МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

ЧАСТЬ IV

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Брест 2011

УДК 517.9(076.5)

В части IV практикума содержатся краткие теоретические вопросы и основные формулы по всем темам разделов «Дифференциальные уравнения» и «Системы дифференциальных уравнений» учебной программы по математике для аудиторных и домашних работ к каждому практическому занятию. Приведены решения типовых задач.

Издается в 7-ми частях. Часть 4.

Составители: Л. Т. Мороз, доцент
И.В. Лизунова, доцент
Р. А. Гоголинская, ассистент
В. Т. Джура, ассистент
Е. В. Кузьмина, ассистент

Рецензент: Савчук В.Ф., заведующий кафедрой информатики и прикладной математики учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина» к.ф.-м. н., доцент

Основные понятия

Уравнение называется ***дифференциальным*** относительно некоторой искомой функции, если оно содержит хотя бы одну производную этой функции. ***Порядок дифференциального уравнения*** совпадает (по определению) с порядком наивысшей производной, входящей в это уравнение.

Если искомая функция y является функцией одного аргумента x, то дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным***. Если же искомая функция зависит от нескольких аргументов, то дифференциальное уравнение называется ***уравнением в частных производных.*** Например, уравнение $2xy' - 3y = 0$, где $y = y(x)$, является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, а $u'_x - u'_y + xy = 1$, где $u = u(x,y)$, — дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка. Будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения, поэтому в дальнейшем для краткости слово «обыкновенные» будем опускать.

В общем случае ***дифференциальное уравнение n-го порядка*** может быть записано в виде

$$\mathrm{F}\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (1)$$

Если уравнение (1) удается разрешить относительно наивысшей производной, то получаем ***уравнение в нормальной форме***:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right). \qquad (2)$$

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется ***интегрированием уравнения***.

Решением (или интегралом) дифференциального уравнения (1) (или (2)) называется любая действительная функция $y = y(x)$, определенная на некотором интервале (a, b) и вместе со своими производными обращающая данное дифференциальное уравнение в тождество. (При этом производные функции $y = y(x)$ предполагаются существующими.)

<u>*Пример.*</u>

Доказать, что функция $y = xe^{2x}$, определенная на всей числовой оси, является решением дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Решение.

Подставив в данное уравнение саму функцию и ее производные $y' = e^{2x}(1 + 2x)$, $y'' = 4e^{2x}(1 + x)$, получим тождество:

$$4e^{2x}(1 + x) - 4e^{2x}(1 + 2x) + 4e^{2x} = 4e^{2x}(1 + x - 1 - 2x + x) \equiv 0.$$

Если функция, являющаяся решением дифференциального уравнения, определена в неявном виде: $F(x,y)=0$, то $F(x,y)=0$ называется ***интегралом (а не решением)*** данного дифференциального уравнения.

Вопрос о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (2) разрешает

Теорема 1 (Коши). *Если правая часть уравнения (2) является непрерывной функцией в окрестности значений*

$$x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}, \qquad (3)$$

то уравнение (2) имеет решение $y=y(x)$ *в некотором интервале* (a,b)*, содержащем* x_0*, такое, что*

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \qquad (4)$$

Если в указанной окрестности непрерывны еще и частные производные этой функции по аргументам $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$*, то решение* $y=y(x)$ *— единственное.*

Числа из совокупности (3) называются ***начальными данными***, а равенства (4) — ***начальными условиями***.

Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка формулируется следующим образом. Найти решение $y=y(x)$ дифференциального уравнения (1) или (2), удовлетворяющее начальным данным (3), т.е. такое решение, чтобы выполнялись начальные условия (4).

Любое дифференциальное уравнение (2) в области, удовлетворяющей теореме Коши, имеет бесчисленное множество решений. Вообще говоря, это справедливо и для дифференциального уравнения (1). Для описания этих множеств решений вводится понятие общего решения.

Общим решением дифференциального уравнения (1) или (2) называется функция вида $y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, где C_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ — произвольные постоянные, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) она является решением дифференциального уравнения (1) или (2) при любых значениях C_i;

2) для любых начальных данных $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, при которых дифференциальное уравнение имеет решение, можно указать значения постоянных $C_i=C_{i0}$, такие, что будут выполнены начальные условия $\varphi(x_0, C_{i0})=y_0$, $\varphi'(x_0, C_{i0})=y_0'$, …, $\varphi^{(n-1)}(x_0, C_{i0})=y_0^{(n-1)}$.

Общее решение, полученное в неявном виде: $\Phi(x,y,C_i)=0$, называется ***общим интегралом дифференциального уравнения***.

Решение (интеграл), полученное из общего решения (общего интеграла) при фиксированных значениях произвольных постоянных C_i, называется соответственно ***частным решением (частным интегралом) дифференциального уравнения***.

Замечание. У дифференциального уравнения может существовать решение (интеграл), которое невозможно получить из общего решения ни при каких значениях произвольных постоянных C_i. Такое решение (интеграл) может оказаться ***особым*** в том смысле, что в любой его точке нарушаются какие-либо условия теоремы Коши. Например, дифференциальное уравнение $y'' = 3\sqrt[3]{(y'-1)^2}$ имеет общее решение $y = x + \frac{1}{4}(x + C_1)^4 + C_2$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Функция $y = x + C$, где С — произвольная постоянная, также является решением данного уравнения, но это решение не может быть получено из общего ни при каких значениях C_1 и C_2. Кроме того, $y' = 1$ для любой точки решения, что приводит к нарушению условия единственности из теоремы Коши, ибо частная производная правой части данного уравнения по y' при $y' = 1$ разрывна. Следовательно, решение $y = x + C$ является особым.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

1. Дифференциальные уравнения с разделёнными и разделяющимися переменными.

Уравнение вида:

$$P(x)dx + Q(x)dx = 0 \qquad (1)$$

называется ***дифференциальным уравнением с разделёнными переменными.*** Его общим интегралом будет

$$\int P(x)dx + \int Q(x)dx = C,$$

где C – произвольная постоянная.

Уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \qquad (2)$$

$$\text{или} \quad y' = \frac{dy}{dx} = f_1(x)\cdot f_2(y) \quad , \qquad (3)$$

а также уравнения, которые с помощью алгебраических преобразований приводятся к уравнениям (2) или (3),называются ***уравнениями с разделяющимися переменными.***

Разделение переменных в уравнениях (2) и (3) выполняется следующим образом. Предположим, что $N_1(y) \neq 0$; $M_2(x) \neq 0$, и разделим обе части уравнения (2) на $N_1(y)M_2(x)$. Обе части уравнения (3) умножим на dx и разделим на $f_2(y) \neq 0$. В результате получим уравнения с разделенными переменными (т.е. уравнение вида (1)):

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0, \qquad f_1(x)dx - \frac{dy}{f_2(y)} = 0,$$

которые имеют общие интегралы (4):

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C, \qquad \int f_1(x)dx - \int \frac{dy}{f_2(y)} = C. \tag{4}$$

Пример 1.

Проинтегрировать уравнение

$$y' = -\frac{y}{x}, \text{ где } y \neq 0.$$

Найти интегральную кривую, проходящую через точку *M*(3;-4).

Решение.

Данное уравнение можно переписать так:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \text{ или } xdx + ydy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделёнными переменными (коэффициент при dx-функция только от x, при dy – функция только от y).

Интегрируя, получим:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = 2C_1.$$

Полагая $2C_1 = C^2$ (что можно сделать, т.к. $x^2 + y^2 \geq 0$), общий интеграл запишем в виде $x^2 + y^2 = C^2$.

Геометрически общий интеграл представляет собой семейство окружностей радиусов C с центром в начале координат.

Найдем ту окружность, которая проходит через точку М(3;-4). Подставляя координаты точки М в уравнение $x^2 + y^2 = C^2$, находим: $3^2 + (-4)^2 = C^2$ или $C^2 = 25$.

Подставив значение C^2 в общий интеграл, получим искомую окружность:

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Ответ: $x^2 + y^2 = 25$.

Пример 2.

Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$\left(1 + x^2\right)dy - 2xydx = 0.$$

Найти частное решение, удовлетворяющее условию $y = 1$ при $x = 0$.

Решение.

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными (коэффициент при dy – функция только от x, при dx – произведение функций, одна из которых зависит только от x, другая – только от y).

Разделив обе части уравнения на произведение $y\left(1+x^2\right)$, получим уравнение с разделёнными переменными:

$$\frac{dy}{y}-\frac{2xdx}{1+x^2}=0.$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$\ln|y|-\ln\left(1+x^2\right)=\ln|C|,\quad \text{или}\quad \ln\left(\frac{|y|}{1+x^2}\right)=\ln|C|,$$

отсюда получаем общее решение: $y=C\left(1+x^2\right)$.

Чтобы определить искомое частное решение, достаточно определить значение C по начальным условиям:

$$1=C(1+0)\ \Rightarrow C=1.$$

Следовательно, частное решение имеет вид

$$y=1+x^2.$$

При делении на $y\left(1+x^2\right)$ предполагалось, что $y\left(1+x^2\right)\neq 0$,т.е. $y\neq 0$, $1+x^2\neq 0$. Но $y=0$ – решение уравнения, в чём можно непосредственно убедиться. Это решение получается из общего при $C=0$.

Ответ: $y=C\left(1+x^2\right)$, $\forall C\in R$ – общее решение,

$y=1+x^2$ – частное решение.

<u>Пример 3.</u>

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(xy+y)dx+(xy+x)dy=0.$$

Решение.

Предположив, что $x\neq 0$, $y\neq 0$, разделим обе части данного уравнения на xy, получим уравнение с разделёнными переменными:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)dx+\left(1+\frac{1}{y}\right)dy=0.$$

Интегрируя его, последовательно находим:

$$\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx+\int\left(1+\frac{1}{y}\right)dy=\ln|C|$$

$$x+\ln|x|+y+\ln|y|=\ln|C|$$

$$\ln|xy|+\ln e^{x+y}=\ln|C|,\quad xye^{x+y}=C.$$

Последнее равенство является общим интегралом исходного уравнения. При его нахождении были приняты ограничения $x\neq 0$, $y\neq 0$. Однако функции $x=0$, $y=0$ также являются решениями исходного уравнения, что легко проверяется, с другой стороны, они получаются из общего интеграла при $C=0$. Следовательно, $x=0$, $y=0$ – частные решения исходного уравнения.

Ответ: $xye^{x+y}=C$, $\forall C\in R$ – общий интеграл.

<u>*Пример 4.*</u>

Найти частное решение уравнения

$$\left(1+e^{2x}\right)y^2y' = e^x,$$

удовлетворяющее начальному условию $y\left(0\right)=1$.

Решение.

Запишем данное уравнение в дифференциальной форме:

$$\left(1+e^{2x}\right)y^2dy - e^xdx = 0.$$

Теперь разделим переменные: $y^2dy - \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}dx = 0$.

Проинтегрируем последнее уравнение:

$$\int y^2dy - \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \frac{C}{3}; \qquad \frac{y^3}{3} - arctge^x = \frac{C}{3};$$

$$y = \sqrt[3]{C + 3arctge^x}\,.$$

Получим общее решение исходного уравнения. Использовав начальные условия, определим значение произвольной постоянной:

$$1 = \sqrt[3]{C + \frac{3}{4}\pi} \Rightarrow C = 1 - \frac{3}{4}\pi\,.$$

Следовательно, искомое частное решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = \sqrt[3]{1 - \frac{3}{4}p + 3arctge^x}\,.$$

Ответ: $y = \sqrt[3]{1 - \dfrac{3}{4}p + 3arctge^x}$.

<u>*Пример 5.*</u>

Решить уравнение $3e^xtgydx + \left(2-e^x\right)\sec^2 ydy = 0$.

Решение.

Разделим обе части уравнения на произведение $\left(2-e^x\right)tgy$:

$$\frac{3e^xdx}{2-e^x} + \frac{\sec^2 ydy}{tgy} = 0.$$

Получили уравнение с разделёнными переменными. Интегрируя его, найдём

$$-3\ln\left|2-e^x\right| + \ln\left|tgy\right| = \ln\left|C\right| \Rightarrow \frac{tgy}{\left(2-e^x\right)^3} = C$$

или $tgy - C\left(2-e^x\right)^3 = 0$.

Получен общий интеграл данного уравнения. При делении на произведение $\left(2-e^x\right)tgy$ предполагалось, что ни один из множителей не обращается в ноль. Приняв каждый множитель к нулю, получим соответственно:

$$y = kp\left(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...\right),\ x = \ln 2.$$

Непосредственной подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что $y = kp$ и $x = \ln 2$ являются решениями этого уравнения. Они могут быть формально получены из общего интеграла при $C = 0$ и $C = \infty$. Последнее означает, что постоянная C заменяется через $\frac{1}{C_1}$, после чего общий интеграл примет вид:

$$tgy - \frac{1}{C_1}\left(2-e^x\right)^3 = 0$$

или $C_1 tgy - \left(2-e^x\right)^3 = 0$.

Полагая, что в последнем равенстве $C_1 = 0$, что соответствует $C = \infty$, будем иметь $\left(2-e^x\right)^3 = 0$, откуда и получаем значение $x = \ln 2$ исходного уравнения.

Итак, функции $y = kp\left(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...\right)$ и $x = \ln 2$ – частные решения данного уравнения. Поэтому окончательно общий интеграл данного уравнения:

$$tgy - C\left(2-e^x\right)^3 = 0.$$

Ответ: $tgy - C\left(2-e^x\right)^3 = 0$, $\forall C \in R$ – общий интеграл.

<u>Дифференциальные уравнения вида:</u>

$$y' = f\left(ax + by + c\right), \qquad b \neq 0$$

приводятся к уравнениям вида (3) при помощи замены $u = ax + by + c$, где u – новая искомая функция.

<u>Пример 6.</u>

Решить дифференциальное уравнение, использовав замену переменных.

$$y' = \left(8x + 2y + 1\right)^2$$

Решение.

$$u = 8x + 2y + 1,\ u = u\left(x\right).$$

Найдём u': $u' = 8 + 2y'$. Выразим из последнего уравнения y':

$$y' = \frac{u' - 8}{2}.$$

Подставим $y' = \frac{u' - 8}{2}$ и $u = 8x + 2y + 1$ в уравнение:

$\frac{u' - 8}{2} = u^2$, $\quad u' - 8 = 2u^2$, $\quad \frac{du}{dx} = 2u^2 + 8$; $\quad du = \left(2u^2 + 8\right)dx$.

Разделим переменные:

$\frac{du}{2u^2 + 8} = dx$; $\quad \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 + 4} = x + C_1$; $\quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} arctg \frac{u}{2} = x + C_1$;

$$arctg \frac{8x + 2y + 1}{2} = 4x + 4C_1.$$

Обозначим $4C_1 = C$.

$8x + 2y + 1 = 2tg\left(4x + C\right)$ – общий интеграл данного уравнения.

Ответ: $8x + 2y + 1 = 2tg\left(4x + C\right)$, $\forall C \in R$.

2. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Функция $f\left(x;y\right)$ называется **_однородной функцией измерения_** a относительно аргументов x и y, если равенство $f\left(tx;ty\right) = t^a f\left(x;y\right)$ справедливо для любого $t \in R$, при котором функция $f\left(tx;ty\right)$ определена, $a = const$. Например, функция $f\left(x;y\right) = 3x^4 - x^2y^2 + 5y^4$ является однородной четвёртого измерения $\left(a = 4\right)$, т.к.

$$f\left(tx;ty\right) = 3\left(tx\right)^4 - \left(tx\right)^2\left(ty\right)^2 + 5\left(ty\right)^4 = t^4\left(3x^4 - x^2y^2 + 5y^4\right) = t^4 f\left(x;y\right).$$

Если $a = 0$, то функция будет однородной нулевого измерения.

Дифференциальное уравнение в нормальной форме:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f\left(x;y\right) \qquad (5)$$

называется **_однородным относительно переменных x и y_**, если $f\left(x;y\right)$ – однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов, т.е.

$$f\left(tx;ty\right) = t^0 f\left(x;y\right) = f\left(x;y\right).$$

Дифференциальное уравнение в дифференциальной форме:

$$P\left(x;y\right)dx + Q\left(x;y\right)dy = 0$$

будет однородным в том и только том случае, когда $P\left(x;y\right)$, $Q\left(x;y\right)$ – однородные функции одного и того же измерения a, т.е.

$$P\left(tx;ty\right) = t^a P\left(x;y\right),\ Q\left(tx;ty\right) = t^a Q\left(x;y\right).$$

Действительно, переписав его в нормальной форме

$$y' = -\frac{P\left(x;y\right)}{Q\left(x;y\right)} \equiv f\left(x;y\right),$$

легко заключаем, что $f(x;y)$ – однородная функция нулевого измерения, поскольку

$$f(tx;ty) = -\frac{P(tx;ty)}{Q(tx;ty)} = -\frac{t^a P(x;y)}{t^a Q(x;y)} = f(x;y).$$

Так как однородное дифференциальное уравнение $y' = f(x;y)$ в нормальной форме можно записать в виде $y' = f(x;y) = f(tx;ty)$, то, положив $t = \frac{1}{x}$, получим $y' = \frac{dy}{dx} = f\left(1;\frac{y}{x}\right) = j\left(\frac{y}{x}\right)$.

Следовательно, уравнение (4) с помощью замены

$$y = xu, \left(u = \frac{y}{x}, y' = u + xu'\right) \tag{6}$$

сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно x и новой функции $u(x)$:

$$u + xu' = j(u), \; x\frac{du}{dx} = j(u) - u.$$

Пример 7.

Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$2x^2y' = x^2 + y^2$$

и найти его частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

Решение.

Так как функции $2x^2$ и $x^2 + y^2$ – однородные второго измерения, то данное уравнение – однородное.

Сделаем замену $y = xu$, $y' = u + xu'$. Тогда $2x^2(u + xu') = x^2 + (xu)^2$, $2x^2(u + xu') = x^2(1 + u^2)$.

Предполагая, что $x \neq 0$, сокращаем обе части уравнения на x^2. Далее имеем

$$2u + 2x\frac{du}{dx} = 1 + u^2, \qquad 2xdu = (1 + u^2 - 2u)dx.$$

Разделяя переменные, последовательно находим:

$$\frac{du}{1 + u^2 - 2u} = \frac{dx}{2x}, \qquad \int\frac{du}{1 + u^2 - 2u} = \int\frac{dx}{2x}, \qquad \int\frac{d(u-1)}{(u-1)^2} = \frac{1}{2}\ln|x|,$$

$$-\frac{1}{u-1} = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln|C|, \qquad 1 = (1-u)\ln\left(C\sqrt{x}\right).$$

В последнее выражение вместо u подставим $\frac{y}{x}$. Получим общий интеграл:

$$1 = \left(1 - \frac{y}{x}\right)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right), \; x = (x - y)\ln\left(C\sqrt{|x|}\right).$$

Разрешив его относительно y, найдём общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = x - \frac{x}{\ln\left(C\sqrt{|x|}\right)}.$$

Использовав начальное условие $y(1) = 0$, определим значение С.

$$0 = 1 - \frac{1}{\ln C},\ \ \ln C = 1,\ \ C = e.$$

Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = x - \frac{x}{1 + \ln\sqrt{|x|}}.$$

Ответ: $y = x - \dfrac{x}{1 + \ln\sqrt{|x|}}$.

<u>*Пример 8.*</u>

Найти общий интеграл однородного уравнения

$$\left(x^2 + y^2\right)dy - 2xydx = 0.$$

Решение.

В данном случае имеем:

$$Q(x;y) = x^2 - y^2;\ P(x;y) = -2xy.$$

Эти функции являются однородными функциями второй степени.

На самом деле:

$$Q(tx;ty) = (tx)^2 - (ty)^2 = t^2\left(x^2 - y^2\right) = t^2 Q(x;y).$$

$$P(tx;ty) = -2(tx)(ty) = t^2(-2xy) = t^2 P(x;y).$$

Полагая $y = xu$, находим $dy = xdu + udx$.

Подставляя выражение для y и dy в исходное уравнение и сокращая на $x^2 \neq 0$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\left(1 - u^2\right)(udx + xdu) - 2udx = 0$$

или $\dfrac{dx}{x} + \dfrac{u^2 - 1}{u\left(u^2 + 1\right)}du = 0$; $(u \neq 0)$.

Принимая во внимание, что $\dfrac{1 - u^2}{u\left(u^2 + 1\right)} = \dfrac{1}{u} - \dfrac{2u}{1 + u^2}$ и интегрируя полученное уравнение, находим:

$$\ln|x| = \ln|u| - \ln\left|1 + u^2\right| + \ln|C|;$$

откуда $x = \dfrac{Cu}{1 + u^2}$.

Подставляя сюда выражение для u, определяемое из равенства $y = xu$, получим общий интеграл $x^2 + y^2 = Cy$, представляющий семейство окружностей с центрами на оси Oy и проходящих через начало координат.

При u=0 получаем решение y=0. Это решение является частным. Действительно, общий интеграл $x^2 + y^2 = Cy$ можно переписать в виде $C_1\left(x^2 + y^2\right) = y$, где $C_1 = \dfrac{1}{C}$. При $C_1 = 0$ получаем y=0.

Ответ: $x^2 + y^2 = Cy$, $\forall C \in R$.

Задания.

1. Найти общее или частное решение (общий или частный интеграл) дифференциального уравнения:
   1) $xy' = y^2 + 1$;
   2) $(x + xy)dy + (y - yx)dx = 0$, $y(1) = 1$;
   3) $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 9\dfrac{y}{x} + 9$.

   (*Ответы:*

   1) $arctgy = \ln|Cx|$, $\forall C \in R$;
   2) $y - x + \ln|xy| = 0$;
   3) $y = x - \dfrac{3x}{C + \ln|x|}$.)

2. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения:
   4) $\left(y^2 + 3\right)dx - \dfrac{e^x}{x}ydy = 0$;
   5) $y' = (2y + 1)tgx$;
   6) $3e^x \sin ydx + \left(1 - e^x\right)\cos ydy = 0$.

   (*Ответы:*

   4) $\ln\left(y^2 + 3\right) = 2\left(C - xe^{-x} - e^{-x}\right)$;
   5) $\sqrt{2y + 1} = \dfrac{C}{\cos x}$;
   6) $\sin y = C\left(e^x - 1\right)^3$.)

Домашнее задание.

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$4\left(x^2y+y\right)dy+\sqrt{5+y^2}dx=0.$$

$$\left(\quad \textit{Ответ: } y=\pm\frac{1}{16}(C-arctgx)^2-5. \quad\right)$$

2. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения:

$$xy'=x\sin\frac{y}{x}+y, \qquad y(2)=p.$$

$$\left(\quad \textit{Ответ: } y=2x\cdot arctg\frac{x}{2}. \quad\right)$$

3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

$$ydx+\left(\sqrt{xy}-\sqrt{x}\right)dy=0.$$

$$\left(\quad \textit{Ответ: } \sqrt{x}+\sqrt{y}=\ln C\sqrt{y}, \quad \tilde{N}>0. \quad\right)$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$\left(1+e^x\right)y'=ye^x.$$

$$\left(\quad \textit{Ответ: } y=C\left(1+e^x\right). \quad\right)$$

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

1. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальное уравнение вида:

$$y'+P(x)y=Q(x) \tag{1}$$

1-й степени относительно y и y' называется ***линейным***. Если функция $Q(x)\equiv 0$, то уравнение (1) принимает вид:

$$y'+P(x)y=0 \tag{2}$$

и называется ***однородным линейным дифференциальным уравнением***. В том случае переменные разделяются и общее решение уравнения (2) есть:

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{3}$$

Для решения линейного уравнения (1) можно применить подстановку Бернулли $y=uv$, где u и v – функции от x. Тогда уравнение (1) примет вид

$$u'v+uv'+P(x)uv=Q(x).$$

Откуда

$$\left(v' + P(x)v\right)u + u'v = Q(x). \tag{4}$$

Пользуясь тем, что одна из неизвестных функций, например v, может быть выбрана достаточно произвольно (поскольку только произведение uv должно удовлетворять исходному уравнению (1)), выбираем в качестве v любое частное решение v=v(x) уравнения $v' + P(x)v = 0$, обращающее в нуль коэффициент перед u в уравнении (4). После этого уравнение (4) превращается в уравнение $u'v = Q(x)$. Находим общее решение $u = u(x;C)$ последнего уравнения, получим общее решение уравнения (1): $y = u(x;C)v(x;C)$. Таким образом, интегрирование уравнения (1) сводится к интегрированию двух уравнений с разделяющимися переменными.

<u>*Пример 1*</u>.

Проинтегрировать уравнение

$$y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}$$

методом Бернулли и решить задачу Коши при начальном условии $y(p) = 1$.

Решение.

Данное дифференциальное уравнение является линейным 1-го порядка. Применим подстановку Бернулли $y = uv$, $y' = u'v + v'u$, получим:

$$u'v + v'u + uvtgx = \frac{1}{\cos x},$$

$$u\left(v' + vtgx\right) + u'v = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \begin{cases} v' + vtgx = 0; \\ u'v = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Находим частное решение уравнения $v' + vtgx = 0$.

$$dv + vtgxdx = 0, \qquad \frac{dv}{v} + tgxdx = 0,$$

$$\int \frac{dv}{v} + \int tgxdx = 0, \qquad \ln|v| - \ln|\cos x| = \ln C_1.$$

Полагая $C_1 = 1$, выбираем частное решение $v = \cos x$. Далее ищем общее решение уравнения $u'v = \dfrac{1}{\cos x}$, где $v = \cos x$. Имеем:

$$u' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad u = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + C = tgx + C.$$

Общее решение исходного уравнения:

$$y = uv = (tgx + C)\cos x.$$

Из него выделим частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(p)=1$: $1=(0+C)(-1)$, откуда $C=-1$. Подставляя значение $C=-1$ в общее решение, получаем частное решение исходного уравнения:

$$y=(tgx-1)\cos x=\sin x-\cos x .$$

Ответ: $y=\sin x-\cos x$.

<u>Пример 2.</u>

Проинтегрировать уравнение

$$xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x} .$$

Решение:

Разделим обе части уравнения на $x\neq 0$:

$$y'+\frac{x+1}{x}y=3xe^{-x}$$

($x=0$ – не является решением данного уравнения).

Применим подстановку Бернулли $y=uv$, $y'=u'v+v'u$, получим:

$u'v+v'u+\dfrac{x+1}{x}uv=3xe^{-x}$.

$u'v+u\left(v'+\dfrac{x+1}{x}v\right)=3xe^{-x}$.

Приравниваем выражение в скобках к нулю и найдём частное решение уравнения $v'+\dfrac{x+1}{x}v=0$.

$\dfrac{dv}{v}+\dfrac{x+1}{x}dx=0$, $\displaystyle\int\frac{dv}{v}+\int\frac{x+1}{x}dx=0$,

$\ln|v|+x+\ln|x|=\ln C_1$.

Полагая $C_1=1$, выбираем частное решение:

$\ln|v|=-x-\ln|x|$, $\quad |v|=e^{-x-\ln|x|}$,

$|v|=e^{\ln\frac{1}{|x|}}\cdot e^{-x}$, $\quad |v|=e^{-x}\dfrac{1}{|x|}$, $\quad v=\pm\dfrac{1}{x}e^{-x}$.

Возьмём в качестве v $\quad v=\dfrac{1}{x}e^{-x}$.

Далее ищем общее решение уравнения $u'v=3xe^{-x}$, где $v=\dfrac{1}{x}e^{-x}$.

Имеем: $u'\dfrac{1}{x}e^{-x}=3xe^{-x}$, $u'=3x^2$, $u=x^3+C$.

Тогда общее решение исходного уравнения

$$y=uv=\left(x^3+C\right)\frac{1}{x}e^{-x} .$$

Ответ: $y=\left(x^3+C\right)\dfrac{1}{x}e^{-x}$, $\forall C\in R$.

Пример 3.

Проинтегрировать уравнение

$$y' + y\cos x = \sin x \cos x$$

и решить задачу Коши при начальном условии $y(0) = 1$.

Решение:

Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка. Применим подстановку Бернулли $y = uv$, $y' = u'v + v'u$, получим:

$u'v + v'u + uv\cos x = \sin x \cos x$;

$u'v + u(v' + v\cos x) = \sin x \cos x$.

Приравняем выражение в скобках к нулю и находим частное решение уравнения $v' + v\cos x = 0$.

$\dfrac{dv}{v} = -\cos x dx$, $\ln|v| = -\sin x + \ln C_1$.

Полагая $C_1 = 1$, выбираем частное решение $v = e^{-\sin x}$.

Далее ищем общее решение уравнения $u'e^{-\sin x} = \sin x \cos x$.

$u' = e^{-\sin x}\sin x \cos x$;

$$u = \int e^{-\sin x}\sin x \cos x dx + C_2 = \int e^{-\sin x}\sin x d(\sin x) + C_2 = |\sin x = t| =$$

$$= \int e^{-t} t dt + C_2 = \begin{vmatrix} u = t & du = dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{vmatrix} = te^t - e^t + C = \sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + C.$$

Общее решение исходного уравнения:

$$y = uv = \left(\sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + C\right)e^{-\sin x} = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}.$$

Из него выделяем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$

$$1 = C - 1;\ C = 2.$$

Подставляя значение $C = 2$ в общее решение, получаем частное решение исходного уравнения:

$$y = \sin x - 1 + 2e^{-\sin x}.$$

Ответ: $y = \sin x - 1 + 2e^{-\sin x}$.

Пример 4.

Проинтегрировать уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y}.$$

Решение:

Это уравнение можно легко проинтегрировать, если поменять в нём ролями *x* и *y*: принять за аргумент *y*, а за неизвестную функцию – *x*. Для этого нужно только (используя формулу дифференцирования обратной функции) положить: $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$.

Уравнение преобразуется в следующее:
$x' = x\cos y + \sin 2y$; $x' - x\cos y = \sin 2y$.

Получили линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка относительно функции $x(y)$. Применим подстановку Бернулли $x = uv$, где $u = u(y)$, $v = v(y)$; $x' = u'v + v'u$, получим:

$u'v + v'u - uv\cos y = \sin 2y$.

$u'v + u(v' - v\cos y) = \sin 2y$; откуда

$$\begin{cases} v' - v\cos y = 0; \\ u'v = \sin 2y. \end{cases}$$

Находим частное решение уравнения $v' - v\cos y = 0$.

$\dfrac{dv}{v} = \cos y dy$, $\ln|v| = \sin y + \ln C_1$.

Полагая $C_1 = 1$, выбираем частное решение $v = e^{\sin y}$. Далее ищем общее решение уравнения: $u'e^{\sin y} = \sin 2y$; $u' = e^{-\sin y}\sin 2y$;

$$u = \int e^{-\sin y}\sin 2y dy + C_2 = 2\int e^{-\sin y}\sin y d(\sin y) + C_2 = |t = \sin y| =$$

$$= 2\int e^{-t} t dt + C_2 = \begin{vmatrix} u = t & du = dt \\ e^{-t}dt = dv & v = -e^{-t} \end{vmatrix} = 2\left(-te^{-t} + \int e^{-t}dt\right) + C_2 =$$

$$= -2e^{-t}(t+1) + C = -2e^{-\sin y}(\sin y + 1) + C.$$

Общее решение исходного уравнения:

$$x = Ce^{\sin y} - 2(1 + \sin y) = Ce^{\sin y} - 2\sin y - 2.$$

Ответ: $x = Ce^{\sin y} - 2\sin y - 2$; $\forall C \in R$ – общее решение.

2. Уравнение Бернулли.

Дифференциальное уравнение

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{a},$$

где $a = const \in R, a \neq 0, a \neq 1$ – называется ***уравнением Бернулли***.

Оно приводится к линейному уравнению делением обеих его частей на y^{a} и введением новой искомой функции z по формуле $z = y^{1-a}$. Можно также непосредственно применять подстановку $y = uv$ или метод вариации произвольной постоянной.

Пример 5.

Проинтегрировать уравнение

$$y' - 2xy = 2x^3y^2.$$

Решение.

Разделим обе части уравнения на y^2:

$$y^{-2}y' - 2xy^{-1} = 2x^3.$$

Положим $z = y^{-1}$, тогда $-y^{-2}y' = z'$. Умножая обе части уравнения на (–1) и выполняя указанную подстановку, получим линейное уравнение:

$$z' + 2xz = -2x^3$$

Решим это уравнение, применив подстановку Бернулли, $z = uv$; $z' = u'v + v'u$.

$u'v + v'u + 2xuv = -2x^3$,

$u'v + u\left(v' + 2xv\right) = -2x^3$.

Найдём частное решение уравнения $v' + 2xv = 0$.

$\dfrac{dv}{dx} + 2xv = 0$; $\quad \dfrac{dv}{v} + 2xdx = 0$;

$\ln|v| + x^2 = \ln C_1$.

Полагая $C_1 = 1$, выбираем частное решение:

$$\ln|v| = -x^2;\ v = e^{-x^2}.$$

Далее ищем общее решение уравнения $u'e^{-x^2} = -2x^3$.

$u' = -2x^3 e^{x^2}$;

$u = -\int 2x^3 e^{x^2} dx + C_2 = -\int x^2 e^{x^2} d\left(x^2\right) + C_2 = \left|t = x^2\right| = -\int te^t dt + C_2 =$

$= \begin{vmatrix} u = t & du = dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{vmatrix} = -\left(te^t - e^t\right) + C = = -x^2 e^{x^2} + e^{x^2} + C$; $z = Ce^{-x^2} - x^2 + 1$.

Общее решение исходного уравнения

$$y = \frac{1}{Ce^{-x^2} + 1 - x^2};$$

y=0 – частное решение $\left(a = 2 > 1\right)$.

Ответ: $y = \dfrac{1}{Ce^{-x^2} + 1 - x^2}$; $\forall C \in R$ – общее решение. y=0 – частное решение $\left(a = 2 > 1\right)$.

<u>*Пример 6.*</u>

Решить уравнение

$$y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}.$$

Решение:

Это уравнение Бернулли $\left(a = \dfrac{1}{2}\right)$. Полагая $y = uv$, получим:

$u'v + v'u = \dfrac{4}{x}uv + x\sqrt{uv}$ или $u'v + u\left(v' - \dfrac{4}{x}v\right) = x\sqrt{uv}$.

Найдём частное решение уравнения $v' - \frac{4}{x}v = 0$.

$\frac{dv}{v} = \frac{4}{x}dx$; $\ln|v| = 4\ln|x| + \ln C_1$.

Полагая $C_1 = 1$, получим $v = x^4$.

$u'x^4 = x\sqrt{ux^4}$; $u'x^4 = x \cdot x^2\sqrt{u}$; $u'x = \sqrt{u}$; $\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x}$;

$2\sqrt{u} = \ln|x| + C_1$; $\sqrt{u} = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{C_1}{2}$; $\frac{C_1}{2} = C$.

$u = \left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2$, и, следовательно, общее решение получим в виде:

$$y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2.$$

y=0 – особое решение $\left(0 < a = \frac{1}{2} < 1\right)$.

Ответ: $y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2$; $\forall C \in R$ – общее решение. y=0 – особое решение $\left(0 < a = \frac{1}{2} < 1\right)$.

Задания.

1. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения.
   1) $\left(x^2 + 1\right)y' + 4xy = 3$, $y(0) = 0$.
   2) $xy' - 2y = 2x^4$, $y(1) = 0$.
   3) $x^2y' + xy + 1 = 0$, $y(1) = 0$.

   (*Ответы:*

   1) $y = \frac{x^3 + 3x}{\left(x^2 + 1\right)^2}$;
   2) $y = x^4 - x^2$;
   3) $y = -\frac{\ln x}{x}$.)

2. Решить уравнения.
   1) $y' + y = x\sqrt{y}$.
   2) $y' + 2y = y^2e^x$.
   3) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

Ответы:

1) $y = \left(xe^{\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}} + C \right)^2 e^{-x}$;

2) $y = \dfrac{1}{Ce^{2x} + e^{x}}$;

3) $y = \dfrac{x^4}{4}\left(C + \ln x\right)^2$.

<u>Домашние задания.</u>

1. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения.

1) $(x+1)y' + y = x^3 + x^2 \qquad y(0) = 0$.

2) $xy' + y = \sin x \qquad y\left(\dfrac{p}{2}\right) = \dfrac{2}{p}$.

3) $\left(1 - x^2\right)y' + xy = 1 \qquad y(0) = 1$.

Ответы:

1) $y = \dfrac{3x^4 + 4x^3}{12(x+1)}$;

2) $y = \dfrac{1 - \cos x}{x}$;

3) $y = x + \sqrt{1 - x^2}$.

2. Решить уравнения.

1) $y' = \dfrac{x}{y}e^{2x} + y$.

2) $x(x-1)y' + y^3 = xy$.

3) $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$.

Ответы:

1) $y = e^{x}\sqrt{x^2 + C}$;

2) $y = \dfrac{x - 1}{\sqrt{2(x - \ln x + C)}}$;

3) $y = e^{3x}\left(\dfrac{x}{3}e^{-2x} + \dfrac{1}{6}e^{-2x} + C\right)^{\frac{3}{2}}$.

Дифференциальные уравнения высших порядков

1. Решение дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

1. *Случай непосредственного интегрирования*.

Если $y^{(n)} = f(x)$, то последовательно интегрируя, получим

$$y = \underbrace{\int dx \int \ldots \int}_{n\ раз} f(x)dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n.$$

2. *Случаи понижения порядка:*

1) Если дифференциальное уравнение явно не содержит y, т.е.

$$F(x, y', y'') = 0,$$

то введя новую неизвестную функцию $y' = p(x)$ и учитывая, что $y'' = p'(x)$, получаем уравнение порядка на единицу ниже

$$F(x, p, p') = 0.$$

2) Если дифференциальное уравнение явно не содержит переменной x, например,

$$F(y, y', y'') = 0,$$

введя новую функцию $p(y)$, зависящую от переменной y, $y' = p(y)$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, получим уравнение порядка на единицу ниже

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

<u>Пример 1.</u>

Найти общее решение уравнения

$$y'' = xe^x$$

и выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$.

Решение.

Интегрируем последовательно уравнение:

$$y' = \int xe^x dx + C_1 = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{vmatrix} = xe^x - e^x + C_1 = (x-1)e^x + C_1.$$

$$y = \int \left((x-1)e^x + C_1\right)dx = (x-1)e^x - e^x + C_1 x + C_2 = (x-2)e^x + C_1 x + C_2.$$

Найдем решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям. Подставим начальные данные $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 0$ в систему

$$\begin{cases} y' = (x-1)e^x + C_1, \\ y = (x-2)e^x + C_1 x + C_2. \end{cases}.$$

Получим: $\begin{cases} 0 = -1 + C_1, \\ 1 = -2 + C_2. \end{cases}$, откуда $C_1 = 1,\ C_2 = 3$, так что искомым решением будет $y = (x-2)e^x + x + 3$.

Ответ: $y = (x-2)e^x + x + 3$, где $C_1, C_2 = const$.

Пример 2.

Проинтегрировать уравнение

$$y'' = e^x + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}.$$

Решение.

Интегрируем последовательно данное уравнение:

$$y' = e^x + \left(-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}\right) + C_1.$$

$$y' = e^x - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + C_1.$$

$$y = e^x + \frac{1}{2}\cdot 2x^{-\frac{1}{2}} + C_1x + C_2.$$

$y = e^x + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + C_1x + C_2$ – общее решение данного уравнения.

Ответ: $y = e^x + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + C_1x + C_2$, где $C_1, C_2 = const$.

Пример 3.

Найти решение уравнения

$$y''^2 = 4(y'-1),$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y = 0$, $y' = 2$ при $x = 0$.

Решение.

Уравнение не содержит явно y; положим $y' = p(x)$, тогда

$$p'^2 = 4(p-1),\ p' = \pm 2\sqrt{p-1}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными; разделим переменные:

$\dfrac{dp}{\pm 2\sqrt{p-1}} = dx$; интегрируем: $\pm\sqrt{p-1} = x + C_1$,

$p - 1 = (x + C_1)^2$, $p = 1 + (x + C_1)^2$.

Но $p = y'$, следовательно, $y' = 1 + (x + C_1)^2$, $y = x + \dfrac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2$ – общее решение данного уравнения.

При решении уравнения $p' = \pm 2\sqrt{p-1}$ мы обе части делили на $\sqrt{p-1}$. Если $p-1=0$, $p=1 \Leftrightarrow y'=1$, $y = x + C$; следовательно, уравнение имеет общее решение

$$y = x + \frac{1}{3}\left(x + C_1\right)^3 + C_2$$

и семейство особых решений

$$y = x + C,\ \forall C, C_1, C_2 \in R.$$

Найдем решение поставленной задачи Коши; воспользуемся общим решением:

Имеем

$$\begin{cases} y = x + \dfrac{1}{3}\left(x + C_1\right)^3 + C_2, \\ y' = 1 + \left(x + C_1\right)^2. \end{cases}$$

Полагая здесь $x = 0$, $y = 0$, $y' = 2$, получаем:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{1}{3}C_1^{\,3} + C_2, \\ 2 = 1 + C_1^{\,2}, \end{cases} \text{ откуда } C_1 = \pm 1,\ C_2 = \mp\frac{1}{3}.$$

Подставляя же значения C_1 и C_2 в общее решение, найдем два решения:

$$y = x + \frac{1}{3}\left(x + 1\right)^3 - \frac{1}{3} \text{ и } y = x + \frac{1}{3}\left(x - 1\right)^3 + \frac{1}{3}.$$

Других решений нет, так как ни одного из особых решений не удовлетворяет поставленным начальным условиям.

Ответ: $y = x + \frac{1}{3}\left(x - 1\right)^3 + \frac{1}{3}$.

Полученные в примере 3 результаты вполне согласуются с общей теорией. В самом деле, разрешая уравнение $y''^2 = 4\left(y' - 1\right)$ относительно y'', мы получим два уравнения: $y'' = 2\sqrt{y'-1}$, $y'' = -2\sqrt{y'-1}$.

Для каждого из этих уравнений в окрестности начальной точки $\left(0;0;2\right)$ выполняются условия теоремы существования и единственности решения.

<u>*Пример 4.*</u>

Проинтегрировать уравнение

$$xy'' = y'\ln\frac{y'}{x}.$$

Решение.

Это уравнение не содержит явно y. Полагая $y' = p$, получим

$$xp' = p\ln\frac{p}{x}.\ p' = \frac{p}{x}\ln\frac{p}{x}.$$

Это однородное уравнение первого порядка. Делаем подстановку $p = uv$, тогда $p' = u'x + u$, и уравнение принимает вид

$$u'x + u = u\ln u.$$

Разделяя переменные и интегрируя, последовательно находим: $u'x = u(\ln u - 1)$, $\dfrac{du}{u(\ln u - 1)} = \dfrac{dx}{x}$.

$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln C_1$; $\ln u - 1 = C_1 x$, $u = e^{1+C_1x}$, $p = xe^{1+C_1x}$.

Так как $p = y'$, то последнее уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка, которое решается однократным интегрированием:

$$y' = xe^{1+C_1x}, \qquad y = \int xe^{1+C_1x}dx = \frac{1}{C_1}\int xd\left(e^{1+C_1x}\right) = \frac{1}{C_1}\left(xe^{1+C_1x} - \int e^{1+C_1x}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{C_1}\left(xe^{1+C_1x} - \frac{1}{C_1}e^{1+C_1x}\right) + C_2;$$

$$y = \frac{1}{C_1}xe^{1+C_1x} - \frac{1}{C_1^2}e^{1+C_1x} + C_2, \text{ т.е. } y = \frac{1}{C_1}e^{1+C_1x}\left(x - \frac{1}{C_1}\right) + C_2.$$

Получили общее решение исходного уравнения.

При разделении переменных мы обе части уравнения $u'x = u(\ln u - 1)$ делим на $xu(\ln u - 1)$. Но $x = 0$ не является решением исходного уравнения.

Если $u = 0$, то $p = 0 \Rightarrow y' = 0$, т.е. $y = C$ – не является решением исходного уравнения.

Если $\ln u - 1 = 0$, то $\ln u = 1$, $u = e$, т.е. $\dfrac{p}{x} = e$ или $p = ex$. Так как $p = y'$, то $y' = ex$, откуда $y = e\dfrac{x^2}{2} + C$. Получим семейство особых решений данного уравнения.

Итак, данное уравнение имеет общее решение

$$y = \frac{1}{C_1}e^{1+C_1x}\left(x - \frac{1}{C_1}\right) + C_2$$

и семейство особых решений

$$y = e\frac{x^2}{2} + C, \ \forall C, C_1, C_2 \in R, \ C_1 \neq 0.$$

Ответ: $y = \dfrac{1}{C_1}e^{1+C_1x}\left(x - \dfrac{1}{C_1}\right) + C_2$ – общее решение;

$y = e\dfrac{x^2}{2} + C$ – особое решение, где $\forall C, C_1, C_2 \in R$, $C_1 \neq 0$.

Пример 5.

Проинтегрировать уравнение

$$(1+y)y''-y'^2=0.$$

Решение.

Это уравнение не содержит явно x. Положим $y'=p(y)$. Тогда $y''=p\dfrac{dp}{dy}$. Получим уравнение

$$p\frac{dp}{dy}=\frac{p^2}{1+y} \text{ или } \frac{dp}{p}=\frac{dy}{1+y},$$

откуда $p=C_1(1+y)$, $\dfrac{dy}{dx}=C_1(1+y)$, $\dfrac{dy}{1+y}=C_1dx$.

Следовательно, $\ln|1+y|=C_1x+\ln\tilde{C}_2$, $|1+y|=\tilde{C}_2e^{C_1x}$; или $1+y=\pm\tilde{C}_2e^{C_1x}$. Обозначим $\pm\tilde{C}_2=C_2$. Тогда

$y=C_2e^{C_1x}-1$ – общее решение исходного уравнения.

Ответ: $y=C_2e^{C_1x}-1$, где $\forall C_1,C_2\in R$.

Пример 6.

Проинтегрировать уравнение

$$y''+y'^2=2e^{-y}.$$

Решение.

Это уравнение не содержит явно x. Положим $y'=p(y)$, тогда $y''=p\dfrac{dp}{dy}$. Получим уравнение:

$$p\frac{dp}{dy}+p^2=2e^{-y}.$$

Делим на p обе части уравнения.

Если $p=0$, то $y'=0$ и $y=C$ (не является решением исходного уравнения).

Итак, $\dfrac{dp}{dy}+p=\dfrac{2e^{-y}}{p}$, т.е. $p'+p=\dfrac{2e^{-y}}{p}$. Это уравнение Бернулли. Решим с его помощью подстановки $p=uv \Leftrightarrow p'=u'v+uv'$. Подставим p и p' в уравнение:

$$u'v+uv'+uv=\frac{2e^{-y}}{uv}.$$

$$u'v+u(v'+v)=\frac{2e^{-y}}{uv} \Leftrightarrow \begin{cases} v'+v=0, \\ u'v=\dfrac{2e^{-y}}{uv}. \end{cases}$$

Найдем частные решения уравнения

$$v' + v = 0;$$

$\dfrac{dv}{dy} = -v$; $\dfrac{dv}{v} = -dy$; $\ln|v| = -y$; $v = e^{-y}$.

Надо найти общее решение уравнения

$$u'v = \frac{2e^{-y}}{uv}, \text{ где } v = e^{-y}.$$

$u'e^{-y} = \dfrac{2e^{-y}}{ue^{-y}}$; $u'e^{-y} = \dfrac{2}{u}$;

$u'u = 2e^{y}$; $udu = 2e^{y}dy$;

$\dfrac{u^2}{2} = 2e^{y} + \overline{C_1}$; $u^2 = 4e^{y} + C_1$.

Так как $p^2 = u^2v^2$, то

$p^2 = \left(4e^{y} + C_1\right)e^{-2y}$, т.е. $p^2 = 4e^{-y} + C_1e^{-2y}$;

$p^2 = y'^2 \Rightarrow y'^2 = 4e^{-y} + C_1e^{-2y}$, т.е.

$\dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4e^{-y} + C_1e^{-2y}}$.

$\pm\dfrac{dy}{\sqrt{4e^{-y} + C_1e^{-2y}}} = dx$; $\pm\dfrac{dy}{\sqrt{\dfrac{4}{e^{y}} + \dfrac{C_1}{e^{2y}}}} = dx$;

$\pm\dfrac{dy}{\sqrt{\dfrac{4e^{y} + C_1}{e^{2y}}}} = dx$.

Имеем далее: $\pm\dfrac{1}{2}\dfrac{e^{y}dy}{\sqrt{e^{y} + \dfrac{C_1}{4}}} = dx$. Проинтегрируем:

$\pm\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\left(e^{y} + \frac{C_1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(e^{y} + \frac{C_1}{4}\right) = x + C_2$;

$\pm\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(e^{y} + \dfrac{C_1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\dfrac{1}{2}} = x + C_2$.

$$e^{y} + \tilde{C}_1 = \left(x + C_2\right)^2,$$

где $\tilde{C}_1 = \dfrac{C_1}{4}$ – общий интеграл уравнения. $\forall C_1, C_2 \in R$.

Ответ: $e^{y} + \tilde{C}_1 = \left(x + C_2\right)^2$, где $\forall \tilde{C}_1, C_2 \in R$.

2. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами p ***и*** q имеет вид:

$$y'' + py' + qy = 0. \qquad (1)$$

Если l_1 и l_2 – корни характеристического уравнения

$$j\,(l) \equiv l^2 + pl + q = 0,$$

то общее решение уравнения (1) записывается в одном из следующих трех видов:

1. $y = C_1 e^{l_1 x} + C_2 e^{l_2 x}$ – если l_1 и l_2 вещественны и $l_1 \neq l_2$.
2. $y = e^{l_1 x}\left(C_1 + C_2 x\right)$, если $l_1 = l_2$.
3. $y = e^{a x}\left(C_1 \cos b x + C_2 \sin b x\right)$, если $l_1 = a + bi$ и $l_1 = a - bi$ $\left(b \neq 0\right)$.

<u>*Пример 7.*</u>

Решить уравнение

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

и найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y = 5$, $y' = 8$, при $x = 0$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение

$$l^2 - 5l + 4 = 0.$$

Его корни $l_1 = 1$, $l_1 = 4$ – вещественные и различные. Следовательно, общее решение уравнения $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$.

Найдем y': $y' = C_1 e^x + 4C_2 e^{4x}$; $\forall C_1, C_2 \in R$.

Так как $y = 5$, $y' = 8$ при $x = 0$, составим систему для определения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5, \\ C_1 + 4C_2 = 8. \end{cases}$$

Решим ее: $3C_2 = 3$; $C_2 = 1$; $C_1 = 4$.

Искомое частное решение:

$$y = 4e^x + e^{4x}.$$

Ответ: $y = 4e^x + e^{4x}$.

<u>*Пример 8.*</u>

Решить уравнение

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Решение.

Составим характеристическое уравнение

$$l^2 - 2l + 1 = 0, \text{ т.е. } \left(l + 1\right)^2 = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет два одинаковых корня $l_1 = l_2 = -1$. Следовательно, общее решение данного уравнения: $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$, т.е.

$$y = e^{-x}\left(C_1 + C_2 x\right),\ \forall C_1, C_2 \in R.$$

Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$, где $\forall C_1, C_2 \in R$.

Пример 9.

Найти частные решения уравнения, удовлетворяющие начальным условиям:

$$y'' + 4y = 0;$$

$y = 0$, $y' = 2$, при $x = 0$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение

$$l^2 + 4 = 0.$$

Его корни $l_1 = 2i$ и $l_2 = -2i$ – комплексные.

Общее решение

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,\ \forall C_1, C_2 \in R.$$

Найдем y': $y = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$. Составим систему для определения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ 2C_2 = 2. \end{cases}$$

$C_2 = 1$; $C_1 = 0$.

Частное решение имеет вид:

$$y = \sin 2x.$$

Ответ: $y = \sin 2x$.

Пример 10.

Решить уравнение

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Решение.

Составим характеристическое уравнение

$$l^2 + 4l + 13 = 0.$$

Корни этого уравнения $l_1 = -2 + 3i$; $l_1 = -2 - 3i$.

Общее решение имеет вид:

$$y = e^{-2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right),\ \forall C_1, C_2 \in R.$$

Ответ: $y = e^{-2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right)$, где $\forall C_1, C_2 \in R$.

Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть имеем дифференциальное уравнение

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=0\,, \tag{2}$$

где $a_0,a_1,...,a_n$ – вещественные постоянные.

Составляем характеристическое уравнение для уравнения (2):

$$a_0l^{\,n}+a_1l^{\,n-1}+...+a_n=0 \tag{3}$$

Пусть $l_1,l_2,...,l_n$ корни уравнения (3), причем среди них могут быть и кратные.

Возможны следующие случаи:

1. $l_1,l_2,...,l_n$ – вещественные и различные. Тогда фундаментальная система решений уравнения (2) имеет вид:

$$e^{l_1x},e^{l_2x},...,e^{l_nx}\,,$$

и общее решение однородного уравнения будет иметь вид:

$$y=C_1e^{l_1x}+C_2e^{l_2x}+...+C_ne^{l_nx}\,,$$

$\forall C_1,...,C_n\in R$.

2. Корни характеристического уравнения вещественны, но среди них есть кратные.

Пусть, например, $l_1=l_2=...=l_k=\mathrm{D}$, т.е. $\mathrm{D}=\tilde{l}$ – является k-кратным корнем уравнения (3), а все остальные $n-k$ корней различные. Фундаментальная система решений в этом случае имеет вид:

$$e^{\tilde{l}x},xe^{\tilde{l}x},x^2e^{\tilde{l}x},...,x^{k-1}e^{\tilde{l}x},e^{l_{k+1}x},...,e^{l_nx}\,;$$

общее решение:

$$y=C_1e^{\tilde{l}x}+C_2xe^{\tilde{l}x}+C_3x^2e^{\tilde{l}x}+...+C_kx^{k-1}e^{\tilde{l}x}+C_{k+1}e^{l_{k+1}x}+...+C_ne^{l_nx}\,,$$

$\forall C_1,...,C_n\in R$.

3. Среди корней характеристического уравнения есть комплексные.

Пусть для определенности $l_1=a+bi$, $l_2=a-bi$, $l_3=g+di$, $l_3=g-di$, а остальные корни вещественные (так как по предположению коэффициенты a_i $(i=0,1,2,...,n)$ уравнения (2) вещественные, то комплексные корни уравнения (3) попарно сопряженные).

Фундаментальная система решений в этом случае будет иметь вид:

$$e^{ax}\cos bx,\, e^{ax}\sin bx,\, e^{gx}\cos dx,\, e^{gx}\sin dx,\, e^{l_5x},\, e^{l_6x},\, ...,\, e^{l_nx}\,,$$

а общее решение имеет вид:

$$y=C_1e^{ax}\cos bx+C_2e^{ax}\sin bx+C_3e^{gx}\cos dx+C_4e^{gx}\sin dx+C_5e^{l_5x}+...+$$

$$+C_ne^{l_nx}\,,\ \forall C_1,...,C_n\in R$$

4. В случае если $l_1 = a + bi$ является k-кратным корнем уравнения (3) $\left(k \le \dfrac{n}{2}\right)$, то $l_2 = a - bi$ также будет k-кратным корнем, и фундаментальная система решений будет иметь вид:

$$e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\sin bx,\ ...,\ x^{k-1}e^{ax}\cos bx,$$

$x^{k-1}e^{ax}\sin bx,\ e^{l_{2k+1}x},\ ...,\ e^{l_n x}$,

а, следовательно, общее решение:

$$y = C_1e^{ax}\cos bx + C_2e^{ax}\sin bx + C_3xe^{ax}\cos bx + C_4xe^{ax}\sin bx + ... +$$

$$+C_{2k-1}x^{k-1}e^{ax}\cos bx + C_{2k}x^{k-1}e^{ax}\sin bx + C_{2k+1}e^{l_{2k+1}x} + ... + C_ne^{l_n x},$$

$\forall C_1, ..., C_n \in R$.

Пример 11.

Найти общее решение уравнения

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0.$$

Решение.

Составляем характеристическое уравнение

$$l^3 - 2l^2 - 3l = 0,$$

$l\left(l^2 - 2l - 3\right) = 0$.

Находим его корни: $l_1 = 0$, $l_2 = -1$, $l_3 = 3$.

Так как они действительны и различны, то общее решение имеет вид:

$$y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{3x}.$$

Ответ: $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{3x}$, где $\forall C_1, C_2, C_3 \in R$.

Пример 12.

Найти общее решение уравнения

$$y''' + 2y'' + y' = 0.$$

Решение.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$l^3 + 2l^2 + l = 0,$$

$l\left(l^2 + 2l + 1\right) = 0$.

Отсюда $l_1 = l_2 = -1$, $l_3 = 0$.

Корни действительные, причем один из них, а именно $l = -1$, двукратный, поэтому общее решение имеет вид:

$$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3.$$

Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3$, где $\forall C_1, C_2, C_3 \in R$.

Пример 13.

Найти общее решение уравнения

$$y''' + 4y'' + 13y' = 0.$$

Решение.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$l^3 + 4l^2 + 13l = 0,$$

$l\left(l^2 + 4l + 13\right) = 0$.

Его корни $l_1 = 0$, $l_2 = -2 - 3i$, $l_3 = -2 + 3i$.

Общее решение

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x}\cos 3x + C_3 e^{-2x}\sin 3x.$$

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-2x}\cos 3x + C_3 e^{-2x}\sin 3x$, где $\forall C_1, C_2, C_3 \in R$.

<u>Пример 14.</u>

Решить уравнение

$$y^{IV} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

Решение.

Составим характеристическое уравнение

$$l^4 + 4l^3 + 8l^2 + 8l + 4 = 0$$

или $\left(l^2 + 2l + 2\right)^2 = 0$.

Оно имеет двукратные комплексные корни: $l_1 = l_2 = -1 - i$, $l_3 = l_4 = -1 + i$ и, следовательно, общее решение будет иметь вид:

$$y = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x + C_3 x e^{-x}\cos x + C_4 x e^{-x}\sin x \text{ или}$$

$$y = e^{-x}\left(C_1 + C_3 x\right)\cos x + e^{-x}\left(C_2 + C_4 x\right)\sin x.$$

Ответ: $y = e^{-x}\left(C_1 + C_3 x\right)\cos x + e^{-x}\left(C_2 + C_4 x\right)\sin x$, где $\forall C_1, C_2, C_3, C_4 \in R$.

Задания.

1. Решить уравнения:

   1) $y'' = \dfrac{1}{x}$;

   2) $y'' = -\dfrac{1}{2y^3}$;

   3) $xy'' + y' = 0$;

   4) $x^2 y'' + xy' = 1$.

Ответы:

1) $y = x\ln|x| + C_1 x + C_2$;

2) $1 + C_1 y^2 = \left(C_2 + \dfrac{C_1 x}{\sqrt{2}}\right)^2$;

3) $y = C_1 + C_2 \ln|x|$;

4) $y = \frac{1}{2}\left(\ln|x|\right)^2 + C_1 \ln|x| + C_2$.)

2. Найти решения, удовлетворяющие указанным условиям:

5) $yy'' + y'^2 = 1$; $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 0$;

6) $2y' + \left(y'^2 - 6x\right)y'' = 0$; $y = 0$, $y' = 2$ при $x = 2$.

(*Ответы:*

5) $y = x + 1$;

6) $y = \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{3}$.)

3. Решить уравнения:

7) $y'' - 5y' + 6y = 0$;

8) $y'' + y = 0$;

9) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

(*Ответы:*

7) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$;

8) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$;

9) $y = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{-2x}$.)

Домашнее задание.

1. Решить уравнения:

1) $y'' = 2\sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x$;

2) $y' + \frac{1}{4}\left(y''\right)^2 = xy''$;

3) $yy'' - y'\left(1 + y'\right) = 0$.

(*Ответы:*

1) $y = \frac{1}{3}\sin^3 x + C_1 x + C_2$;

2) $y = C_1 x\left(x - C_1\right) + C_2$; $y = \frac{x^3}{3} + C$ (особое решение);

3) $y = C_1 e^{C_2 x} + \frac{1}{C_2}$.)

2. Найти решения, удовлетворяющие указанным условиям:

4) $y'' = \dfrac{y'}{x}\left(1+\ln\dfrac{y'}{x}\right)$; $y=\dfrac{1}{2}$, $y'=1$ при $x=1$;

5) $y''-y'^2+y'(y-1)=0$; $y=2$, $y'=2$ при $x=0$.

Ответы:

4) $y=\dfrac{1}{2}x^2$;

5) $y=2e^x$.

3. Решить уравнения:

6) $y''-2y'+2y=0$;

7) $y''+2y'=0$;

8) $y''-4y'+4y=0$.

Ответы:

6) $y=e^x\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$;

7) $y=C_1+C_2e^{-2x}$;

8) $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{2x}$.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y''+py'+qy=f(x), \qquad (1)$$

где p и $q=const$, можно записать в виде суммы функций

$$y=y_0+y_{\text{÷í}},$$

где y_0 – общее решение соответствующего уравнения $y''+py'+qy=f(x)$, $y_{\text{÷í}}$ – какое-либо частное решение данного неоднородного уравнения (1).

Функция $y_{\text{÷í}}$ может быть найдена методом неопределенных коэффициентов в некоторых простейших случаях следующим образом:

1. Пусть $f(x)=e^{ax}\cdot P_n(x)$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n. Если a не является корнем характеристического уравнения $k^2+kp+q=0$, то полагают

$$y_{\text{÷í}}=e^{ax}\cdot Q_n(x),$$

где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами.

Если a есть корень характеристического уравнения, то

$$y_{\text{÷í}} = x^r e^{ax} \cdot Q_n(x),$$

где r – кратность корня a, причем $r = 1$ или $r = 2$.

2. $f(x) = e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right]$.

Если $a \pm bi$ не являются корнями характеристического уравнения, то полагают, что

$$y_{\text{÷í}} = e^{ax}\left[S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx\right],$$

где S_N и $T_N(x)$ – многочлены степени $N = \max\{n,m\}$.

Если же $a \pm bi$ – корни характеристического уравнения, то

$$y_{\text{÷í}} = x^r e^{ax}\left[S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx\right],$$

где r – кратность корней $a \pm bi$ (для уравнений второго порядка $r = 1$).

Пример 1.

Указать вид частных решений для данных неоднородных уравнений:

а) $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$;

б) $y'' + 9y = \cos 2x$;

в) $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$;

г) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$;

д) $y'' - 5y' + 6y = \left(x^2 + 1\right)e^x + xe^{2x}$;

е) $y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos 2x - x^2 e^x \sin 2x$.

Решение.

а) $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$.

Составим характеристическое уравнение:

$$l^2 - 4 = 0,\ l_1 = 2,\ l_2 = -2.$$

$a = 2$ является корнем характеристического уравнения кратности $r = 1$. Перед e^{2x} стоит многочлен второй степени. Следовательно, частное решение исходного уравнения надо искать в виде:

$$y_{\text{÷.í .}} = x\left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{2x},$$

где A, B, C – коэффициенты, которые необходимо определить.

б) $y'' + 9y = \cos 2x$;

Составим характеристическое уравнение:

$$l^2 + 9 = 0,\ l_{1,2} = \pm 3i.$$

$a = 0$, $b = 2$, числа $a \pm bi = \pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения.

Перед $\cos 2x$ отсутствует e^{ax}, и стоит постоянная 1. Следовательно, частное решение имеет вид:

$$y_{\text{÷.í .}} = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

в) $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$.

Здесь необходимо использовать принцип наложения решений (или принцип суперпозиции). Если первая часть уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$ есть сумма нескольких функций

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$$

и y_i $(i = 1, 2, ..., n)$ – соответствующее решение уравнений

$$y'' + py' + qy = f_i(x) \ (i = 1, 2, ..., n),$$

то сумма

$$y = y_1 + y_2 + ... + y_n$$

является решением уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$.

В нашем примере $f_1 = \sin 2x$, $f_2 = e^{2x}$.

Составим характеристическое уравнение

$$l^2 - 4l + 4 = 0,$$

$l_1 = l_2 = 2$ – корень кратности $r = 2$.

Рассмотрим сначала уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = \sin 2x.$$

$a = 0$, $b = 2$, числа $a \pm bi = \pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения. Перед $\sin 2x$ стоит постоянная 1, e^{ax} отсутствует, т.е. $a = 0$. Следовательно, частное решение этого уравнения имеет вид:

$$y_1 = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}.$$

$a = 2$ – корень кратности $r = 2$ характеристического уравнения. Перед e^{2x} стоит постоянная 1. Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид:

$$y_2 = x^2 Ce^{2x}.$$

Тогда частное решение исходного уравнения $Y_{÷.í.} = Y_1 + Y_2$, т.е.

$$y_{÷.í.} = A\cos 2x + B\sin 2x + Cx^2 e^{2x}.$$

г) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$.

Составим характеристическое уравнение:

$$l^2 + 2l + 2 = 0,$$

$l_{1,2} = -1 \pm i$ – корни характеристического уравнения. Числа $a \pm bi = -1 \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения. Перед $\sin x$ стоит постоянная 1. Следовательно, частное решение имеет вид:

$$y_{÷.í.} = e^x (A\cos x + B\sin x).$$

д) $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^x + xe^{2x}$.

Здесь необходимо воспользоваться принципом наложения решений.

Рассмотрим сначала уравнение

$$y'' - 5y' + 6y = \left(x^2 + 1\right)e^x .$$

Составим характеристическое уравнение:

$$l^2 - 5l + 6 = 0,\ l_1 = 2,\ l_2 = 3 \text{ – корни.}$$

Число $a = 1$ не является корнем характеристического уравнения. Перед e^x стоит многочлен второй степени. Следовательно, частное решение

$$y_1 = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^x .$$

Рассмотрим уравнение

$$y'' - 5y' + 6y = xe^{2x} .$$

$a = 2$ – корень характеристического уравнения кратности $r = 1$. Перед e^{2x} стоит многочлен первой степени. Следовательно, частное решение

$$y_2 = x\left(Dx + E\right)e^{2x} .$$

И тогда частное решение исходного уравнения:

$$y_{\div.í\,.} = y_1 + y_2;\ y = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^x + x\left(Dx + E\right)e^{2x} .$$

е) $y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos 2x - x^2 e^x \sin 2x$.

Составим характеристическое уравнение

$$l^2 - 2l + 5 = 0.$$

Его корни $l_{1,2} = 1 \pm 2i$. $a = 1$, $b = 2$, число $a \pm bi = 1 \pm 2i$ – корни характеристического уравнения кратности $r = 1$.

Перед $\cos 2x$ стоит многочлен первой степени, перед $\sin 2x$ – второй степени. Максимальное число $N = \max\{n, m\} = 2$. Следовательно, частное решение имеет вид:

$$y_{\div í} = xe^x\left[\left(Ax^2 + Bx + C\right)\cos 2x + \left(Dx^2 + Ex + F\right)\sin 2x\right].$$

<u>*Пример 2.*</u>

Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = x^2 .$$

Решение.

Найдем сначала общее решение однородного уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = 0 .$$

Составим характеристическое уравнение

$$l^2 - 4l + 4 = 0.$$

Его корни $l_1 = l_2 = 2$.

Тогда общее решение y_0 однородного уравнения

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}, \text{ т.е.}$$

$$y_0 = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{2x} .$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид: $y = y_0 + y_{ч.н.}$, где y_0 – общее решение однородного уравнения, $y_{\div\acute{i}}$ – частное решение исходного неоднородного уравнения. Найдем $y_{\div\acute{i}}$.

Число $a = 0$ не является корнем характеристического уравнения. Правая часть представляет собой многочлен второй степени. Следовательно, $y_{\div\acute{i}}$ имеет вид:

$$y_{\div.\acute{i}\,.} = Ax^2 + Bx + C,$$

где числа A, B, C найдем методом неопределенных коэффициентов.

Найдем y', y'':

$$y' = 2Ax + B,\ y'' = 2A.$$

Подставим в исходное уравнение вместо y, y', y'' их выражения:

$$2A - 8Ax - 4B + 4Ax^2 + 4Bx + 4C = x^2.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 4A = 1 \\ x & -8A + 4B = 0 \\ x^0 & 2A - 4B + 4C = 0 \end{array}\right\}$$ из этой системы $A = \frac{1}{4}$; подставив $A = \frac{1}{4}$ во второе уравнение, получим: $-2 + 4B = 0 \Rightarrow 4B = 2$, $B = \frac{1}{2}$.

Подставим в третье уравнение $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, получим

$$\frac{1}{2} - 2 + 4C = 0 \Rightarrow C = \frac{3}{8}.$$

Следовательно, $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{3}{8}$.

Тогда частное решение

$$y_{\div.\acute{i}\,.} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$$

и общее решение уравнения

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}.$$

Его можно привести к виду:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{1}{8}\left(2x^2 + 4x + 3\right).$$

Ответ: $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{1}{8}\left(2x^2 + 4x + 3\right)$, где $\forall C_1, C_2 \in R$.

__Пример 3.__

Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = xe^x.$$

Решение.

Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

$\lambda = 1$ – корень кратности $r = 2$ характеристического уравнения.

Общее решение однородного уравнения

$$y_0 = e^x\left(C_1 + C_2 x\right).$$

Число $a = 1$ – корень характеристического уравнения кратности $r = 2$. Перед e^x стоит многочлен первой степени. Частное решение ищем в виде:

$$y_{ч.н.} = x^2 e^x\left(Ax + B\right), \text{ или}$$

$$y_{ч.н.} = Ae^x x^3 + Be^x x^2.$$

Найдем y', y'' и подставим в исходное уравнение вместо y, y', y'' их выражения;

$y' = Ae^x x^3 + Ae^x 3x^2 + 2Bxe^x + Bx^2 e^x$.

$y'' = Ae^x x^3 + Ae^x 3x^2 + Ae^x 3x^2 + Ae^x 6x + 2Be^x + 2Bxe^x + 2Bxe^x + Bx^2 e^x =$
$= Ae^x x^3 + 6Ae^x x^2 + 6Ae^x x + 2Be^x + 4Bxe^x + Bx^2 e^x$.

Получаем уравнение:

$Ae^x x^3 + 6Ae^x x^2 + 6Ae^x x + 2Be^x + 4Bxe^x + Bx^2 e^x - 2Ae^x x^3 - 6Ae^x x^2 -$
$-4Bxe^x - 2Bx^2 e^x + Ae^x x^3 + Be^x x^2 = xe^x$.

$$6Axe^x + 2Be^x = xe^x.$$

Приравниваем коэффициенты при xe^x:

$6A = 1$, $A = \dfrac{1}{6}$, $2B = 0$, $B = 0$.

Частное решение $y_{ч.н.} = \dfrac{1}{6} e^x x^3$.

Общее решение данного уравнения

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right)e^x + \frac{1}{6}x^3 e^x.$$

Ответ: $y = \left(C_1 + C_2 x\right)e^x + \dfrac{1}{6}x^3 e^x$, где $\forall C_1, C_2 \in R$.

<u>*Пример 4:*</u>

Найти решение уравнения

$$y'' + 4y = \sin x,$$

удовлетворяющее условиям $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 0$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 4 = 0,$$

$\lambda_{1,2} = \pm 2i$ – корни характеристического уравнения. Общее решение однородного уравнения:

$$y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

$a = 0$, $b = 1$. Числа $a \pm bi = 0 \pm i = \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения.

Частное решение будет иметь вид:

$$y_{ч.н.} = A\cos x + B\sin x .$$

Найдем y', y''.

$y' = -A\sin x + B\cos x$;

$y'' = -A\cos x - B\sin x$.

Подставим в уравнение вместо y, y', y'' их выражения:

$-A\cos x - B\sin x + 4A\cos x + 4B\sin x = \sin x$; или $3A\cos x + 3B\sin x = \sin x$.

Приравняем коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$:

$$\begin{array}{l|l} \cos x & 3A = 0; \quad A = 0; \\ \sin x & 3B = 1; \quad B = \dfrac{1}{3}. \end{array}$$

Частное решение $y_{ч.н.} = \dfrac{1}{3}\sin x$

и общее решение данного уравнения

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{3}\sin x .$$

Найдем y': $y' = -2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x + \dfrac{1}{3}\cos x$.

Составим систему для нахождения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 = 1; \\ 2C_2 + \dfrac{1}{3} = 1; \end{cases}$$

$C_1 = 1$; $C_2 = \dfrac{1}{3}$; искомое решение $y = \cos 2x + \dfrac{1}{3}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin x$ или $y = \cos 2x + \dfrac{1}{3}(\sin 2x + \sin x)$.

Ответ: $y = \cos 2x + \dfrac{1}{3}(\sin 2x + \sin x)$.

Пример 5.

Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y' = e^x(24\cos 2x + 2\sin 2x)$$

Решение.

Составим характеристическое уравнение:

$$l^2 + 4l = 0;$$

$l(l + 4) = 0$; $l_1 = 0$; $l_2 = -4$.

Общее решение однородного уравнения $y_0 = C_1 + C_2e^{-4x}$.

$a = 1$, $b = 2$. Числа $a \pm bi = 1 \pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения.

Частное решение ищем в виде:

$$y_{ч.н.} = e^x\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right).$$

Найдем y', y''.

$y' = e^x\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) + e^x\left(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x\right) =$

$= e^x\left(\left(A+2B\right)\cos 2x + \left(B-2A\right)\sin 2x\right).$

$y'' = e^x\left(\left(A+2B\right)\cos 2x + \left(B-2A\right)\sin 2x\right) +$

$+e^x\left(-2\left(A+2B\right)\sin 2x + 2\left(B-2A\right)\cos 2x\right) =$

$= e^x\left(\left(A+2B+2B-4A\right)\cos 2x + \left(B-2A-2A-4B\right)\sin 2x\right) =$

$= e^x\left(\left(-3A+4B\right)\cos 2x + \left(-4A-3B\right)\sin 2x\right).$

Подставим в уравнение y' и y'':

$e^x\left(\left(-3A+4B\right)\cos 2x + \left(-4A-3B\right)\sin 2x\right) +$

$+4e^x\left(\left(A+2B\right)\cos 2x + \left(B-2A\right)\sin 2x\right) = e^x\left(24\cos 2x + 2\sin 2x\right).$

Разделим обе части уравнения на e^x:

$\left(-3A+4B\right)\cos 2x + \left(-4A-3B\right)\sin 2x + \left(4A+8B\right)\cos 2x + \left(4B-8A\right)\sin 2x =$

$= 24\cos 2x + 2\sin 2x.$

$\left(-3A+4B+4A+8B\right)\cos 2x + \left(-4A-3B+4B-8A\right)\sin 2x =$

$= 24\cos 2x + 2\sin 2x.$

Приравняем коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$:

$$\left.\begin{array}{l|l} \cos 2x & A+12B=24 \\ \sin 2x & -12A+B=2 \end{array}\right\} \qquad \begin{cases} B = 2+12A; \\ A+12\left(2+12A\right) = 24. \end{cases}$$

$A + 24 + 144A = 24.$

$145A = 0$, $A = 0$, $B = 2$.

Частное решение $y_{ч.н.} = 2e^x\sin 2x$.

Общее решение исходного уравнения

$$y = C_1 + C_2e^{-4x} + 2e^x\sin 2x.$$

Ответ: $y = C_1 + C_2e^{-4x} + 2e^x\sin 2x$, где $\forall C_1, C_2 \in R$.

<u>*Пример 6.*</u>

Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = 2\cos x - \left(4x+4\right)\sin x.$$

Решение.

Составим характеристическое уравнение

$$l^2 + 1 = 0,$$

$l_{1,2} = \pm i$ – корни характеристического уравнения.

Общее решение исходного уравнения

$$y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

$a = 0$, $b = 1$, числа $a \pm bi = \pm i$ – корни характеристического уравнения кратности $r = 2$.

Перед $\cos x$ стоит постоянная 2, перед $\sin x$ – многочлен первой степени. $N = \max\{n, m\} = 1$.

Частное решение ищем в виде:

$$y_{ч.н.} = x\big((Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x\big).$$

Найдем y', y'':

$y' = (Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x +$

$+x\big(A\cos x - (Ax+B)\sin x + C\sin x + (Cx+D)\cos x\big)$.

$y'' = A\cos x - (Ax+B)\sin x + C\sin x + (Cx+D)\cos x +$

$+A\cos x - (Ax+B)\sin x + C\sin x + (Cx+D)\cos x +$

$+x\big(-A\sin x - A\sin x - (Ax+B)\cos x + C\cos x + C\cos x - (Cx+D)\sin x\big)$;

$y'' = 2A\cos x - 2(Ax+B)\sin x + 2C\sin x + 2(Cx+D)\cos x +$

$+x\big(-2A\sin x + 2C\cos x - (Ax+B)\cos x - (Cx+D)\sin x\big)$.

Подставим в уравнение y' и y'':

$2A\cos x - 2(Ax+B)\sin x + 2C\sin x + 2(Cx+D)\cos x - 2Ax\sin x + 2Cx\cos x -$

$-Ax^2\cos x - Bx\cos x - Cx^2\sin x - Dx\sin x + Ax^2\cos x + Bx\cos x + Cx^2\sin x +$
$+Dx\sin x = 2\cos x - (4x+4)\sin x$.

После преобразований остается уравнение:
$2A\cos x - 2Ax\sin x - 2B\sin x + 2C\sin x + 2Cx\cos x + 2D\cos x -$
$-2Ax\sin x + 2Cx\cos x = 2\cos x - (4x+4)\sin x$.

Или:
$2A\cos x - 4Ax\sin x + 4Cx\cos x - 2B\sin x + 2C\sin x + 2D\cos x =$
$= 2\cos x - (4x+4)\sin x$.

Приравняем коэффициенты при $\cos x$, $\sin x$, $x\cos x$, $x\sin x$:

$$\begin{array}{l|l} \cos x & 2A + 2D = 2 \\ \sin x & -2B + 2C = -4 \\ x\cos x & 4C = 0 \\ x\sin x & -4A = -4 \end{array}\Bigg\}$$

Эту систему необходимо решить и найти A, B, C, D.
$A = 1$, $C = 0$, $B = 2$, $D = 0$.

Частное решение имеет вид:

$$y_{ч.н.} = x(x+2)\cos x = \left(x^2 + 2x\right)\cos x.$$

Общее решение данного уравнения:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \left(x^2 + 2x\right)\cos x.$$

Ответ: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \left(x^2 + 2x\right)\cos x$, где $\forall C_1, C_2 \in R$.

<u>Пример 7.</u>

Найти решение уравнения

$$y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1,$$

удовлетворяющее условиям: $y = \dfrac{1}{8}$, $y' = 1$ при $x = 0$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение:

$$l^{\,2} - 2l\ = 0,$$

$l\ (l\ - 2) = 0$; $l_1 = 0$; $l_2 = 2$.

Общее решение однородного уравнения $y_0 = C_1 + C_2 e^{2x}$.

Применим принцип суперпозиции решений.

Частное решение уравнения $y'' - 2y' = e^{2x}$ будет иметь вид:

$$y_1 = Axe^{2x}.$$

Частное решение уравнения $y'' - 2y' = x^2 - 1$ будет

$$y_2 = x\left(Bx^2 + Cx + D\right).$$

Частное решение данного уравнения $y_{\div.\acute{\imath}\,.} = Axe^{2x} + x\left(Bx^2 + Cx + D\right)$.

Найдем y', y'':

$y' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} + 3Bx^2 + 2Cx + D$.

$y'' = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} + 6Bx + 2C$;

подставим y' и y'' в уравнение:

$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} + 6Bx + 2C - 2Ae^{2x} - 4Axe^{2x} - 6Bx^2 - 4Cx - 2D =$

$= e^{2x} + x^2 - 1.$

После преобразований получаем уравнение:

$4Ae^{2x} - 6Bx^2 + x\left(6B - 4C\right) + 2C - 2D = e^{2x} + x^2 - 1.$

Приравниваем коэффициенты при e^{2x}, x^2, x, x^0:

$$\left.\begin{array}{l|l} e^{2x} & 2A = 1 \\ x^2 & -6B = 1 \\ x & 6B - 4C = 0 \\ x^0 & 2C - 2D = -1 \end{array}\right\} \qquad \begin{cases} A = \dfrac{1}{2}; \\ B = -\dfrac{1}{6}; \\ C = -\dfrac{1}{4}; \\ D = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение $y_{\div.\acute{\imath}\,.} = \dfrac{1}{2}xe^{2x} + x\left(-\dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}\right)$, т.е.

$$y_{\div.\acute{\imath}\,.} = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x.$$

Общее решение

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x.$$

Найдем C_1 и C_2 так, чтобы решение удовлетворяло заданным условиям.

Найдем сначала y':

$$y' = 2C_2 e^{2x} + \frac{e^{2x}}{2} + x e^{2x} - \frac{1}{6} \cdot 3x^2 - \frac{1}{4} \cdot 2x + \frac{1}{4};$$

$$y' = 2C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{2x} + x e^{2x} - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4}.$$

$$y(0) = \frac{1}{8}; \; y'(0) = 1.$$

Составим систему для нахождения C_1 и C_2.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \dfrac{1}{8}; \\ 2C_2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = 1; \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} C_1 + C_2 = \dfrac{1}{8}; \\ 2C_2 = \dfrac{1}{4}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = \dfrac{1}{8}; \\ C_1 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, искомое решение имеет вид:

$$y = \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x$$

или это решение можно записать в виде:

$$y = \frac{1}{8} e^{2x} (4x + 1) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}.$$

Ответ: $y = \dfrac{1}{8} e^{2x} (4x + 1) - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{4}$.

Задания.

Решить уравнения:

1) $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x) e^{-x}$;
2) $y'' - 6y' + 10y = 51 e^{-x}$;
3) $y'' + 6y' + 9y = (48x + 8) e^{x}$;
4) $y'' + y = -4 \cos x - 2 \sin x$;
5) $y'' + 2y' - 24y = 6 \cos 3x - 33 \sin 3x$.

Ответы:

1) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + (4 - 2x) e^{-x}$;
2) $y = e^{3x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 3e^{-x}$;
3) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + (3x - 1) e^{x}$;
4) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(\cos x - 2 \sin x)$;
5) $y = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{4x} + \sin 3x$.

Домашнее задание.

Решить уравнения:

1) $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x}$;
2) $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$;
3) $y'' - 6y' + 34y = 18\cos 5x + 60\sin 5x$;
4) $y'' + 4y' + 20y = 4\cos 4x - 52\sin 4x$;
5) $y'' + 16y = 8\cos 4x$.

(*Ответы:*

1) $y = e^{4x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) + 2e^{2x}$;
2) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + 3xe^{4x}$;
3) $y = e^{3x}\left(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x\right) + 2\cos 5x$;
4) $y = e^{-2x}\left(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x\right) + 3\cos 4x - \sin 4x$;
5) $y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x + x\sin 4x$.)

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Рассмотрим линейное уравнение n–ого порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \quad (1)$$

Предполагаем, что коэффициенты $p_1(x)$, $p_2(x), \ldots, p_n(x)$ и свободный член $f(x)$ определены и непрерывны в интервале $(a; b)$.

Интегрирование неоднородного уравнения (1) приводит к интегрированию однородного уравнения

$$z^{(n)} + p_1(x)z^{(n-1)} + p_2(x)z^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)z' + p_n(x)z = 0\ . \quad (2)$$

Для построения общего решения однородного уравнения достаточно знать n линейно-независимых в интервале $(a; b)$ (и тем самым нулевых) частных решений z_1, $z_2, \ldots, z_n$, т.е. таких решений, для которых тождество

$$a_1z_1 + a_2z_2 + \ldots + a_nz_n = 0 \quad (a < x < b),$$

где a_1, $a_2, \ldots, a_n$, – постоянные числа, может выполняться только в очевидном случае $a_1 = 0$, $a_2 = 0, \ldots, a_n = 0$.

Такая система решений называется ***фундаментальной*** системой решений. Чтобы система решений z_1, $z_2, \ldots, z_n$ была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Вронского (Вронскиан)

$$w(x)=\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ z_1' & z_2' & \dots & z_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \dots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

был отличен от нуля хотя бы в одной точке из интервала $(a;b)$.

Если найдена фундаментальная система решений z_1, $z_2,\ldots,z_n$ однородного уравнения (2), то формула $z=C_1z_1+C_2z_2+\ldots+C_nz_n$, где C_1, $C_2,\ldots,C_n$ – произвольные постоянные, дает общее решение этого уравнения в области $(a<x<b)$, $|y|<+\infty$, $|y'|<+\infty,\ldots,\left|y^{(n-1)}\right|<+\infty$.

Для построения общего решения неоднородного уравнения (1) достаточно найти одно частное решение его и прибавить к нему общее решение соответствующего однородного уравнения (2), так, что если y_1 есть частное решение уравнения (1), а $z=C_1z_1+C_2z_2+\ldots+C_nz_n$ – общее решение однородного уравнения (2), то

$$y=y_1+C_1z_1+C_2z_2+\ldots+C_nz_n \tag{3}$$

будет общим решением уравнения (1).

На деле, однако, непосредственное нахождение частного решения неоднородного уравнения, кроме случая уравнения с постоянными коэффициентами и со специальными свободными членами, представляет большие затруднения. Поэтому для нахождения общего решения неоднородного уравнения часто применяют метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа), который всегда дает возможность найти общее решение уравнения (1), если известна фундаментальная система решений однородного уравнения (2). Этот метод в том, что решение уравнения (1) ищется в виде:

$$y=C_1(x)z_1+C_2(x)z_2+\ldots+C_n(x)z_n \tag{4}$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ – некоторые непрерывно дифференцируемые функции от x, подлежащие определению.

Эти функции определяют из следующей системы:

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)z_1+C_2'(x)z_2+\ldots+C_n'(x)z_n=0, \\ C_1'(x)z_1'+C_2'(x)z_2'+\ldots+C_n'(x)z_n'=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)z_1^{(n-2)}+C_2'(x)z_2^{(n-2)}+\ldots+C_n'(x)z_n^{(n-2)}=0, \\ C_1'(x)z_1^{(n-1)}+C_2'(x)z_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'(x)z_n^{(n-1)}=f(x). \end{array}\right\}$$

Решая ее, находят производные от искомых функций
$C_1'(x) = j_{\,1}(x)$, $C_2'(x) = j_{\,2}(x)$, …, $C_n'(x) = j_{\,n}(x)$, откуда
$C_1(x) = \int j_{\,1}(x)dx + C_1$, $C_2(x) = \int j_{\,2}(x)dx + C_2, \ldots,$ $C_n(x) = \int j_{\,n}(x)dx + C_n$.

Подставляя эти значения $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ в формулу (4), получают

$$y = z_1 \int j_{\,1}(x)dx + z_2 \int j_{\,2}(x)dx + \ldots + z_n \int j_{\,n}(x)dx + C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n .$$

Это есть общее решение уравнения (1).

<u>*Пример 1.*</u>

Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Решение.

Здесь найти частное решение методом неопределенных коэффициентов нельзя. Поэтому для нахождения общего решения воспользуемся методом вариации произвольных постоянных.

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее данному,

$$z'' + z = 0 .$$

Составим характеристическое уравнение

$$l^{\,2} + 1 = 0 .$$

Его корни $l_{\,1,2} = \pm i$.

Поэтому однородное уравнение имеет фундаментальную систему решений

$$z_1 = \cos x\, ,\ z_2 = \sin x$$

и общее решение $y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, где $C_1, C_2 = const$.

Следовательно, общее решение данного уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x\, , \tag{5}$$

где $C_1(x), C_2(x)$ – искомые неизвестные функции.

Для нахождения $C_1(x), C_2(x)$ составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения $C_1'(x)$: $C_1'(x) = -\,C_2'(x)tgx$ и подставим во второе уравнение:

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)tgx, \\ C_2'(x)tgx \cdot \sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)tgx, \\ C_2'(x)\left(\dfrac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x\right) = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)tgx, \\ C_2'(x)\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2'(x) = 1, \\ C_1'(x) = -tgx. \end{cases}$$

Интегрируя, имеем:

$$\begin{cases} C_1(x) = -\int tgxdx + C_1 = \ln\left|\cos x\right| + C_1, \\ C_2(x) = x + C_2. \end{cases}.$$

Подставляя эти значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формулу (5), получим общее решение данного неоднородного уравнения в виде

$$y = \cos x \cdot \ln\left|\cos x\right| + x\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x \text{, где } C_1, C_2 = const.$$

Ответ: $y = \cos x \cdot \ln\left|\cos x\right| + x\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x$, где $\forall C_1, C_2 \in R$.

Пример 2.

Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$$

Решение.

Рассмотрим однородное уравнение

$$z'' - 4z' + 5z = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$l^2 - 4l + 5 = 0.$$

$l_{1,2} = 2 \pm i$ – корни характеристического уравнения.

Однородное уравнение имеет фундаментальную систему решений

$$z_1 = e^{2x}\cos x,\ z_2 = e^{2x}\sin x.$$

Общее решение данного уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x)e^{2x}\cos x + C_2(x)e^{2x}\sin x \qquad (6)$$

Составим систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{2x}\cos x + C_2'(x)e^{2x}\sin x = 0, \\ C_1'(x)\left(2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x\right) + C_2'(x)\left(2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x\right) = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ C_1'(x)(2\cos x - \sin x) + C_2'(x)(2\sin x + \cos x) = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)tgx, \\ -C_2'(x)\dfrac{\sin x}{\cos x}(2\cos x - \sin x) + C_2'(x)(2\sin x + \cos x) = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)tgx, \\ -C_2'(x)\cdot 2\sin x + C_2'(x)\dfrac{\sin^2 x}{\cos x} + C_2'(x)\cdot 2\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)tgx, \\ C_2'(x)\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2'(x) = 1, \\ C_1'(x) = -tgx. \end{cases}.$$

Интегрируя, имеем:

$$\begin{cases} C_1(x) = \ln|\cos x| + C_1, \\ C_2(x) = x + C_2. \end{cases}$$

подставляя эти значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формулу (6), получим общее решение данного уравнения в виде

$$y = (\ln|\cos x| + C_1)e^{2x}\cos x + (x + C_2)e^{2x}\sin x \text{, где } C_1, C_2 = const.$$

Ответ: $y = (\ln|\cos x| + C_1)e^{2x}\cos x + (x + C_2)e^{2x}\sin x$, где $\forall C_1, C_2 \in R$.

Задания.

Решить дифференциальные уравнения методом вариации произвольных постоянных:

1) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$;

2) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{\cos x}$;

3) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}ctgx$;

4) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{x^2}$;

5) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

Ответы:

1) $y = \left(\frac{1}{4}\ln\left|\cos 2x\right| + C_1\right)\cos 2x + \left(\frac{1}{2}x + C_2\right)\sin 2x$;

2) $y = \left(\ln\left|\cos x\right| + C_1\right)e^{-x}\cos x + \left(x + C_2\right)e^{-x}\sin x$;

3) $y = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x + e^{-x}\sin x \cdot \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)\right|$;

4) $y = \left(-\ln x + C_1\right)e^{x} + \left(-\frac{1}{x} + C_2\right)xe^{x}$;

5) $y = \left(-x + C_1\right)\cos x + \left(\ln\left|\sin x\right| + C_2\right)\sin x$.

Домашнее задание.

Решить дифференциальные уравнения методом вариации произвольных постоянных:

1) $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$;

2) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$;

3) $y'' + y = -ctg^2 x$;

4) $y'' - y' = e^{2x} \cdot \cos\left(e^{x}\right)$;

5) $y'' + y = \frac{2}{\sin^2 x}$.

Ответы:

1) $y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2x}\right)e^{-2x}$;

2) $y = \left(-\frac{5}{6}\sqrt{(x+1)^5} + 2\sqrt{(x+1)^3} + C_1\right)e^{-x} +$
$+\left(2\sqrt{(x+1)^3} + C_2\right)xe^{-x}$;

3) $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x \cdot \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)\right| + 2$;

4) $y = C_1 + C_2 e^{x} - \cos\left(e^{x}\right)$;

5) $y = C_1\cos x + C_2\sin x + 2\cos x \cdot \ln\left|ctg\left(\frac{x}{2}\right)\right| - 2$.

Решение систем дифференциальных уравнений

Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ .... \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n), \end{cases}$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ – неизвестные функции независимой переменной t, называется ***нормальной системой дифференциальных уравнений***.

Если правые части нормальной системы дифференциальных уравнений являются линейными функциями относительно $x_1, x_2, ..., x_n$, то система дифференциальных уравнений называется ***линейной***.

Одним из методов решения систем дифференциальных уравнений является ***метод исключения***. В этом случае нормальную систему дифференциальных уравнений удается свести к одному уравнению n-ого порядка, содержащему одну неизвестную функцию. Сведение нормальной системы к одному уравнению может быть достигнуто дифференцированием одного из уравнений системы и исключением всех неизвестных, кроме одного.

Более подробно этот вопрос рассмотрим на примере.

Пример 1.

Методом исключения найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

Решение.

Дифференцируем первое уравнение по t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}.$$

Подставим в это уравнение вместо $\dfrac{dy}{dt}$ функцию $\dfrac{dy}{dt} = -x$ из второго уравнения; получаем уравнение второго порядка с одной неизвестной x:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x \text{ т.е. } x'' + x = 0.$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его решения составим характеристическое уравнение:

$$l^2 + 1 = 0,$$

$l_{1,2} = \pm i$; общее решение

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Из первого уравнения системы следует, что $y = \dfrac{dx}{dt}$.

Найдем y:

$$y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

Следовательно, общее решение системы:

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t, \end{cases}$$

где $C_1, C_2 = const$.

<u>Пример 2.</u>

Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$$

Решение.

Дифференцируем первое уравнение по t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 5\frac{dy}{dt};$$

из первого уравнения определяется $y = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{dx}{dt} - x\right)$ и тогда из второго будем иметь: $\dfrac{dy}{dt} = -x - \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{dx}{dt} - x\right)$ или

$$\frac{dy}{dt} = -x - \frac{3}{5}\frac{dx}{dt} + \frac{3}{5}x = -\frac{3}{5}\frac{dx}{dt} - \frac{2}{5}x.$$

Подставляя y и $\dfrac{dy}{dt}$ в уравнение, полученное после дифференцирования, приходим к уравнению второго порядка с одной неизвестной x:

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dx}{dt} - 3\dfrac{dx}{dt} - 2x;$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -2\dfrac{dx}{dt} - 2x;$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + 2x = 0$, т.е.

$$x'' + 2x' + 2x = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$l^2 + 2l + 2 = 0,$$

$l_{1,2} = -1 \pm i$. Общее решение уравнения $x'' + 2x' + 2x = 0$:

$$x = e^{-t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right).$$

Найдем y: $y = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{dx}{dt} - x\right)$.

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right) + e^{-t}\left(-C_1 \sin t + C_2 \cos t\right);$$

следовательно,

$$y = \frac{1}{5}\Big(-C_1 e^{-t} \cos t - C_2 e^{-t} \sin t - C_1 e^{-t} \sin t + C_2 e^{-t} \cos t - C_1 e^{-t} \cos t -$$

$$-C_2 e^{-t} \sin t\Big) = \frac{1}{5} e^{-t}\left[\left(C_2 - 2C_1\right)\cos t - \left(C_1 + 2C_2\right)\sin t\right].$$

Итак, общее решение системы:

$$\begin{cases} x = e^{-t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right), \\ y = \dfrac{1}{5} e^{-t}\left[\left(C_2 - 2C_1\right)\cos t - \left(C_1 + 2C_2\right)\sin t\right], \end{cases} \text{ где } C_1, C_2 = const.$$

<u>Пример 3.</u>

Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$$

Решение.

Эта система является неоднородной.

Покажем, что систему можно привести к неоднородному линейному уравнению второго порядка постоянными коэффициентами.

Дифференцируем по t первое уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 5\frac{dx}{dt} - 3\frac{dy}{dt} + 6e^{3t};$$

из первого уравнения определяется $y = \dfrac{1}{3}\left(5x - \dfrac{dx}{dt} + 2e^{3t}\right)$.

Из второго уравнения будем иметь:

$$\frac{dy}{dt} = x + \frac{1}{3}\left(5x - \frac{dx}{dt} + 2e^{3t}\right) + 5e^{-t} = x + \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}\frac{dx}{dt} + \frac{2}{3}e^{3t} + 5e^{-t};$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{8}{3}x - \frac{1}{3}\frac{dx}{dt} + \frac{2}{3}e^{3t} + 5e^{-t}.$$

Подставим y и $\dfrac{dy}{dt}$ в уравнение, полученное после дифференцирования:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 5\frac{dx}{dt} - 8x + \frac{dx}{dt} - 2e^{3t} - 15e^{-t} + 6e^{3t};$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 6\frac{dx}{dt} - 8x + 4e^{3t} - 15e^{-t};$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 8x = 4e^{3t} - 15e^{-t}.$$

Решим это уравнение, применяя принцип суперпозиции решений.

Рассмотрим характеристическое уравнение:

$$l^2 - 6l + 8 = 0;$$

$l_1 = 2$; $l_2 = 4$.

$x_0 = C_1e^{2t} + C_2e^{4t}$ – общее решение однородного уравнения.

Рассмотрим сначала уравнение:

$$x'' - 6x' + 8x = 4e^{3t};$$

частное решение x_1 ищем в виде: $x_1 = Ae^{3t}$;

$x_1' = 3Ae^{3t}$; $x_1'' = 9Ae^{3t}$.

Подставим x_1, x_1', x_1'' в уравнение:

$9Ae^{3t} - 18Ae^{3t} + 8Ae^{3t} = 4e^{3t}$;

$-Ae^{3t} = 4e^{3t}$; $A = -4$.

Следовательно, частное решение $x_1 = -4e^{3t}$.

Рассмотрим уравнение

$$x'' - 6x' + 8x = -15e^{-t};$$

частное решение x_2 ищем в виде: $x_2 = Ae^{-t}$.

$x_2' = -Ae^{-t}$; $x_2'' = Ae^{-t}$.

Подставим x_2, x_2', x_2'' в уравнение:

$Ae^{-t} + 6Ae^{-t} + 8Ae^{-t} = -15e^{-t}$;

$15Ae^{-t} = -15e^{-t}$;

$A = -1$;

$$x_2 = -e^{-t}.$$

Следовательно, общее решение

$$x = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t}.$$

Найдем y; т.к. $y = \dfrac{1}{3}\left(5x - \dfrac{dx}{dt} + 2e^{3t}\right)$, найдем $\dfrac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = 2C_1e^{2t} + 4C_2e^{4t} - 12e^{3t} + e^{-t};$$

$$y=\frac{1}{3}\left(5C_1e^{2t}+5C_2e^{4t}-20e^{3t}-5e^{-t}-2C_1e^{2t}-4C_2e^{4t}+12e^{3t}-e^{-t}+2e^{3t}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(3C_1e^{2t}+C_2e^{4t}-6e^{3t}-6e^{-t}\right);$$

$$y=C_1e^{2t}+\frac{1}{3}C_2e^{4t}-2e^{3t}-2e^{-t}.$$

Следовательно, общее решение системы

$$\begin{cases} x=C_1e^{2t}+C_2e^{4t}-4e^{3t}-e^{-t}, \\ y=C_1e^{2t}+\frac{1}{3}C_2e^{4t}-2e^{3t}-2e^{-t}, \end{cases}$$

где $C_1, C_2 = const$.

Задания.

Решить системы методом исключения:

1) $\begin{cases} x'=x-y, \\ y'=-4x+y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x'=-x+8y, \\ y'=x+y; \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x'=-2x+y, \\ y'=-3x+2y; \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x'=-5x+2y+e^{t}, \\ y'=x+6y+e^{-2t}. \end{cases}$

(*Ответы:*

1) $\begin{cases} x=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}, \\ y=-2C_1e^{3t}+2C_2e^{-t}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}, \\ y=\frac{1}{2}C_1e^{3t}-\frac{1}{4}C_2e^{-3t}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=C_1e^{t}+C_2e^{-t}, \\ y=3C_1e^{t}+C_2e^{-t}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x=C_1e^{-4t}+C_2e^{-7t}+\frac{1}{5}e^{-2t}+\frac{7}{40}e^{t}, \\ y=\frac{1}{2}C_1e^{-4t}-C_2e^{-7t}+\frac{1}{40}e^{t}+\frac{3}{10}e^{-2t}. \end{cases}$)

Домашнее задание.

Решить системы методом исключения:

1) $\begin{cases} x' = 4x + 2y, \\ y' = 4x + 6y; \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x' = 8x - 3y, \\ y' = 2x + y; \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 5x + 4y; \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x' = 3x - 2y + t, \\ y' = 3x - 4y. \end{cases}$

(*Ответы:*

1) $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{8t}, \\ y = -C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{8t}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{7t}, \\ y = 2C_1 e^{2t} + \dfrac{1}{3} C_2 e^{7t}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{7t}, \\ y = -C_1 e^{-t} + \dfrac{5}{3} C_2 e^{7t}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} - \dfrac{2}{3} t - \dfrac{5}{18}, \\ y = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{-3t} - \dfrac{1}{2} t - \dfrac{1}{12}. \end{cases}$)

Литература

1. Бугров Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1988.
2. Демидович, В.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1977.
3. Зорич, В.А. Математический анализ: в 2 т. – М.: Наука, 1981.
4. Краснов, М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Выш. шк., 1983.
5. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа: В 3 т. – М.: Высш. шк., 1988.
6. Лихолетов, И.И. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике / И.И. Лихолетов, И.П. Мацкевич. – Мн.: Выш. шк., 1976.
7. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: в 2 т. М.: Наука, 1985.
8. Индивидуальные задания по высшей математике: Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Под ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 2000.

Содержание

Учебное издание

Составители:
Мороз Людмила Трофимовна
Лизунова Ирина Владимировна
Гоголинская Рената Альдефонсовна
Джура Валентина Тимофеевна
Кузьмина Елена Викторовна

ПРАКТИКУМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

ЧАСТЬ IV

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Ответственный за выпуск: Мороз Л.Т.
Редактор: Строкач Т.В.
Компьютерная верстка: Боровикова Е.А.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 28.03.2011 г. Формат 60x84 $^1/_{16}$.
Бумага «Снегурочка». Усл. п. л. 3,45. Уч. изд. л. 3,75. Тираж 100 экз.
Заказ № 364. Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, Брест, ул. Московская, 267.