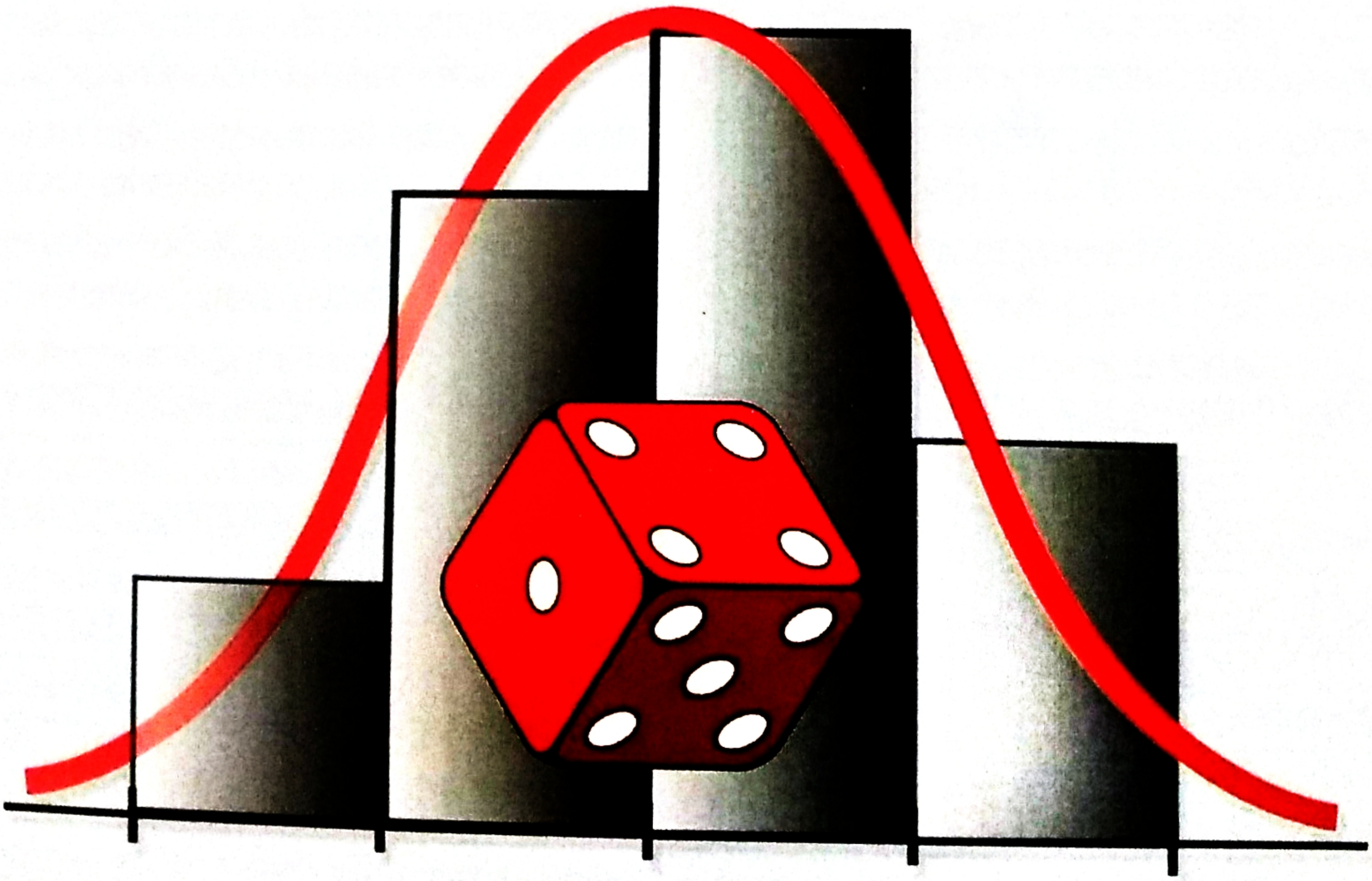
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Е. Н. Швычкина, С. Н. Наумовец, В. П. Черненко

ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Брест 2017

УДК 519.2.(076)
ББК 22.17

В настоящем практикуме рассматриваются задачи и упражнения по основным темам теории вероятностей и математической статистики, которые изучаются студентами технических специальностей втузов. Содержатся краткие теоретические сведения и наборы заданий для аудиторных и индивидуальных работ, даны решения типовых вариантов.

Составители: Е. Н. Швычкина, доцент, к. ф-м. н.,
С. Н. Наумовец, старший преподаватель,
В.П. Черненко, доцент.

Рецензенты: Басик А. И., доцент кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений Учреждения образования «Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина», к. ф-м. н.;

Пантелеева Е. В., доцент кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений Учреждения образования «Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина», к. ф-м. н.

Содержание

I. Случайные события

1.1 Элементы комбинаторики (размещения, перестановки, сочетания)

Раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных элементов (объектов), называется *комбинаторикой.*

Большинство задач комбинаторики решается с помощью двух общих правил: правила суммы и правила произведения.

Правило суммы:

Если некоторый объект *A* можно выбрать *m* способами, а объект *B* – *k* способами (не такими, как *A*), то объект «или *A*, или *B*» можно выбрать *m*+ *k* способами.

Правило произведения:

Если объект *A* можно выбрать *m* способами, а после каждого такого выбора другой объект *B* можно выбрать (независимо от выбора объекта *A*) *k* способами, то объект « *A* и *B*» можно выбрать $m \cdot k$ способами.

Пусть имеем конечное множество каких-то элементов: $a_1, a_2, ..., a_n$.

Определение 1. *Размещениями из n элементов по m* $(m < n)$ *называются подмножества, каждое из которых содержит m элементов из данных n, отличающихся одно от другого или элементами, или их порядком, или же и тем и другим.*

Число размещений из *n* элементов по *m* вычисляют по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Определение 2. *Перестановками из n элементов называются размещения из n по n.*

Т.к. все элементы участвуют в перестановках, то перестановки отличаются друг от друга только порядком элементов.

Число перестановок из *n* элементов обозначается P_n и определяется по формуле:

$$P_n = A_n^n = n(n-1)...1 = n!.$$

Определение 3. *Сочетаниями из n элементов по m* $(m < n)$ *называются те размещения из n элементов по m, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.*

Число сочетаний $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

До сих пор считали, что все элементы множества различны. Пусть некоторые элементы повторяются. Среди *n* элементов *k* различных; элементов первого типа n_1, элементов второго типа n_2, ..., элементов *k*-го типа n_k.

$$n_1 + n_2 + ... + n_k = n.$$

Подсчитаем *число перестановок с повторениями*. При перестановке *n* элементов всего $n!$ размещений, но перестановки элементов одного и того же типа ничего не меняют. Перестановки элементов 1, 2, … , k типов можно делать одновременно независимо друг от друга. Поэтому после $n_1!\, n_2! \ldots n_k!$ перестановок элементы исходной перестановки не изменятся.

Итак, число перестановок с повторяющимися элементами равно $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$.

Пусть данное множество содержит n элементов, из которых надо образовать *размещения по m элементов с повторениями*. Очевидно, что любой элемент (первый, второй, …, m-ый) может быть выбран n способами. По правилу произведений получаем, что число таких размещений будет равно

$$\widetilde{A}_n^m = n^m .$$

Число сочетаний $\widetilde{C}_n^m$ с повторениями из n элементов по m определяется по формуле $\widetilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \dfrac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$.

Задания для аудиторной работы

1. Найти все сочетания и размещения из четырехэлементного множества $\{a, b, c, d\}$ по 2.

2. Студенты некоторого курса изучают 12 дисциплин. В расписание занятий каждый день включается 3 предмета. Сколькими способами может быть составлено расписание занятий на каждый день?

3. Сколькими способами можно рассадить 8 человек по 8 вагонам поезда, если в каждый вагон сядет по одному человеку

4. Из девяти значащих цифр составляются: а) трехзначные числа; б) четырехзначные числа, цифры в которых не повторяются. Сколько таких чисел может быть составлено?

5. Сколькими способами можно из 15 человек составить делегацию в составе 8 человек?

6. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, 1 ферзь, 1 король) на первой линии шахматной доски?

7. Сколькими способами можно выставить на игру футбольную команду, состоящую из трех нападающих, трех полузащитников, четырех защитников и вратаря, если всего в команде 6 нападающих, 3 полузащитника, 6 защитников и 1 вратарь?

8. Из чисел 1, 2, 3, …, 100 составлены всевозможные парные произведения. Сколько полученных чисел будут кратны трем?

9. Сколькими способами можно из 9 человек образовать 3 комиссии по 4, по 3 и по 2 человека в каждой?

10. На плоскости отмечено 5 точек, никакие три из ни которых не лежат на одной прямой. Сколько различных треугольников задают эти точки?

11. Из 20 сотрудников лаборатории 5 человек должны уехать в командировку. Сколько может быть составов отъезжающей группы, если заведующий лабораторией и два ведущих инженера одновременно не должны уезжать?

Задания для индивидуальной работы

1. Есть n колоколов разных размеров, каждый из которых при ударе одинаковой силы издает звук, отличный от звуков остальных колоколов. По колоколам ударяют m раз. Сколькими способами можно извлечь при этом звук, состоящий из: **а)** s различных звуков; **б)** s любых звуков?

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
n	7	8	9	7	8	9	7	8	9	6
s	3	4	5	5	4	3	4	5	4	3

2. В школе n учеников и m учителей. Сколькими способами можно выбрать делегацию, состоящую из k учителей и l учеников?

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
n	30	34	32	33	35	31	38	36	35	34
m	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
k	2	3	4	5	2	3	4	5	2	3
l	5	6	8	7	5	8	7	6	6	5

3. N человек нужно разместить в k одноместных, l двуместных, s трехместных и m четырехместных номерах гостиницы. Сколькими способами они могут быть размещены в номерах такого типа?

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
N	10	8	8	10	11	12	10	8	11	8
k	1	2	3	2	0	3	2	2	2	1
l	2	1	1	0	2	1	0	0	1	0
s	3	0	1	0	1	1	0	2	1	1
m	4	1	0	2	1	1	2	0	1	1

1.2 Классическое и геометрическое определения вероятности случайного события

Событием называется любое явление, о котором можно сказать «произошло», «не произошло», «появилось», «не появилось» и т.п.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно наступает при некоторых данных условиях. Если при данных условиях событие никогда не наступает, оно называется *невозможным*.

Случайным называется такое событие, которое в результате опыта может появиться или не появиться.

Вероятностью случайного события A называется отношение числа m элементарных исходов опыта, благоприятствующих событию A, к общему числу n всех равновозможных исходов опыта.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Вероятность любого события удовлетворяет неравенству $0 \le P(A) \le 1$. Для достоверного события $P(U) = 1$, для невозможного $P(V) = 0$.

Относительной частотой события *A* или просто частотой, обозначаемой *W(A)*, называется отношение числа опытов *m*, в которых появилось событие *A*, к числу всех проведенных опытов *n*, т.е. $W(A)=\dfrac{m}{n}$.

Если число элементарных исходов опыта бесконечно и заполняет область *R*, а число исходов, благоприятствующих событию *A*, бесконечно и заполняет область *Q*, то вероятность случайного события *A* определяется по формуле геометрической вероятности

$$P(A)=\frac{мера\ (Q)}{мера\ (R)},$$

где мера области – это или ее длина, или площадь, или объем.

Задания для аудиторной работы

1. Куб, все грани которого окрашены, распилили на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешали. Определить вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три; г) четыре.

2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7.

3. В ящике имеются 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

4. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных – 6 отличников.

5. Из партии втулок, изготовленных токарем за смену, случайным образом для контроля взяты 10 штук. Найти вероятность того, что среди них 2 втулки второго сорта, если в партии 25 втулок первого сорта и 5 – второго.

6. На 8 карточках написаны буквы *А, Г, И, Л, М, О, Р, Т*. После их перемешивания вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают в том порядке, каком они вынуты. Найти вероятность того, что получим слово: а) «алгоритм»; б) «ритм».

7. Из букв разрезной азбуки составлено слово «математика». Карточки с отдельными буквами тщательно перемешивают, затем наугад вытаскивают и раскладывают их в порядке извлечения. Какова вероятность получения при этом слова а) «математика»; б) «макет».

8. На отрезке длины 20 см помещен меньший отрезок длины 10 см. Найти вероятность того, что точка, брошенная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок.

9. Внутрь круга радиусом *R* наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника.

Задания для индивидуальной работы

1. Билеты лотереи выпущены на общую сумму *N* у.е., цена билета *s* у.е. Ценные выигрыши попадают на *n* билетов. Определить вероятность ценного выигрыша на один билет.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	20000	25000	30000	35000	40000	45000	50000	55000	60000	65000
s	1	2	3	4	5	6	5	11	6	4
n	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100

2. В конверте среди N фотографий находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены n фотографий. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	14	13	12	11	15	16	17	18	19	20
n	5	3	5	4	3	4	3	4	3	5

3. В цехе работают N мужчин и M женщин. По табельным номерам наудачу отобраны s человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажется k женщин.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	12	13	14	11	10	8	7	6	9	15
M	8	7	6	9	10	12	13	14	11	5
s	5	6	7	10	7	6	5	8	8	9
k	3	2	1	5	6	1	2	5	7	4

4. Группа студентов из N человек распределяется на производственную практику следующим образом: в город A направляется s студентов, в город B – r студентов и в город C – k студентов. Какова вероятность того, что два определенных студента попадут на практику в один город?

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	23	26	27	28	30	25	26	27	28	30
s	10	9	8	7	12	9	11	9	6	10
r	8	10	7	10	10	7	4	9	8	9
k	5	7	12	11	8	9	11	9	14	11

5. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами a и b случайным образом выбирается точка X. Найдите вероятность того, что эта точка принадлежит трапеции $AMCD$, где точка M делит отрезок BC в отношении $m:n$, считая от точки B.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	4	3	6	4	8	5	5	15	10	9
b	6	6	9	8	12	15	10	15	25	27
m	1	1	2	1	3	2	1	3	4	4
n	1	2	1	3	1	3	4	2	1	5

1.3 Теоремы сложения и умножения вероятностей случайных событий

События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

События $A_1,\ A_2,\dots,\ A_n$ образуют *полную группу событий*, если:

1. $A_1 + A_2 + \dots + A_n = U$ (событие достоверное),
2. $A_i\,A_j = V,\ i \neq j$ (события попарно несовместные).

Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* событию А, если событие $\overline{A}$ происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие А.

Суммой (объединением) *А*+*В* двух событий *А* и *В* называют событие, состоящие в появлении события *А*, или события *В*, или обоих этих событий. *Суммой нескольких событий* называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

<u>Теорема 1.</u> Вероятность суммы конечного числа попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

<u>Следствие 1.</u> Вероятность появления одного из двух несовместных событий равно сумме вероятностей этих событий

$$P(A+B) = P(A) + P\left(B\right).$$

<u>Следствие 2.</u> Если события $A_1, A_2, ... , A_n$ образуют полную группу событий, то сумма их вероятностей равна 1

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1.$$

<u>Следствие 3.</u> Сумма вероятностей противоположных событий равна единице

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1, \qquad P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Произведением двух событий *А* и *В* называют событие *АВ*, состоящее в совместном появлении этих событий. *Произведением нескольких событий* называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Событие *А* называется *независимым* от события *В*, если появление события *А* не изменяет вероятности события *В*. Несколько событий называют *независимыми в совокупности* (или просто независимыми), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

<u>Теорема 2.</u> Для независимых в совокупности событий $A_1, A_2, ... , A_n$ справедливо равенство $P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n)$.

<u>Следствие 4.</u> Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

<u>Теорема 3.</u> Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

<u>Теорема 4.</u> Вероятность появления хотя бы одного из *n* совместных событий равна

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot ... \cdot \overline{A_n}).$$

Задания для аудиторной работы

1. Брошены три игральные кости. Найти вероятности следующих событий: а) на каждой из выпавших граней появится пять очков; б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков.

2. В ящике15 шаров, из которых 5 голубых и 10 красных. Из ящика последовательно вынимают 2 шара; первый шар в ящик не возвращают. Найти вероятность того, что первый вынутый шар окажется голубым, а второй - красным.

3. В урне имеется пять шаров с номерами от 1 до 5. Наудачу по одному извлекают три шара без возвращений. Найти вероятности следующих событий: а) последовательно появятся шары с номерами 1, 4, 5.

4. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете.

5. В ящике 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик наудачу взял 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

6. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

7. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятности безотказной работы (за время *t)* равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что за время *t* безотказно будут работать: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.

8. Модельер, разрабатывающий новую коллекцию одежды к сезону весна-лето, создает модели в зеленой, черной и красной цветовой гамме. Вероятность того, что зеленый цвет будет в моде весной равна 30%, что чёрный – 60%, а вероятность того, что в моде будет красный цвет равна 40%. Предполагая, что цвета выбираются независимо друг от друга, найти вероятность того, что: а) цветовое решение коллекции будет удачным более чем по одному цвету; б) в моде весной будет преобладать только красный цвет; в) в моде весной будет хотя бы один из указанных цветов.

9. Вероятность попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

Задания для индивидуальной работы

1. Три стрелка производят по одному выстрелу по цели, вероятности попадания в которую равны: для первого стрелка – p_1, для второго – p_2, для третьего – p_3. Найти вероятность того, что: **а)** в цель попадет только первый стрелок; **б)** в цель попадут два стрелка; **в)** хотя бы один стрелок попадет в цель.

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
p_1	0,7	0,5	0,4	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,4
p_2	0,8	0,3	0,5	0,7	0,6	0,7	0,8	0,9	0,3	0,5
p_3	0,6	0,9	0,8	0,5	0,7	0,8	0,9	0,3	0,4	0,6

2. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна p_1, второй - p_2, третий - p_3. Вычислить вероятность того, что студент сдаст: **а)** не менее двух экзаменов; **б)** менее трех экзаменов; **в)** хотя бы один экзамен.

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
p_1	0,6	0,9	0,2	0,3	0,4	0,2	0,7	0,1	0,4	0,7
p_2	0,7	0,2	0,4	0,5	0,7	0,3	0,5	0,2	0,2	0,8
p_3	0,6	0,3	0,6	0,7	0,8	0,5	0,8	0,3	0,6	0,2

3. Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены выйдет из строя, равна p_1, второй – p_2 и третий – p_3. Найти

вероятность того, что в течение смены выйдут из стоя: а) менее двух станков; б) два станка; в) более двух станков.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_1	0,3	0,3	0,4	0,3	0,4	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1
p_2	0,4	0,2	0,4	0,1	0,1	0,4	0,5	0,3	0,3	0,2
p_3	0,6	0,4	0,6	0,5	0,2	0,6	0,4	0,6	0,2	0,2

1.4 Формула полной вероятности. Формулы Байеса

События $A_1,\ A_2,...,\ A_n$ образуют *полную группу событий*, если:

1. $A_1 + A_2 + ... + A_n = U$ (событие достоверное),

2. $A_i\, A_j = V,\ i \neq j$ (события попарно несовместные).

Теорема 1. Вероятность события *А*, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события *А*:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i). \tag{1}$$

Поскольку неизвестно, какое из этих событий наступит, их называют гипотезами.

Теорема 2. Пусть произведено испытание, в результате которого появилось событие *А*. Условная вероятность любой гипотезы $H_i\ (i = 1, 2, ..., n)$ может быть вычислена по формулам Байеса

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие *А*.

Задания для аудиторной работы

1. На автозавод поступили двигатели от трех моторных заводов. От первого завода поступило 10 двигателей, от второго - 6 и от третьего - 4 двигателя. Вероятности безотказной работы этих двигателей в течение гарантийного срока соответственно равны 0,9; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что: а) установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока; б) проработавший без дефектов двигатель изготовлен на первом заводе.

2. На предприятии, изготавливающем замки, первый цех производит 25%, второй 35%, третий 40% всех замков. Брак составляет соответственно 5%, 4%, 2%. Найти вероятность того, что: а) случайно выбранный замок является дефектным; б) замок был изготовлен в первом, втором, третьем цехе, если он является дефектным.

3. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела - 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

4. Имеется две урны. В первой урне 2 белых и 3 черных шара, во второй – 3 белых и 5 черных шаров. Из первой и второй урн, не глядя, берут по одному шару и кладут их в третью урну. Шары в третьей урне перемешивают и берут из нее наугад один шар. Найти вероятность, что это белый шар.

5. В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

Задания для индивидуальной работы

1. На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трех заводов в количестве: n_1 – с первого завода, n_2 – со второго завода, n_3 – с третьего. Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе p_1, на втором – p_2, на третьем – p_3. Какова вероятность того, что: **а)** случайно взятое изделие будет качественным; **б)** взятое случайным образом изделие оказалось качественным; найти вероятность того, что оно изготовлено на i-м заводе.

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
n_1	20	14	16	30	20	25	15	40	14	18
n_2	15	26	40	20	10	35	25	25	26	32
n_3	15	10	44	50	20	40	10	35	10	50
p_1	0,9	0,8	0,8	0,9	0,8	0,9	0,8	0,9	0,8	0,9
p_2	0,9	0,9	0,9	0,7	0,9	0,8	0,7	0,8	0,6	0,8
p_3	0,8	0,8	0,7	0,7	0,9	0,7	0,9	0,8	0,7	0,7
i	2	3	1	2	3	3	1	2	1	2

2. Статистика запросов кредитов в банке такова: $\alpha\%$ – от государственных органов, $\beta\%$ – от других банков, остальное – от физических лиц. Вероятности невозврата кредита в оговоренный срок соответственно равны p_1, p_2, p_3. **а)** Найти вероятность невозврата очередного запроса на кредит. **б)** Начальнику кредитного отдела доложили, что получено сообщение о невозврате кредита, но в факсовом сообщении имя клиента было плохо пропечатано. Кто наиболее вероятно из клиентов не возвращает кредит?

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\alpha\%$	22	25	26	12	15	23	29	26	28	30
$\beta\%$	58	38	38	48	48	25	31	44	42	34
p_1	0,01	0,06	0,03	0,02	0,04	0,01	0,02	0,05	0,03	0,02
p_2	0,05	0,01	0,04	0,03	0,05	0,02	0,04	0,03	0,01	0,04
p_3	0,04	0,03	0,05	0,03	0,06	0,04	0,03	0,01	0,06	0,02

3. В группе студентов решают задачу. Известно, что k студентов учатся на «отлично», l на «хорошо» и m на «удовлетворительно». Вероятность того, что задача будет решена отличником равна p_1; хорошистом – p_2; посредственным студентом – p_3. **а)** Какая вероятность решения задачи? **б)** Студентом решена задача; найти вероятность того, что он учится на «удовлетворительно».

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	3	4	4	2	2	8	10	10	9	5
l	17	16	14	20	10	9	10	5	9	10
m	5	6	7	3	13	8	5	10	7	10
p_1	0,65	0,63	0,78	0,75	0,76	0,62	0,72	0,62	0,67	0,64
p_2	0,35	0,25	0,3	0,24	0,55	0,29	0,31	0,24	0,23	0,28
p_3	0,13	0,15	0,12	0,13	0,1	0,18	0,07	0,11	0,13	0,14

1.5 Повторение независимых испытаний

Производится серия из *n* независимых испытаний, в каждом из которых событие *A* может появиться с одной и той же вероятностью $p = P(A_i)\quad i = \overline{1,n}$ и не появиться с вероятностью $P(\overline{A_i}) = 1 - p = q$.

I. а) Вероятность того, что событие *A* в серии из *n* испытаний появится ровно *k* раз, вычисляется по *формуле Бернулли*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad q = 1 - p. \tag{1}$$

б) Если число испытаний велико, то вероятность $P_n(k)$ вычисляется по локальной *формуле Муавра-Лапласа*

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad q = 1 - p, \tag{2}$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ - функция Гаусса, она *четная* $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Значения этой функции приводятся в таблице 1 (см. прилож.).

в) Если число испытаний *n* велико, а вероятность *p* мала (0 < *p* < 0,1), то справедлива *формула Пуассона*

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda}, \tag{3}$$

где $\lambda = np$ - среднее число появлений события *A* в серии из *n* испытаний.

II. Вероятность того, что событие *A* в серии из *n* испытаний появится не менее k_1 раз и не более k_2 раз:

а) при небольших *n* вычисляется с помощью формулы Бернулли

$$P_n(k_1 \le m \le k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + P_n(k_1 + 2) + \ldots + P_n(k_2); \tag{4}$$

б) при больших *n* – с помощью интегральной формулы Лапласа

$$P_n(k_1 \le m \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad q = 1 - p, \tag{5}$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}\,dt$ – функция Лапласа, ее значения в таблице 2 (см. прилож.). Функция $\Phi(x)$ – *нечетная*, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Для значений $x > 5\quad \Phi(x) = 0{,}5$.

<u>Замечание 1.</u> Наивероятнейшее число k_0 наступлений события *A* в *n* опытах определяется из двойного неравенства $np - q \le k_0 \le np + p$, причем $P_n(k_0) = max$.

Замечание 2. Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности. Пусть $P(A) = p$ и частота события *А* при *n* испытания $W(A) = \frac{m}{n}$. Тогда вероятность того, что частота мало отличается от $P(A)$ (по абсолютной величине) определяется с помощью приближенной формулы

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (6)$$

Задания для аудиторной работы

1. В результате обследования были выделены семьи, имеющие по четыре ребенка. Считая вероятности появления мальчика и девочки в семье равными, определить вероятности появления в ней: а) одного мальчика; б) двух мальчиков.

2. Четыре покупателя приехали на оптовый склад бытовой техники. Вероятность того, что каждому из этих покупателей потребуется холодильник, равна 0,4. Найти вероятность того, что холодильник потребуется: а) не менее чем двум покупателям; б) не более чем трем покупателям; в) всем четырем покупателям.

3. Работают четыре магазина по продаже стиральных машин. Вероятность отказа покупателю в магазинах равна 0,1. Считая, что ассортимент в каждом магазине формируется независимо от других, определить вероятность того, что покупатель получит отказ в двух, трех и четырех магазинах.

4. В новом микрорайоне поставлено 10000 кодовых замков на входных дверях домов. Вероятность выхода из строя одного замка в течение месяца равна: а) 0,0002; б) 0,001. Найти вероятность того, что за месяц откажут два, три и пять замков.

5. Завод отправил в торговую сеть 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что при транспортировке будет повреждено: а) ровно три изделия; б) более трех изделий.

6. На станциях отправления поездов находится 1000 автоматов для продажи билетов. Вероятность выхода из строя одного автомата в течение часа равна 0,004. Какова вероятность того, что в течение часа из строя выйдут два, три и пять автоматов?

7. Всхожесть семян огурцов равна 0,8. Найти вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут не менее четырех.

8. Обувной магазин продал 200 пар обуви. Вероятность того, что в магазин будет возвращена бракованная пара, равна 0,01. Найти вероятность того, что из проданных пар обуви будет возвращено: а) ровно 4 пары; б) ровно 5 пар.

9. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

10. Вероятность появления: события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.

11. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится а) не менее 1475 раз и не более 1500 раз; б) не менее 1470 раз; в) не более 1469 раз.

12. Батарея произвела 6 выстрелов по объекту. Вероятность попадания в объект при одном выстреле равна 0,3. Найти: а) наивероятнейшее число попаданий;

б) вероятность наивероятнейшего числа попаданий; в) вероятность того, что объект будет разрушен, если для этого достаточно хотя бы двух попаданий.

Задания для индивидуальной работы

1. Банк имеет *n* отделений. С вероятностью *p* независимо от других каждое отделение может заказать на завтра крупную сумму денег. В конце рабочего дня один из вице-президентов банка знакомится с поступившими заявками. Какова вероятность того, что будет: **а)** хотя бы одна заявка; **б)** ровно *r* заявок; **в)** как минимум *s* заявок?

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
n	6	5	7	5	6	7	8	9	10	10
p	0,2	0,3	0,3	0,4	0,2	0,3	0,4	0,2	0,3	0,4
r	2	3	4	1	3	4	5	6	4	2
s	4	4	6	4	5	6	7	8	7	6

2. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна *p*. Куплено *n* билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
p	0,4	0,4	0,5	0,4	0,5	0,7	0,6	0,6	0,7	0,5
n	12	15	12	12	11	14	13	11	12	15

3. Вероятность наступления некоторого события в каждом из *n* независимых испытаний равна *p*. Определить вероятность того, что число наступлений события *m* удовлетворяет следующим неравенствам: **а)** $k_1 \le m \le k_2$; **б)** $m \ge k_1$; **в)** $m \le k_2$; **г)** какова вероятность того, что в *n* независимых испытаниях событие появится ровно k_1 раз?

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
n	105	110	120	150	90	100	110	100	90	130
p	0,8	0,8	0,8	0,7	0,7	0,7	0,7	0,6	0,75	0,75
k_1	80	85	70	83	40	65	70	40	60	80
k_2	90	95	95	93	50	80	80	50	70	100

4. Владельцы пластиковых карточек ценят их и теряют весьма редко. Пусть вероятность потерять в течение недели пластиковую карточку для произвольного владельца равна *p*. Всего банк выдал карточки *n* клиентам. Найти вероятность того, что в предстоящую неделю будет потеряна: **а)** ровно одна карточка; **б)** хотя бы одна карточка. **г)** Чему равна вероятность того, что в предстоящую неделю будут утеряны более *r* карточек?

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
n	2000	3000	2500	2500	4000	5000	3500	4500	4300	2700
p	0,002	0,001	0,002	0,001	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
r	2	3	2	2	2	4	2	2	4	2

II. Случайные величины

2.1 Дискретные случайные величины. Законы распределения и числовые характеристики ДСВ

Случайной называется величина, принимающая различные числовые значения, заранее неизвестные. *Дискретной СВ* называется величина, множество значений которой образует конечную или бесконечную последовательность чисел. Всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями СВ и их вероятностями, называется *законом распределения СВ*.

Для ДСВ закон распределения задается таблично.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

где $\sum p_i = 1$, или с помощью функции распределения $F(x)$.

Функцией распределения $F(x)$ СВ *X* называется вероятность того, что СВ *X* примет значения, меньшие *x*. $F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x)$.

Свойства $F(x)$:

1. $0 \le F(x) \le 1$ для $\forall x \in R$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
3. Если возможны значения СВ $X \in [a;b]$, то $F(x) = 0$ при $x \le a$, $F(x) = 1$ при $x \ge b$.
4. $F(x_1) \le F(x_2)$, если $x_1 < x_2$.
5. $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Математическим ожиданием СВ *X* называется число $M(X)$, определяемое формулой $M(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$. Свойства $M(X)$:

1. $M(C) = C$.
2. $M(CX) = C\,M(X), \quad C = const$.
3. $M(X+Y) = M(X) + M(Y), \quad X\ и\ Y - \forall CB$;
4. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y), \quad X\ и\ Y -$ независимые *СВ*.

Дисперсией D (*X*) случайной величины *X* называют математическое ожидание квадрата отклонения *СВ X* от ее математического ожидания $M(X)$:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} p_i - (M(X))^2.$$

Свойства $D(X)$:

1. $D(C) = 0$.
2. $D(CX) = C^2 D(X), \quad C = const$.
3. $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$, где *X* и *У* – независимые *СВ*.
4. $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$.

Для любой *СВ X* $D(X) > 0$, и $x_{\min} < M(X) < x_{\max}$.

Среднеквадратичное отклонение – это $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Задания для аудиторной работы

1. В партии из 6 деталей 4 стандартные. Наудачу отбирают 2 детали. Составить закон распределения *ДСВ X* – числа стандартных деталей среди отобранных. Найти *M*(*X*).

2. Охотник, имеющий шесть патронов, стреляет в цель до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. *СВ X* – число израсходованных патронов. Найти *M* (*X*), *D* (*X*).

3. Вероятности попадания в мишень первого, второго и третьего стрелков соответственно равны 0,4; 0,3 и 0,6. *СВ X* – число попаданий в мишень. Составить закон распределения *СВ X*.

4. Дан закон распределения *СВ X*

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Найти $M(X)$, $D(X)$, $M(X-1)$, $D(X-1)$, $M(3X+6)$, $D(3X+6)$.

5. Производятся 4 независимых испытания, в каждом из которых $P(A)=0{,}4$. *СВ X* – число появлений события *A* при четырех испытаниях. Составить закон распределения *СВ X*, найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. (Ответ: 1,6; 0,96; 0,98).

6. На пути движения рыбы к месту нереста находится 4 шлюза. Вероятность прохода рыбы через каждый шлюз $p=0{,}6$. Построить ряд распределения *СВ X* – число шлюзов, пройденных рыбой до первого задержания у шлюза. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

7. Вероятность выпуска прибора, удовлетворяющего требованиям качества, равна 0,9. В контрольной партии – 3 прибора; *СВ X* – число приборов, удовлетворяющих требованием качества. Составить закон распределения *СВ X*. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Задания для индивидуальной работы

1. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлено n светофоров, дающих независимо друг от друга зеленый сигнал в течение t_1 минут, желтый – в течение t_2 минут, красный – в течение t_3 минут. Требуется: а) написать закон распределения случайной величины *X* – числа остановок автомобиля на улице; б) найти математическое ожидание и дисперсию величины X; в) каково среднее число остановок автомобиля на данном пути?

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
n	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3
t_1	1,6	1,8	1,3	1,8	1,7	1,6	1,9	1,5	1,9	1,7
t_2	0,4	0,3	0.1	0,2	0,3	0,2	0,2	0,3	0,4	0,2
t_3	1,1	1,3	1,1	1,3	1,2	1,2	1,4	1,1	1,2	1,3

2. Задан закон распределения СВ X. Найти *M(X), D(X), M(5x+2), D(5x+2).* Составить функцию распределения *F(x)*, построить её график.

Вариант	**1**				**2**				**3**				**4**			
x	*1*	*2*	*3*	*5*	*-3*	*-1*	*2*	*4*	*-2*	*0*	*1*	*5*	*-4*	*0*	*4*	*6*
p_i	*0,1*	*0,3*	*0,4*	*0,2*	*0,3*	*0,2*	*0,4*	*0,1*	*0,5*	*0,2*	*0,1*	*0,2*	*0,3*	*0,1*	*0,4*	*0,2*
Вариант	**5**				**6**				**7**				**8**			
x	*-2*	*-1*	*0*	*2*	*-3*	*-1*	*0*	*1*	*-1*	*0*	*2*	*4*	*0*	*1*	*2*	*3*
p_i	*0,1*	*0,2*	*0,4*	*0,3*	*0,1*	*0,3*	*0,4*	*0,2*	*0,2*	*0,4*	*0,3*	*0,1*	*0,2*	*0,4*	*0,1*	*0,3*

Вариант	9				10			
x	*-2*	*0*	*1*	*3*	*0*	*1*	*2*	*3*
p_i	*0,1*	*0,2*	*0,2*	*0,5*	*0,5*	*0,3*	*0,1*	*0,1*

3. Из урны, содержащей *n* белых и *m* черных шаров, извлекаются *k* шаров. Пусть *СВ Х* – число вынутых черных шаров. Составить закон распределения, найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	10	9	8	7	9	8	8	7	10	9
m	5	6	6	5	4	7	5	4	6	7
k	4	3	2	4	3	2	3	3	2	3

2.2. Непрерывные СВ. Функция распределения, плотность вероятности, числовые характеристики НСВ

Непрерывной случайной величиной называется случайная величина, возможные значения которой сплошь заполняют некоторый конечный или бесконечный промежуток. Закон распределения НСВ задают аналитически с помощью функции распределения $F(x)$ или плотности вероятности $f(x)$.

В пункте 2.1. дано определение и сформулированы свойства функции распределения: $F(x) = P(X < x),\quad 0 \le F(x) \le 1$, эта функция неубывающая. Если возможны значения СВ $X \in [a; b]$, то $F(x) = 0$ при $x \le a$, $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Если $F(x)$ и $F'(x)$ - непрерывные функции, то СВ *X* называется *непрерывной*.

Для любой СВ $P(X = x_0) = F(x_0 + 0) - F(x_0 - 0)$, для непрерывной СВ $P(X = x_0) = 0$.

$$P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Плотностью вероятности СВ Х или *дифференциальной функцией распределения* называется первая производная от функции распределения $f(x) = F'(x)$. Ее свойства:

1. $f(x) \ge 0$ для $\forall x \in R$;
2. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$;
3. $P(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$;
4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Математическое ожидание непрерывной СВ *X* определяется по формуле

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx, \text{ если значения СВ } X \in (-\infty, \infty).$$

Дисперсия непрерывной СВ *X*

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X); \quad M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx, \text{ если } X \in (-\infty, \infty).$$

Задания для аудиторной работы

1. Функция распределения СВ *X* имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & если\ x<-1,\\ a+b\arcsin x, & если\ -1\le x\le 1,\\ 1, & если\ x>1.\end{cases}$$

Найти постоянные *a* и *b*, плотность вероятности, математическое ожидание СВ *X*. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$. (Ответ: *a* = 0,5; $b=\dfrac{1}{\pi}$; $M(X)=0$).

2. Плотность вероятности СВ *X* имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}ax^2, & если\ 0\le x\le 2,\\ 0, & если\ x\,\overline{\in}\,(0;2).\end{cases}$$

Найти коэффициент *a*, математическое ожидание, дисперсию, моду, медиану СВ *X*. Определить вероятность того, что в результате опыта СВ *X* отклонится от своего $M(X)$ не более чем на 0,5. (Ответ: $a=0{,}375$; $p=0{,}875$).

Задания для индивидуальной работы

1. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность вероятности $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, и $P\left(\left|X-M(X)\right|<0{,}25\right)$.

1 $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ 0{,}5(x^2-x), & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

2 $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ 0{,}25(x+2), & -2<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

3 $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{6}(x^2+x), & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

4 $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{8}x^3, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

5 $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ (x-2)^2, & 2<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

6 $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{4}x^2, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

7 $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \dfrac{1}{9}(x^3+1), & -1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

8 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{15}(x^2+2x), & 0\le x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

9 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{14}(x^3+3x), & 0\le x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

10 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{10}(x^2+3x), & 0\le x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

2. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)$. Найти неизвестный параметр A, $M(X)$, дисперсию $D(X)$.

1 $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ A(x+2), & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

2 $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ A(x-2), & 2<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$

3 $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ Ax, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$

4 $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ Ax^2, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

5 $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ A(x+1), & -1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

6 $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ A(x-1), & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

7 $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ A(x+3), & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

8 $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ Ax^2+1, & 1<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

9 $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ A(2x-1), & -1<x\le 0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$

10 $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ A(3x-1), & 1<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

2.3. Классические распределения случайных величин

Биномиальное распределение. Пусть в каждом из n независимых испытаний событие *A* появляется с вероятностью *p*. СВ *X* – число появлений события *A* при n испытаниях. Возможные значения СВ *X*: $0, 1, 2, ..., m, ..., n$. Соответствующие вероятности находим по формуле Бернулли $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m},\quad q=1-p$.

Составляем таблицу

X	0	1	2	…	n
P	q^n	npq^{n-1}	$\frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2}$	…	p^n

Такое распределение СВ *X* называется *биномиальным.* Его числовые характеристики $M(X)=np,\quad D(X)=npq,\quad \sigma(X)=\sqrt{npq}$.

Распределение Пуассона. Если число n велико, а вероятность p мала, то $P_n(m)$ считаем по формуле Пуассона $P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\quad \lambda=np$.

X	0	1	2	…	n
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$

Для распределения Пуассона $M(X) = D(X) = \lambda$.

Закону Пуассона подчинена СВ, задающая простейший поток событий (число вызовов скорой помощи, число заказов на предприятиях бытовых услуг и т.д.). Если интенсивность потока λ выражает число появлений события в единицу времени, то вероятность наступления m событий за время t определяется формулой

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}.$$

Равномерное распределение имеет СВ *X*, если плотность ее вероятности определяется функцией $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & если \quad x \in [a; b], \\ 0, & если \quad x \overline{\in} [a; b]. \end{cases}$

Для этого распределения $M(X) = \dfrac{a+b}{2}, \quad D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Показательное распределение СВ *X* задает плотность вероятности вида

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & если \quad x \geq 0, \\ 0, & если \quad x < 0. \end{cases} \lambda > 0.$$

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Функция надежности. Если СВ Т – время безотказной работы механизма, то $F(t) = P(T < t)$ выражает вероятность выхода из строя механизма за время t. $R(t) = 1 - F(t) = R(T > t)$ – вероятность безотказной работы механизма за время t. Функция $R(t)$ называется функцией надежности. Если СВ *T* подчиняется показательному закону распределения, то функция надежности $R(t) = e^{-\lambda t}$, где λ – число отказов в единицу времени (интенсивность отказов).

Задания для аудиторной работы

1. Производится 5 независимых опытов, в каждом из которых событие А может появиться с вероятностью 0,6. Составить закон распределения СВ *X* – числа появлений события А при пяти испытаниях. Найти $M(X), D(X), \sigma(X)$.

2. Игральная кость подбрасывается до первого появления цифры 1. Определить все числовые характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$ для СВ Х числа осуществляемых подбрасываний.

3. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания равна 0,0004. Найти вероятность того, что из 1000 изделий испытание не выдержат менее двух изделий.

4. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в 1 минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит: а) пять вызовов; б) не менее трех; в) хотя бы один вызов.

5. СВ Х имеет равномерное распределение с $M(X) = 4$ и $D(X) = 12$. Найти функцию распределения $F(x)$, плотность вероятности $f(x)$ и $P(0 < X < 2)$.

6. Трамваи данного маршрута идут с интервалом в 5 минут. Пассажир подходит к трамвайной остановке в некоторый момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее чем через 1 мин. после ухода предыдущего трамвая, но не позднее чем за 2 мин. до отхода следующего трамвая?

6. Найти вероятность попаданий случайной величины *X*, имеющей показательное распределение $f(x) = \begin{cases} 0{,}2e^{-0{,}2x}, & если \quad x \ge 0, \\ 0, & если \quad x < 0. \end{cases}$ в интервал (4; 10).

7. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t) = 1 - e^{-0{,}01t}, t \ge 0.$ Найти вероятность того, что за время длительностью *t=50* ч: а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

8. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого элемента имеет показательное распределение $F_1(t) = 1 - e^{-0{,}05t}, t \ge 0,$ второго $F_2(t) = 1 - e^{-0{,}02t}, t \ge 0,$ Найти вероятность того, что за время длительностью *t=6* ч: а) оба элемента откажут; б) оба элемента не откажут; в) только один элемент откажет; г) хотя бы один элемент откажет.

Задания для индивидуальной работы

1. СВ *T* подчиняется показательному закону с известным λ. Записать $f(t), F(t)$. Построить их графики. Найти $M(T), D(T), \sigma(T), P(\alpha < T < \beta)$.

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
λ	1,2	1,8	2,4	3,2	2,3	3,1	1,6	0,9	0,6	2,2
α	0,42	2,3	0,33	0	0,96	2,65	0,15	0,02	0	2
β	1,26	2,6	3,56	2,33	3,11	4,12	0,98	1,79	2,6	3,5

2. Среднее время работы каждого из трех элементов, входящих в техническое устройство, равно Т часов. Для безотказной работы устройства необходима безотказная работа хотя бы одного из трех этих элементов. Определить вероятность того, что устройство будет работать от t_1 до t_2 часов, если время работы каждого из трех элементов независимо и распределено по показательному закону.

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
T	800	1000	850	1200	900	950	1100	1000	850	1200
t_1	650	800	750	900	700	720	850	700	600	800
t_2	700	900	820	1000	900	850	950	850	900	950

3. Все значения равномерно распределенной СВ *X* лежат на отрезке $[a; b]$. Найти вероятность попадания СВ Х в промежуток $(\alpha; \beta)$.

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a	2	1	3	6	8	3	1	4	1,5	0
b	6	6	10	9	14	6	5,5	7,3	6	4
α	1	2	2	1	9	2	2	5	2	1
β	5	5	15	7	11	5	5	6	5	5

4. СВ *X* подчинена закону Пуассона с математическим ожиданием, равным λ. Найти вероятность того, что СВ *X* принимает положительное значение и меньшее, чем ее математическое ожидание.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ	4,2	6,1	4,5	1,5	3,5	4,6	5,3	4,4	3,8	3,7

2.4 Нормальное распределение. Закон больших чисел. Теоремы Бернулли, Чебышева. Понятие о предельных теоремах

Нормальный закон распределения. Его плотность распределения определяет функция

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad a=M(X), \quad \sigma^2=D(X).$$

Для нормального распределения справедливы формулы:

а) нахождение вероятности попадания *СВ X* в заданный интервал (α, β)

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$ – функция Лапласа, ее значения в таблице 2 (см.прилож.);

б) нахождение вероятности попадания *СВ X* в интервал, симметричный относительно центра рассеяния a

$$P\big(|X-M(X)|<\delta\big)=P\big(|X-a|<\delta\big)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Если $\delta=3\sigma$, то получаем *«правило трех сигм»*:

$$P\big(|X-a|<3\sigma\big)=2\Phi(3)=0{,}9973.$$

С вероятностью, практически равной единице, можно определить интервал наиболее вероятных значений нормально распределенной СВ *X*: $(a-3\sigma;\ a+3\sigma)$.

Неравенство Маркова. Если все значения СВ *X* положительны и *A* – некоторое положительное число, то

$$P(X\ge A)\le\frac{M(X)}{A}. \qquad (1)$$

Неравенство Чебышева. Если СВ *X* имеет конечную дисперсию $D(X)$ и $M(X)$, то при $\forall\varepsilon>0$ справедливо неравенство

$$P\big(|X-M(X)|<\varepsilon\big)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2} \qquad (2)$$

или $$P\big(|X-M(X)|\ge\varepsilon\big)\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (3)$$

Задания для аудиторной работы

1. Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 12 и 2. Найти вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (14; 16). (Ответ: 0,1359).

2. Имеется случайная величина, распределенная по нормальному закону, математическое ожидание которой равно 20, среднее квадратичное отклонение равно 3. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью 0,9972 попадет случайная величина. (Ответ: (11; 29)).

3. Известно, что средний расход удобрений на один гектар пашен составляет 80 кг, а среднее квадратичное отклонение расхода равно 5 кг. Считая расход удобрений нормально распределенной случайной величиной, определить диапазон, в который вносимая доза удобрений попадает с вероятностью 0,98. (Ответ: (68,3; 91,7)).

4. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины – количество сыра, используемого для изготовления 100 бутербродов, - равно 1 кг. Известно, что с вероятностью 0,96 расход сыра на изготовление 100 бутербродов составляет от 900 до 1100 г. Определить среднее квадратичное отклонение расхода сыра на 100 бутербродов. (Ответ: 48,5 г).

5. При измерении нормально распределенной случайной величины оказалось, что ее среднее квадратичное отклонение равно 10, а вероятность попадания этой величины в интервал от 100 до 140, симметричный относительно математического ожидания, равна 0,86. Найти математическое ожидание этой величины и вероятность попадания ее в интервал от 90 до 150. (Ответ: а = 120, *p* = 0,9973).

6. Математическое ожидание количества выпадающих в течение года осадков в данной местности составляет 60 см. Определить вероятность того, что в этой местности осадков выпадает не менее 180 см. (Ответ: не более 0,3333).

7. Суточный расход воды в населенном пункте является СВ Х, для которой $\sigma(X)=10000л$. Оценить вероятность того, что расход воды в этом пункте в течение дня отклоняется от математического ожидания по абсолютной величине более чем на 25000 л. (Ответ: не более 0,16).

8. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время Т равна 0,05. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время Т окажется: а) меньше двух; б) не меньше двух.

Задания для индивидуальной работы

1. Случайные отклонения размера детали от номинала распределены нормально: математическое ожидание размера детали равно *а* (мм), среднее квадратичное отклонение равно σ (мм). Годными считаются те детали, размер которых заключен в рамках между α и β (мм). Определить: а) вероятность изготовления годной детали; б) процент бракованных изделий, если точность изготовления ухудшится и будет характеризоваться средним квадратичным отклонением σ_1(мм).

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a	275	290	300	250	230	245	260	270	280	300
σ_1	0,4	0,9	0,7	0,8	0,9	0,95	0,8	0,7	0,85	0,8
σ	0,9	0,8	0,5	0,6	0,7	0,9	0,75	0,6	0,8	0,5
α	273	288	292	249	227	242	258	267	279	296
β	277	292	301	253	233	248	261	273	281	303

2. *СВ Х* распределена по нормальному закону, с математическим ожиданием, равным а, и средним квадратичным отклонением, равным σ. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью p попадет *СВ Х*.

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
а	12	29	30	25	13	24	20	27	28	18
σ	1,6	1,5	2	2,2	2,4	1,9	2,8	1,7	1,5	2,4
p	0,945	0,93	0,95	0,986	0,96	0,922	0,925	0,966	0,92	0,948

3. Вероятность появления события А в каждом испытании равна p. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число Х появлений события А будет заключено в пределах от α до β, если будет произведено n независимых испытаний.

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
p	0,6	0,4	0,7	0,6	0,3	0,4	0,8	0,4	0,5	0,7
n	120	150	90	110	130	180	160	170	180	200
α	48	90	27	44	91	108	32	102	90	60
β	192	210	153	176	169	252	288	238	270	340

III. Элементы математической статистики

3.1. Основные понятия математической статистики. Эмпирические законы распределения. Числовые характеристики выборки

К основным понятиям математической статистики относятся: генеральная и выборочная совокупности, объем совокупности, варианта, вариационный ряд, частота варианты (определите каждое понятие). Дискретное статистическое распределение частот выборки определяется таблицей (1*).

Таблица 1*

Варианты x_i	x_1	x_2	…	x_k
Частоты n_i	n_1	n_2	…	n_k

где $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ - объему выборки. *Частостью* или *относительной частотой* варианты x_i называют число $w_i = \frac{n_i}{n}$. Геометрическое изображение таблицы (1*) называется *полигоном частот*.

Дана выборка достаточно большого объема, среди вариант которой мало одинаковых. Составляется интервальное распределение частот (таблица 2*).

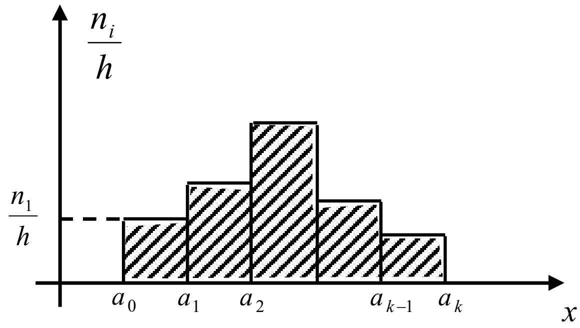
Таблица 2*

Интервалы	$a_0 - a_1$	$a_1 - a_2$	…	$a_{k-1} - a$
Частоты n_i	n_1	n_2	…	n_k

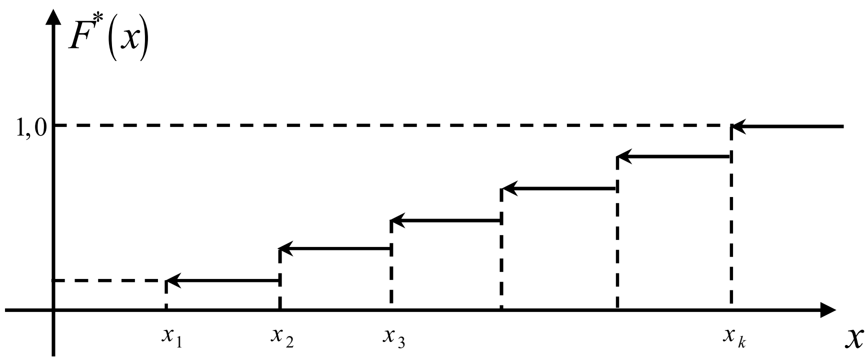
где $\sum_{i=1}^{k} n_i = 1$. Число интервалов k обычно выбирают не менее 5 и не более 15. Оптимальное число интервалов равно $k = 1 + \log_2 n = 1 + 3{,}322\lg n$. Тогда длина интервала $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$ (формула Стерджеса),

$$a_0 = x_{\min} - \frac{h}{2},\ \ a_1 = a_0 + h, ...,\ \ a_k = a_0 + kh.$$

Геометрическим изображением интервального распределения частот служит *гистограмма частот*



где $\frac{n_i}{h}$ - плотность частоты, h – длина интервалов. *Эмпирическая функция* распределения $F^*(x)$ определяет для $\forall x \in R$ относительную частоту события $X < x$.
$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n}$, где n_x – число вариант, меньших x, n – объем выборки. График $F^*(x)$ для дискретного распределения:



Числовые характеристики выборки: $\overline{x}_B$ – выборочное среднее, D_B – выборочная дисперсия, σ_B – выборочное среднее квадратичное отклонение. Для дискретного распределения:

$$\overline{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n},\quad D_B = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - \overline{x}_B^2,\quad \sigma_B = \sqrt{D_B}.$$

Если x_i – числа большие, то вводят так называемые условные варианты $u_i = \frac{x_i - C}{h}$, где $const\, h$ и С определяются по выборке. Считают $\overline{u}_B$, $D_B(u)$, $\sigma_B(u)$, затем $\overline{x}_B = h \cdot \overline{u}_B + C$, $D_B(x) = h^2 D_B(u)$, $\sigma_B(x) = h\,\sigma_B(u)$.

Если x_i − числа малые, то $u_i = hx_i$, $h = const$, $\overline{x}_B = \frac{1}{h}\overline{u}_B$ $D_B(x) = \frac{1}{h^2}D_B(u)$, $h = const$, $\overline{x}_B = \frac{1}{h}\overline{u}_B$. Для интервального распределения $x_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2}$, $i = \overline{1,k}$.

Задания для аудиторной работы

1. В результате проверки партии деталей по сортам получены значения:

1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 3, 4, 1, 1, 2, 3, 3, 1.

Составить вариационный ряд, статистическое распределение частот (относительных частот), полигон частот, эмпирическую функцию распределения. Найти $\overline{x}_B$, D_B, σ_B.

2. Дана выборка объема 20:

11, 8, 12, 5, 3, 10, 7, 8, 3, 6, 31, 9, 5, 7, 13, 4, 4, 0, 3, 6.

Составить вариационный ряд, интервальное распределение частот, гистограмму относительных частот. Найти $\overline{x}_B$, D_B, σ_B.

Задания для индивидуальной работы

В результате статистических наблюдений некоторой совокупности относительно количественного признака X были получены выборочные данные.

Требуется :

- составить дискретный или интервальный ряд распределения частот и относительных частот случайной величины X и построить полигон частот или гистограмму относительных частот;
- найти эмпирическую функцию распределения признака X и построить ее график;
- вычислить числовые оценки параметров распределения: выборочную среднюю, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Вариант 1.

1	2, 2, 3, 3, 3, 3, 1, 4, 4, 1, 1, 5, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 1, 3, 3, 6, 3, 6, 3, 4, 5, 1, 5, 3
2	13, 11, 6, 12, 6, 7, 8, 18, 10, 8, 9, 8, 11, 18, 11, 10, 4, 14, 3, 9, 12, 7, 6, 0, 9, 20, 13, 9, 7, 13

Вариант 2.

1	2, 1, 1, 5, 3, 3, 2, 3, 3, 8, 1, 4, 1, 4, 3, 4, 5, 0, 2, 2, 3, 6, 5, 6, 1, 1, 3, 2, 3, 3
2	14, 15, 16, 10, 13, 18, 16, 6, 12, 13, 15, 16, 15, 15, 20, 13, 21, 14, 7, 13, 17, 17, 20, 11, 12, 15, 17, 16, 15, 14

Вариант 3.

1	2, 1, 1, 2, 1, 0, 3, 2, 1, 0, 1, 4, 0, 1, 3, 3, 2, 0, 2, 1, 1, 1, 0, 1, 4, 1, 1, 1, 1, 2
2	20, 20, 12, 22, 16, 24, 8, 20, 29, 20, 16, 23, 14, 25, 16, 23, 19, 22, 26, 19, 28, 27, 18, 23, 23, 20, 28, 24, 25, 19

Вариант 4.

1	2, 6, 2, 6, 7, 4, 4, 2, 2, 3, 4, 2, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 3, 2, 0, 4, 6, 6, 3, 3, 4, 6, 4, 3
2	7, 9, 5, 11, 10, 6, 10, 6, 4, 10, 6, 9, 9, 6, 7, 9, 6, 1, 13, 13, 6, 8, 8, 3, 5, 10, 8, 6, 7, 8

Вариант 5.

1	2, 3, 2, 1, 1, 3, 4, 5, 1, 1, 3, 1, 1, 4, 1, 5, 2, 2, 1, 2, 0, 2, 2, 3, 3, 3, 2, 4, 4, 1
2	25, 18, 17, 20, 36, 24, 33, 23, 22, 30, 32, 20, 10, 15, 18, 10, 19, 28, 18, 19, 32, 24, 34, 28, 17, 30, 24, 12, 23, 23

Вариант 6.

1	8, 3, 0, 5, 3, 2, 2, 6, 6, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 4, 4, 7, 3, 4, 5, 4, 4, 4, 2, 2, 6, 6, 5, 4
2	19, 14, 0, 18, 1, 6, 2, 33, 10, 14, 19, 15, 8, 50, 11, 10, 4, 0, 7, 7, 2, 1, 23, 3, 21, 24, 1, 11, 6, 11

Вариант 7.

1	8, 8, 7, 7, 9, 9, 8, 7, 7, 6, 5, 9, 8, 6, 8, 8, 8, 7, 7, 8, 9, 8, 8, 8, 10, 6, 10, 8, 8, 6
2	2, 2, 20, 18, 0, 1, 12, 10, 1, 34, 26, 3, 1, 0, 9, 6, 26, 2, 3, 7, 1, 9, 3, 16, 2, 5, 3, 3, 11, 1

Вариант 8.

1	4, 4, 2, 2, 3, 3, 5, 3, 6, 3, 5, 5, 5, 2, 2, 5, 5, 4, 3, 3, 5, 2, 3, 3, 5, 6, 4, 3, 1, 6
2	15, 0, 4, 6, 5, 2, 8, 7, 0, 3, 12, 6, 7, 14, 1, 1, 9, 1, 5, 4, 1, 26, 15, 19, 28, 2, 2, 2, 0, 10

Вариант 9.

1	3, 2, 1, 1, 2,0, 2, 3, 1, 2, 1, 4, 4, 1, 3, 4, 3, 2, 0, 2, 2, 1, 3, 0, 5, 2, 3, 2 ,3, 4
2	12, 1, 9, 16, 2, 23, 6, 5, 13, 12, 3, 23, 10, 36, 10, 12, 5, 4, 19, 8, 2, 4, 11, 2, 11, 4, 7, 5, 7, 8

Вариант 10.

1	4, 4, 4, 5, 3, 6, 5, 5, 4, 5, 5, 4, 4, 6, 3, 6, 6, 5,6, 5, 6, 7, 4, 3, 3, 2, 4, 4, 6, 4
2	18, 12, 14, 12, 4, 6, 5, 3, 6, 12, 5, 5, 15, 1, 1, 2, 1, 7, 15, 13, 7, 34, 3, 13, 17, 16, 11, 23, 3, 6

3.2. Точечные и интервальные оценки для неизвестных параметров генеральной совокупности

Любой параметр $\widetilde{\theta}$, найденный по выборке, извлеченной из генеральной совокупности СВ *X*, является подходящей оценкой (подходящим приближенным значением) параметра θ этой совокупности, если:

1) $M(\widetilde{\theta}) = \theta$;
2) при данном объеме выборки *n* имеет минимальную дисперсию, $D(\widetilde{\theta}) = \min$;
3) при $n \to \infty$ $\quad P\left(\left|\widetilde{\theta} - \theta\right| < \varepsilon\right) \to 1$.

Такой параметр $\widetilde{\theta}$ является соответственно *несмещенной, эффективной* и *состоятельной* оценкой параметра θ из генеральной совокупности.

Точечная оценка определяется одним числом, при этом выборка должна быть достаточно большого объема.

Выборочное среднее $\overline{x}_B$ является *несмещенной* и *состоятельной* оценкой генеральной средней $\overline{x}_Г$: $\overline{x}_Г \approx \overline{x}_B$, причем $M(\overline{x}_B) = \overline{x}_Г$ и $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{x}_B - \overline{x}_Г\right| < \varepsilon\right) = 1$.

Несмещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности является исправленная дисперсия S^2.

$$D_Г \approx S^2, \text{ где } S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B, \quad M(S^2) = D_Г.$$

Генеральное среднее квадратичное отклонение не имеет несмещенных оценок.

$$\sigma_Г \approx \sigma_B \text{ или } \sigma_r \approx S, \text{ но } M(\sigma_B) \neq \sigma_r \text{ и } M(S) \neq \sigma_r.$$

При $n<30$ применяются интервальные оценки. Интервал $(\tilde{\theta}-\delta, \tilde{\theta}+\delta)$, покрывающий параметр θ с заданной вероятностью (надежностью) γ, называется *доверительным*.

$P(\tilde{\theta}-\delta<\theta<\tilde{\theta}+\delta)=P(|\theta-\tilde{\theta}|<\delta)=\gamma$, где δ - точность оценки.

Пусть СВ *X* подчиняется нормальному распределению с параметрами $a=M(X)$ и $\sigma=\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$, т.е. $X\in N(a;\sigma)$.

а) Доверительный интервал для *a* при *известном* σ:

$$\bar{x}_B-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}_B+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ где } 2\Phi(t)=\gamma \qquad (1)$$

или $P\left(\left|a-\bar{x}_B\right|<\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\gamma$.

б) Доверительный интервал для a при *неизвестном* σ:

$$\bar{x}_B-\frac{t_\gamma\cdot S}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}_B+\frac{t_\gamma\cdot S}{\sqrt{n}}, \qquad (2)$$

где число $t_\gamma=t(\gamma,n)$ находим по таблице 3 распределения Стьюдента (стр. 80), *S* – исправленное среднее квадратичное отклонение, *n* – объем выборки, γ - надежность.

в) Доверительный интервал для σ:

$S(1-q)<\sigma<S(1+q)$, если $q<1$, $0<\sigma<S(1+q)$, если $q>1$.

Число $q=q(\gamma,n)$ находим по таблице 5 (стр. 82).

Задания для аудиторной работы

1. Найти несмещенные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии по выборке

x_i	1250	1275	1128	1130
n_i	20	25	50	5

(Ответ: $\overline{x_\Gamma}\approx 6773{,}75$; $D_\Gamma\approx 168{,}88$).

2. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания *a* нормально распределенного признака *X*, если генеральное среднее квадратичное отклонение $\sigma=4$, $\bar{x}_B=10{,}2$, объем выборки $n=16$. (Ответ: $7{,}64<a<12{,}76$).

3. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,925 точность оценки математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности по $\bar{x}_B$ будет равна 0,2, если $\sigma=\sigma(X)=1{,}5$. (Ответ: 179).

4. Из генеральной совокупности извлечена выборка

x_i	0,5	-0,4	-0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание *a* и среднее квадратичное отклонение нормально распределенного признака *X* при помощи доверительных интервалов. (Ответ: $-0{,}04<a<0{,}88$; $0{,}32<\sigma<1{,}04$).

5. Из генеральной совокупности нормально распределенного признака *X* извлечена выборка объема *n*, найдено исправленное среднее квадратичное отклонение *S*. Определить доверительный интервал, покрывающий $\sigma_Г$ с надежностью $\gamma = 0{,}999$, если: а) $n = 10,\ S = 5{,}1$; б) $n = 50,\ S = 14$. (Ответ: а) (0; 14,28); б) (7,98; 20,02)).

Задания для индивидуальной работы

1. По заданному распределению найти несмещенные оценки для $x_Г$, $D_Г$.

2. Из генеральной совокупности извлечена выборка. Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание *a* и среднее квадратичное отклонение нормально распределенного признака *X* при помощи доверительных интервалов.

3. $X \in N(a, \sigma)$. Составить доверительный интервал для а, если известны $\gamma,\ \overline{x}_B,\ n$ и σ.

Вариант 1.

1

n_i	6	17	21	12	9	5

2

x_i	-0,6	1,6	3,8	6	8,2	10,4	12,6
n_i	4	1	9	4	7	3	1

3 $\gamma = 0{,}99,\ \sigma = 5,\ \overline{x}_B = 16{,}8,\ n = 25$

Вариант 2.

1

n_i	3	18	19	13	4

2

x_i	3,6	5,7	7,8	10	12,1	14,3	16,4
n_i	4	6	1	2	3	2	1

3 $\gamma = 0{,}95,\ \sigma = 6,\ \overline{x}_B = 14,\ n = 25$

Вариант 3.

1

n_i	9	11	16	18	10	2

2

x_i	5,5	7	8,5	10	11,5	12,9	14,4
n_i	5	8	3	4	2	3	1

3 $\gamma = 0{,}99,\ \sigma = 6,\ \overline{x}_B = 30{,}1,\ n = 9$

Вариант 4.

1

n_i	2	4	23	26	6

2

x_i	-0,6	1	2,6	4,2	5,8	7,4	9,1
n_i	4	2	9	6	4	1	1

3 $\gamma = 0{,}999,\ \sigma = 8,\ \overline{x}_B = 42{,}8,\ n = 16$

Вариант 5.

1

n_i	4	12	27	19	8

2

x_i	-3,1	-1,3	0,5	2,3	4,1	5,9	7,7
n_i	1	3	5	8	4	2	4

3 $\gamma = 0{,}98,\ \ \sigma = 6,\ \ \overline{x}_B = 22{,}8,\ \ n = 18$

Вариант 6.

1

n_i	9	23	36	9	3

2

x_i	-8,1	-5,6	-3,1	-0,6	1,9	4,4	6,9
n_i	1	2	2	8	12	1	1

3 $\gamma = 0{,}96,\ \ \sigma = 4,\ \ \overline{x}_B = 10{,}8,\ \ n = 12$

Вариант 7.

1

n_i	5	25	34	14	2

2

x_i	2,5	4,1	5,6	7,2	8,8	10,4	12
n_i	1	2	6	8	1	3	2

3 $\gamma = 0{,}992,\ \ \sigma = 6,\ \ \overline{x}_B = 32{,}1,\ \ n = 16$

Вариант 8.

1

n_i	1	16	38	34	4	2

2

x_i	1,5	2,9	4,3	5,8	7,2	8,7	10,1
n_i	2	2	8	5	2	3	2

3 $\gamma = 0{,}9,\ \ \sigma = 10,\ \ \overline{x}_B = 52{,}3,\ \ n = 25$

Вариант 9.

1

n_i	4	20	29	8	4

2

x_i	-6,7	-3,2	0,3	3,7	7,2	10,7	14,2
n_i	1	6	5	6	3	3	2

3 $\gamma = 0{,}98,\ \ \sigma = 4,\ \ \overline{x}_B = 12{,}8,\ \ n = 20$

Вариант 10.

1

n_i	7	23	30	17	8

2

x_i	-0,7	0	0,8	1,6	2,3	3,1	3,8
n_i	1	5	8	5	4	3	2

3 $\gamma = 0{,}96,\ \ \sigma = 9,\ \ \overline{x}_B = 36{,}6,\ \ n = 14$

3.3. Статистическая проверка гипотез. Критерий Пирсона

Из некоторой генеральной совокупности взята выборка достаточно большого объема *n* и составлено или дискретное (1) или интервальное (2) распределение частот:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

(1)

Интервалы	a_0-a_1	a_1-a_2	a_2-a_3	…	$a_{k-1}-a_k$
n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_k

(2)

где $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, n_i - эмпирические частоты, $i=\overline{1,k}$.

Теоретические (*выравнивающие*) частоты n_i' определяются по формуле

$$n_i' = n\cdot P_i,\ \ i=\overline{1,k},$$

где $P_i = P(X=x_i)$ для распределения (1) и $P_i = P(a_{i-1}<X<a_i)$ – для распределения (2).

I) Если СВ *X* имеет *распределение Пуассона*, где $\lambda=\overline{x}_B=\sigma_B^2$, то: $P_i=\dfrac{\left(\overline{x_B}\right)^i e^{-\overline{x_B}}}{i!},\ \ i=\overline{1,k}.$

II) Если СВ $X\in N(a,\sigma)$ имеет *нормальное распределение*, где $a\approx\overline{x}_B,\ \ \sigma\approx\sigma_B$, то:

$$P_i = P\ \ (a_{i-1}<X<a_i)=\Phi\left(\frac{a_i-\overline{x_B}}{\sigma_B}\right)-\Phi\left(\frac{a_{i-1}-\overline{x_B}}{\sigma_B}\right),$$

где $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$. Плотность вероятности для СВ *X* равна $f(x)=\dfrac{1}{\sigma_B\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-\overline{x}_B)^2}{2\sigma_B{}^2}}$.

III) Если СВ *X* имеет *показательное распределение*, то плотность вероятности $f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x\ge 0$ и $\lambda=\dfrac{1}{\overline{x}_B}$; $P_i=P(a_{i-1}<X<a_i)=e^{-\frac{a_{i-1}}{\overline{x}_B}}-e^{-\frac{a_i}{\overline{x}_B}}$.

<u>Критерий Пирсона.</u> При уровне значимости $\alpha=1-\gamma$ выдвигаем нулевую гипотезу H_0 и ей альтернативную гипотезу H_1.

H_0: в генеральной совокупности признака *X* есть нормальное (показательное) распределение,

H_1: в генеральной совокупности признака *X* нет выбранного распределения.

Составляем выборочную статистику $\chi^2_{набл}=\sum\dfrac{(n_i-n'_i)^2}{n'_i}$.

По таблице 4 «Критические точки распределения «хи-квадрат» (стр. 81) находим $\chi^2_{крит.}(\alpha,\ k-r-1)$, где *k* – число пар значений в таблице (1) или число интервалов в таблице (2), $r=2$ для нормального распределения, $r=1$ – для показательного распределения и распределения Пуассона.

Если $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{крит.}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу H_0, эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо.

Если $\chi^2_{набл.} > \chi^2_{крит.}$, то гипотезу H_0 отвергают, различие в частотах n_i и n'_i значимо.

Необходимым условием применения критерия Пирсона является наличие в каждом из интервалов не менее 5 наблюдений ($n \geq 5$). Если в отдельных интервалах их меньше, то число интервалов надо уменьшить путем объединения соседних интервалов.

Задания для аудиторной работы

1. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты.

m_i	6	12	16	40	13	8	5
m'_i	4	11	15	43	15	6	6

(Ответ: H_0 принимается).

2. Используя критерий Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, проверить гипотезу о виде распределения в генеральной совокупности, выдвинув ее для заданного распределения частот.

x_i	15	20	25	30	35
m_i	7	10	17	13	8

(Ответ: $\overline{x}_B = 25{,}45;\ s = 6{,}18;\ \chi^2_{набл.} = 3{,}7$).

3. Используя критерии Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности χ с заданным эмпирическим распределением, если:

Интервал	(-20;-10)	(-10; 0)	(0; 10)	(10; 20)	(20;30)	(30;40)	(40;50)
Частота	20	47	80	89	40	16	8

4. Используя критерии Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, проверить, согласуется ли гипотеза о показательном распределении с заданным эмпирическим распределением, если:

Интервал	0-90	90-180	180-270	270-360	360-450	450-540	540-630
Частота	50	33	21	8	4	2	2

Задания для индивидуальной работы

1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическими частотами n_i', которые вычислены исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X.

2. В таблице приведены данные об отказах аппаратуры за 10000 часов работы. Общее число обследованных экземпляров аппаратуры равно n. Приняты обозначения: i – число отказов, n_i – количество случаев, в которых наблюдалось i отказов. Приняв уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, проверить гипотезу о том, что число отказов имеет распределение Пуассона.

3. Используя критерии Пирсона при $\alpha = 0{,}02$, проверить, согласуется ли гипотеза о показательном распределении генеральной совокупности с заданным эмпирическим распределением.

Вариант 1.

1

n_i	5	16	18	23	19	12	5
n'_i	4,6	11,3	19,5	23,7	20,2	12,2	5,1

2

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	40	51	34	14	9	2

3

$x_{i-1} - x_i$	0,2–6,4	6,4–12,6	12,6–18,9	18,9–25,1	25,1–31,3	31,3–37,6
n_i	120	48	20	8	2	2

Вариант 2.

1

n_i	2	3	12	28	31	12	7
n'_i	1,1	4,9	13,7	24,3	26,8	18,5	8

2

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	65	52	23	7	1	2

3

$x_{i-1} - x_i$	0–7,6	7,6–15,1	15,1–22,7	22,7–30,3	30,3–37,8	37,8–45,4
n_i	125	51	15	6	1	2

Вариант 3.

1

n_i	2	9	25	26	22	14	1
n'_i	2,4	9,1	20,8	28,5	23,3	11,4	3,4

2

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	23	40	37	27	13	6	3	1

3

$x_{i-1} - x_i$	0,1–6,4	6,4–12,7	12,7–19,1	19,1–25,4	25,4–31,7	31,7–38,1
n_i	96	46	24	8	4	2

Вариант 4.

1

n'_i	5,3	11,3	18,1	21,6	19,2	12,7	6,3

2

x_i	0	1	2	3	4	5	7
n_i	8	18	37	41	24	18	4

3

$x_{i-1} - x_i$	0–5,6	5,6–11,2	11,2–16,8	16,8–22,4	22,4–28,1	28,1–33,7
n_i	124	41	13	10	1	1

Вариант 5.

1

n_i	2	8	24	25	24	9	2
n'_i	2,8	8,9	18,4	25,3	23	13,8	5,5

2

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	14	22	36	20	13	3	2

3

$x_{i-1} - x_i$	0–4,9	4,9–9,8	9,8–14,7	14,7–19,6	19,6–24,4	24,4–29,3
n_i	119	54	25	6	5	1

Вариант 6.

1

n_i	5	11	34	26	12	9	2
n'_i	5,1	14,7	25,6	27,2	17,5	6,8	1,6

2

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	14	26	29	18	15	5	3

3

$x_{i-1} - x_i$	0–2,7	2,7–5,3	5,3–8	8–10,6	10,6–13,2	13,2–15,9
n_i	82	43	20	9	5	1

Вариант 7.

1

n_i	4	7	20	29	27	10	1
n'_i	2,6	9,4	20,5	27,7	23	11,8	3,7

2

x_i	0	1	2	3	4	5	7
n_i	19	26	26	18	11	6	4

3

$x_{i-1} - x_i$	0–2,8	2,8–5,6	5,6–8,3	8,3–11,1	11,1–13,9	13,9–16,6
n_i	101	48	27	9	2	3

Вариант 8.

1

n_i	3	9	19	25	20	16	7
n'_i	2,7	8,7	18,3	25,3	23,1	13,9	5,5

2

x_i	0	1	2	3	4	5	6
	20	31	29	13	13	3	1

3

$x_{i-1} - x_i$	0–2,5	2,5–5,1	5,1–7,6	7,6–10,1	10,1–12,7	12,7–15,2
n_i	110	55	15	5	3	2

Вариант 9.

1

n'_i	2,7	10,6	23,4	29,7	21,6	9,1	2,2

2

x_i	0	1	2	3	4	5	8
n_i	21	28	33	28	17	2	1

3

$x_{i-1} - x_i$	0–5,4	5,4–10,8	10,8–16,1	16,1–21,5	21,5–26,9	26,9–32,2
n_i	104	45	28	12	7	3

Вариант 10.

1

n_i	5	15	18	28	17	15	1
n'_i	4,1	11,8	21,9	26,2	20,4	10,2	3,3

2

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	13	35	37	27	17	11

3

$x_{i-1} - x_i$	0–4,6	4,6–9,2	9,2–13,9	13,9–18,5	18,5–23,1	23,1–27,7
n_i	140	48	16	13	2	1

3.4. Проверка соответствия эмпирических данных статистической гипотезе. Задания для индивидуальной работы

В результате статистических наблюдений некоторой совокупности относительно количественного признака X были получены выборочные данные. Требуется:

1. Составить интервальный ряд распределения частот и относительных частот случайной величины *X* и построить полигон и гистограмму относительных частот.

2. Найти эмпирическую функцию распределения признака *X* и построить ее график.

3. Вычислить числовые оценки параметров распределения: выборочные среднюю, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

4. Выдвинуть гипотезу о виде распределения рассматриваемой случайной величины *X*. На основании пунктов 1 и 3 обосновать выбор вида распределения. Написать аналитическое выражение функции плотности для выбранного распределения, используя оценки, полученные в пункте 3, и найти теоретические (выравнивающие частоты).

5. Приняв уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, по критерию согласия Пирсона подтвердить или отвергнуть выдвинутую гипотезу о виде распределения.

6. Для подтвердившегося нормального распределения найти вероятность попадания признака в интервал $(a-5, a+3)$ Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание a и среднее квадратичное отклонение нормально распределенного признака *X* при помощи доверительных интервалов.

1	13.7, 15.7, 15.5, 11.8, 13.1, 16.4, 17.8, 18.2, 19.9, 12.3, 13.8, 11.8, 21, 7.7, 13.4, 13.3, 15.4, 11, 7.8, 16.6, 15.5, 17.9, 12.2, 11.5, 12.1, 16, 22.7, 16.6, 11, 14, 10.2, 15.3, 16, 16.7, 15.6, 15.5, 12.9, 17.4, 11, 13.4, 10.4, 14.7, 6.4, 16.1, 15.6, 14.5, 18, 19.3, 18.4, 16.4
2	10.9, 14.2, 15.5, 2, 14.3, 9.3, 6.2, 5.7, 10.1, 8.6, 7.3, 19.6, 8.5, 6.6, 11.9, 18, 13.8, 3.3, 12.6, 6.1, 8, 13.4, 10.3, 10.8, 9.9, 14.6, 5.4, 6, 7.1, 20.8, 10, 3.3, 9.2, 8.2, 2.1, 13, 16.6, 6.1, 7.9, 8.6, 15.2, 14.9, 6.2, 11.4, 10.6, 18.7, 9.6, 12.6, 10.7, 5.8
3	11.5, 14.8, 19.7, 17.3, 13, 11.8, 14.1, 11.5, 11, 12.6, 5.3, 8.9, 7.1, 12.3, 11.6, 13.1, 14, 9.9, 12.3, 16.5, 21, 2.6, 22.3, 12.8, 7.3, 10, 11.6, 18, 20.4, 8.5, 15.8, 10.2, 7.1, 9.9, 16.5, 15.1, 7.7, 8.7, 12.6, 20.1, 12, 4.1, 12.1, 9, 12.7, 13.2, 3.6, 16.9, 8.9, 9.9
4	13.4, 16.7, 15, 14.6, 17.6, 15.2, 9.2, 10.9, 10.1, 15, 16.6, 21.7, 12.2, 15.6, 13.1, 13.8, 13.6, 12.7, 13.7, 14.5, 12.6, 10.3, 13.4, 18.3, 14.9, 12, 20.3, 14.1, 16.1, 14.1, 14.6, 12.8, 15.3, 20, 13.5, 13.2, 17.3, 16.1, 9.6, 10.8, 17.8, 15.6, 14.6, 12.3, 20.1, 13.6, 13.4, 16.8, 10.2, 17.7

5	10.4, 11, 9.9, 11.1, 12, 7.7, 7.3, 11.7, 12.8, 11.6, 9.6, 9.9, 8.5, 8.1, 12.4, 8.9, 15.8, 6.2, 15.3, 9, 13.3, 9.3, 14.1, 4.7, 15.1, 4.4, 9.6, 6, 8.5, 13.2, 12.1, 14.8, 9.7, 8.7, 8.8, 10.2, 9.9, 11.2, 13, 10.2, 10.8, 12.4, 14.5, 13.3, 13.1, 9, 14.3, 6.5, 11.8, 11.4
6	9, 12.7, 7.1, 8.9, 14.3, 9.9, 11.5, 10.7, 7.5, 10.8, 6.6, 7.6, 10.2, 10.4, 9.8, 13.4, 11.7, 10.3, 14.3, 12.5, 10.8, 11.8, 12, 12.9, 10.8, 13.4, 12.3, 11.4, 10.6, 8.5, 6.4, 10.7, 11.5, 14.3, 15, 11, 8.4, 12.6, 12.7, 11.2, 12.4, 11.3, 8.9, 10.2, 13.6, 12.9, 12.5, 9.7, 9.3, 10.8
7	17.1, 17.3, 17.2, 20.4, 15.8, 15, 14.5, 19, 18.9, 15.8, 15.1, 24.8, 25.6, 9, 20.8, 18, 14.2, 21.2, 20.2, 18.1, 20.3, 22.4, 16.7, 11.9, 14.8, 13.2, 12.1, 5.2, 21.8, 11.8, 11.9, 7.7, 16.4, 20.7, 20.8, 16.4, 16.4, 11.1, 18.7, 14.1, 12.3, 11.3, 12.2, 15.7, 11.2, 19.2, 20.2, 15.7, 12.7, 18.7
8	24.1, 14.8, 13.5, 18.1, 19.6, 11.5, 13.9, 16.3, 21.7, 16.3, 10.2, 16.6, 16.6, 16.2, 17.5, 10.7, 13.9, 14.1, 13, 26.5, 11.1, 12.2, 19.1, 13.2, 19.3, 23.6, 12.1, 19.6, 18.1, 9.7, 22.7, 18.3, 17.9, 16.8, 16.2, 13.3, 20.8, 16.8, 16.5, 29.8, 18.2, 17.6, 13.7, 12.1, 18.6, 16.3, 14.2, 23.4, 17.6, 22.8
9	3.7, 18.4, 9.8, 16.3, 10.4, 14.2, 13.2, 19.1, 20.4, 21.7, 16.4, 9, 9.7, 18.3, 8.4, 19.8, 14.3, 22.3, 19.3, 12.6, 20.4, 19, 22.1, 14.1, 15.5, 13.6, 21.5, 19.2, 17.2, 13.3, 12.2, 12.7, 23, 22.4, 17.8, 12.2, 6.5, 8.2, 15.9, 12.4, 10.9, 15.3, 12.6, 14.3, 25.1, 22.1, 15.4, 16.6, 11.2, 13.1
10	20.3, 14, 15.3, 12.5, 8.5, 15.2, 17, 8.3, 16.9, 14.4, 16.9, 14.1, 10.1, 16, 18.1, 22.7, 9.5, 7.9, 11.3, 14.1, 13.3, 14.4, 14.3, 13.2, 16.5, 12.4, 15, 19.8, 13.8, 15.2, 10.8, 3.4, 13.6, 11.3, 15.8, 12.1, 10.6, 16.4, 9, 14.2, 6.2, 9.3, 7.4, 11.2, 24.1, 10.1, 12.8, 16.6, 20.5, 5.2

3.5 Линейная корреляционная зависимость. Прямые регрессии У на Х и Х на У. Значимость коэффициента корреляции

Между СВ X и Y существует *корреляционная зависимость*, если с изменением одной переменной меняется условная средняя другой переменной, т.е. $\overline{y}_x = f(x)$ или $\overline{x}_y = \varphi(y)$. Условной средней $\overline{y}_x$ называется среднее арифметическое всех значений y, соответствующих данному значению x. Уравнение прямой регрессии Y на X имеет вид

$$\overline{y}_x - \overline{y}_B = r_B \frac{\sigma_B(y)}{\sigma_B(x)} \cdot (x - \overline{x}_B) \tag{1}$$

Уравнение прямой регрессии X на Y имеет вид

$$\overline{x}_y - \overline{x}_B = r_B \frac{\sigma_B(x)}{\sigma_B(y)} \cdot (y - \overline{y}_B), \tag{2}$$

где $r_B = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x}_B \cdot \overline{y}_B}{\sigma_B(x) \cdot \sigma_B(y)}$ - *выборочный коэффициент корреляции*, причем $|r_B| \le 1$.

В случае не сгруппированных данных $\overline{x}_B = \frac{1}{n}\sum x_i$, $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum x^2$, $\sigma_B{}^2(x) = \overline{x^2} - (\overline{x}_B)^2$, $\overline{y}_B = \frac{1}{n}\sum y_i$, $\overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum y^2$, $\sigma_B{}^2(y) = \overline{y^2} - \overline{y}_B{}^2$, $\overline{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{n}$.

Если рассматривается случай сгруппированных данных, то получаем корреляционную таблицу. Формулы (1) и (2) остаются, меняются лишь расчетные формулы для числовых характеристик.

$$\overline{x}_B = \frac{1}{n}\sum x_i m_x\,,\ \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum x_i^{\,2} m_x\,,\ \sigma_B^{\,2}(x) = \overline{x^2} - (\overline{x}_B)^2,\ \overline{y}_B = \frac{1}{n}\sum y_j m_y\,,$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum y_j^{\,2} m_y\,,\ \sigma_B^{\,2}(y) = \overline{y^2} - (\overline{y}_B)^2,\ \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum\sum x_i y_j m_{ij}\,.$$

<u>Значимость выборочного коэффициента корреляции.</u> При уровне значимости α выдвигаем гипотезы:

$H_0:\ r_\Gamma = 0$ (в генеральной совокупности нет линейной зависимости или r_B – незначимый коэффициент),

$H_0:\ r_\Gamma \neq 0$ (линейная зависимость между X и Y в генеральной совокупности есть, т.е. r_B - значимый коэффициент).

Составляем выборочную статистику $t_{набл.} = \dfrac{r_B \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_B^{\,2}}}$, *n* – объем выборки. По таблице 3 «Критические точки распределения Стьюдента» (см. прилож.) находим $t_{крит.}(\alpha\,;\,n-2)$. Если $\left|t_{набл.}\right| < t_{крит.}$, то гипотезу H_0 принимаем. Если $\left|t_{набл.}\right| > t_{крит.}$, то гипотезу H_0 отвергаем и принимаем гипотезу H_1.

Задания для аудиторной работы

Для данных таблиц 1-3 значений двух СВ *X* и *Y* , между которыми существует линейная корреляционная зависимость, определить: а) числовые характеристики СВ *X* и *Y*; б) коэффициент корреляции r_B, составить уравнение прямых регрессии; в) построить их графики, корреляционное поле; г) оценить тесноту корреляционной зависимости и значимость r_B.

1.

x_i	4	4,5	5,5	6	6,5	7	7,2	7,8	8	10
y_i	2	3	3	4	4	5	5	4	5	6

$\overline{y_x}(9) = ?$ (Ответ: $r_B = 0{,}916,\quad \overline{y_x} = 0{,}62x - 0{,}03$.).

2.

Y / X	0	1	2	3	4	5	6	7	m_x
25	2	1							3
35		5	3						8
45			4	2	4				10
55					2	3	1	5	11
65							6	2	8
m_y	2	6	7	2	6	3	7	7	40

(Ответ: $r_B = 0{,}90,\quad \overline{y_x} = 0{,}17x - 4{,}3,\ \overline{x_y} = 4{,}8y + 29{,}4$).

3.

У / Х	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	m_y
120-140				3	4	7
140-160			2	5	2	9
160-180		6	10	4	2	22
180-200	1	4	7			12
m_x	1	10	19	12	8	50

$\overline{y_x}(46) = ?$ (Ответ: $r_B = -0,675,$ $\overline{y_x} = -1,27x + 214,$ $\overline{y_x}(46) = 155,6$).

Задания для индивидуальной работы

1. Компания контролирует 6 фабрик, выпускающих однородную продукцию. В таблице приведены данные о производительности труда y_i (тысячи изделий в год на одного работающего) и энерговооруженности фабрики x_i (тыс. квт.ч. в год на одного работающего) $i = \overline{1,6}$. Составить уравнения прямых регрессии, вычислить r_B (пояснить его смысл), найти среднюю производительность труда $\overline{y_x}$, если $x = l$.

2. Для данной таблицы значений двух СВ *X* и *Y*, между которыми существует линейная корреляционная зависимость, определить: а) числовые характеристики СВ *X* и *Y*; б) коэффициент корреляции r_B, составить уравнение прямых регрессии; в) построить их графики и корреляционное поле.

Вариант 1.

1

x_i	5,5	8,5	11,1	13,6	17	20,1	$l = 12,2.$
y_i	0,3	1,6	3,9	5,6	7,6	9,8	

2

У / Х	16	20	24	28	32	36
9				6	8	4
12			2	4	5	
15		4	2	7	5	
18		3	10			
21	5					

Вариант 2.

1

x_i	1,6	2,1	2,2	2,6	4	3,7	$l = 2,71.$
y_i	0,3	2,2	3,9	6,2	8,3	9,5	

2

У / Х	10	16	22	28	34	40
22	6	9	3			
26	5	4	2			
30			10	8	3	
34				5	2	4
38					7	1

Вариант 3.

1

x_i	1,5	1,9	2,7	3,3	3	4,5	$l = 3{,}1.$
y_i	3,3	3	3,4	3,7	4,2	4	

2

Х \ У	60	70	80	90	100	110
5				4	9	2
6			6	4	8	
7		1	2	7		
8		10	5			
9	14	2				

Вариант 4.

1

x_i	0,3	1,3	2,8	3,7	4,8	5,5	$l = 1{,}5.$
y_i	2,6	2,4	2,2	3,1	3,4	3,5	

2

Х \ У	9	13	17	21	25	29
45	15	2	9			
50		8	6	5		
55			2	10	3	
60				4	1	6
65					8	2

Вариант 5.

1

x_i	0,6	1,3	2,1	3,7	4,1	6	$l = 2{,}62.$
y_i	4,1	5,9	8,1	10,2	12,4	14,7	

2

Х \ У	43	48	53	58	63	68
6				3	8	1
8			7	11	6	
10		5	4	2		
12	8	6	10			
14	3	1				

Вариант 6.

1

x_i	1,2	4,7	7,9	11,6	15,3	19	$l = 8{,}22.$
y_i	3,3	5,7	8,4	9,8	12,5	14,8	

2

Х \ У	5	7	9	11	13	15
10				5	3	4
14			5	12	1	
18		7	6	2		
22	3	9	5			
26	2	4				

Вариант 7.

1

x_i	0,3	0,4	1,4	1,6	2,7	2,8	$l=0{,}65.$
y_i	3,5	6,2	7,9	9,9	12,8	14,6	

2

Х \ У	14	22	30	38	46	54
16	3	7	2			
18		2	12	6		
20			8	4		
22				5	4	
24					8	4

Вариант 8.

1

x_i	1	4,5	7,4	9,6	13	16,2	$l=8{,}21.$
y_i	1,7	1,9	1,9	2,7	3	2,6	

2

Х \ У	10	13	16	19	22	25
18				4	3	1
20			9	10	2	
22		10	5	1		
24	2	3	8			
26	6	2				

Вариант 9.

1

x_i	0,5	2,1	4,4	6,3	8,1	10,3	$l=5{,}44.$
y_i	1,5	1,7	1,6	2,5	2,9	2,3	

2

Х \ У	11	16	21	26	31	36
4	1	2	3			
6		8	7	2		
8			2	4	7	
10				5	4	6
12					4	5

Вариант 10.

1

x_i	0,1	1,6	3,9	6,1	8	9,8	$l=4{,}92.$
y_i	2	1,9	2,6	2,4	3,3	3,4	

2

Х \ У	7	9	11	13	15	17
15	2	3				
18		10	9	3		
21			2	10	3	
24			1	4	6	
27					5	7

Решение типовых вариантов индивидуальной работы

Тема 1.1

<u>Задание 1.</u> Есть *6* колоколов разных размеров, каждый из которых при ударе одинаковой силы издает звук, отличный от звуков остальных колоколов. По колоколам ударяют *2* раза. Сколькими способами можно извлечь при этом звук, состоящий из: **а)** *2* различных звуков; **б)** *2* любых звуков?

Решение. а) $A_6^2 = \frac{6!}{2!} = 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 360$. б) $\tilde{A}_6^2 = 6^2 = 36$.

Ответ: а) *360*; б) *36*.

<u>Задание 2.</u> В школе *37* учеников и *20* учителей. Сколькими способами можно выбрать делегацию, состоящую из *2* учителей и *5* учеников?

Решение. $C_{37}^5 \cdot C_{20}^2 = \frac{37!}{5!\cdot 32!}\cdot\frac{20!}{2!\cdot 18!} = 435897\cdot 190 = 82820430$.

Ответ: *82820430*.

<u>Задание 3.</u> 12 человек нужно разместить в 2 одноместных, 1 двуместном и 2 четырехместных номерах гостиницы. . Сколькими способами они могут быть размещены в номерах такого типа?

Решение.

$$C_{12}^1\cdot C_{11}^1\cdot C_{10}^2\cdot C_8^4\cdot C_4^4 = \frac{12!}{1!\cdot 11!}\cdot\frac{11!}{1!\cdot 10!}\cdot\frac{10!}{2!\cdot 8!}\cdot\frac{8!}{4!\cdot 4!}\cdot\frac{4!}{4!\cdot 0!} = \frac{12!}{2!\cdot 4!\cdot 4!} = 415800.$$

Ответ: 415800.

Тема 1.2

<u>Задание 1.</u> Билеты лотереи выпущены на общую сумму *10000* у.е. Цена билета – 5 у.е. Ценные выигрыши попадают на *50* билетов. Определить вероятность ценного выигрыша на один билет.

Решение. Пусть событие *А* состоит в том, что «наудачу купленный билет оказался выигрышным». Всего было выпущено $n = \frac{10000}{5} = 2000$ билетов. Тогда, по формуле классической вероятности, получим:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{50}{2000} = 0{,}025.$$

Ответ: *0,025*.

<u>Задание 2.</u> В конверте среди 23 фотографий находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 7 фотографий. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

Решение. Пусть событие *А* состоит в том, что «из семи извлеченных фотографий находится нужная». Вероятность этого события будем искать по классической схеме

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_1^1\cdot C_{22}^6}{C_{23}^7} = \frac{22!}{6!\cdot 16!} : \frac{23!}{7!\cdot 16!} = \frac{22!\cdot 7!}{6!\cdot 23!} = 0{,}3.$$

Ответ: *0,3*.

Задание 3. В цехе работают 16 мужчин и 7 женщин. По табельным номерам наудачу отобраны 12 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажется 4 женщины.

Решение. Пусть событие *A* состоит в том, что «из двенадцати отобранных человек четыре женщины». Вероятность этого события будем искать в следующем виде

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_7^4\cdot C_{16}^8}{C_{23}^{12}}=\left(\frac{7!}{4!\cdot 3!}\cdot\frac{16!}{8!\cdot 8!}\right):\frac{23!}{12!\cdot 11!}=0,33.$$

Ответ: *0,33*.

Задание 4. Группа студентов из *20* человек распределяется на производственную практику следующим образом: в город *A* направляется *8* студентов, в город *B* – *5* студентов и в город *C* – *7* студентов. Какова вероятность того, что два определенных студента попадут на практику в один город.

Решение. Пусть событие *F* состоит в том, что «два определенных студента попадут на практику в один город». Искомое событие *F* произойдет, когда наступит или событие F_1 – «два определенных студента попадут на практику в город *A*», или событие F_2 – «два определенных студента попадут на практику в город *B*», или событие F_3 – «два определенных студента попадут на практику в город *C*». Поэтому

$$P(F)=P(F_1+F_2+F_3)=P(F_1)+P(F_2)+P(F_3)=\frac{C_8^2}{C_{20}^2}+\frac{C_5^2}{C_{20}^2}+\frac{C_7^2}{C_{20}^2}=$$

$$=\frac{1}{C_{20}^2}\left(C_8^2+C_5^2+C_7^2\right)=\frac{2!\cdot 18!}{20!}\left(\frac{8!}{2!\cdot 6!}+\frac{5!}{2!\cdot 3!}+\frac{7!}{2!\cdot 5!}\right)=\frac{1}{19\cdot 20}\left(7\cdot 8+4\cdot 5+6\cdot 7\right)=$$

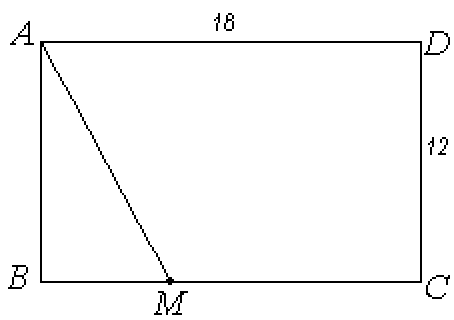
$$=\frac{118}{380}=0,3105.$$

Ответ: *0,3105*.

Задание 5. В прямоугольнике *ABCD* со сторонами *12* и *18* случайным образом выбирается точка *X*. Найдите вероятность того, что эта точка принадлежит трапеции *AMCD*, где точка *M* делит отрезок *BC* в отношении *2:4*, считая от точки *B*.

Решение. Пусть событие *E* состоит в том, что «наудачу выбранная точка в прямоугольнике *ABCD* принадлежит и трапеции *AMCD*».

Воспользуемся формулой геометрической вероятности $P(E)=\dfrac{S_{AMCD}}{S_{ABCD}}$.



$S_{ABCD}=12\cdot 18=216$. Т. к. точка *M* делит отрезок *BC* в отношении *2:4*, считая от точки *B,* тогда $BM=2\cdot\dfrac{18}{6}=6$, $MC=4\cdot\dfrac{18}{6}=12$.

$$S_{AMCD}=S_{ABCD}-S_{AMB}=12\cdot 18-\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 12=216-36=180.$$

Окончательно получаем $P(E)=\frac{180}{216}=0,83$.

Ответ: *0,83*.

Тема 1.3

Задание 1. Три стрелка производят по одному выстрелу по цели, вероятности попадания в которую равны: для первого стрелка – *0,3*, для второго – *0,9*, для третьего – *0,6*. Найти вероятность того, что: **а)** в цель попадет только первый стрелок; **б)** в цель попадут два стрелка; **в)** хотя бы один стрелок попадет в цель.

Решение. Пусть событие *A* состоит в том, что «в цель попадет только первый стрелок»; *B* – «в цель попадут два стрелка»; *C* – «ни один стрелок не попадет в цель»; *D* – «хотя бы один стрелок попадет в цель». Введем следующие события: H_1 – «первый стрелок попадет в цель»; H_2 – «второй стрелок попадет в цель»; H_3 – «третий стрелок попадет в цель». Из условия задачи:

$$P(H_1)=0,3;\ P(H_2)=0,9;\ P(H_3)=0,6;$$
$$P(\overline{H}_1)=0,7;\ P(\overline{H}_2)=0,1;\ P(\overline{H}_3)=0,4.$$

а) $A=H_1\cdot\overline{H}_2\cdot\overline{H}_3$. Так как вероятность любого из событий H_i, $i=1,2,3$ не меняется при наступлении другого события, то события H_i независимы. Тогда:

$$P(A)=P(H_1\cdot\overline{H}_2\cdot\overline{H}_3)=P(H_1)\cdot P(\overline{H}_2)\cdot P(\overline{H}_3)=0,3\cdot 0,1\cdot 0,4=0,012.$$

б) $B=H_1\cdot H_2\cdot\overline{H}_3+H_1\cdot\overline{H}_2\cdot H_3+\overline{H}_1\cdot H_2\cdot H_3$. Все три слагаемые – несовместные события, так как появление любого из них исключает появление других. Вероятность суммы конечного числа несовместных событий равна сумме их вероятностей. Тогда:

$$P(B)=P(H_1\cdot H_2\cdot\overline{H}_3+H_1\cdot\overline{H}_2\cdot H_3+\overline{H}_1\cdot H_2\cdot H_3)=$$
$$=P(H_1)\cdot P(H_2)\cdot P(\overline{H}_3)+P(H_1)\cdot P(\overline{H}_2)\cdot P(H_3)+P(\overline{H}_1)\cdot P(H_2)\cdot P(H_3)=$$
$$=0,3\cdot 0,9\cdot 0,4+0,3\cdot 0,1\cdot 0,6+0,7\cdot 0,9\cdot 0,6=0,108+0,018+0,375=0,504.$$

в) Событие $C=\overline{D}=\overline{H}_1\cdot\overline{H}_2\cdot\overline{H}_3$. События D и $\overline{D}$ образуют полную группу событий, поэтому $P(D)+P(\overline{D})=1$, тогда

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-P(\overline{H}_1\cdot\overline{H}_2\cdot\overline{H}_3)=1-P(\overline{H}_1)\cdot P(\overline{H}_2)\cdot P(\overline{H}_3)=$$
$$=1-0,7\cdot 0,1\cdot 0,4=1-0,028=0,972.$$

Ответ: а) *0,012*; б) *0,504*; в) *0,972*.

Задание 2. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна *0,5*, второй – *0,6*, третий – *0,9.* Вычислить вероятность того, что студент сдаст: **а)** не менее двух экзаменов; **б)** менее трех экзаменов; **в)** хотя бы один экзамен.

Решение. Пусть событие А состоит в том, что «студент сдаст не менее двух экзаменов»; В – «студент сдаст менее трех экзаменов»; С – «студент сдаст хотя бы один экзамен». Введем следующие события: H_1 – «студент сдаст первый экзамен»; H_2 – «студент сдаст второй экзамен»; H_3 – «студент сдаст третий экзамен». Из условия задачи:

$$P(H_1)=0,5;\ P(H_2)=0,6;\ P(H_3)=0,9;$$
$$P(\overline{H}_1)=0,5;\ P(\overline{H}_2)=0,4;\ P(\overline{H}_3)=0,1.$$

а) Рассмотрим события: A_1 – «студент сдаст два экзамена»; A_2 – «студент сдаст три экзамена». Тогда $A = A_1 + A_2$, в свою очередь $A_2 = H_1 \cdot H_2 \cdot H_3$, а $A_1 = H_1 \cdot H_2 \cdot \overline{H}_3 + H_1 \cdot \overline{H}_2 \cdot H_3 + \overline{H}_1 \cdot H_2 \cdot H_3$, то есть

$$A = H_1 \cdot H_2 \cdot \overline{H}_3 + H_1 \cdot \overline{H}_2 \cdot H_3 + \overline{H}_1 \cdot H_2 \cdot H_3 + H_1 \cdot H_2 \cdot H_3.$$

Все слагаемые – несовместные события, так как появление любого из них исключает появление других. Вероятность суммы конечного числа несовместных событий равна сумме их вероятностей. События H_i независимы ($i = 1,2,3$), поэтому вероятность произведения этих событий равна произведению их вероятностей. Тогда:

$$P(A) = P\left(H_1 \cdot H_2 \cdot \overline{H}_3 + H_1 \cdot \overline{H}_2 \cdot H_3 + \overline{H}_1 \cdot H_2 \cdot H_3 + H_1 \cdot H_2 \cdot H_3\right) =$$
$$= P(H_1) \cdot P(H_2) \cdot P(\overline{H}_3) + P(H_1) \cdot P(\overline{H}_2) \cdot P(H_3) + P(\overline{H}_1) \cdot P(H_2) \cdot P(H_3) +$$
$$+ P(H_1) \cdot P(H_2) \cdot P(H_3) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}9 =$$
$$= 0{,}03 + 0{,}18 + 0{,}27 + 0{,}27 = 0{,}75.$$

б) Рассмотрим событие $\overline{B}$, состоящее в том, что «студент сдаст три экзамена». События B и $\overline{B}$ образуют полную группу событий, поэтому $P(B) + P(\overline{B}) = 1$. Тогда

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(H_1 \cdot H_2 \cdot H_3) = 1 - P(H_1) \cdot P(H_2) \cdot P(H_3) = 1 - 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}9 =$$
$$= 1 - 0{,}27 = 0{,}73.$$

в) Рассмотрим событие $\overline{C}$, состоящее в том, что «студент не сдаст ни одного экзамена». События C и $\overline{C}$ образуют полную группу событий, поэтому $P(C) + P(\overline{C}) = 1$. Тогда

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P\left(\overline{H}_1 \cdot \overline{H}_2 \cdot \overline{H}_3\right) = 1 - P(\overline{H}_1) \cdot P(\overline{H}_2) \cdot P(\overline{H}_3) = 1 - 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}1 =$$

$$= 1 - 0{,}02 = 0{,}98.$$

Ответ: а) 0,75; б) 0,73; в) 0,98.

<u>Задание 3.</u> Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены выйдет из строя, равна *0,1*, второй – *0,2* и третий – *0,3*. Найти вероятность того, что в течение смены выйдут из стоя: а) менее двух станков; б) два станка; в) более двух станков.

Решение. Введем следующие события: H_1 – «первый станок в течение смены выйдет из строя»; H_2 – «второй станок в течение смены выйдет из строя»; H_3 – «третий станок в течение смены выйдет из строя». Из условия задачи:

$$P(H_1) = 0{,}1; P(H_2) = 0{,}2; P(H_3) = 0{,}3;$$
$$P(\overline{H}_1) = 0{,}9; P(\overline{H}_2) = 0{,}8; P(\overline{H}_3) = 0{,}7.$$

а) Пусть событие A состоит в том, что «в течение смены выйдут из стоя менее двух станков». Запишем событие A через события H_i $i = \overline{1,3}$.

$$A = \overline{H}_1 \cdot \overline{H}_2 \cdot \overline{H}_3 + H_1 \cdot \overline{H}_2 \cdot \overline{H}_3 + \overline{H}_1 \cdot \overline{H}_2 \cdot H_3 + \overline{H}_1 \cdot H_2 \cdot \overline{H}_3$$

Все слагаемые – несовместные и независимые события, поэтому:

$$P(A) = P\left(\overline{H}_1 \cdot \overline{H}_2 \cdot \overline{H}_3 + H_1 \cdot \overline{H}_2 \cdot \overline{H}_3 + \overline{H}_1 \cdot \overline{H}_2 \cdot H_3 + \overline{H}_1 \cdot H_2 \cdot \overline{H}_3\right) =$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}902.$$

б) Событие B, состоит в том, что «в течение смены выйдут из стоя два станка». Тогда

$$B = H_1 \cdot H_2 \cdot \overline{H}_3 + H_1 \cdot \overline{H}_2 \cdot H_3 + \overline{H}_1 \cdot H_2 \cdot H_3$$

$$P(B) = P\left(H_1 \cdot H_2 \cdot \overline{H}_3 + H_1 \cdot \overline{H}_2 \cdot H_3 + \overline{H}_1 \cdot H_2 \cdot H_3\right) =$$

$$= 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}092$$

в) Рассмотрим событие C, состоящее в том, что «в течение смены выйдут из стоя более двух станков».

$C = H_1 \cdot H_2 \cdot H_3$, $P(C) = P(H_1) \cdot P(H_2) \cdot P(H_3) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$.

Ответ: а) 0,902; б) 0,092; в) 0,06.

Тема 1.4

Задание 1. На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трех заводов в количестве: *10* – с первого завода, *25* – со второго завода, *15* – с третьего. Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе *0,9*, на втором – *0,85*, на третьем – *0,7*. **а)** Какова вероятность того, что случайно взятое изделие будет качественным? **б)** Взятое случайным образом изделие оказалось качественным. Найти вероятность того, что оно изготовлено на втором заводе.

Решение. Пусть событие А состоит в том, что случайно взятое изделие будет качественным. Возможны следующие предположения (гипотезы):

H_1 – «взятое изделие изготовлено первым заводом»;

H_2 – «взятое изделие изготовлено вторым заводом»;

H_3 – «взятое изделие изготовлено третьим заводом».

Всего на сборочное предприятие поступило $10 + 25 + 15 = 50$ комплектующих. Тогда вероятности гипотез будут равны:

$$P(H_1) = \frac{10}{50} = 0{,}2;\ P(H_2) = \frac{25}{50} = 0{,}5;\ P(H_3) = \frac{15}{50} = 0{,}3.$$

Из условия задачи условные вероятности события А при указанных гипотезах равны:

$$P\left(A/H_1\right) = 0{,}9;\ P\left(A/H_2\right) = 0{,}85;\ P\left(A/H_3\right) = 0{,}7.$$

а) Вероятность того, что случайно взятое изделие будет качественным, найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P\left(A/H_1\right) + P(H_2) \cdot P\left(A/H_2\right) + P(H_3) \cdot P\left(A/H_3\right) =$$

$$= 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}85 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}18 + 0{,}425 + 0{,}21 = 0{,}815.$$

б) Если взятое случайным образом изделие оказалось качественным, то вероятность того, что оно изготовлено на втором заводе найдем по формуле Байеса:

$$P\left(H_2/A\right) = \frac{P(H_2) \cdot P\left(A/H_2\right)}{P(A)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}85}{0{,}815} = \frac{0{,}425}{0{,}815} \approx 0{,}521.$$

Ответ: а) *0,815*; б) *0,521*.

Задание 2. Статистика запросов кредитов в банке такова: 39% – от государственных органов, 12% – от других банков, остальное – от физических лиц. Вероятности невозврата кредита в оговоренный срок соответственно равны *0,02*, *0,03*, *0,01*. Найти вероятность невозврата очередного запроса на кредит. **а)** Найти вероятность невозврата очередного запроса на кредит. **б)** Начальнику кредитного отдела доложили, что получено сообщение о невозврате кредита, но в факсовом сообщении имя клиента было плохо пропечатано. Кто наиболее вероятно из клиентов не возвращает кредит?

Решение. Введем в рассмотрение следующие гипотезы:

H_1 – «сообщение о невозврате поступило от госорганов»;

H_2 – «сообщение о невозврате поступило от других банков»;

H_3 – «сообщение о невозврате поступило от физических лиц».

Вероятности гипотез равны:

$P(H_1)=0,39$; $P(H_2)=0,12$; $P(H_3)=0,49$.

Пусть событие А – «невозврат очередного запроса на кредит». При данных гипотезах условные вероятности события А равны:

$P\left(A/H_1\right)=0,02$; $P\left(A/H_2\right)=0,03$; $P\left(A/H_3\right)=0,01$.

Следовательно, по формуле полной вероятности находим

$$P(A)=P(H_1)\cdot P\left(A/H_1\right)+P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)+P(H_3)\cdot P\left(A/H_3\right)=$$

$$=0,39\cdot 0,02+0,12\cdot 0,03+0,49\cdot 0,01=0,0163.$$

Предположим, что событие А произошло. Свидетельством тому – факсовое сообщение начальнику кредитного отдела. По формуле Байеса пересчитаем вероятности гипотез, то есть найдем апостериорные вероятности гипотез:

$$P\left(H_1/A\right)=\frac{P(H_1)\cdot P\left(A/H_1\right)}{P(A)}=\frac{0,39\cdot 0,02}{0,0163}=0,4785;$$

$$P\left(H_2/A\right)=\frac{P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)}{P(A)}=\frac{0,12\cdot 0,03}{0,0163}=0,2208;$$

$$P\left(H_3/A\right)=\frac{P(H_3)\cdot P\left(A/H_3\right)}{P(A)}=\frac{0,49\cdot 0,01}{0,0163}=0,3006.$$

Т. о., наиболее вероятно невозвращение кредита государственными органами.

Ответ: а) 0,0163; б) госорганы.

Задание 3. В группе студентов решают задачу. Известно, что 7 студентов учатся на «отлично», 10 на «хорошо» и 8 на «удовлетворительно». Вероятность того, что задача будет решена отличником равна *0,66*; хорошистом – *0,22*; посредственным студентом – *0,08*. **а)** Какая вероятность решения задачи? **б)** студентом решена задача. Найти вероятность того, что он учится на «удовлетворительно».

Решение. Введем в рассмотрение следующие гипотезы:

H_1 – «задача решена отличником»;

H_2 – «задача решена хорошистом»;

H_3 – «задача решена посредственным студентом».

Всего в группе $7+10+8=25$ студентов. Вероятности гипотез равны:

$$P(H_1)=\frac{7}{25}=0,28;\ P(H_2)=\frac{10}{25}=0,4;\ P(H_3)=\frac{8}{25}=0,32.$$

Пусть событие A – «задача решена». При данных гипотезах условные вероятности события A равны:

$$P\left(A/H_1\right)=0,66;\ P\left(A/H_2\right)=0,22;\ P\left(A/H_3\right)=0,08.$$

Следовательно, по формуле полной вероятности находим

$$P(A)=P(H_1)\cdot P\left(A/H_1\right)+P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)+P(H_3)\cdot P\left(A/H_3\right)=$$

$$=0,28\cdot 0,66+0,4\cdot 0,22+0,32\cdot 0,08=0,1848+0,088+0,0256=0,2984.$$

Предположим, что событие A произошло. Задача была решена. По формуле Байеса найдем вероятности того, что посредственный студент решил задачу

$$P\left(H_3/A\right)=\frac{P(H_3)\cdot P\left(A/H_3\right)}{P(A)}=\frac{0,32\cdot 0,08}{0,2984}=0,0858.$$

Ответ: а) *0,2984*; б) *0,0858*.

Тема 1.5

Задание 1. Банк имеет *8* отделений. С вероятностью *0,2* независимо от других каждое отделение может заказать на завтра крупную сумму денег. В конце рабочего дня один из вице-президентов банка знакомится с поступившими заявками. Какова вероятность того, что будет: **а)** хотя бы одна заявка; **б)** ровно *3* заявки; **в)** как минимум *3* заявки?

Решение. а) Для вычисления вероятности того, что на завтра не будет ни одной заявки, воспользуемся формулой Бернулли

$$P_8(0)=C_8^0p^0q^{8-0}=\frac{8!}{0!\cdot 8!}(0,2)^0\cdot(0,8)^8=0,1678.$$

Найдем вероятность того, что на завтра будет хотя бы одна заявка

$$P_8(k\ge 1)=1-P_8(0)=1-0,1678=0,8322.$$

б) Вероятность того, что на завтра будет ровно три заявки, равна

$$P_8(3)=C_8^3p^3q^{8-3}=\frac{8!}{3!\cdot 5!}(0,2)^3\cdot(0,8)^5=56\cdot 0,008\cdot 0,3277=0,1468.$$

в) Вероятность того, что есть как минимум три заявки, равна

$$P_8(k\ge 3)=1-P_8(0\le k\le 2)=1-(P_8(0)+P_8(1)+P_8(2))=$$

$$=1-\left(C_8^0p^0q^{8-0}+C_8^1p^1q^{8-1}+C_8^2p^2q^{8-2}\right)=$$

$$=1-\left(\frac{8!}{0!\cdot 8!}(0,2)^0\cdot(0,8)^8+\frac{8!}{1!\cdot 7!}(0,2)^1\cdot(0,8)^7+\frac{8!}{2!\cdot 6!}(0,2)^2\cdot(0,8)^6\right)=$$

$$=1-(0,1678+0,3355+0,2936)=1-0,7969=0,2031.$$

Ответ: а) *0,8322*; б) *0,1468*; в) *0,2031*.

Задание 2. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна *0,3*. Куплено *13* билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

Решение. Число k_0 (наступления события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна *p*) называется наивероятнейшим, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности всех остальных возможных исходов испытаний. Наивероятнейшее число k_0 определяется из двойного неравенства:

$$np - q \le k_0 < np + p.$$

Из условия задачи $p = 0,3$, $q = 0,7$, $n = 13$. Подставив данные в последнюю формулу, получим:

$$13 \cdot 0,3 - 0,7 \le k_0 < 13 \cdot 0,3 + 0,3 \text{ или } 3,2 \le k_0 < 4,2.$$

Так как k_0 – целое число и поскольку между числами 3,2 и 4,2 заключено одно целое число, а именно 4, то искомое наивероятнейшее число $k_0 = 4$.

Вероятность того, что из 13 купленных билетов выигрышными будут ровно 4, найдем по формуле Бернулли:

$$P_{13}(4) = C_{13}^4 p^4 q^{13-4} = \frac{13!}{4! \cdot 9!}(0,3)^4 \cdot (0,7)^9 = 0,234.$$

Ответ: $P_{13}(4) = 0,234$.

Задание 3. Вероятность наступления некоторого события в каждом из *400* независимых испытаний равна *0,8*. Определить вероятность того, что число наступлений события *m* удовлетворяет следующим неравенствам: **а)** $300 \le m \le 350$; **б)** $m \ge 300$; **в)** $m \le 350$; **г)** какова вероятность того, что в *400* независимых испытаниях событие появится ровно *300* раз?

Решение. Для нахождения вероятности того, что число наступлений события *m* удовлетворяет неравенству $k_1 \le m \le k_2$, воспользуемся интегральной формулой Лапласа

$$P_n(k_1 \le m \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad q = 1 - p.$$

а) Из условия задачи $n = 400$, $p = 0,8$, $k_1 = 300$, $k_2 = 350$, тогда

$$P_{400}(300 \le m \le 350) \approx \Phi\left(\frac{350 - 400 \cdot 0,8}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) - \Phi\left(\frac{300 - 400 \cdot 0,8}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{30}{8}\right) - \Phi\left(-\frac{20}{8}\right) = \Phi(3,75) + \Phi(2,5) = 0,4999 + 0,4938 = 0,9937$$

б) $P_{400}(m \ge 300) = P_{400}(300 \le m \le 400) \approx$

$$\approx \Phi\left(\frac{400 - 400 \cdot 0,8}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) - \Phi\left(\frac{300 - 400 \cdot 0,8}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) = \Phi\left(\frac{80}{8}\right) - \Phi\left(-\frac{20}{8}\right) =$$

$$= \Phi(10) + \Phi(2,5) = 0,5 + 0,4938 = 0,9938.$$

в) $P_{400}\left(m \le 350\right) = P_{400}(0 \le m \le 350) \approx$

$$\approx \Phi\left(\frac{350-400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right)-\Phi\left(\frac{0-400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right)=\Phi\left(\frac{30}{8}\right)-\Phi\left(-\frac{320}{8}\right)=$$

$$=\Phi\left(3,75\right)+\Phi\left(40\right)=0,4999+0,5=0,9999.$$

г) Для вычисления вероятности того, что в *400* независимых испытаниях событие появится ровно *300* раз, воспользуемся локальной *формулой Муавра-Лапласа*

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right),\quad q=1-p.$$

Следовательно,

$$P_{400}(300)\approx\frac{1}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\,\varphi\left(\frac{300-400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}\right)=\frac{1}{8}\varphi\left(\frac{-20}{8}\right)=\frac{1}{8}\varphi\left(2,5\right)=$$

$$=\frac{0,0175}{8}=0,0022.$$

Ответ: а) *0,9937*; б) *0,9938*; в) *0,9999*; г) *0,0022*.

Задание 4. Владельцы пластиковых карточек ценят их и теряют весьма редко. Пусть вероятность потерять в течение недели пластиковую карточку для произвольного владельца равна *0,002*. Всего банк выдал карточки *2165* клиентам. Найти вероятность того, что в предстоящую неделю будет потеряна: **а)** ровно одна карточка; **б)** хотя бы одна карточка; **г)** чему равна вероятность того, что в предстоящую неделю будут утеряны более *3* карточек?

Решение. В нашем случае $\lambda = np = 2165\cdot 0,002 = 4,33 < 10$, а вероятность $p = 0,002$ мала, то следует воспользоваться формулой Пуассона:

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}\,e^{-\lambda}.$$

а) Вероятность того, что в предстоящую неделю будет потеряна ровно одна карточка, равна:

$$P_{2165}(1)\approx\frac{4,33^1}{1!}\,e^{-4,33}=0,057.$$

б) Определим вероятность того, в предстоящую неделю будет утеряна хотя бы одна карточка:

$$P_{2165}\left(m\ge 1\right)=1-P_{2165}(0)\approx\frac{4,33^0}{0!}\,e^{-4,33}=1-0,0132=0,9868.$$

в) Пусть событие *А* – «в предстоящую неделю будет утеряно более трех карточек». Тогда

$$P\left(A\right)=P_{2165}\left(m>3\right)=1-P_{2165}\left(0\le m\le 3\right)=$$

$$=1-\left(P_{2165}\left(0\right)+P_{2165}\left(1\right)+P_{2165}\left(2\right)+P_{2165}\left(3\right)\right)=$$

$$=1-\left(\frac{4,33^0\cdot e^{-4,33}}{0!}+\frac{4,33^1\cdot e^{-4,33}}{1!}+\frac{4,33^2\cdot e^{-4,33}}{2!}+\frac{4,33^3\cdot e^{-4,33}}{3!}\right)=$$

$$=1-\left(0,0132+0,0570+0,1234+0,1782\right)=0,6282.$$

Ответ: а) *0,057*; б) *0,9868*; в) *0,6282*.

Тема 2.1

Задание 1. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлено $n = 4$ светофора, дающих независимо друг от друга зеленый сигнал в течение $t_1 = 1,55$ минут, желтый – в течение $t_2 = 0,35$ минут, красный – в течение $t_3 = 1,20$ минут. Требуется:

а) написать закон распределения случайной величины *X* - числа остановок автомобиля на улице;

б) найти математическое ожидание и дисперсию величины X;

в) каково среднее число остановок автомобиля на данном пути?

Решение. а) В нашем случае $t_1 = t_2 + t_3$, т.е. время, в течение которого светофор разрешает проезд (зеленый свет), равно времени, при котором проезд запрещен (желтый и красный свет). Значит, вероятность того, что светофор пропустит или задержит машину, одна и та же и равна $p = \frac{t_2 + t_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{1}{2}$. Случайная величина *X* может принимать значения *0, 1, 2, 3, 4* соответственно с вероятностями, которые находятся по формуле Бернулли:

$$P(X=0) = C_4^0 p^0 q^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,0625, \quad P(X=1) = C_4^1 p^1 q^3 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,2500,$$

$$P(X=2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,3750, \quad P(X=3) = C_4^3 p^3 q = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,2500,$$

$$P(X=4) = C_4^4 p^4 q^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,0625.$$

Закон распределения случайной величины *X*:

X	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
p	*0,0625*	*0,2500*	*0,3750*	*0,2500*	*0,0625*

б) Математическое ожидание ДСВ *X*:

$$M(X) = 0 \cdot 0,0625 + 1 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,375 + 3 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,0625 = 2,$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 0^2 \cdot 0,0625 + 1^2 \cdot 0,25 + 2^2 \cdot 0,375 + 3^2 \cdot 0,25 +$$

$$+ 4^2 \cdot 0,0625 - 2^2 = 1.$$

в) Ожидаемое число остановок автомобиля на данной улице равно 2.

Задание 2. Задан закон распределения СВ X. Найти *M(X), D(X), M(3x+2), D(3x+2).* Составить функцию распределения *F(x)*, построить её график.

x	2	4	7	10
p_i	0,1	0,2	0,5	0,2

Решение. Найдём математическое ожидание $M(X)$ по формуле $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

В нашем случае $M(X) = 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 + 7 \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,2 = 6,5.$

Для вычисления дисперсии используем формулу $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$. Здесь $M(X^2) = 2^2 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,2 + 7^2 \cdot 0,5 + 10^2 \cdot 0,2 = 48,2.$

Тогда $D(X) = 48,2 - 6,5^2 = 5,95.$

Найдём

$$M(3X+2)=3M(X)+2=3\cdot 6{,}5+2=21{,}5;$$

$$D(3X+2)=3^2D(X)+D(2)=9\cdot 5.95+0=53.55.$$

Составим функцию распределения F(x):

1) если $x\le 2$, то $F(x)=P(x<2)=0$. Действительно, значений, меньших числа 2, величина X не принимает. Следовательно, при $x\le 2$ функция $F(x)=P(X<x)=0$;

2) если $2<x\le 4$, то $F(x)=0{,}1$. Действительно, X может принять значение 2 с вероятностью 0,1;

3) если $4<x\le 7$, то $F(x)=P(x<7)=P(x=2)+P(x=4)=0{,}1+0{,}2=0{,}3$;

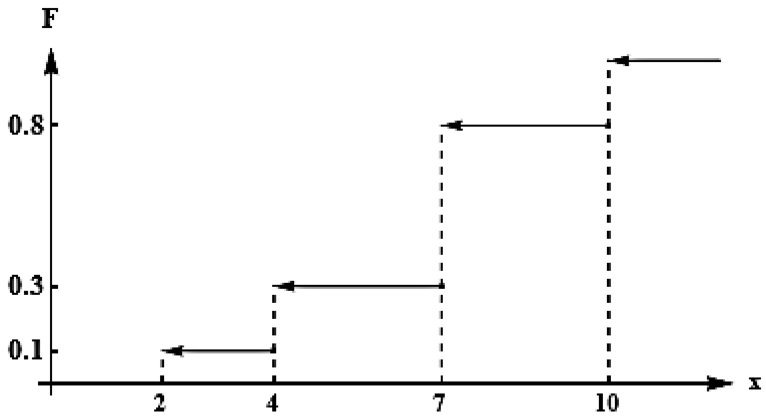
4) если $7<x\le 10$, то $F(x)=P(x<10)=P(x=2)+P(x=4)+P(x=7)=0{,}1+0{,}2+0{,}5=$ $=0{,}8$;

5) если $x>10$, то $F(x)=1$. Действительно, событие $x\le 10$ достоверно и вероятность его равна единице.

Итак, искомая функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 2,\\ 0{,}1, \text{ при } 2<x\le 4,\\ 0{,}3, \text{ при } 4<x\le 7,\\ 0{,}8, \text{ при } 7<x\le 10,\\ 1, \text{ при } x>10.\end{cases}$$

График $F(x)$:



Ответ: M(X) =6, 5; D(X)=5,95 ; M(3x+2)= 21,5 ; D(3x+2)=53,55.

<u>Задание 3.</u> Из урны, содержащей 3 белых и 5 черных шаров, извлекаются 3 шара. Пусть *СВ X* – число вынутых черных шаров. Составить закон распределения, найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение.

Решение. СВ X может принять значения: 0, 1, 2, 3. Вычислим соответствующие вероятности.

$$p_1=P(X=0)=P(ббб)=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{8\cdot 7\cdot 6}=\frac{1}{56}.$$

$$p_2=P(X=1)=P(чбб+бчб+ббч)=\frac{C_5^1\cdot C_3^2}{C_8^3}=\frac{5\cdot 3}{56}=\frac{15}{56}.$$

$$p_3 = P(X=2) = P(ччб + чбч + бчч) = \frac{C_5^2 \cdot C_3^1}{C_8^3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{2\cdot 56} = \frac{15\cdot 2}{56} = \frac{30}{56}.$$

$$p_4 = P(X=3) = P(ччч) = \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{56} = \frac{10}{56}.$$

Закон распределения для данной *СВ X* имеет вид

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = \frac{1+15+30+10}{56} = 1.$$

Находим числовые характеристики данного распределения.

$$M(X) = 0\cdot\frac{1}{56} + 1\cdot\frac{15}{56} + 2\cdot\frac{30}{56} + 3\cdot\frac{10}{56} = \frac{15+60+30}{56} = \frac{105}{56} = 1{,}875.$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i - M^2(X).$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i = 0^2\cdot\frac{1}{56} + 1^2\cdot\frac{15}{56} + 2^2\cdot\frac{30}{56} + 3^2\cdot\frac{10}{56} = \frac{15+120+90}{56} = \frac{225}{56} = 4{,}018.$$

$$D(X) = 4{,}018 - 1{,}875^2 = 0{,}5024.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0{,}5024} = 0{,}71.$$

Тема 2.2

Задание 1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и $P(|X - M(X)| < 0{,}25)$.

Решение. Плотность распределения вероятностей СВ X имеет вид

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{2}x, & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Математическое ожидание СВХ:

$$M(X)=\int_0^2 x\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)dx=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^2=\frac{4}{3}.$$

Дисперсия СВХ:

$$D(X)=\int_0^2 x^2\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)dx-\frac{16}{9}=\frac{1}{8}x^4\Big|_0^2-\frac{16}{9}=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}.$$

Вычислим $P(|X-M(X)|<0{,}25)$.

$$P\left(\left|X-\frac{4}{3}\right|<0{,}25\right)=P\left(-0{,}25<X-\frac{4}{3}<0{,}25\right)=P(1{,}083<X<1{,}583)=\int_{1.083}^{1.583} f(x)dx=$$

$$=\int_{1.083}^{1.583}\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{4}x^2\Big|_{1{,}083}^{1{,}583}=0{,}3325.$$

<u>Задание 2.</u> Случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ A(2x-1), & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Найти неизвестный параметр A, $M(X)$, дисперсию $D(X)$.

Решение. Из условия нормировки будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1 \quad\Rightarrow\quad \int_{-\infty}^{\infty} A(2x-1)dx=1;$$

$$A\int_1^2(2x-1)dx=A(x^2-x)\Big|_1^2=A(2^2-2)-A(1^2-1)=2A;$$

$$2A=1\ \Rightarrow A=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, функция плотности запишется в виде

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \frac{1}{2}(2x-1), & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Находим числовые характеристики СВ *X*:

$$M(X)=\frac{1}{2}\int_1^2 x(2x-1)dx=\frac{1}{2}\int_1^2(2x^2-x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2=\frac{19}{12},$$

$$D(X)=\frac{1}{2}\int_1^2 x^2(2x-1)dx-\left(\frac{19}{12}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2-\left(\frac{19}{12}\right)^2=\frac{11}{144}.$$

Тема 2.3

Задание 1. СВ *Т* подчиняется показательному закону с известным $\lambda = 1{,}2$. Записать $f(t)$, $F(t)$. Построить их графики. Найти $M(T), D(T), \sigma(T),\quad P(0{,}98 < T < 2{,}43)$.

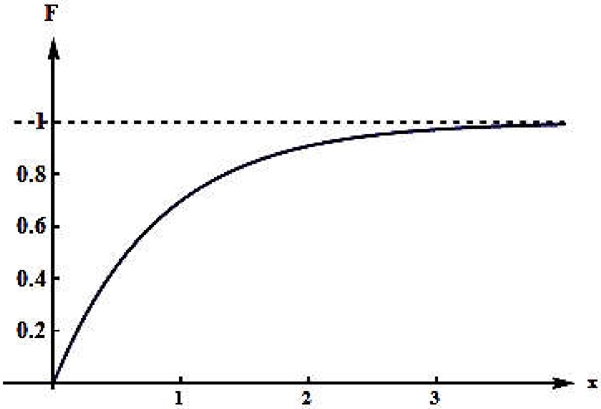
Решение. Для показательного распределения плотность вероятности имеет вид

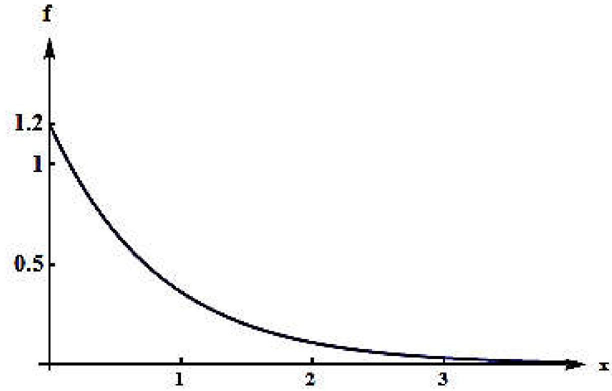
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & если \quad x \ge 0, \\ 0, & если \quad x < 0; \end{cases} = \begin{cases} 1{,}2 e^{-1{,}2x}, & если \quad x \ge 0, \\ 0, & если \quad x < 0; \end{cases}$$

Функция распределения равна

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & если \quad x \ge 0, \\ 0, & если \quad x < 0; \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{-1{,}2x}, & если \quad x \ge 0, \\ 0, & если \quad x < 0; \end{cases}$$

И графики соответственно примут вид:





$$M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1{,}2} = 0{,}83, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{1{,}2^2} = 0{,}694, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} = 0{,}83.$$

$$P(0{,}98 < X < 2{,}43) = e^{-0{,}98 \cdot 1{,}2} - e^{-2{,}43 \cdot 1{,}2} = 0{,}254.$$

Задание 2. Среднее время работы каждого из трех элементов, входящих в техническое устройство, равно *Т=750* часов. Для безотказной работы устройства необходима безотказная работа хотя бы одного из трех этих элементов. Определить вероятность того, что устройство будет работать от $t_1 = 450$ до $t_2 = 600$ часов, если время работы каждого из трех элементов независимо и распределено по показательному закону.

Решение. Рассмотрим СВ Т – длительность времени безотказной работы *i*-го элемента, $i = \overline{1{,}3}$. Так как М(Т) = 750, то $\lambda = {}^{1}\!/_{750}$ и функция распределения случайной величины Т примет вид

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t/750}; \ t \ge 0, \\ 0; \ t < 0. \end{cases}$$

Вероятность того, что величина Т примет значение из интервала $(\alpha; \beta)$, определяется формулой

$$P\left(\alpha < T < \beta\right) = e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda \beta}.$$

Введем событие $A_i=\{i-$й элемент устройства проработал безотказно от t_1 до t_2 часов}. Тогда искомая вероятность

$$P=P\left(A_1+A_2+A_3\right)=1-P\left(\overline{A}_1\right)\cdot P\left(\overline{A}_2\right)\cdot P\left(\overline{A}_3\right).$$

Находим

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=e^{-450/750}-e^{-600/750}=e^{-0,6}-e^{-0,8}=$$
$$=0,5488-0,4493=0,0995.$$

Следовательно,

$$P=1-0,0995^3=1-0,0009=0,999.$$

<u>Задание 3.</u> Все значения равномерно распределенной СВ *X* лежат на отрезке $[2;8]$. Найти вероятность попадания СВ X в промежуток $(0,3)$.

Решение. Для равномерного распределения имеет СВ *X*, ее плотность вероятности определяется функцией

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & если\ \ x\in[a;b],\\ 0, & если\ \ x\,\overline{\in}\,[a;b];\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{6}, & если\ \ x\in[2;8],\\ 0, & если\ \ x\,\overline{\in}\,[2;8].\end{cases}$$

Вероятность попадания СВ X в заданный промежуток равна

$$P(0<X<3)=\int_0^3 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx=0+\int_2^3\frac{1}{6}dx=\left.\frac{x}{6}\right|_2^3=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}.$$

<u>Задание 4.</u> СВ *X* подчинена закону Пуассона с математическим ожиданием, равным $\lambda=2,6$. Найти вероятность того, что СВ *X* принимает положительное значение и меньшее, чем ее математическое ожидание.

Решение. Если СВ *X* подчинена закону Пуассона, то $P_n(m)$ считаем по формуле Пуассона

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}.$$

Тогда вероятность того, что СВ *X* принимает положительное значение и меньшее, чем ее $M(X)=\lambda$, будет равна

$$P(0<X<2,6)=P(1)+P(2)=\frac{2,6^1}{1!}e^{-2,6}+\frac{2,6^2}{2!}e^{-2,6}=e^{-2,6}\left(2,6+\frac{2,6^2}{2}\right)=$$

$$=0,074\cdot5,98=0,44.$$

Тема 2.4

<u>Задание 1.</u> Случайные отклонения размера детали от номинала распределены нормально: математическое ожидание размера детали равно *a=280* (мм), среднее квадратичное отклонение равно σ=0,8 (мм). Годными считаются те детали, размер которых заключен в рамках между α=278 и β=283 (мм). Определить: а) вероятность изготовления годной детали; б) процент бракованных изделий, если точность изготовления ухудшится и будет характеризоваться средним квадратичным отклонением σ_1=0,9 (мм).

Решение. а) Здесь *СВ X* – фактический размер детали, тогда $X \in N(a,\sigma) = N(280;\ 0{,}8)$. Найдем вероятность изготовления годной детали, т. е. вероятность события: *278<X<283*:

$$P\left(278 < X < 283\right) = \Phi\left(\frac{283-280}{0{,}8}\right) - \Phi\left(\frac{278-280}{0{,}8}\right) =$$

$$= \Phi(3{,}75) - \Phi(-2{,}50) = \Phi(3{,}75) + \Phi(2{,}50) = 0{,}4970 + 0{,}4938 = 0{,}9908.$$

б) Если точность изготовления детали ухудшится, то вероятность изготовления годной детали будет равна

$$P\left(278 < X < 283\right) = \Phi\left(\frac{283-280}{0{,}9}\right) - \Phi\left(\frac{278-280}{0{,}9}\right) =$$

$$= \Phi(33) - \Phi(-2{,}2) = 0{,}4994 + 0{,}4861 = 0{,}9855.$$

Вероятность изготовления бракованной детали при ухудшении точности ее изготовления равна *0,0145*. Это значит, что в среднем брак будет составлять *1,45%*.

Задание 2. *СВ X* распределена по нормальному закону, с математическим ожиданием, равным 15, и средним квадратичным отклонением, равным 2. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью 0,954 попадет *СВ X*.

Решение. Здесь *СВ* $\in N(a,\sigma) = N(15,2)$. Воспользуемся формулой нахождения вероятности попадания нормально распределенной СВ в интервал, симметричный относительно центра распределения а: $P\left(\left| X-a \right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$. Т. к.

$$P\left(\left| X-a \right| < \delta\right) = 0{,}954 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = \frac{0{,}954}{2} = 0{,}477;$$

По таблице 2 (см. прилож.) находим $\frac{\delta}{\sigma} = 2$. Откуда $\delta = \sigma \cdot 2 = 4$. Тогда искомый интервал будет иметь вид:

$$\left| X-a \right| < \delta \Leftrightarrow \left| X-15 \right| < 4; \qquad -4 < X-15 < 4; \qquad 11 < X < 19.$$

Ответ: $X \in (11,19)$.

Задание 3. Вероятность появления события А в каждом испытании равна 1/2. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события А будет заключено в пределах от 40 до 60, если будет произведено 100 независимых испытаний.

Решение. По условию задачи *СВ X* распределена по биномиальному закону. Найдем математическое ожидание и дисперсию дискретной *СВ X* − числа появлений события А в 100 независимых испытаниях:

$$M(X) = np = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50; \quad D(X) = npq = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 25.$$

Найдем максимальную разность между заданным числом появлений события и математическим ожиданием $M(X) = 50$: $\varepsilon = 60 - 50 = 10$.

Воспользуемся неравенством Чебышева в форме $P\left(\left| X - M(X) \right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Подставляя $M(X)=50$, $D(X)=25$, $\varepsilon=10$, получим

$$P\left(\left|X-50\right|<10\right)\geq 1-\frac{25}{10^2}=0{,}75.$$

Ответ: более 0,75.

Тема 3.1

В результате статистических наблюдений некоторой совокупности относительно количественного признака X были получены выборочные данные.

Требуется :

- составить дискретный или интервальный ряд распределения частот и относительных частот случайной величины X и построить полигон частот или гистограмму относительных частот;
- найти эмпирическую функцию распределения признака X и построить ее график;
- вычислить числовые оценки параметров распределения: выборочные среднюю, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Задание 1.

2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 0, 3, 1, 1, 1, 5, 4, 4, 4, 0, 1, 1, 4, 1, 0, 9, 1, 4, 5, 2, 1, 2, 1

Решение. Обозначим через x_i варианты признака X. Из условия видно, что x_i принимают одно из значений 0, 1, 2, 3, 4, 5 ,9. Следовательно, X – дискретная случайная величина. Число вариант выборки n=30 (объем выборки). Составим вариационный ряд, то есть сгруппированный ряд числовых данных, ранжированный в порядке возрастания.

0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 9

Получили семь групп, т.е. различных значений случайной величины. Для каждой группы подсчитаем частоту значений варианты. Результаты группировки сведем в таблицу. Получим ряд распределения частот и относительных частот случайной величины X.

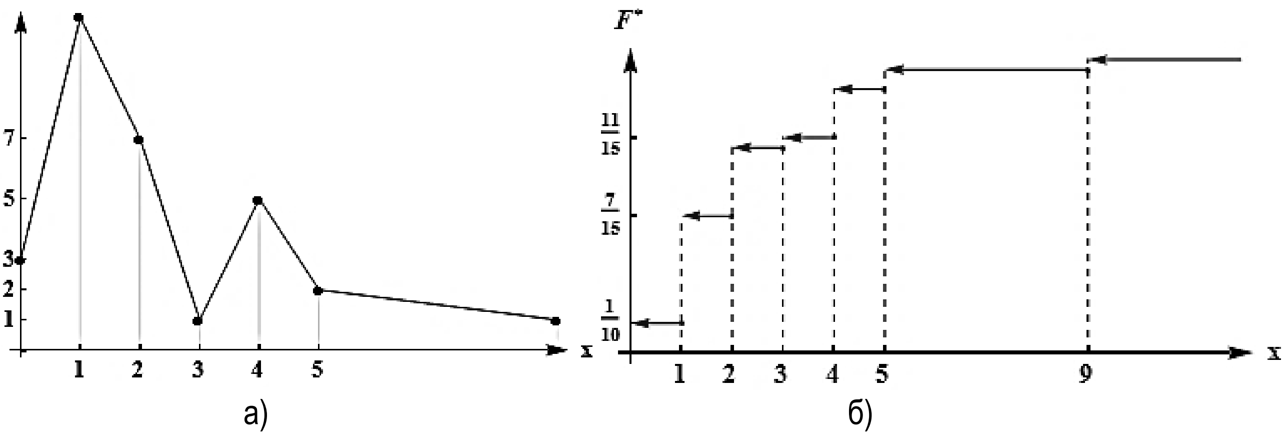
x_i	0	1	2	3	4	5	9
n_i	3	11	7	1	5	2	1
$\omega_i=\frac{n_i}{n}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{30}$

Так как случайная величина X – дискретная, поэтому построим полигон частот. Полигоном частот называют ломаную, которая состоит из отрезков, соединяющих точки $(x_i;\ n_i)$ $(i=1,2,...,7)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i. Точки $(x_i;\ n_i)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон частот (Рисунок 1а).

Составим эмпирическую функцию распределения. Объём выборки по условию примера n=30. Наименьшая варианта равна 0, значит, $n_x=0$ при $x\leq 0$. Тогда $F^*(x)=\frac{0}{30}=0$ при $x\leq 0$. Если $0<x\leq 1$, то неравенство $X<x$ выполняется для варианты $x_1=0$, которая встречается 3 раза, поэтому $n_x=3$ и $F^*(x)=\frac{0+3}{30}=\frac{1}{10}$. Если $1<x\leq 2$, то неравенство $X<x$ выполняется для вариант $x_1=0$ и $x_2=1$, которые встречаются 3 и 11 раз соответственно, поэтому $n_x=14$ и

$F^*(x) = \dfrac{0+3+11}{30} = \dfrac{7}{15}$ и т.д. В результате имеем функцию $F^*(x)$ и построим ее график (Рисунок 1б).

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 0; \\ \dfrac{0+3}{30} = \dfrac{1}{10}, \quad 0 < x \le 1; \\ \dfrac{0+3+11}{30} = \dfrac{7}{15}, \quad 1 < x \le 2; \\ \dfrac{0+3+11+7}{30} = \dfrac{7}{10}, \quad 2 < x \le 3; \\ \dfrac{0+3+11+7+1}{30} = \dfrac{11}{15}, \quad 3 < x \le 4; \\ \dfrac{0+3+11+7+1+5}{30} = \dfrac{9}{10}, \quad 4 < x \le 5; \\ \dfrac{0+3+11+7+1+5+2}{30} = \dfrac{29}{30}, \quad 5 < x \le 9; \\ \dfrac{0+3+11+7+1+5+2+1}{30} = \dfrac{30}{30} = 1, \quad x > 9. \end{cases}$$



а – полигон частот; б – график функции $F^*(x)$

Рисунок 1

Для вычисления числовых оценок параметров распределения: выборочной средней, дисперсии и среднего квадратичного отклонения составим вспомогательную расчетную таблицу (см. ниже).

x_i	n_i	$x_i\, n_i$	$x_i^2\, n_i$
0	3	0	0
1	11	11	11
2	7	14	28
3	1	3	9
4	5	20	80
5	2	10	50
9	1	9	81
$\sum$	30	67	259

Вычислим выборочные оценки параметров распределения по формулам:

$$\overline{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n}, \quad D_B = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - \overline{x}_B^2, \quad \sigma_B = \sqrt{D_B}.$$

Используя результаты вычислений, приведенных в таблице, найдем:

$$\overline{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{67}{30} \approx 2{,}23, \quad D_B = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - \overline{x}_B^2 = \frac{259}{30} - \left(\frac{67}{30}\right)^2 = \frac{3281}{900} \approx 3{,}66,$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{\frac{3281}{900}} \approx 1{,}91.$$

<u>Задание 2.</u>

19, 20, 19, 19, 20, 20, 18, 18, 15, 19, 20, 17, 23, 23, 21, 24, 20, 22, 20, 23, 20, 23, 21, 19, 21, 20, 19, 21, 17, 20

Решение. Судя по тому, что повторяющихся значений, как это было в задании 1, достаточно мало, этот признак следует отнести к непрерывным. Следовательно, требуется построить для него интервальное распределение, для чего, подсчитав количество данных, определяем объем выборки n=30. Затем находим наименьшую и наибольшую варианты: $x_{\min}$ =15 и $x_{\max}$ =24 и по формуле Стерджеса находим длину интервала варьирования

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}322\lg n} = \frac{24 - 15}{1 + 3{,}322\lg 30} \approx 1{,}5.$$

За начало первого интервала можно принять некоторое значение, несколько меньшее $x_{\min}$, или само значение $x_{\min}$. В приведённом решении примера выбрано $a_1 = x_{\min}$. Далее, последовательно прибавляя h, получаем границы интервалов: $a_1 = 15$; $a_2 = 16{,}5$; $a_3 = 18$; $a_4 = 19{,}5$; $a_5 = 21$; $a_6 = 22{,}5$; $a_7 = 24$. Последний интервал должен «накрывать» $x_{\max}$ =24. Теперь подсчитаем интервальные частоты – количества вариант, попавших в каждый интервал. Это удобно делать с помощью приводимой ниже таблицы.

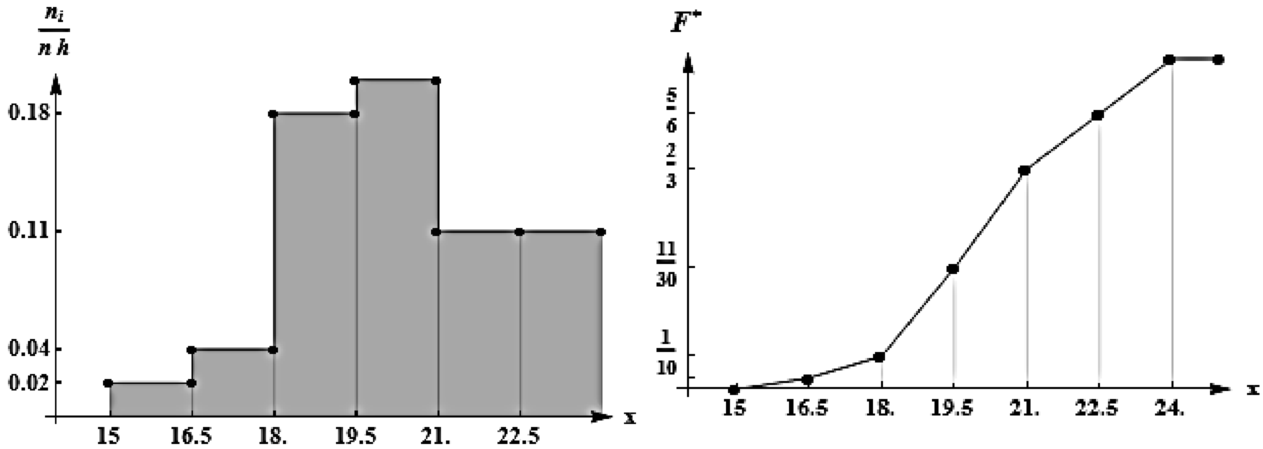
№ интервала	Интервалы	Подсчет частот	Частоты n_i	Относительные частоты $\frac{n_i}{n}$
1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	$(15;16{,}5)$		1	$1/30$
2	$(16{,}5;18)$		2	$1/15$
3	$(18;19{,}5)$		8	$4/15$
4	$(19{,}5;21)$		9	$3/10$
5	$(21;22{,}5)$		5	$1/6$
6	$(22{,}5;24)$		5	$1/6$
Объем выборки			n=30	$\sum n_i/n = 1$

Последовательно просматривая данные, каждое значение отмечаем чертой в строке соответствующего интервала, формируя квадратики с диагональю, что соответствует пяти вариантам, попавшим в интервал, и удобно при подсчете частот n_i. Полученная совокупность граф 2 и 4 называется интервальным распределением. На их данных строится гистограмма относительных частот: прямоугольники с основаниями – интервалами вариации и высотами, равными соответствующим интервальным относительным частотам $\frac{n_i}{n\,h}$ (Рисунок 2а).

Эмпирическую функцию распределения зададим таблично, исходя из данных столбца 5 по правилу накопления частот (формула (*)).

Строим график эмпирической функции распределения. Для интервального распределения частот эта функция должна быть непрерывна, поэтому в системе координат отмечаем точки, исходя из вида функции $F^*(x)$, и соединяем их плавной линией (Рисунок 2б).

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, \quad x\le 15; \\ \dfrac{0+1}{30}=\dfrac{1}{30}, \quad 15<x\le 16{,}5; \\ \dfrac{0+1+2}{30}=\dfrac{3}{30}, \quad 16{,}5<x\le 18; \\ \dfrac{0+1+2+8}{30}=\dfrac{11}{30}, \quad 18<x\le 19{,}5; \\ \dfrac{0+1+2+8+9}{30}=\dfrac{20}{30}, \quad 19{,}5<x\le 21; \\ \dfrac{0+1+2+8+9+5}{30}=\dfrac{25}{30}, \quad 21<x\le 22{,}5; \\ \dfrac{0+1+2+8+9+5+5}{30}=\dfrac{30}{30}=1, \quad 12{,}5<x\le 24; \\ 1, \quad x>24. \end{cases} \qquad (*)$$



а)   б)

а – гистограмма относительных частот; б – график функции $F^*(x)$

Рисунок 2.

Для вычисления числовых оценок параметров распределения введем в рассмотрение x_i – середины интервалов и, приписав им соответствующие интервальные частоты n_i, получим, как и в задании 1, вариационный ряд, который запишем в виде следующей таблицы:

Интервалы $(a_{i-1};\ a_i)$	$x_i = \frac{a_{i-1}+a_i}{2}$	n_i	$x_i\ n_i$	$x_i^{\ 2}\ n_i$
$(15;16{,}5)$	15,75	1	15,75	248,06
$(16{,}5;18)$	17,25	2	34,5	595,12
$(18;19{,}5)$	18,75	8	150	2812,5
$(19{,}5;21)$	20,25	9	182,25	3690,56
$(21;22{,}5)$	21,75	5	108,75	2365,31
$(22{,}5;24)$	23,25	5	116,25	2702,81
$\sum$		30	607,5	12414,4

Найдем:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{607{,}5}{30} \approx 20{,}25; \quad D_B = \frac{\sum x_i^{\ 2} n_i}{n} - \bar{x}_B^{\ 2} = \frac{12414{,}4}{30} - (20{,}25)^2 \approx 3{,}75;$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{3{,}75} \approx 1{,}94.$$

Тема 3.2

<u>Задание 1.</u> По заданному распределению найти несмещенные оценки для x_Γ, D_Γ.

x_i	19	34,4	49,8	65,1	80,5	95,9
n_i	7	15	23	15	7	3

Решение. Объем выборки $n = 70$. Для нахождения несмещенных оценок x_Γ и D_Γ составим вспомогательную расчетную таблицу

x_i	n_i	$x_i\ n_i$	$x_i^{\ 2}\ n_i$
19	7	133	2527
34,4	15	516	17750,4
49,8	23	1145,4	57040,92
65,1	15	976,5	63570,15
80,5	7	563,5	45361,75
95,9	3	287,7	27590,43
$\sum$	70	3622,1	213840,65

Найдем: $\bar{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{3622{,}1}{70} \approx 51{,}74;$

$$D_B = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}_B^{\ 2} = \frac{213840{,}65}{70} - (51{,}74)^2 \approx 377{,}84,$$

Находим несмещенную оценку дисперсии: $S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B = \frac{70}{69} \cdot 377{,}84 = 383{,}31.$

Ответ: $\bar{x}_B \approx 51{,}74;\ S^2 \approx 383{,}31.$

Задание 2. Из генеральной совокупности извлечена выборка. Оценить с надежностью 0,99 математическое ожидание *a* и среднее квадратичное отклонение нормально распределенного признака *X* при помощи доверительных интервалов.

x_i	1,7	3,2	4,7	6,2	7,7	9,2
n_i	2	5	6	7	4	1

Решение. Т. к. $n = 25$ и $n < 30$, следовательно, применяем интервальные оценки. Составим расчетную таблицу:

x_i	n_i	$x_i\, n_i$	$x_i^{\,2}\, n_i$
1,7	2	3,4	5,78
3,2	5	16	51,2
4,7	6	28,2	132,54
6,2	7	43,4	269,08
7,7	4	30,8	237,16
9,2	1	9,2	84,64
$\sum$	25	131	780,4

Найдем, что: $\bar{x}_B = \dfrac{\sum x_i n_i}{n} = \dfrac{131}{25} \approx 5{,}24;$

$$D_B = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}_B^{\,2} = \frac{780{,}4}{25} - (5{,}24)^2 \approx 3{,}75,\ \ S^2 = \frac{n}{n-1}\cdot D_B = \frac{25}{24}\cdot 3{,}75 = 3{,}92;$$

$$S = \sqrt{3{,}92} = 1{,}98.$$

Доверительный интервал для a при неизвестном σ:

$$\bar{x}_B - \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}},$$

где число $t_{0,99} = t(0{,}99{,}25) = 2{,}797$ находим по таблице 3 (см. приложение) распределения Стьюдента при значениях $\gamma = 0{,}99$ и $\nu = n - 1 = 24 -$ степенях свободы.

$$5{,}24 - \frac{2{,}797\cdot 1{,}98}{\sqrt{25}} < a < 5{,}24 + \frac{2{,}797\cdot 1{,}98}{\sqrt{25}}, \qquad 4{,}13 < a < 6{,}35.$$

Доверительный интервал для σ

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q),$$

где $q = q(0{,}99{,}25) = 0{,}49$ находим по таблице 5 (см. приложение).

$$1{,}98(1-0{,}49) < \sigma < 1{,}98(1+0{,}49), \qquad 1{,}0098 < \sigma < 2{,}95.$$

Ответ: $4{,}13 < a < 6{,}35;\ 1{,}0098 < \sigma < 2{,}95.$

Задание 3. $X \in N(a, \sigma)$. Составить доверительный интервал для а, если известны $\gamma,\ \bar{x}_B,\ n$ и σ.

$\gamma = 0{,}99,\ \ \sigma = 7,\ \ \bar{x}_B = 52{,}3,\ \ n = 20.$

Решение. Доверительный интервал для *a* при известном σ:

$$\bar{x}_B - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $2\Phi(t) = \gamma$; $2\Phi(t) = 0{,}99;\ \Phi(t) = 0{,}495.$

По таблице значений функции $\Phi(t)$ (таблица 2, см. приложение) находим значение аргумента t, при котором значение функции $\Phi(t)=0{,}495$, а именно получаем что $t=2{,}58$. Тогда

$$53{,}2-\frac{2{,}58\cdot 7}{\sqrt{20}}<a<53{,}2+\frac{2{,}58\cdot 7}{\sqrt{20}}, \qquad 49{,}16<a<57{,}24.$$

Ответ: $49{,}16<a<57{,}24.$

Тема 3.3

Задание 1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha=0{,}01$ установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическими частотами n_i', которые вычислены исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X.

n_i	3	5	22	35	24	8	3
n'_i	1,8	8,2	21,3	30,6	24,3	10,7	2,6

Решение. По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha=0{,}01$ требуется проверить, значимо или нет различие в частотах n_i и n'_i. Для этого требуется вычислить статистику $\chi^2_{набл.}=\sum\frac{(n_i-n'_i)^2}{n'_i}$. Составим расчетную таблицу, в которой объединим интервалы где $n_i<5$. Для рассматриваемого примера требуется объединить по два первых и последних интервала.

n_i	n'_i	$(n_i-n'_i)^2$	$\frac{(n_i-n'_i)^2}{n'_i}$
$\left.\begin{matrix}3\\5\end{matrix}\right\}=8$	$\left.\begin{matrix}1{,}8\\8{,}2\end{matrix}\right\}=10$	4	0,4
22	21,3	0,49	0,023
35	30,6	19,36	0,633
24	24,3	0,09	0,0037
$\left.\begin{matrix}8\\3\end{matrix}\right\}=11$	$\left.\begin{matrix}10{,}7\\2{,}6\end{matrix}\right\}=13{,}3$	5,29	0,3977
$\sum$			1,0574

Таким образом, $\chi^2_{набл.}=1{,}0574$. По таблице 4 «Критические точки распределения «хи-квадрат» (см. прилож.) находим $\chi^2_{крит.}(\alpha,\ k-r-1)$; $k=5$ – число пар значений в расчетной таблице; так как рассматривается гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X, то $r=2$.

$$\chi^2_{крит.}(0{,}01,\ 2)=9{,}21.$$

Т. о., получаем, что $\chi^2_{набл.}<\chi^2_{крит.}$, следовательно, нет оснований отвергнуть гипотезу о том, что эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо.

<u>Задание 2.</u> В таблице приведены данные об отказах аппаратуры за 10000 часов работы. Общее число обследованных экземпляров аппаратуры равно n. Приняты обозначения: i – число отказов, n_i – количество случаев, в которых наблюдалось i отказов. Приняв уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, проверить гипотезу о том, что число отказов имеет распределение Пуассона.

x_i	0	1	2	3	4	6
n_i	25	41	35	12	4	3

Решение. Выдвинем гипотезу H0 о том, что рассматриваемый признак X распределен по закону Пуассона. По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверим данную гипотезу. Вычислим выборочные оценки параметров распределения, с помощью которых найдем теоретические частоты $n'_i = n \cdot P_i$, $P_i = \dfrac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$ $\left(i = 0,1,2,3,...\right)$, где $\lambda = \overline{x}_B = \sigma_B^2$ – параметр распределения. Составим следующую расчетную таблицу:

<table>
<tr><th>i</th><th>n_i</th><th>$x_i\, n_i$</th><th>P_i</th><th>$n'_i = n \cdot P_i$</th><th>n_i</th><th>$(n_i - n'_i)^2$</th><th>$\dfrac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>25</td><td>0</td><td>0,22</td><td>26,4</td><td>25</td><td>1,96</td><td>0,074</td></tr>
<tr><td>1</td><td>41</td><td>41</td><td>0,33</td><td>39,6</td><td>41</td><td>1,96</td><td>0,049</td></tr>
<tr><td>2</td><td>35</td><td>70</td><td>0,25</td><td>30</td><td>35</td><td>25</td><td>0,833</td></tr>
<tr><td>3</td><td>12</td><td>36</td><td>0,13</td><td>15,6</td><td>12</td><td>12,96</td><td>0,83</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>16</td><td>0,048</td><td rowspan="2">$\left.\begin{matrix}5{,}76\\0{,}432\end{matrix}\right\} = 6{,}192$</td><td rowspan="2">$\left.\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right\} = 7$</td><td rowspan="2">0,65</td><td rowspan="2">0,105</td></tr>
<tr><td>6</td><td>3</td><td>18</td><td>0,0036</td></tr>
<tr><td>$\sum$</td><td>120</td><td>181</td><td>0,9816</td><td>117,8</td><td>120</td><td></td><td>1,891</td></tr>
</table>

Объем выборки $n = \sum n_i = 120$. Находим выборочную среднюю

$$\overline{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{181}{120} \approx 1{,}51.$$

Тогда параметр $\lambda = \overline{x}_B = 1{,}51$ и $P_i = \dfrac{1{,}51^i e^{-1{,}51}}{i!}$ $\left(i = 0,1,2,3,...\right)$.

По таблице 4 (см. прилож.) находим $\chi^2_{крит.}(\alpha,\ k - r - 1)$; $k = 5$ – число пар значений в расчетной таблице; так как рассматривается гипотеза о распределении Пуассона, то $r = 1$.

$$\chi^2_{крит.}(0{,}05,\ 3) = 7{,}815.$$

Т. о., получаем, что $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{крит.}$, следовательно, нет оснований отвергнуть гипотезу о том, что рассматриваемый признак X распределен по закону Пуассона.

Задание 3. Используя критерии Пирсона при $\alpha = 0{,}02$, проверить, согласуется ли гипотеза о показательном распределении генеральной совокупности с заданным эмпирическим распределением.

$x_{i-1} - x_i$	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30
Частота, n_i	133	45	15	4	2	1

Решение. Выдвинем гипотезу *H₀* о том, что рассматриваемый признак *X* распределен по показательному закону. По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}02$ проверим данную гипотезу.

Известно, что плотность показательного распределения имеет вид

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \ge 0, \qquad \lambda = \frac{1}{x_B}; \quad P(a < x < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Составим следующую расчетную таблицу, где интервалы, где $n_i < 5$, объединили в один от 15 до 30.

$x_{i-1} - x_i$	n_i	$x_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$	$x_i \cdot n_i$	$P_i = e^{-\lambda \cdot x_{i-1}} - e^{-\lambda \cdot x_i}$	$n_i' = n \cdot P_i$	$\dfrac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
0-5	133	2,5	332,5	$1 - 0{,}3734 = 0{,}6266$	125,3	0,473
5-10	45	7,5	337,5	$0{,}3734 - 0{,}1395 = 0{,}2339$	46,78	0,068
10-15	15	12,5	187,5	$0{,}1395 - 0{,}0521 = 0{,}0874$	17,48	0,352
15-30	7	22,5	157,5	$0{,}0521 - 0{,}0027 = 0{,}0494$	9,88	0,840
$\sum$	200		1015		199,4	1,733

$$\overline{x_B} = \frac{1015}{200} = 5{,}075; \quad \lambda = 0{,}197.$$

Плотность распределения имеет вид $f(x) = 0{,}197 e^{-0{,}197x} \quad x \ge 0$.

По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверяем, значимо или нет различие в частотах n_i и n'_i.

$$\chi^2_{набл.} = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} = 1{,}733; \; \chi^2_{крит.}(0{,}05;\, 4-1-1) = \chi^2_{крит.}(0{,}05;2) = 6{,}00.$$

Т. к. $\chi^2_{набл.} < \chi^2_{крит.}$, то различие в n_i и n'_i незначимо, нет оснований отвергать гипотезу о показательном распределении в генеральной совокупности.

Тема 3.4

В результате статистических наблюдений некоторой совокупности относительно количественного признака X были получены выборочные данные.

11.5	14.2	12.3	5.6	8.8	5.9	6.9	16.3	4.5	7.8
13.4	6.1	11.3	13.6	7.5	2.6	14.4	7	6.6	9
9.1	9.6	10.8	10.2	10.1	10.2	8.9	10.2	8.1	11.7
11.6	11.5	7.9	11.2,	10.2	6.1	8.6	13	6	10.7
7.1	7.1	10.8	9.8	8.1	11.3	12.4	9.8	6.9	5.1

Решение. 1. Построим для исследуемого признака интервальное распределение, для чего, подсчитав количество данных, определяем объем выборки n=50. Затем находим наименьшую и наибольшую варианты: $x_{\min}$ =2,6 и $x_{\max}$ =16,3 и по формуле Стерджеса находим длину интервала варьирования

$$h=\frac{x_{\max}-x_{\min}}{1+3{,}322\lg n}=\frac{16{,}3-2{,}6}{1+3{,}322\lg 50}\approx 2{,}1.$$

Прибавляя h, получаем последовательно границы интервалов и подсчитаем интервальные частоты – количества вариант, попавших в каждый интервал. Составим таблицу.

№ интервала	Интервалы $(a_{i-1};\ a_i)$	Подсчет частот	Частоты n_i	Относительные частоты $\frac{n_i}{n}$
1	$(2{,}6;4{,}7)$	∟	2	$1/25$
2	$(4{,}7;6{,}8)$	⊠ ∟	7	$7/50$
3	$(6{,}8;8{,}9)$	⊠ ⊠ ∟	12	$6/25$
4	$(8{,}9;11)$	⊠ ⊠ □	14	$7/25$
5	$(11;13{,}1)$	⊠ ⊠	10	$1/5$
6	$(13{,}1;15{,}2)$	□	4	$2/25$
7	$(15{,}2;17{,}3)$	|	1	$1/50$
Объем выборки			n=50	$\sum n_i/n=1$

Построим гистограмму относительных частот. Соединив середины верхних оснований прямоугольников отрезками прямых, получим полигон относительных частот.

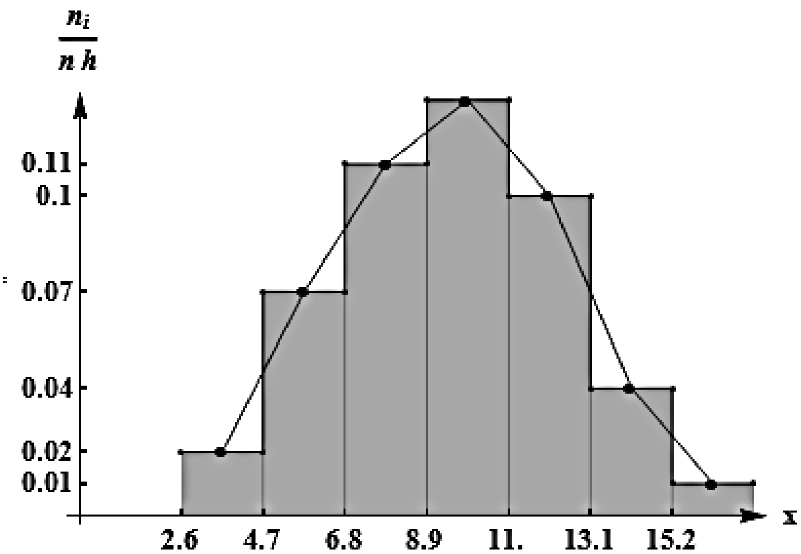
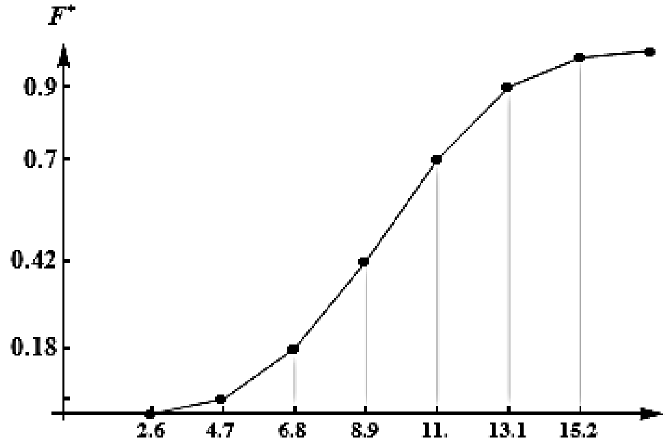


Рисунок 3 − Полигон и гистограмма относительных частот

2. Составим эмпирическую функцию распределения.

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, \quad x\le 2{,}6; \\ \dfrac{0+2}{50}=\dfrac{1}{25}, \quad 2{,}6<x\le 4{,}7; \\ \dfrac{0+2+7}{50}=\dfrac{9}{50}, \quad 4{,}7<x\le 6{,}8; \\ \dfrac{0+2+7+12}{50}=\dfrac{21}{50}, \quad 6{,}8<x\le 8{,}9; \\ \dfrac{0+2+7+12+14}{50}=\dfrac{7}{10}, \quad 8{,}9<x\le 11; \\ \dfrac{0+2+7+12+14+10}{50}=\dfrac{9}{10}, \quad 11<x\le 13{,}1; \\ \dfrac{0+2+7+12+14+10+4}{50}=\dfrac{49}{50}, \quad 13{,}1<x\le 15{,}2; \\ \dfrac{0+2+7+12+14+10+4+1}{50}=1, \quad 15{,}2<x\le 17{,}3; \\ 1, \quad x>17{,}3. \end{cases}$$

Строим график эмпирической функции распределения. Из вида функции $F^*(x)$ в системе координат отмечаем точки и соединяем их плавной линией.



3. Для вычисления числовых оценок параметров распределения введем в рассмотрение x_i – середины интервалов и, приписав им соответствующие интервальные частоты n_i, получим вариационный ряд, который запишем в виде следующей таблицы:

Интервалы $(a_{i-1};\ a_i)$	$x_i=\dfrac{a_{i-1}+a_i}{2}$	n_i	$x_i\ n_i$	$x_i^2\ n_i$
$(2{,}6;4{,}7)$	3,65	2	7,3	26,65
$(4{,}7;6{,}8)$	5,75	7	40,25	231,44
$(6{,}8;8{,}9)$	7,85	12	94,2	739,47
$(8{,}9;11)$	9,95	14	139,3	1386,04
$(11;13{,}1)$	12,05	10	120,5	1452,02
$(13{,}1;15{,}2)$	14,15	4	56,6	800,89
$(15{,}2;17{,}3)$	16,25	1	16,25	264,06
$\sum$		50	474,4	4900,57

Найдем:

$$\overline{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{474{,}4}{50} \approx 9{,}5; \quad D_B = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - \overline{x}_B^2 = \frac{4900{,}57}{50} - (9{,}5)^2 \approx 7{,}99;$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{7{,}99} = 2{,}82;$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{50}{49} 7{,}99 = 8{,}06; \quad s = \sqrt{8{,}06} = 2{,}84.$$

4. Рассматриваемый признак X имеет нормальное распределение, в пользу этого говорят следующие факты:

– полигон относительных частот (рисунок 3) напоминает кривую Гаусса;

– для исходных данных выполняется «правило 3σ»: если СВ X имеет нормальный закон распределения с параметрами a и σ, т.е. $X \in N(a, \sigma)$, то практически достоверно, что ее значения заключены в интервале $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$. А именно, оценивая теоритическое математическое ожидание a величиной $\overline{x}_B = 9{,}5$, теоритическое среднее квадратичное отклонение σ величиной $\sigma_B = 2{,}82$, получим интервал

$$(a - 3\sigma; a + 3\sigma) \cong (\overline{x}_B - 3\sigma_B; \overline{x}_B + 3\sigma_B) = (9{,}5 - 3 \cdot 2{,}82;\ 9{,}5 + 3 \cdot 2{,}82) = (1{,}04; 17{,}96).$$

Получаем, что в нашем случае все 50 вариант заключены в интервале $(a - 3\sigma; a + 3\sigma) = (1{,}04; 17{,}96)$, т.к. $x_{\min}$ =2,6 и $x_{\max}$ =16,3.

В силу этого при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ выдвинем и проверим гипотезу о том, что рассматриваемый признак *X* имеет нормальное распределение с функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_B \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - x_B)^2}{2\sigma_B^2}} = \frac{1}{2{,}82\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-9.5)^2}{15.98}}.$$

Теоретические (*выравнивающие*) частоты n_i' определяются по формуле

$$n_i' = n \cdot P_i, \ \ i = \overline{1,k}, \ P_i = P(a_{i-1} < X < a_i) = \Phi\left(\frac{a_i - \overline{x}_B}{s}\right) - \Phi\left(\frac{a_{i-1} - \overline{x}_B}{s}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ – функция Лапласа значения, которой находим по таблице 2 (см. прилож.). Для найденных числовых параметров распределения получаем

$$P_i = \Phi\left(\frac{a_i - 9{,}5}{2{,}84}\right) - \Phi\left(\frac{a_{i-1} - 9{,}5}{2{,}84}\right).$$

Составим следующую расчетную таблицу:

Интервалы $(a_{i-1};\ a_i)$	Координаты границ интервалов $\left(\frac{a_{i-1}-9{,}5}{2{,}84};\frac{a_i-9{,}5}{2{,}84}\right)$	Значение функции Лапласа $\Phi(x)$ на границах интервала	Оценка вероятности попадания в интервал P_i	$n_i'=n\cdot P_i = 50\cdot P_i$
$(2{,}6;4{,}7)$	$(-2{,}43;-1{,}69)$	−0,4925; −0,4545	0,038	1,9
$(4{,}7;6{,}8)$	$(-1{,}69;-0{,}95)$	−0,4545; −0,3289	0,1255	6,275
$(6{,}8;8{,}9)$	$(-0{,}95;-0{,}21)$	−0,3289; −0,0832	0,2458	12,29
$(8{,}9;11)$	$(-0{,}21;0{,}53)$	−0,0832; 0,2019	0,2851	14,26
$(11;13{,}1)$	$(0{,}53;1{,}27)$	0,2019; 0,3980	0,196	9,8
$(13{,}1;15{,}2)$	$(1{,}27;2{,}01)$	0,3980; 0,4778	0,0798	3,99
$(15{,}2;17{,}3)$	$(2{,}01;2{,}75)$	0,4778; 0,4970	0,0192	0,96
$\sum$			0,9895	49,47

5. По критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha=0{,}05$ требуется проверить, значимо или нет различие в частотах n_i и n'_i. Для этого требуется вычислить статистику $\chi^2_{набл.}=\sum\frac{(n_i-n'_i)^2}{n'_i}$. Составим расчетную таблицу, в которой объединим интервалы, где $n_i<5$. Для рассматриваемого примера требуется объединить по два первых и последних интервала.

n_i	n'_i	$(n_i-n'_i)^2$	$\frac{(n_i-n'_i)^2}{n'_i}$
$\left.\begin{matrix}2\\7\end{matrix}\right\}=9$	$\left.\begin{matrix}1{,}9\\6{,}275\end{matrix}\right\}=8{,}175$	0,68	0,083
12	12,29	0,084	0,0068
14	14,26	0,068	0,0047
10	9,8	0,04	0,0041
$\left.\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right\}=5$	$\left.\begin{matrix}3{,}99\\0{,}96\end{matrix}\right\}=4{,}95$	0,0025	0,0005
$\sum$			0,099

Т. о., $\chi^2_{набл.}=0{,}099$. По таблице 4 (стр. 81) находим $\chi^2_{крит.}(\alpha,\ k-r-1)$; $k=5$ – число пар значений в расчетной таблице; так как рассматривается гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X, то $r=2$.

$$\chi^2_{крит.}(0{,}05,\ 2)=5{,}991.$$

Т. о., получаем, что $\chi^2_{набл.}<\chi^2_{крит.}$, следовательно, нет оснований отвергнуть гипотезу о том, что эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо. Такой вывод можно сделать и из рисунка 4, где в одной системе координат изображен полигон теоретических частот (пунктирная линия) и эмпирических частот (сплошная линия).

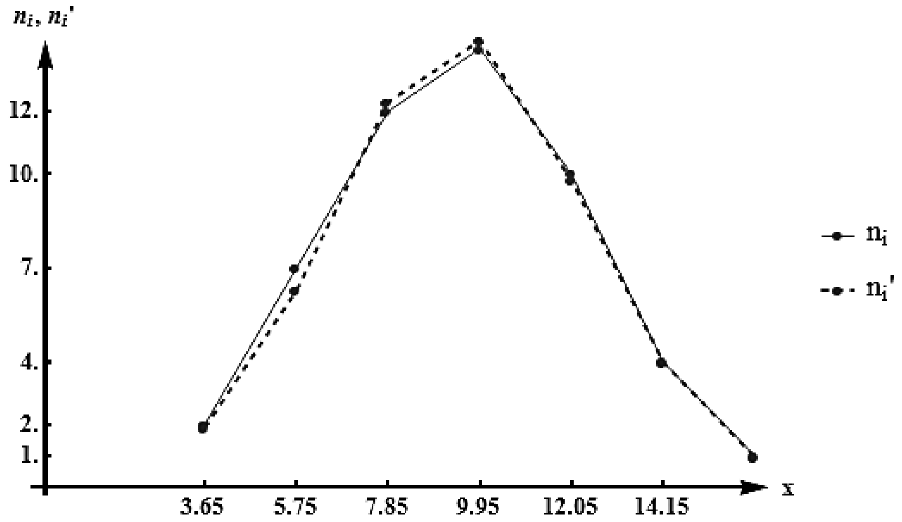


Рисунок 4 − Полигон теоретических и эмпирических частот

6. Для отыскания вероятности попадания признака *X* в интервал $(a-5, a+3) = (\overline{x_B} - 5; \overline{x_B} + 3) = (9{,}5 - 5; 9{,}5 + 3) = (4{,}5; 12{,}5)$ воспользуемся формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\beta - \overline{x_B}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \overline{x_B}}{s}\right),$$

$$P(4{,}5 < X < 12{,}5) = \Phi\left(\frac{12{,}5 - \overline{x_B}}{2{,}84}\right) - \Phi\left(\frac{4{,}5 - \overline{x_B}}{2{,}84}\right) = \Phi(1{,}06) - \Phi(-1{,}76) =$$

$$= 0{,}3554 + 0{,}4608 = 0{,}8162.$$

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание a и среднее квадратичное отклонение нормально распределенного признака *X* при помощи доверительных интервалов. Доверительный интервал для a при неизвестном σ:

$$\overline{x}_B - \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_B + \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}},$$

где число $t_{0,95} = t(0{,}95{,}50) = 2{,}009$ находим по таблице 3 (стр. 80).

$$9{,}5 - \frac{2{,}84 \cdot 2{,}009}{\sqrt{50}} < a < 9{,}5 + \frac{2{,}84 \cdot 2{,}009}{\sqrt{50}},$$

$$8{,}69 < a < 10{,}31.$$

Доверительный интервал для σ

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q),$$

где $q = q(0{,}95{,}50) = 0{,}21$ находим по таблице 5 (стр. 82).

$$2{,}84(1 - 0{,}21) < \sigma < 2{,}84(1 + 0{,}21),$$

$$2{,}24 < \sigma < 3{,}44.$$

Тема 3.5

Задание 1. Компания контролирует 6 фабрик, выпускающих однородную продукцию. В таблице приведены данные о производительности труда y_i (тысячи изделий в год на одного работающего) и энерговооруженности фабрики x_i (тыс. кв. т.ч. в год на одного работающего) $i = \overline{1,6}$. Составить уравнения прямых регрессии, вычислить r_B (пояснить его смысл), найти среднюю производительность труда $\overline{y_x}$, если $x = l$.

x_i	2	2,5	3	3,4	3,6	4
y_i	1,9	2	2,6	3	3,5	4

$l = 2{,}8.$

Решение. Составим расчетную таблицу

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i\, y_i$
1	2	1,9	4	3,61	3,8
2	2,5	2	6,25	4	5
3	3	2,6	9	6,76	5,2
4	3,4	3	11,56	9	10,2
5	3,6	3,5	12,96	12,25	12,6
6	4	4	16	16	16
$\sum$	18,5	17	59,77	51,62	55,4

Т. к. данные не сгруппированы, то

$$\overline{x}_B = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{18{,}5}{6} = 3{,}08; \qquad \overline{y}_B = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{17}{6} = 2{,}83;$$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum x^2}{n} = \frac{59{,}77}{6} = 9{,}96; \qquad \overline{y^2} = \frac{\sum y^2}{n} = \frac{51{,}62}{6} = 8{,}6;$$

$$\sigma_B{}^2(x) = \overline{x^2} - (\overline{x}_B)^2 = 9{,}96 - 3{,}08^2 = 0{,}47; \quad \sigma_B{}^2(y) = \overline{y^2} - \overline{y}_B{}^2 = 8{,}6 - 2{,}83^2 = 0{,}59;$$

$$\sigma_B(x) = \sqrt{0{,}47} = 0{,}69; \qquad \sigma_B(y) = \sqrt{0{,}59} = 0{,}77;$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{n} = \frac{55{,}4}{6} = 9{,}23;$$

$$r_B = \frac{\overline{xy} - \overline{x}_B \cdot \overline{y}_B}{\sigma_B(x) \cdot \sigma_B(y)} = \frac{9{,}23 - 3{,}08 \cdot 2{,}83}{0{,}69 \cdot 0{,}77} = 0{,}97.$$

Уравнение прямой регрессии Y на X имеет вид

$$\overline{y}_x - \overline{y}_B = r_B \frac{\sigma_B(y)}{\sigma_B(x)} \cdot (x - \overline{x}_B);$$

$$\overline{y}_x - 2{,}83 = 0{,}97 \frac{0{,}77}{0{,}69} \cdot (x - 3{,}08);$$

$$\overline{y}_x = 1{,}08x - 0{,}5.$$

Уравнение прямой регрессии X на Y имеет вид

$$\overline{x}_y - \overline{x}_B = r_B \frac{\sigma_B(x)}{\sigma_B(y)} \cdot (y - \overline{y}_B);$$

$$\overline{x}_y = 0{,}8y + 0{,}81.$$

Заметим, что в данном случае коэффициент корреляции $r_B = 0{,}97$ достаточно близок к единице. Следовательно, между признаками X и Y существует весьма высокая тесная связь.

Вычислим среднюю производительность труда $\overline{y_x}$, если $x = 2{,}8$.

$$\overline{y}_x = 1{,}08 \cdot 2{,}8 - 0{,}5 = 2{,}52.$$

Задание 2. Для данной таблицы значений двух СВ X и Y, между которыми существует линейная корреляционная зависимость, определить:

− числовые характеристики СВ X и Y;

− коэффициент корреляции r_B, составить уравнение прямых регрессии;

− построить их графики, корреляционное поле;

−оценить тесноту корреляционной зависимости и значимость r_B.

У / Х	2	4	6	8	10	12
30	3	4				
35		10	9	3		
40		6	10	5		
45			5	8	3	
50					4	5

Решение. Предварительные вычисления вносим в "расширенную" таблицу:

У / Х	2	4	6	8	10	12	m_y	ym_y	y^2m_y
30	3	4					7	210	6300
35		10	9	3			22	770	26950
40		6	10	5			21	840	33600
45			5	8	3		16	720	32400
50					4	5	9	450	22500
m_x	3	20	24	16	7	5	n=75	2990	121750
xm_x	6	80	144	128	70	60	488		
x^2m_x	12	320	864	1024	700	720	3640		

Находим числовые характеристики составляющих признаков Х и У:

$$\overline{x}_B = \frac{\sum x_i m_x}{n} = \frac{488}{75} = 6{,}51; \qquad \overline{y}_B = \frac{\sum y_j m_y}{n} = \frac{2990}{75} = 39{,}87;$$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum x_i^{\,2} m_x}{n} = \frac{3640}{75} = 48{,}53; \qquad \overline{y^2} = \frac{\sum y_j^{\,2} m_y}{n} = \frac{121750}{75} = 1623{,}33;$$

$$\sigma_B^{\,2}(x) = \overline{x^2} - (\overline{x}_B)^2 = 48{,}53 - 6{,}51^2 = 6{,}15;$$

$$\sigma_B(x) = \sqrt{6{,}15} = 2{,}48;$$

$$\sigma_B^{\,2}(y) = \overline{y^2} - (\overline{y}_B)^2 = 1623{,}33 - $$

$$- 39{,}87^2 = 33{,}71;$$

$$\sigma_B(y) = \sqrt{33{,}71} = 5{,}81;$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum x_i y_i m_{xy} = \frac{1}{75}\big(30(2\cdot3 + 4\cdot4) + 35(4\cdot10 + 6\cdot9 + 8\cdot3) + 40(4\cdot6 + 6\cdot10 + 8\cdot5) +$$

$$+ 45(6\cdot5 + 8\cdot8 + 10\cdot3) + 50(10\cdot4 + 12\cdot5)\big) = \frac{22250}{75} = 271{,}067.$$

Находим выборочный коэффициент корреляции по формуле

$$r_B = \frac{\overline{xy} - \overline{x}_B \cdot \overline{y}_B}{\sigma_B(x)\cdot\sigma_B(y)} = \frac{271{,}067 - 6{,}51\cdot 39{,}87}{2{,}48\cdot 5{,}81} = 0{,}799.$$

Близость r_B к единице говорит о достаточно высокой связи признаков X и У. Для оценки существенности этой связи на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ вычислим статистику

$$t_{набл} = \frac{r_B \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_B{}^2}} = \frac{0{,}799 \cdot \sqrt{75-2}}{\sqrt{1-0{,}799^2}} = 11{,}35.$$

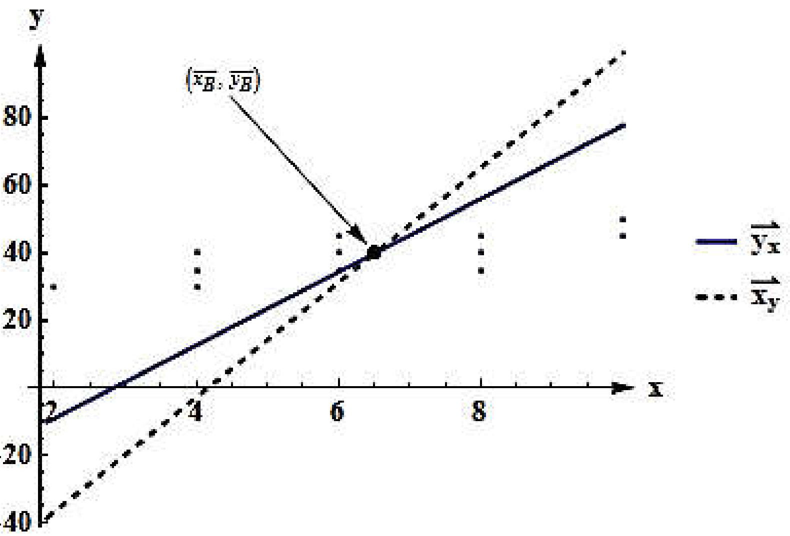
Принимая уровень значимости $\alpha = 0{,}01$, при числе степеней свободы $\nu = n - 2 = 73$ по таблице распределения Стьюдента находим $t_{крит} = 2{,}639$. Так как $|t_{набл.}| > t_{крит.}$, то с 99%-й уверенностью можно говорить о существенности тесной связи между признаками Y и X. Теперь находим уравнения прямых регрессии по формулам:

$$\overline{y}_x - \overline{y}_B = r_B \frac{\sigma_B(y)}{\sigma_B(x)} \cdot (x - \overline{x}_B); \qquad \overline{x}_y - \overline{x}_B = r_B \frac{\sigma_B(x)}{\sigma_B(y)} \cdot (y - \overline{y}_B);$$

$$\overline{y}_x - 39{,}87 = 0{,}799 \frac{5{,}81}{2{,}48} \cdot (x - 6{,}51); \qquad \overline{x}_y - 6{,}51 = 0{,}799 \frac{2{,}48}{5{,}81} \cdot (y - 39{,}87).$$

После преобразований получим: $\overline{y}_x = 10{,}86x - 30{,}83;$ $\quad \overline{x}_y = 0{,}059y + 4{,}17.$

Изобразим обе прямые на одном чертеже. Построим также корреляционное поле, для этого изобразим точки с координатами $(x_k; y_k)\,(k = \overline{1,n})$ на том же чертеже, что и прямые регрессии.



Из рисунка видно, что угол между прямыми острый и близок к нулю, что также свидетельствует о тесной связи между признаками.

Статистические таблицы

Таблица 1 − Значения функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Сотые доли

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2331	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001	0001

При $x > 4$ принимают $\varphi(x)=0$.

Таблица 2 – Значения функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.0000	0.45	0.1736	0.90	0.3159	1.35	0.4115	1.80	0.4641	2.50	0.4938
0.01	0.0040	0.46	0.1772	0.91	0.3186	1.36	0.4131	1.81	0.4649	2.52	0.4941
0.02	0.0080	0.47	0.1808	0.92	0.3212	1.37	0.4147	1.82	0.4656	2.54	0.4945
0.03	0.0120	0.48	0.1844	0.93	0.3238	1.38	0.4162	1.83	0.4664	2.56	0.4948
0.04	0.0160	0.49	0.1879	0.94	0.3264	1.39	0.4177	1.84	0.4671	2.58	0.4951
0.05	0.0199	0.50	0.1915	0.95	0.3289	1.40	0.4192	1.85	0.4678	2.60	0.4953
0.06	0.0239	0.51	0.1950	0.96	0.3315	1.41	0.4207	1.86	0.4686	2.62	0.4956
0.07	0.0279	0.52	0.1985	0.97	0.3340	1.42	0.4222	1.87	0.4693	2.64	0.4959
0.08	0.0319	0.53	0.2019	0.98	0.3365	1.43	0.4236	1.88	0.4699	2.66	0.4961
0.09	0.0359	0.54	0.2054	0.99	0.3389	1.44	0.4251	1.89	0.4706	2.68	0.4963
0.10	0.0398	0.55	0.2088	1.00	0.3413	1.45	0.4265	1.90	0.4713	2.70	0.4965
0.11	0.0438	0.56	0.2123	1.01	0.3438	1.46	0.4279	1.91	0.4719	2.72	0.4967
0.12	0.0478	0.57	0.2157	1.02	0.3461	1.47	0.4292	1.92	0.4726	2.74	0.4969
0.13	0.0517	0.58	0.2190	1.03	0.3485	1.48	0.4306	1.93	0.4732	2.76	0.4971
0.14	0.0557	0.59	0.2224	1.04	0.3508	1.49	0.4319	1.94	0.4738	2.78	0.4973
0.15	0.0596	0.60	0.2257	1.05	0.3531	1.50	0.4332	1.95	0.4744	2.80	0.4974
0.16	0.0636	0.61	0.2291	1.06	0.3554	1.51	0.4345	1.96	0.4750	2.82	0.4976
0.17	0.0675	0.62	0.2324	1.07	0.3577	1.52	0.4357	1.97	0.4756	2.84	0.4977
0.18	0.0714	0.63	0.2357	1.08	0.3599	1.53	0.4370	1.98	0.4761	2.86	0.4979
0.19	0.0753	0.64	0.2389	1.09	0.3621	1.54	0.4382	1.99	0.4767	2.88	0.4980
0.20	0.0793	0.65	0.2422	1.10	0.3643	1.55	0.4394	2.00	0.4772	2.90	0.4981
0.21	0.0832	0.66	0.2454	1.11	0.3665	1.56	0.4406	2.02	0.4783	2.92	0.4982
0.22	0.0871	0.67	0.2486	1.12	0.3686	1.57	0.4418	2.04	0.4793	2.94	0.4984
0.23	0.0910	0.68	0.2517	1.13	0.3708	1.58	0.4429	2.06	0.4803	2.96	0.4985
0.24	0.0948	0.69	0.2549	1.14	0.3729	1.59	0.4441	2.08	0.4812	2.98	0.4986
0.25	0.0987	0.70	0.2580	1.15	0.3749	1.60	0.4452	2.10	0.4821	3.00	0.4987
0.26	0.1026	0.71	0.2611	1.16	0.3770	1.61	0.4463	2.12	0.4830	3.20	0.4993
0.27	0.1064	0.72	0.2642	1.17	0.3790	1.62	0.4474	2.14	0.4838	3.40	0.4997
0.28	0.1103	0.73	0.2673	1.18	0.3810	1.63	0.4484	2.16	0.4846	3.60	0.4998
0.29	0.1141	0.74	0.2703	1.19	0.3830	1.64	0.4495	2.18	0.4854	3.80	0.4999
0.30	0.1179	0.75	0.2734	1.20	0.3849	1.65	0.4515	2.20	0.4861	4.00	0.4999
0.31	0.1217	0.76	0.2764	1.21	0.3869	1.66	0.4505	2.22	0.4868	4.50	0.5000
0.32	0.1255	0.77	0.2794	1.22	0.3883	1.67	0.4525	2.24	0.4875	5.00	0.5000
0.33	0.1293	0.78	0.2823	1.23	0.3907	1.68	0.4535	2.26	0.4881		
0.34	0.1331	0.79	0.2852	1.24	0.3925	1.69	0.4545	2.28	0.4887	$\downarrow$	$\downarrow$
0.35	0.1368	0.80	0.2881	1.25	0.3944	1.70	0.4554	2.30	0.4893	$+\infty$	0.5
0.36	0.1406	0.81	0.2910	1.26	0.3962	1.71	0.4564	2.32	0.4898		
0.37	0.1443	0.82	0.2939	1.27	0.3980	1.72	0.4573	2.34	0.4904		
0.38	0.1480	0.83	0.2967	1.28	0.3997	1.73	0.4582	2.36	0.4909		
0.39	0.1517	0.84	0.2995	1.29	0.4015	1.74	0.4591	2.38	0.4913		
0.40	0.1554	0.85	0.3023	1.30	0.4032	1.75	0.4599	2.40	0.4918		
0.41	0.1591	0.86	0.3051	1.31	0.4049	1.76	0.4608	2.42	0.4922		
0.42	0.1628	0.87	0.3078	1.32	0.4066	1.77	0.4616	2.44	0.4927		
0.43	0.1654	0.88	0.3106	1.33	0.4082	1.78	0.4625	2.46	0.4931		
0.44	0.1700	0.89	0.3133	1.34	0.4099	1.79	0.4633	2.48	0.4934		

Таблица 3 − Распределение Стьюдента (двусторонняя критическая область) .

α - уровень значимости, γ = 1 - α - доверительная вероятность,

ν - число степеней свободы, n = ν +1 –объем выборки.

α γ ν ↓	0,10 0,90	0,05 0,95	0,02 0,98	0,01 0,99	0,002 0,998	0,001 0,999
1	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	2,015	2,571	3,365	5,032	5,893	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,562	3,850
21	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
60	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
100	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
300	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Таблица 4 – χ^2 – распределение.

ν - число степеней свободы, α - уровень значимости.

ν \ α	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	5,989	7,779	9,488	11,668	13,237	18,467
5	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	14,631	17,275	19,675	22,618	24,795	31,264
12	15,812	18,549	21,026	24,054	24,217	32,909
13	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	18,151	21,064	23,685	26,783	29,141	36,123
15	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	21,615	24,769	27,587	30,995	32,409	40,790
18	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	23,900	27,204	30,144	33,678	36,191	43,820
20	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	30,675	34,382	37,652	41,566	42,314	52,620
26	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

Таблица 5 − Значения $q = q(\gamma, n)$.

$(1 - q)\, s < \sigma < (1 + q)\, s$, если $q < 1$,

$0 < \sigma < (1 + q)\, s$, если $q > 1$.

$$\left(s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \right).$$

γ / n	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64
6	1,09	2,01	3,88
7	0,92	1,62	2,98
8	0,80	1,38	2,42
9	0,71	1,20	2,06
10	0,65	1,08	1,80
11	0,59	0,98	1,60
12	0,55	0,90	1,45
13	0,52	0,83	1,33
14	0,48	0,78	1,23
15	0,46	0,73	1,15
16	0,44	0,70	1,07
17	0,42	0,66	1,01
18	0,40	0,63	0,96
19	0,39	0,60	0,92

γ / n	0,95	0,99	0,999
20	0,37	0,58	0,88
25	0,32	0,49	0,73
30	0,28	0,43	0,63
35	0,26	0,38	0,56
40	0,24	0,35	0,50
45	0, 22	0,32	0,46
50	0,21	0,30	0,43
60	0,188	0,269	0,38
70	0,174	0,245	0,34
80	0,161	0,226	0,31
90	0,151	0,211	0,29
100	0,143	0,198	0,27
150	0,115	0,160	0,211
200	0,099	0,136	0,185
250	0,089	0,120	0,162

Литература

1. Теория вероятностей / Методические указания и задания к контрольной работе по теории вероятностей для студентов экономических специальностей заочной формы обучения / Т.А. Тузик, А.В. Санюкевич, Г.Р. Емельянова, Р.А. Гоголинская, О.К. Денисович–Брест: БрПИ. –1999.
2. Теория вероятностей и математическая статистика / Теория вероятностей и математическая статистика: методические рекомендации и варианты контрольных работ по курсу для студентов технических специальностей заочной формы обучения / М.П. Сидоревич, Л.П. Махнист, С.Т. Гусева, Л.Т. Мороз. – Брест: БрПИ. – 2000.
3. Математическая статистика // задания, методические указания, статистические таблицы / Б.А. Годунов, В.С. Рубанов, Т.А. Тузик.. – Брест: УО «БГТУ». – 2002.
4. Рябушко, А.П. Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике / А.П. Рябушко [и др.]. – Минск.: Выш.шк., 1992.
5. Белько, И.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры и задачи / И.В. Белько, Г.П. Свирид . – Минск: Новое издание, 2002.– 250 с.
6. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с.
7. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1998, - 479 с.
8. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1979, - 400 с.
9. Колемаев, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика / В.А. Колемаев, В.Н. Калинина. – М.: ИНФРА-М, 1997. –302 с.

Учебное издание

Составители:
Швычкина Елена Николаевна
Наумовец Светлана Николаевна
Черненко Виктор Петрович

\

ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Ответственный за выпуск: Швычкина Е. Н.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная вёрстка: Соколюк А.П.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано в печать 25.01.2018 г. Формат $60x84\ ^1/_{16.}$ Бумага «Performer».
Гарнитура «Arial Narrow». Усл. печ. л. 4,65. Уч. изд. л. 5,0. Заказ № 1273. Тираж 50 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, Брест, ул. Московская,267.