43. Справочник по математике для экономистов/ Под ред. В.И. Ермакова. – М.: Высшая школа. – 1997. – 384 с.
44. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. – М.: Наука. – 1984. – 293 с.
45. Колемаев В.А. Математическая экономика. – М.: ЮНИТИ. – 1998. – 240 с.
46. Альсевич В.В. Математическая экономика. Конструктивная теория. – Мн.: Дизайн ПРО. – 1998. – 240 с.
47. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. – М.: Наука. – 1983. – 352 с.
48. Яценко Ю.П. Интегральные модели систем с управляемой памятью. – К.: Наукова думка. – 1991. – 220 с.
49. Тузик А.И., Тузик С.А. Интегральные модели некоторых экономических задач // Тезисы докл. международн. матем. конф. "Еругинские чт. – VI". Ч.1. Гомель, ГГУ. – 1999. – С.169-171.
50. Елисеева И.И., Юзбашев М.М. Общая теория статистики. – М.: Финансы и статистика. – 1999. – 480 с.
51. Ефимова М.Р., Петрова Е.В., Румянцев В.Н. Общая теория статистики. – М.: ИНФРА-М. – 2000. – 416 с.
52. Теория статистики / Под ред. Р.А. Шмойловой. – М.: Финансы и статистика. – 1999. – 576 с.
53. Сиденко А.В., Попов Г.Ю. Матвеева В.М. Статистика. – М.: Дело и Сервис. – 2000. – 464 с.
54. Экономическая статистика / Под ред. Ю.Н. Иванова. – М.: ИНФРА-М. – 2000. – 480 с.
55. Курс социально-экономической статистики/ Под ред. М.Г. Назарова. – М.: Финстатинформ, ЮНИТИ-ДАНА. – 2000. – 772 с.
56. Первозванский А.А., Первозванская Т.М. Финансовый рынок: расчет и риск. – М.: ИНФРА-М. – 1994. – 192 с.
57. Лапуста М.Г., Шаршукова Л.Г. Риски в предпринимательской деятельности. – М.: ИНФРА-М. – 1998. – 224 с.
58. Рубахов А.И., Головач Э.П. Коммерческие риски. – Брест: БПИ. – 1999. – 340 с.
59. Тузик А.И., Рубанов В.С., Сидоревич М.П. Математика для экономистов // Тезисы докл. международн. VIII Белорусск. матем. конф. Ч.4. Мн.: ИМ НАНБ. – 2000. – С.180.

УДК 513.82

Андреев А.С., Юдов А.А.

КАНОНИЧЕСКИЙ ЛИФТ ПОДМНОГООБРАЗИЯ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА В СТРУКТУРНУЮ ГРУППУ ЛИ И В ЕЕ АЛГЕБРУ ЛИ

Пусть G – группа Ли, H – её замкнутая подгруппа Ли, $M = G/H$ –однородное G - пространство,

$$\pi : G \to G/H : a \mapsto aH \quad (1)$$

– каноническая проекция.

Группа G действует в M с помощью левых сдвигов:

$$G \times M \to M : (a, bH) \mapsto abH = a \cdot bH = T_a(bH).$$

(2)

<u>Определение:</u> *Подмногообразием* размерности n однородного пространства M будем называть пару ($\mathcal{U}_0$, f), где $\mathcal{U}_0$ – окрестность нуля евклидова пространства R_n, f – аналитическое вложение $\mathcal{U}_0$ в M.

Таким образом, подмногообразия однородного пространства изучаются локально.

Теория построения канонического репера подмногообразия подробно описана в работах [1], [2]. Ниже излагаются идеи работ [1], [2].

Предположим, что $f(0) = \pi(e)$. В противном случае, если $f(0) = \pi(a) \neq \pi(e)$, от подмногообразия ($\mathcal{U}_0$, f) перейдём к ему эквивалентному ($\mathcal{U}_0$, $T_{a^{-1}}$, f). Пусть $\dim G=n$, $\dim H=s$, тогда $\dim M=n-s=m$.

Рассмотрим пространство Γ_1 всех касательных к M n-мерных подпространств. Действие группы G на M продолжается в действии на Γ_1, на котором группа G будет действовать с помощью дифференциалов левых сдвигов пространства M:

$$G \times \Gamma_1 \to \Gamma_1 : (a, \mathcal{K}) \mapsto dT_a(\mathcal{K}) = a^o \mathcal{K}. \quad (3)$$

При этом Γ_1 становится G-пространством, но необязательно однородным. Наряду с G-пространством Γ_1 будем рассматривать его подмножество Q_1, состоящее из n-мерных подпространств, касательных к M в точке $\pi(e)$. Q_1 будет H-пространством, тоже необязательно однородным. Между H-орбитами множества Q_1 и G-орбитами множества T_1 существует естественное взаимно-однозначное соответствие. Далее будем рассматривать G-орбиты пространства Γ_1. Каждой такой орбите будет сопоставляться класс n-мерных подмногообразий пространства M, такой, что все касательные подпространства подмногообразия этого класса попадут в данную орбиту (по крайней мере, в некоторой окрестности). Предположим, что подмногообразие ($\mathcal{U}_0$, f) принадлежит классу с орбитой $O(\mathcal{K}_1)=\{a^o\mathcal{K}_1 | a \in G\}$, где $\mathcal{K}_1 = T_{f_1(0)}(\operatorname{Im} f)$, $\operatorname{Im} f = f(\mathcal{U}_0)$. Пусть H_1 – группа стационарности элемента $\mathcal{K}_1$:

$$H_1=\{ a \in G \mid a^o \mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_1 \},$$

Тогда, $O(\mathcal{K}_1)$, как G-пространство, изоморфно G/H_1 [3, с. 25].

Необходимым и достаточным условием того, что размерность орбиты $O(\mathcal{K}_1)$ равна размерности Γ_1 есть условие [1]:

$$\dim H - \dim H_1 = \dim Q. \quad (4)$$

В этом случае касательные пространства к подмногообразию ($\mathcal{U}_0$, f) принадлежат орбите $O(\mathcal{K}_1)$ (быть может, в меньшей, чем $\mathcal{U}_0$ окрестности).

Андреев Алексей Сергеевич. *Студент V курса математического факультета Брестского государственного университета.*
Юдов Александр Андреевич. *К. ф.-м. н., доцент каф. алгебры и геометрии Брестского государственного университета.*
Беларусь, БГУ, 224665, г. Брест, бульвар Космонавтов 21.

Обозначим пространство $O(\mathcal{K}_1) = {}^{G}\!/_{H_1}$ через M_1.

Рассмотрим отображение $\tilde{f} : f(Д_0) = Im f \to M_1 : x \mapsto T_x\ (Im f)$. Отображение f продолжается при помощи $\tilde{f}$ в пространство M_1. Это продолжение обозначим через f_1:

$$f_1 = \tilde{f} \circ f : Д_0 \to M_1 : x \mapsto T_x\,(Im f).$$

Пусть $\pi_1 : G \to {}^{G}\!/_{H_1} : a \mapsto aH_1$ и $\pi_{10} : {}^{G}\!/_{H_1} \to {}^{G}\!/_{H} : aH_1 \mapsto aH$ – канонические проекции.

Следующие диаграммы коммутативны [1]:

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\ Д_0 \arrow[r, "f"] & M \arrow[r] & M_1 \end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\ Д_0 \arrow[r, "f"] & M & M_1 \arrow[l, "\pi 10"'] \end{tikzcd} \qquad (5)$$

Отображение f_1 будет аналитическим вложением $Д_0$ в M_1 и мы получим подмногообразие $(Д_0, f_1)$ однородного пространства $M_1 = {}^{G}\!/_{H_1}$.

Далее аналогичные рассуждения применяем к подмногообразию $(Д_0, f_1)$ пространства M_1. Продолжаем отображение f_1 до отображения $f_2 : Д_0 \to M_2 = {}^{G}\!/_{H_2}$, где H_2 – группа стационарности подпространства $\mathcal{K}_2 = T_{f1(0)}(Im f_1)$.

Предположим, что, выполнив эту операцию $p+1$ раз, мы получим отображение:

$$f_{p+1} : Д_0 \to {}^{G}\!/_{H_{p+1}} = M_{p+1},$$

где H_{p+1} – группа стационарности подпространства $\mathcal{K}_{p+1} = T_{fp(0)}\ (Im f_p)$.

Предположим, что H_{p+1} совпадает с единицей группы G. Тогда, ${}^{G}\!/_{H_{p+1}}$ канонически изоморфно G. Следовательно, мы получим: $f_{p+1} : Д_0 \to {}^{G}\!/_{H_{p+1}} = G$.

Имеют место следующие коммутативные диаграммы [1]:

где $\pi_{i+1,i} : {}^{G}\!/_{H_{i+1}} \to {}^{G}\!/_{H_i} : aH_{i+1} \mapsto aH_i$ – канонические проекции.

Таким образом, наше подмногообразие $(Д_0, f)$ однородного пространства $M = {}^{G}\!/_{H}$ канонически вложено в структурную группу G. Эта теория естественным образом излагается с помощью аппарата расслоенных пространств [1]. Коротко заметим, что надо рассмотреть главное расслоение $\xi = \left(G, \pi, {}^{G}\!/_{H}\right)$ и его ограничение на $Д = f(Д_0)$: $\xi' = \xi|_Д = (G', \pi, Д_0)$, где $G' = \pi^{-1}(Д)$.

$$\begin{tikzcd} & & G \arrow[dll, "\pi"'] \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_{p+1}"] & & \\ Д_0 \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "\tilde{f}"] & M_1 \arrow[r, "\tilde{f}1"] & \ldots \arrow[r, "\tilde{f}p"] & M_{p+1} = G \end{tikzcd} \quad (а)$$

(6)

$$\begin{tikzcd} & & G \arrow[dll, "\pi"'] \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_{p+1}"] & & \\ Д_0 \arrow[r, "f"] & M & M_1 \arrow[l, "\pi 10"'] & \ldots \arrow[l, "\pi 21"'] & M_{p+1} \arrow[l, "\pi\, p+1,p"'] \end{tikzcd} \quad (б)$$

Таким образом, нами построен лифт главного расслоения: $\lambda_f = \tilde{f}_p \circ \tilde{f}_{p-1} \circ \ldots \circ \tilde{f}$, $\lambda_f : Д_0 \to G'$.

<u>Определение</u> Отображение

$$\hat{f} = \lambda_f \circ f : Д_0 \to G \qquad (7)$$

будем называть *каноническим лифтом* подмногообразия $(Д_0, f)$.

В результате описанного процесса получена цепочка подгрупп:

$$H \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_{p+1} = e \qquad (8)$$

<u>Определение</u> Цепочка подгрупп

$$H \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_{p+1} = e$$

называется *типовой цепочкой* или *типом* данного подмногообразия $(Д_0, f)$.

Получена цепочка подпространств:

$$\mathcal{K}'_1 = d\pi_e^{-1}(\mathcal{K}_1),\ \mathcal{K}'_2 = d\pi_{1|e}^{-1}(\mathcal{K}_2),\ \ldots,$$

$$\mathcal{K}'_{p+1} = d\pi_{p|e}^{-1}(\mathcal{K}_{p+1}),$$

а также в произвольной точке $x \in \lambda_f(Д)$, $\pi(x) = f(x_0)$:

$$\mathcal{K}'_{1|x} = d\pi_x^{-1}(T_{f(x0)}(Д)),\ \ldots,$$

$$\mathcal{K}_{p+1|x} = d\pi_{p|x}^{-1}(T_{f_p(x_0)}(Im f_p)),$$

удовлетворяющих условиям:

$$\mathcal{K}'_1 \supset \mathcal{K}'_2 \supset \ldots \supset \mathcal{K}'_{p+1}, \qquad (9)$$

$$\mathcal{K}'_{1|x} \supset \mathcal{K}'_{2|x} \supset \ldots \supset \mathcal{K}'_{p+1|x}. \qquad (10)$$

Определение Совокупность подпространств (9) алгебры Ли $T_e(G)=\checkmark$ называется *каноническим репером* подмногообразия $(\mathcal{A}_0, f)$ в точке O, а совокупность подпространств (10) пространства $T_x(G)$ называется *каноническим репером* подмногообразия $(\mathcal{A}_0, f)$. в произвольной точке $x_0 \in \mathcal{A}_0$.

Замечание 1 В случае, если орбит в G-пространстве $\Gamma_1(\Gamma_i)$ всех n-мерных подпространств, касательных к $M(M_{i-1})$, более одной, то необходимо провести классификацию подмногообразий по типу продолжения в ту или иную орбиту.

Замечание 2 Может быть, что H_{p+1} не будет единицей, а будет дискретной подгруппой. Тогда сводим ее к единице внесением в подпространства (11), (12) дополнительную структуру – “*ориентацию*”.

Продолжение подмногообразий и построение канонического репера производится одновременно для всех подмногообразий некоторой окрестности, продолжающихся в одну и ту же орбиту. Если за начальный элемент орбиты $G/H_1 = M_1$ выбрать касательное пространство подмногообразия, то продолженное подмногообразие будет проходить через этот элемент, совпадающий с $\pi_1(e)$, в противном случае не будет. Зависимость, возникающая при этом, описывается следующей теоремой.

Теорема 1 [2] Пусть для подмногообразия $(\mathcal{A}_0, f)$ имеем:
$f(0)=\pi(e)$, $\mathcal{K}_1 = T_{\pi(e)}(Im f)$, $\mathcal{K}_{1|x}=T_x(\ Im f)$, $x \in Im f = f(\mathcal{A}_0)$, $\mathcal{K}_{1|x}=b\circ \mathcal{K}_1$, $b\in G$, $x=f(x_0)$, $H_1=\{h \in H \mid h \circ \mathcal{K}_1 = \mathcal{K}\}$, $\tilde{\mathcal{K}}_1 = h_0^{-1}\circ \mathcal{K}_1$, $h_0 \in H$, $\tilde{H}_1=\{h\in H \mid h\circ \tilde{\mathcal{K}}_1 = \tilde{\mathcal{K}}_1\}$.
При продолжении подмногообразия $(\mathcal{A}_0, f)$ в пространство G/H_1 подпространству $\square_{1|x}$ соответствует смежный класс bH_1, тогда при продолжении подмногообразия $(\mathcal{A}_0, f)$ в пространство $G/\tilde{H}_1$ подпространству $\square_{1|x}$ соответствует множество bH_1h_0. При этом в качестве элемента b можно взять элемент $\hat{f}(x_0)$ группы G.

Следствие 1 [2] Канонический лифт подмногообразия $(\mathcal{A}_0, f)$, полученный продолжением в орбиты, образованные начальными элементами

$$h_0^{-1}\circ \mathcal{K}_1,\ h_0^{-1}\circ \mathcal{K}_2,\ \dots,\ h_0^{-1}\circ \mathcal{K}_{p+1}, \quad h_0 \in H, \tag{11}$$

где $\mathcal{K}_1 = T_{f(0)}(Im f)$, $\mathcal{K}_i = T_{f_{i-1}(0)}(Im f_{i-1})$, $i=2, 3, \dots, p+1$, получается из канонического лифта, образованного продолжением в орбиты с начальными элементами

$$\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_{p+1}, \tag{12}$$

правым сдвигом на элемент h_0.

Следствие 2 [2] Пусть $\hat{f}: \mathcal{A}_0 \to G$ – канонический лифт подмногообразия $(\mathcal{A}_0, f)$ по системе подпространств (12), тогда $R_{h_0}\circ f$ – канонический лифт подмногообразия $(\mathcal{A}_0, f)$ по системе подпространств (11).

Таким образом, одному и тому же подмногообразию пространства M соответствует в группе Ли G множество канонических лифтов, все они отличаются от исходного, проходящего через единицу группы правым сдвигом на элементы группы H.

Определение Канонический лифт подмногообразия $(\mathcal{A}_0, f)$ пространства M, проходящий через единицу группы, будем называть *главным лифтом* подмногообразия $(\mathcal{A}_0, f)$.

Рассмотрим экспоненциальное отображение $exp: \checkmark \to G$ [4, с. 111] алгебры Ли $\checkmark$ на ее группу Ли G, которое является аналитическим диффеоморфизмом некоторой открытой окрестности N_0 нуля в $\checkmark$ на некоторую открытую окрестность N_e единицы группы G. Без ограничения общности можно считать, что $\hat{f}(\mathcal{A}_0) \subset N_e$.

Рассмотрим отображение

$$\check{f} = exp^{-1}\circ \hat{f}: (\mathcal{A}_0) \to \checkmark \tag{13}$$

Экспоненциальное отображение носит функториальный характер [5, с. 117]. Поэтому построенное вложение $\check{f}$ подмногообразия однородного пространства в алгебру Ли основной группы Ли имеет инвариантный характер.

Определение Отображение $\check{f}$ будем называть *каноническим вложением* подмногообразия $(\mathcal{A}_0, f)$ в алгебру Ли структурной группы Ли.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Юдов А.А. Описание и обоснование метода Картана построения канонического репера подмногообразия./ Известия АН БССР, деп. ВИНИТИ, 1982 г., №359582
2. Юдов А.А. Канонический лифт подмногообразия однородного пространства G в структурную группу Ли и ее алгебру Ли. Проблема эквивалентности подмногообразий пространства ${}^2R_4$ / Известия АН БССР, деп. ВИНИТИ, 1989 г., №1498-В89
3. Юдов А.А. Основное уравнение подмногообразия однородного пространства. Тезисы докладов. Математическая конференция “Еругинские чтения-III”, 1996 г.

4. Кожух И.Г., Юдов А.А. О геометрических приложениях одного матричного дифференциального уравнения. Тезисы докладов. Математическая конференция "Еругинские чтения-IV", 1997 г.
5. Кожух И.Г., Юдов А.А. Некоторые геометрические приложения одного дифференциального уравнения. Тезисы докладов. Математическая конференция "Еругинские чтения-V", 1998 г.
6. Кожух И.Г., Юдов А.А. Об одном классе подмногообразия однородного пространства. Тезисы докладов. Математическая конференция "Еругинские чтения-VI", 1999 г.
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1967 г.

УДК 528.4

Самодуров А.А., Санюкевич А.В., Романкевич А.П., Явид П.П.

ПРИМЕНЕНИЕ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ В ТОПОГРАФО-ГЕОГРАФИЧЕСКИХ РАБОТАХ

При выполнении топографо-географических работ необходимо проводить камеральную обработку данных непосредственно в полевых условиях. Эти расчеты связаны с многократным использованием одних и тех же формул. Имеющиеся современные геодезические GPS-приборы существенно облегчают обработку данных, но в настоящее время слишком дорогостоящи для широкого применения.

Альтернативой этим приборам является использование программируемого калькулятора, существенно облегчающее вычислительную работу. В настоящее время имеется комплекс программ для калькуляторов серии МК [1], для которых характерен ряд существенных недостатков в работе. Во-первых, при выключении калькулятора все введенные программы уничтожаются. Во-вторых, в основном они рассчитаны на работу от сети и не способны на продолжительную (несколько часов) работу с элементами питания.

В связи с появлением новых программируемых калькуляторов (Casio, Citizen и др.), рассчитанных на несколько тысяч часов автономной работы без замены элементов питания, целесообразно их использование в полевых условиях. Например, в учебном процессе при геодезической практике студентов.

Покажем это на примере решения трех задач. В качестве базового выберем несложный калькулятор *Casio fx 3900Pv*. Приведенные программы легко адаптируются для аналогичных калькуляторов других фирм.

Программа I. Вычисление горизонтальных проложений (длина линии, измерена натяжным дальномером)

Расчетная формула

$$\boldsymbol{S = D' \cdot cos^2 \nu} \quad (1)$$

где $\boldsymbol{S}$ - горизонтальное проложение, $\boldsymbol{D'}$ - измеренная длина линии хода, ν - угол наклона. Угол ν вводится в регистр памяти *П1*, *D'* - в регистр памяти *П2*.

Программа для выполнения расчетов:

ENT Kout1 cos SHIFT x^2 x Kout2 =

Результат вычислений высвечивается на дисплее калькулятора.

Программа II. Вычисление горизонтального проложения и отметки пикета при тахеометрической и мензульной съемках.

Расчетные формулы: (1), где $\boldsymbol{\nu = BK - MO}$,

$$\boldsymbol{H_{ПК} = H_{CT} + S \cdot tg\,\nu + i - \nu}$$

где $\boldsymbol{BK}$ - значение вертикального угла, $\boldsymbol{MO}$ - место нуля прибора, $\boldsymbol{H_{ПК}}$ - отметка пикета, $\boldsymbol{H_{CT}}$ - отметка станции. Данные вводим в следующие регистры памяти: $\boldsymbol{BK}$ - в $\boldsymbol{П1}$, $\boldsymbol{D'}$ - в $\boldsymbol{П2}$, $\boldsymbol{MO}$ - в $\boldsymbol{П3}$, $\boldsymbol{H_{CT}}$ - в $\boldsymbol{П4}$, $\boldsymbol{i}$ - в $\boldsymbol{П5}$, $\boldsymbol{\nu}$ - в $\boldsymbol{П6}$.

Программа для выполнения расчетов:

ENT Kout 1 – Kout 3 Kin 1 cos SHIFT x^2
x Kout 2 = Kin 2 Kout 1 tg x
Kout 2 + Kout 4 + Kout 5 – Kout 6 =

$\boldsymbol{H_{ПК}}$ высвечивается на дисплее калькулятора, $\boldsymbol{S}$ - находится в регистре памяти $\boldsymbol{П2}$.

Программа III. Прямая засечка по измеренным углам $\boldsymbol{\beta_1}$ и $\boldsymbol{\beta_2}$ и координатам исходных точек.

Расчетные формулы:

$$\boldsymbol{X_P = \frac{X_1 \cdot ctg\,\beta_2 + X_2 \cdot ctg\,\beta_1 + Y_2 - Y_1}{ctg\,\beta_1 + ctg\,\beta_2}},$$

$$\boldsymbol{Y_P = \frac{Y_1 \cdot ctg\,\beta_2 + Y_2 \cdot ctg\,\beta_1 + X_1 - X_2}{ctg\,\beta_1 + ctg\,\beta_2}}.$$

где $\boldsymbol{BK}$ - значение вертикального угла, $\boldsymbol{MO}$ - место нуля прибора, $\boldsymbol{H_{ПК}}$ - отметка пикета, $\boldsymbol{H_{CT}}$ - отметка станции. Данные вводим в следующие регистры памяти: $\boldsymbol{\beta_1}$ - в $\boldsymbol{П1}$, $\boldsymbol{\beta_2}$ - в $\boldsymbol{П2}$, $\boldsymbol{X_1}$ - в $\boldsymbol{П3}$, $\boldsymbol{Y_1}$ - в $\boldsymbol{П4}$, $\boldsymbol{X_2}$ - в $\boldsymbol{П5}$, $\boldsymbol{Y_2}$ - в $\boldsymbol{П6}$.

В связи с особенностями используемого калькулятора (наличии всего лишь шести ячеек памяти) вычисление $\boldsymbol{X_p}$ и $\boldsymbol{Y_p}$ проводится отдельными программами. Программа для вычисления $\boldsymbol{X_p}$:

ENT Kout 1 tg 1/x = Kin 1 Kout 2 tg
1/x = Kin 2 × Kout 3 + Kout 5

Самодуров А.А. *Доцент Белорусского государственного университета.*
Романкевич А.В. *Преподаватель Белорусского государственного университета.*
Явид П.П. *Старший преподаватель Белорусского государственного университета.*
Беларусь, БГУ, г. Минск-50, ул. Ленинградская 14.
Санюкевич Александр Викторович. *Доцент каф. высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская 267.