$$k^2 = \sqrt{\Omega^2 + \Omega \frac{2\rho\omega i}{\mu}} - \Omega\,,\ \ \Omega = \frac{2\mu}{\gamma + \beta}. \quad (9)$$

Это уравнение указывает на существование в полумоментной микрополярной жидкой среде двух совокупностей взаимосвязанных поперечных волн, обладающих дисперсией. Выведенный дисперсионный закон (9) позволяет получать зависимости фазовой скорости $v_f = \dfrac{\omega}{Re\,k(\omega)}$ и коэффициента затухания $\alpha = Im\,k(\omega)$ от частоты [5]. Также отметим, что соотношение (8) при $\gamma + \beta = 0$ (микрополярные эффекты отсутствуют) совпадает с дисперсионным уравнением для классической гидродинамики вязкой несжимаемой среды [5].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Мартыненко М.Д., Войнич В.П./ Весці АН Беларусі, сер. фіз. - тэх. навук, 1996, 4, С. 68-70.
2. Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Кувшинский Е.В./ ПММ, 1964, т.29, 2,С. 297-308.
3. Листров А.Т./ ПММ, 1967, т.31, 1, С. 1616-1632.
4. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред: в приложении к теории волн. М., 1982.
5. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М., 1980.

УДК 532.135

Босяков С.М., Веремейчик А.И.

МЕТОД СИЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ МИКРОПОЛЯРНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Нестационарные процессы в вязких жидких средах с несимметричным тензором напряжений изучались в фундаментальных работах [1-3]. Ниже приводится исследование двумерного движения вязкой несжимаемой микрополярной жидкости с точки зрения общей теории характеристик [4,5], описываемого следующими матрицами силовых и моментных напряжений:

$$\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{Vmatrix},\quad m = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & m_{13} \\ 0 & 0 & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Здесь для конкретности предполагаем, что движение происходит в плоскости $x_3 = 0$, а потому:

$$\sigma_{ii} = -p + 2\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_i},$$

$$\sigma_{ij} = (\mu + \alpha)\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + (\mu - \alpha)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + 2(-1)^i \gamma\omega_3, \quad (1)$$

$$m_{i3} = 2\tau \frac{\partial \omega_3}{\partial x_i}, m_{3i} = 2\theta \frac{\partial \omega_3}{\partial x_i}, i \neq j = 1,2.$$

В формулах (1) v_1, v_2 - составляющие вектора скорости, ω_3 - составляющая вектора скорости микровращения, λ,μ - объёмная и сдвиговая вязкости, γ- коэффициент "сцепления" частицы со своим окружением, τ,θ - коэффициенты вращательной вязкости, p - давление.

Подставим (1) в уравнения поступательного и вращательного движения микрополярной среды:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + X_1 = \rho \frac{dv_1}{dt},$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 = \rho \frac{dv_2}{dt}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial m_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial m_{32}}{\partial x_2} + \sigma_{21} - \sigma_{12} = j\rho \frac{d\omega_3}{dt}.$$

Считая, что жидкость является несжимаемой $(\rho\!=\!const)$ и движения происходят с малыми скоростями, получим из (1)-(2):

$$(\mu - \alpha)\Delta v_1 + 2\gamma \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} - \frac{\partial p}{\partial x_1} + X_1 = \rho \frac{\partial v_1}{\partial t},$$

$$(\mu - \alpha)\Delta v_2 - 2\gamma \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_2} + X_2 = \rho \frac{\partial v_2}{\partial t},$$

$$(\tau + \theta)\Delta \omega_3 + \gamma\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) - 2\gamma\omega_3 + Y_3 = j\rho \frac{\partial \omega_3}{\partial t},$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \quad (3)$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, j - мера инерции вращения, ρ - плотность, X_1, X_2 - массовые силы, Y_3 - массовый момент.

Будем считать, что v_1, v_2, ω_3, p являются непрерывными функциями, а их первые частные производные испытывают на поверхности $Z(t, x_1, x_2) = const$ сильные разрывы (разрывы первого рода), удовлетворяющие кинематиче-

Босяков Сергей Михайлович. *Ассистент каф. СМиТМ Брестского государственного технического университета.*
Веремейчик Андрей Иванович. *Аспирант каф. сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская 267.

ским условиям совместности [4,5]. Это означает, что при переходе через эту поверхность должны оставаться непрерывными выражения следующего вида [4,5]:

$$p_k \frac{\partial y_i}{\partial t} - p_0 \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = M_{ki}, \tag{4}$$

где

$$y_1 \equiv v_1, y_2 \equiv v_2, y_3 \equiv \omega_3, y_4 = p, p_k = \frac{\partial Z}{\partial x_k}, p_0 = \frac{\partial Z}{\partial t}, M_{ki} -$$

непрерывно дифференцируемые функции, $k = 1,2;\ i = \overline{1,4}$. К выражениям (4) следует присоединить динамические условия совместности:

$$(\mu-\alpha)\Delta v_1 + 2\gamma \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} - \frac{\partial p}{\partial x_1} - \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} = M_1,$$

$$(\mu-\alpha)\Delta v_2 - 2\gamma \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_2} - \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} = M_2,$$

$$(\tau+\theta)\Delta \omega_3 + \gamma\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) - 2\gamma\omega_3 - j\rho \frac{\partial \omega_3}{\partial t} = M_3,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = M_4,$$

(5)

Таким образом, рассматриваемая задача свелась к решению двенадцати алгебраических уравнений относительно производных $\frac{\partial v_m}{\partial x_n}, \frac{\partial \omega_3}{\partial x_n}, \frac{\partial p}{\partial x_n}, n = \overline{1,3}, m = 1,2, x_3 \equiv t.$

Если определитель, составленный из коэффициентов при этих производных отличен от нуля, то указанные производные можем выразить все через непрерывные функции $M_i, M_{ki}, i = \overline{1,4}, k = 1,2$. Поэтому, поверхность сильного разрыва $Z(t, x_1, x_2) = const$ определится из условия неразрешимости системы уравнений (4)-(5) относительно упомянутых частных производных первого порядка. В силу громоздкости системы (4)-(5), сократим число разрешающих уравнений, прежде чем выписать ее главный определитель. Для этого перепишем выражения (4) в виде:

$$p_0 \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = p_0 \frac{\partial y_i}{\partial x_k} - M_{ki}\ . \tag{6}$$

Продифференцируем соотношения (6) по $x_l, l = 1,2$:

$$p_0 \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_l \partial x_k} = \frac{\partial y_i}{\partial t}\frac{\partial p_k}{\partial x_l} + \ldots,\ i = \overline{1,4},\ k = 1,2. \tag{7}$$

Умножим обе части уравнений (5) на p_0 и заменим произведения $p_0 \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_j^2}, p_0 \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, i, j = 1,2$ правыми частями равенств (6) и (7). В результате получим систему уравнений относительно производных $\frac{\partial y_i}{\partial t},\ i = \overline{1,4}$:

$$((\mu-\alpha)\Delta Z - \rho p_0)\frac{\partial v_1}{\partial t} + 2\gamma \frac{\partial \omega_3}{\partial t} p_2 - \frac{\partial p}{\partial t} p_1 + \ldots = 0,$$

$$((\mu-\alpha)\Delta Z - \rho p_0)\frac{\partial v_2}{\partial t} - 2\gamma \frac{\partial \omega_3}{\partial t} p_1 - \frac{\partial p}{\partial t} p_2 + \ldots = 0,$$

$$((\tau+\theta)\Delta Z - j\rho p_0)\frac{\partial \omega_3}{\partial t} + \gamma\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} p_1 - \frac{\partial v_1}{\partial t} p_2\right) + \ldots = 0,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} p_1 + \frac{\partial v_2}{\partial t} p_2 + \ldots = 0.$$

(8)

Условие неразрешимости системы (8) принимает такой вид:

$$\begin{vmatrix} (\mu-\alpha)\Delta Z - \rho p_0 & 0 & 2\gamma p_2 & -p_1 \\ 0 & (\mu-\alpha)\Delta Z - \rho p_0 & -2\gamma p_1 & -p_2 \\ -2\gamma p_2 & 2\gamma p_1 & (\tau-\theta)\Delta Z - j\rho p_0 & 0 \\ \rho p_1 & \rho p_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(9)

Раскрывая определитель, получим

$$g^2(((\mu-\alpha)\Delta Z - \rho p_0)((\tau+\theta)\Delta Z - j\rho p_0) - 4\gamma^2 g^2) = 0 \tag{10}$$

где $g^2 = p_1^2 + p_2^2$.

Отсюда вытекает следующее уравнение поверхности сильного разрыва:

$$((\mu-\alpha)\Delta Z - \rho p_0)((\tau+\theta)\Delta Z - j\rho p_0) - 4\gamma^2 g^2 = 0 \tag{11}$$

Из (10) также следует существование поверхности стационарного разрыва:

$g^2 = 0$.(12)

Заметим, что уравнение сильных разрывов (10) в точности совпадает с уравнением характеристической поверхности для системы (3). Чтобы это доказать, зададим начальные данные к этой системе на поверхности $Z(t, x_1, x_2) = const$ и введем новые переменные по следующим формулам:

$$Z = Z(t, x_1, x_2),$$
$$Z_k = Z_k(t, x_1, x_2), k = 1,2. \tag{13}$$

В силу (13) имеем:

$$\frac{\partial y(t, X)}{\partial x_k} = \sum_{i=0}^{2} \frac{\partial y}{\partial Z_i}\frac{\partial Z_i}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_n} = \sum_{i,j=0}^{2} \frac{\partial^2 y}{\partial Z_j \partial Z_i}\frac{\partial Z_i}{\partial x_k}\frac{\partial Z_j}{\partial x_n} + \sum_{i=0}^{2} \frac{\partial y}{\partial Z_i}\frac{\partial^2 Z_i}{\partial x_n \partial x_k},$$

$$Z \equiv Z_0, t \equiv x_0.$$

(14)

Подставим выражения (14) в систему уравнений (3), причём выпишем только те члены, которые содержат производные

$\frac{\partial y_i}{\partial t}, i = \overline{1,4}$:

$$((\mu-\alpha)\Delta Z-\rho p_0)\frac{\partial v_1}{\partial Z}+2\gamma\frac{\partial\omega_3}{\partial Z}p_2-\frac{\partial p}{\partial Z}p_1+...=0,$$

$$((\mu-\alpha)\Delta Z-\rho p_0)\frac{\partial v_2}{\partial Z}-2\gamma\frac{\partial\omega_3}{\partial Z}p_1-\frac{\partial p}{\partial Z}p_2+...=0,$$

$$((\tau+\theta)\Delta Z-j\rho p_0)\frac{\partial\omega_3}{\partial Z}+\gamma\left(\frac{\partial v_2}{\partial Z}p_1-\frac{\partial v_1}{\partial Z}p_2\right)+...=0,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial Z}p_1+\frac{\partial v_2}{\partial Z}p_2+...=0. \qquad (15)$$

Поверхность $Z(t,x_1,x_2)=const$ будет характеристической, если система (15) совместно с начальными данными не позволяет определить производные первого порядка по Z. Раскрывая определитель, составленный из коэффициентов при $\frac{\partial v_1}{\partial Z},\frac{\partial v_2}{\partial Z},\frac{\partial\omega_3}{\partial Z},\frac{\partial p}{\partial Z}$, который, как нетрудно видеть в точности совпадает с главным определителем системы (9), придем к выражению (10).

Таким образом, компоненты векторов скорости v_1,v_2,ω_3 и давления p могут иметь сильные разрывы непрерывности на поверхности $Z(t,x_1,x_2)=const$ в том случае, когда эта поверхность оказывается характеристической для системы (3). Также заметим, что уравнение (10) позволяет исследовать скорости распространения поверхностей разрыва. Так, разделив обе части выражения (11) на $4\gamma^2g^2$ будем иметь:

$$V_{1,2}=\Omega\pm\sqrt{\Omega^2+\frac{(\mu-\alpha)(\tau+\theta)k^2+4\gamma^2}{j\rho^2}}, \qquad (16)$$

где $\Omega=\frac{j(\mu-\alpha)+(\tau+\theta)}{2j\rho}k$, $k=\frac{\Delta Z}{g}$, $V=\frac{p_0}{g}$ - скорость распространения поверхности разрыва [4,5].

В заключении отметим, что выражение (10) имеет более высокую степень общности, чем аналогичные дисперсионные уравнения теории плоских волн [6], так как не учитывает механического механизма возмущения жидкой среды, и получено на основании общих представлений теории сильных разрывов [4,5].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Аэро Э.Л., Булыгин А.Н., Кувшинский Е.В. Асимметричная гидромеханика // ПММ, 1964, т.29, 2,С. 297-308.
2. Листров А.Т. О модели вязкой жидкости с несимметричным тензором напряжений// ПММ, 1967, т.31, 1, С.112-115.
3. Эринген А.К. Теория микрополярных жидкостей/ Механика, 1969, 115, №2, 79-93.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики. т.IV,2 . М.: Наука, 1981.
5. Петрашень Г.И. Основы математической теории распространения упругих волн. Л.: Наука, 1978.
6. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.:Наука, 1990.

УДК 622.271

Ашаев Ю.П.

ПРИКЛАДНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ

Понятие вычислительной геометрии, как нового научного направления, было введено в 1971 году Форрестом А.Р., и включало в себя научные методы, изучающие представление в ЭВМ, анализ и синтез информации о геометрическом объекте. Наибольшее развитие методы вычислительной геометрии получили в период создания и внедрения систем автоматизированного проектирования (САПР), когда появилась необходимость ввода, хранения, математической обработки и вывода графической информации, представленной геометрическими образами (отрезками, кривыми, плоскостями и т.д.). Одной из ключевых задач вычислительной геометрии является задача близости. Суть данной задачи состоит в следующем. В области D, ограниченной замкнутым криволинейным контуром, имеется M точек наблюдения, положение которых в плане определено координатами $\{P_1(x_1', y_1'), P_2(x_2', y_2'); ...; P_M(x_M', y_M')\}$. Разбить область D на M участков, удовлетворяющих следующему условию. Любая точка q, лежащая в границах участка m, должна быть ближе к точке наблюдения с координатами $P_m(x_m', y_m')$, чем к любой другой точке наблюдения

$$dist\ (q, P_m) = min\ dist\ (q, P_p)\ p=1,2,.m-1.\ m+1,...,M$$

Если отсутствует контур, ограничивающий область D, или технологически затруднено его однозначное выделение, то в этом случае предусмотрен алгоритм, позволяющий в автоматизированном режиме построить выпуклый замкнутый контур, проходящий через граничные точки и включающий все M точек наблюдения. Алгоритм данной задачи основан на свойстве аналитической геометрии, суть которого заключается в том, что координаты точек (x,y), подставленные в уравнение прямой, обеспечивают знакопостоянство этого уравнения, если эти точки расположены по одну сторону от прямой. Если уравнение прямой представить через декартовые координаты двух точек на плоскости, то по отношению к этой прямой все остальные точки можно разбить на три группы: лежащие слева от прямой; лежащие на прямой; лежащие справа от прямой. В итоге из всей совокупности M точек можно выбрать две, которые позволяют построить прямую, по отношению к которой все остальные точки расположить по одну сторону. Совокупность таких точек, позволяющих получить подобные уравнения прямой, и образуют замкнутый выпуклый контур, ограничивающий все рассматриваемые точки на плоскости. Алгоритм решения основной задачи близости, основан на теореме элементарной геометрии, суть ко-

Ашаев Юрий Павлович. *Доцент каф. Вычислительной техники и прикладной математики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская 267.