

$$\begin{aligned} & \times \text{Kout 1} + \text{Kout 6} - \text{Kout 4} = \\ & \div [(\text{Kout 1} + \text{Kout 2})] = \end{aligned}$$

Программа для вычисления Y_p :

$$\begin{aligned} \text{ENT Kout 4} \times \text{Kout 2} + \text{Kout 6} \times \text{Kout 1} \\ + \text{Kout 3} - \text{Kout 5} = \div [(\text{Kout 1} + \text{Kout 2})] = \end{aligned}$$

УДК 539.3

Веремейчик А.И.

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

При исследовании напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов машин, механизмов и строительных конструкций, подвергающихся одновременному воздействию механических усилий и изменяющихся во времени температур, возникают дополнительные трудности из-за появления в разрешающих уравнениях времени как дополнительной независимой переменной. Один из подходов состоит в учете времени аналогично учету координат; при этом численное интегрирование производится по отрезку времени также как и по границе рассматриваемого тела. Однако этот метод значительно усложняет вычислительные операции. Для преодоления этих трудностей целесообразно применить интегральное преобразование Лапласа к исходным дифференциальным уравнениям в частных производных и краевым условиям задачи путем исключения времени из числа независимых переменных [1]. Использование данного подхода позволяет одинаково хорошо решать краевые задачи с различного рода начальными и граничными условиями благодаря значительному упрощению исходных уравнений.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (ДУ) несвязанной теплопроводности в общем виде [2]:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

где $T = T(p, t)$ - тепловое поле как функция координат

произвольной точки p и времени t , $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ - коэффициент

температуропроводности, λ - коэффициент теплопроводности, ρ - плотность материала, c - удельная теплоемкость.

Используя свойство изображения производной для преобразования Лапласа, уравнение (1) переписывается в виде:

$$\nabla^2 T^* - \frac{s}{a} T^* + \frac{1}{a} T(p, 0) = 0, \quad (2)$$

где $T^* = T^*(p, s)$ - трансформанта Лапласа температуры T как функция координат и параметра преобразования s (изображение функции T), $T(p, 0)$ - функция начального распределения температуры. Если в начальный момент времени распределение температуры равно нулю, то выражение (2) упрощается:

Вычисленные значения X_p и Y_p читаем на дисплее калькулятора.

Перечисленные программы далеко не исчерпывают как возможности калькулятора, так и библиотеку разработанных авторами программ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Жмойдяк М.А., Медведев Б.А. Полевая практика по топографии с основами геодезии: Учеб. Пособие для геогр. спец.- Мн.: изд-во "Университетское", 1987. - 237 с.

$$\nabla^2 T^* - \frac{s}{a} T^* = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим двумерную задачу, т.е. случай, когда распространение тепла происходит в направлении 2-х осей координат, т.е. $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$ и

$$\left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} \right) - \frac{s}{a} T^* + \frac{T(p, 0)}{a} = 0. \quad (4)$$

Решение этой задачи можно рассматривать как произведение решений для 2-х одномерных задач при соответствующих краевых условиях. Решение задачи при граничных условиях 1-го рода и постоянной температуре на границе области имеет вид:

$$\frac{T^*(p, s) - T_n}{T(p, 0) - T_n} = \frac{T^*(x, s) - T_n}{T(x, 0) - T_n} \cdot \frac{T^*(y, s) - T_n}{T(y, 0) - T_n}, \quad (5)$$

где T_n - температура на поверхности, $T(x, 0)$ и $T(y, 0)$ - начальные условия.

Температурные поля $T^*(x, s)$ и $T^*(y, s)$ определяются решением ДУ для соответствующей одномерной краевой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} - \frac{s}{a} T^* + \frac{T(x, 0)}{a} &= 0 \\ \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} - \frac{s}{a} T^* + \frac{T(y, 0)}{a} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Решение ДУ (6) в наиболее часто встречающемся в инженерной практике случае, т.е. при постоянном начальном распределении температуры, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} T^*(x, s) &= \frac{T_0}{s} + A \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} x + B \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} x, \\ T^*(y, s) &= \frac{T_0}{s} + C \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} y + D \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} y, \end{aligned} \quad (7)$$

где $T_0 = T(x, 0) = T(y, 0) = T(p, 0)$, A, B, C, D - постоянные, определяемые из граничных условий задачи.

Для данного случая, используя уравнение (5), получаем:

$$T^*(p, s) = T_n + \frac{I}{(\Delta T)^2} \left[(T^*(x, s) - T_n)(T^*(y, s) - T_n) \right] \quad (8)$$

где $\Delta T = T_0 - T_n$.

Для заданных граничных условий можно определить неизвестные постоянные, входящие в уравнения (7). Затем, подставляя решения (7) в (8), определяется трансформанта Лапласа T^* . Для получения решения ДУ теплопроводности (1) достаточно применить формулы обращения преобразования Лапласа или специальные таблицы [2].

Рассмотренный подход является приемлемым только для решения простейших задач теплопроводности с линейными граничными условиями (ГУ). Для других случаев удобно применять методы теории потенциала. В соответствии с этими методами решение краевой задачи представляется интегралами от элементарных решений, которые называют фундаментальными решениями. Такой подход позволяет перейти от рассмотренных дифференциальных уравнений к интегральным, что делает такого рода решение более универсальным. Кроме того, интегральные уравнения лучше поддаются реализации на ЭВМ.

Рассмотрим решение задачи Дирихле с ГУ 1-го рода при нулевых начальных условиях. Для решения двумерной краевой задачи нестационарной теплопроводности вводится понятие потенциала двойного слоя

$$W(P, t) = \int_0^t ad\tau \int_L \frac{\partial T^*}{\partial n_y} \mu(P_0, \tau) dl, \quad (9)$$

где L - граница рассматриваемой области, P_0 - параметрическая точка, P - текущая точка, t - рассматриваемый момент времени, τ - начальный момент времени, $\mu(P_0, \tau)$ - плотность теплового потенциала, n_y - нормаль к рассматриваемой области L .

Для двумерного пространства фундаментальное решение уравнения теплопроводности имеет вид [2]

$$T^*(P, t, P_0, \tau) = \left[\frac{I}{2\sqrt{\pi a(t-\tau)}} \right]^3 e^{-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}}, \quad (10)$$

где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ - расстояние между фиксированной и текущей точками.

Необходимо также учитывать, что при подходе к точкам границы области L тепловой потенциал двойного слоя $W(P, t)$ терпит разрыв:

$$W^+(P, t) = \frac{\mu(P, t)}{2} + W(P, t), \quad (11)$$

$$W^-(P, t) = -\frac{\mu(P, t)}{2} + W(P, t), \quad (12)$$

где W^+, W^- - предельные значения тепловых потенциалов при подходе вдоль нормали к поверхности соответственно изнутри и извне.

Дифференцируя выражение (10) по направлению нормали и учитывая формулы скачка (11,12), можно получить интегральное уравнение для определения плотности

$\mu(P_0, \tau)$ потенциала двойного слоя при граничных условиях $F(P, t)$:

$$\pm \frac{I}{2} \mu(P, t) + 2\pi \int_0^t \frac{d\tau}{\left(\sqrt{4\pi a(t-\tau)}\right)^{5/2}} \times \int_L r \cos \varphi e^{-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}} \mu(P_0, \tau) dl = F(P, t) \quad (13)$$

Знак "+" применяется при решении внешней задачи, знак "-" - для внутренней задачи Дирихле.

Однако решение такого интегрального уравнения при сложной геометрии границы области оказывается очень громоздким. Применим для его решения теорему Эфоса интегрального преобразования Лапласа, в результате получим:

$$\pm \frac{I}{2} \mu(s, t) + 2\pi \cos \varphi \int_0^t \frac{\mu^*(\sqrt{s}, \tau)}{\sqrt{s}} \frac{d\tau}{\left(\sqrt{4\pi a(t-\tau)}\right)^{5/2}} = F(s, t) \quad (14)$$

В данном случае $\frac{\mu^*(\sqrt{s}, \tau)}{\sqrt{s}}$ является изображением

функции $\mu(P_0, \tau)$. Граничные условия $F(s, t)$ здесь также являются функцией времени и параметра интегрирования.

Решая интегральное уравнение (14), определяется изображение функции как зависимость от S и τ . Затем с помощью обращения преобразования Лапласа можно определить плотность потенциала $\mu(P_0, \tau)$ как функцию координат и времени, что позволит определить распределение температуры в любой точке области. Возможно использование способов обращения, предложенных в [3].

Рассмотрение задачи Неймана с ГУ 2-го рода или задач со смешанными ГУ проводится аналогично. Отличие при рассмотрении дифференциального уравнения заключается в записи выражения (5). При использовании метода потенциала для решения задачи Неймана используется потенциал простого слоя с плотностью $\nu(P_0, \tau)$

$$V(P, t) = \int_0^t ad\tau \int_L T^* \nu(P_0, \tau) dl, \quad (15)$$

для решения смешанной краевой задачи рассматривается сумма потенциалов простого и двойного слоя. В конечном итоге это приводит к изменению ядра интегрального уравнения (13).

Если имеет место ненулевое начальное решение температуры, то следует использовать интеграл Пуассона [4].

Полученное при решении задачи теплопроводности распределение теплового поля используется в дальнейшем как одно из исходных данных для решения задачи термоупругости.

Разработан алгоритм численного решения поставленной задачи, вычисление интегралов производится с помощью квадратурных формул Гаусса. При этом точность полученных результатов выше, чем при использовании других численных методов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа. 1967.

2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1966.
3. Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике. Под ред. Т. Круза и Ф. Риццо. - М.: Мир, 1978.
4. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. - М.: Высшая школа, 1978.

УДК 532.135

Босяков С.М.

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В ПОЛУМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ МИКРОПОЛЯРНОЙ ВЯЗКОЙ СРЕДЫ

Решения волновых уравнений в виде плоских волн имеют большое значение, так как отражают наиболее характерные свойства колебательных процессов. Ниже предлагается анализ волновых явлений в вязкой жидкости с несимметричным тензором напряжений с позиции теории плоских волн.

В случаях, когда можно пренебречь диссипацией энергии и считать, что движения происходят с малыми скоростями, система уравнений для анализа волновых процессов в микрополярной жидкой среде, при условии равенства поворота локального трехгранника среднему повороту поля перемещений, примет вид [1]:

$$\begin{aligned} \mu \Delta \vec{v} + \left(\lambda + \frac{\mu}{3} \right) \text{grad div } \vec{v} + \\ + \frac{1}{4} (\gamma + \beta) \text{rot rot } \Delta \vec{v} - \text{grad } p = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}, \quad (1) \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \text{div } \vec{v} = 0. \end{aligned}$$

Здесь $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ - вектор скорости, λ, μ - объемная и сдвиговая вязкости, γ, β - коэффициенты вращательной вязкости [2,3], p - давление, ρ - плотность среды, Δ - оператор Лапласа, массовые силы отсутствуют.

Известно, что векторное поле можно представить в виде суммы потенциальной и вихревой компонент [4,5]:

$$\vec{v} = \vec{v}_T + \vec{v}_L = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{A}, \quad (2)$$

где φ, \vec{A} скалярный и векторный потенциалы. Также отметим, что в (2) компонента $\vec{v}_L = \text{grad } \varphi$ описывает продольные (звуковые) волны, $\vec{v}_T = \text{rot } \vec{A}$ - поперечные (сдвиговые) волны.

Для продольных колебаний система (1) приводится к известному волновому уравнению [5]:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial t} \Delta \vec{v}_L + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \Delta \vec{v}_L - \rho \frac{\partial^2 \vec{v}_L}{\partial t^2} = 0, \text{rot } \vec{v}_L = 0. \quad (3)$$

Если искать решение уравнения (3) в виде плоской гармонической волны $\vec{v}_T = \vec{n} A(x) \exp(-i\omega t)$, то дисперсионное соотношение примет вид [5]:

$$k \approx \frac{\omega}{c_0} \left(1 + i \frac{b\omega}{2c_0^2\rho} \right) = k' + ik'', \quad (4)$$

где $c_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}$, $b = \lambda + \frac{4\mu}{3}$, ω - частота, k - волновое число, i - мнимая единица. Используя выражение (4), получим решение уравнения (3) в виде:

$$\begin{aligned} \vec{v}_T = \vec{n} A_1 \exp(-k''x) \exp(-i\omega \left(t - \frac{x}{c_0} \right)) + \\ + \vec{n} A_2 \exp(k''x) \exp(-i\omega \left(t + \frac{x}{c_0} \right)) \end{aligned}$$

Это решение представляет собой совокупность двух встречных плоских гармонических волн, амплитуды которых убывают по мере распространения (\vec{n} - нормаль к волновой поверхности). Здесь коэффициент затухания $k'' = \frac{\omega^2 b}{2\rho c_0^3}$ [5].

Для сдвиговых колебаний из уравнения неразрывности следует $\frac{\partial \rho}{\partial \rho} = 0$, то есть жидкость можно рассматривать как

несжимаемую ($\rho = \text{const}$). Тогда из (1) получим

$$\mu \Delta \vec{v}_T + \frac{1}{4} (\gamma + \beta) \text{rot rot } \Delta \vec{v}_T = \rho \frac{\partial \vec{v}_T}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{v}_T = 0. \quad (5)$$

Учитывая, что $\text{rot rot } \Delta \vec{v}_T = \text{grad div } \Delta \vec{v}_T - \Delta^2 \vec{v}_T$, из системы (5) будем иметь:

$$\mu \Delta \vec{v}_T - \frac{1}{4} (\gamma + \beta) \Delta^2 \vec{v}_T = \rho \frac{\partial \vec{v}_T}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{v}_T = 0. \quad (6)$$

Будем считать, что поперечные волны в жидкости возбуждаются колеблющейся стенкой так, что твердая поверхность, совпадающая с плоскостью yz декартовой системы координат, совершает движение вдоль оси x . Значит, для величины $\vec{v}_T = \{v_x, v_y, v_z\}$ отлична от нуля только компонента v_x и решение (6) ищем в виде

$$v_x = v_0 \exp(-i(\omega t - kx)). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), найдём закон дисперсии (связь между волновым числом k и частотой ω):

$$\mu k^2 + \frac{1}{4} (\gamma + \beta) k^4 = \rho \omega i, \quad (8)$$

или