотности силы нормальной реакции опоры в нуль на левом краю бруска, т.е. $N(x_1 - 2l) = 0$. Это дает для определения координаты x_1 правого конца бруска, при которой начинается отрыв бруска по всей длине, за исключением правого конца, следующее квадратное уравнение:

$$x_1^2 - 4lx_1 + \frac{4l^2(l - 3b\mu_2)}{3b(\mu_1 - \mu_2)} = 0. \quad (12)$$

Решение уравнения (12) имеет вид:

$$x_1 = 2l \left(1 \pm \sqrt{\frac{3b\mu_1 - l}{3b(\mu_1 - \mu_2)}} \right). \quad (13)$$

Полагая в (7) $\mu_1 = \mu_2$, легко убедиться в том, что движение бруска на участке поверхности с коэффициентом трения μ_2 происходит без опрокидывания при выполнении условия $3b\mu_2 < l$. Если это условие выполнено, то меньший из корней (13) принадлежит отрезку $[0, 2l]$ только при выполнении неравенства

$$\mu_2 < \frac{l}{3b} \leq \mu_1. \quad (14)$$

Заметим, что в случае двухточечного контакта бруска и опоры опрокидывание бруска возможно при условии $\mu_1 b \geq l$. Таким образом, из (14) следует, что в случае плоскостного контакта бруска и опоры значение коэффициента трения μ_1 , при котором начинается опрокидывание бруска, уменьшается в три раза по сравнению со случаем двухточечного контакта. Дальнейшее движение бруска не отличается от рассмотренного выше случая двухточечного контакта. Однако начальные условия этого движения в случае двухточечного и плоскостного контактов принципиально различны: при двухточечном контакте поворот бруска, если он возможен, начинается сразу при $x_1 \geq 0$, а при плоскостном – лишь при достижении бруском положения x_1 , определяемого меньшим из корней (13), если, разумеется, начальные условия обеспечивают достижение соответствующих значений x_1 .

Рассмотренная выше ситуация без труда обобщается на случай, когда тело находится на $i > 2$ участках с известными координатами концов и с коэффициентами трения μ_i , а также на случай, когда упругие характеристики участков с различными коэффициентами трения различны. Представляет интерес обобщение рассмотренной модели для ситуации со случайно распределенным коэффициентом трения, а также для ситуации с плоскопараллельным движением твердого тела – к этому классу задач принадлежит задача определения движения автомобиля при наличии заноса с учетом эффекта скатывания материала колес.

УДК 539.216:535.36

Каролинский В.Г., Пекун А.И., Луковский С.В., Сазонов М.И., Хвисевич В.М.

ПОЛУЧЕНИЕ АЛМАЗОПОДОБНЫХ ПЛЕНОК ИЗ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ ВАКУУМНО-ПЛАЗМЕННОЙ УСТАНОВКИ (ВПУ-2)

Анализ научно-технической и патентной информации [1-2] показывает, что в последнее время учеными различных стран интенсивно ведутся исследования по выращиванию алмазоподобных и алмазных пленок (АП), а также разрабатываются соответствующие технологии нанесения таких пленок на детали машин, инструмент, пресс-формы, оптические детали и т.д. Потенциальные возможности использования АП в различных областях науки и техники основаны на уникальных свойствах алмаза: высокая теплопроводность, химическая инертность, низкий коэффициент трения, высочайшая твердость и т.д.

На рисунке 1 приведена фотография плазменно-вакуумной установки (ВПУ-2) предназначенной для получения алмазоподобных пленок, которая разработана Брестским политехническим институтом совместно со Сморгонским заводом оптического станкостроения.

Установка предназначена для нанесения тонких износостойких алмазоподобных покрытий способом химического осаждения из газовой фазы с применением высокотемпературной плазменной струи.

В состав установки входят:

- высокоэнтальпийный плазматрон мощностью 60 кВт;
- откачной пост;
- система подачи газа в рабочую камеру и плазматрон;
- пульт управления.

Технические характеристики установки приведены в таблице 1.

Относительной особенностью данной установки в сравнении с аналогами является применение мощного плазматрона постоянного тока с межэлектродной вставкой (МЭВ) и газовой завесой стенок разрядной камеры, генерирующего сверхзвуковую струю аргона мощностью до 60 кВт.

Разработанный плазматрон с МЭВ (рис. 2) состоит из внутреннего кольцевого электрода – катода 1, выходного электрода – анода 2, между которыми устанавливается секционированная межэлектродная вставка. МЭВ набрана из интенсивно охлаждаемых водой электрически изолированных друг от друга медных секций – шайб 3 с цилиндрическими отверстиями диаметром 4-10 мм. Для обеспечения стабильно-

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. С.В.Босаков. К устойчивости стержней на упругом основании/ Весті АН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 1994. №1. - С.29-33.
2. А.Н.Прокопеня, Н.И.Чопчиц, Р.Краглер. Анализ одномерного движения протяженного тела по поверхности с переменным коэффициентом трения/ Тезисы докл. междунар. математич. конф. «Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры» (19-22 сент. 2000 г., Брест). Брест, БрГУ, 2000. С.60.

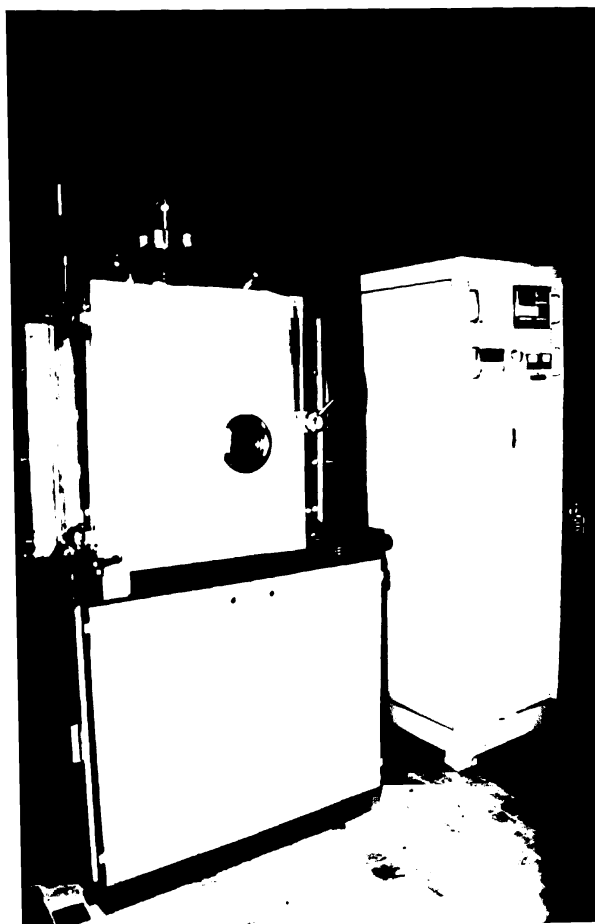


Рисунок 1. Плазменно-вакуумная установка (ВПУ-2)

го горения дуги на оси электроразрядной камеры и исключения шунтирования дуги в канале плазматрона толщина сек-

Каролинский Владимир Григорьевич. К.п.н, доцент каф. физики Брестского государственного технического университета.

Пекун Александр Иванович. Инженер, научный сотрудник каф. СМиТМ Брестского государственного технического университета.

Луковский Сергей Викторович. Инженер, аспирант каф. СМиТМ Брестского государственного технического университета.

Сазонов Михаил Иванович. Д.т.н., профессор каф. СМиТМ Брестского государственного технического университета.

Хвисевич Виталий Михайлович. К.т.н., зав. каф. СМиТМ Брестского государственного технического университета. Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская 267.