

^a ДРАГАН В. И. (проф., к.т.н., первый проректор БрГТУ)

^b ГЛУШКО К. К. (аспирант кафедры строительных конструкций)

^a VI_Dragan@mail.ru, ^b konstantin.glushko@bk.ru

Локальная устойчивость плоских многогранников сетчатых куполов

1. Введение

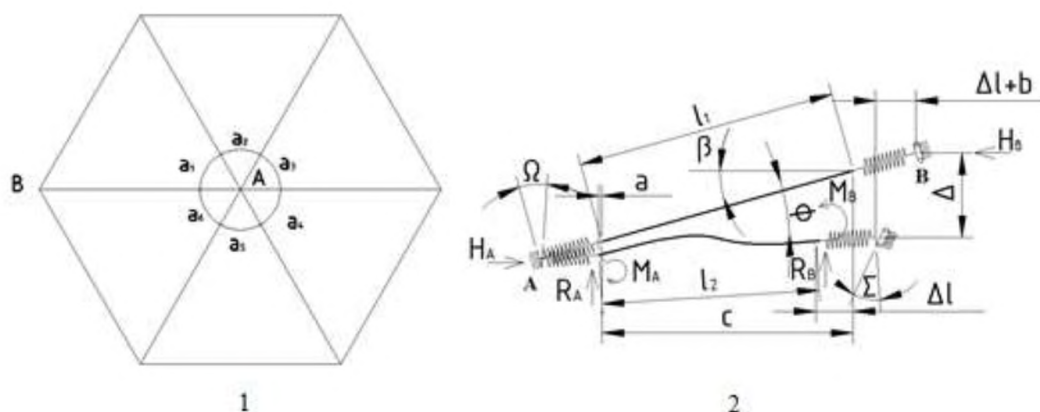
Существующие приближенные методы расчёта куполов как сплошных оболочек, изложенные В. В. Горевым, М. Е. Лепницким, Е. И. Беленёй, так и аналитические, реализуемые при помощи МКЭ в расчётных программных комплексах в большинстве случаев не описывают геометрически нелинейный процесс деформирования сетчатых куполов. Таким образом необходима проверка местной устойчивости и изменения усилий в стержнях при деформировании сетчатого купола вне зависимости от выбранного метода расчёта.

Местная потеря устойчивости сетчатого купола наступает при «прощёлкивании» к центру кривизны фрагмента купола. Указанная проблема освещалась в различных работах К. Клёппеля, А.А. Журавлёва, W Matthees. Однако принятые допущения не всегда позволяют точно определить критическую узловую нагрузку. В работах В.А. Савельева, А.С. Вольмира рассмотрен процесс деформирования фрагмента купола с шарнирными и жёсткими узлами. Однако напряжённо-деформированное состояние жёстко-стержневых пологих многогранников, склонных к «прощёлкиванию», достаточно точно не описано. Все перечисленные методы применимы для сетчатых оболочек сферической формы.

2. Построение математической модели

Метод, изложенный ниже, предлагается применить для исследования местной устойчивости и определения усилий и деформаций сетчатых оболочек, имеющих сферическую форму и регулярную решётку.

Допущения, принятые в расчёте: изменением углов (α_i) между стержнями, сходящимися в один узел, можно пренебречь за малостью этого углового перемещения (см рисунок 1); изменением длины проекции изогнутой формы стержня от действия изгибающего момента на хорду этого стержня можно пренебречь; деформирование стержня происходит упруго; в ходе всего процесса деформирования пологой пирамиды потери устойчивости её стержней и стержней соседних пирамид не происходит узловая нагрузка неизменна по величине для каждого из узлов сетчатой конструкции.



1 - рассматриваемый фрагмент стержневой оболочки , 2 - и расчётная схема стержня AB

Рис. 1. Расчётные схемы стержневой пирамиды и отдельного стержня

Угол наклона оси стержня к касательной плоскости обозначим за β . При угловом перемещении хорды стержня произойдёт перемещение опор A и B . Угол φ отсчитывается от первоначального направления хорды в направлении действия нагрузки. При этом произойдёт приращение продольной силы N , поперечной силы Q и моментов M . Сумма проекций внутренних сил равна реакции опор R_i :

$$R_i = N \sin(\beta - \varphi) + Q \cos(\beta - \varphi) \quad (1)$$

где N – продольная сила, вызванная линейными перемещениями опор, Q – сумма поперечных сил в стержне, вызванных относительным смещением опоры B от опоры A , поворотов опор A и B . Поскольку углы β, φ – малые, а величины $(\beta - \varphi)^n$ являются малыми величинами n -го порядка и близки к нулю. Таким образом можно принять, что $\cos(\beta - \varphi) \approx 1$, $\sin(\beta - \varphi) \approx (\beta - \varphi)$. Уравнение (1) можно представить в следующем виде:

$$R_i = N(\beta - \varphi) + Q \quad (2)$$

Первоначально следует выразить изменение длины стержня Δl через перемещения опор:

$$\Delta l \approx \Delta l_N - a - b \quad (3)$$

где Δl_N – изменение длины хорды стержня при изменении угла φ и неподвижных опорах A и B , a, b – перемещения узлов A и B из-за силовой отпорности опор A и B . Выражение для определения Δl_N , полученное К. Клёппелем для неподвижных опор:

$$\Delta l_N = c \varphi \left(\beta - \frac{1}{2} \varphi \right) \quad (4)$$

где c – проекция длины l стержня AB на касательную плоскость (м),

Для определения перемещений опор a и b используем расчётную схему (рис. 1). Так, опоры A и B представлены пружинными, последовательно соединённых с рассматриваемым стержнем. Запишем перемещения $a, b, \Delta l$ следующим образом:

$$k_1 a = \frac{EA \Delta l}{c} \quad b = k_1 \Delta l = N \quad (5)$$

Заменим жёсткости опор на податливости $\delta_A = \frac{1}{k_1}, \delta_B = \frac{1}{k_2}$, выражение (5) может быть переписано в другом виде:

$$\Delta l = c\varphi\left(\beta - \frac{1}{2}\varphi\right) / \left(1 + \frac{EA}{c}(\delta_A + \delta_B)\right) \quad (6)$$

где A – площадь поперечного сечения стержня (м²), E – модуль упругости материала стержня (Па).

Для удобства использования формул введена переменная $\xi = \varphi / \beta$ выражающую долю угла поворота φ от β . Продольная сила N запишется при рассмотрении деформированной схемы следующим образом:

$$N = EA\beta^2\xi\left(1 - \frac{1}{2}\xi\right) / \left(1 + \frac{EA}{c}(\delta_A + \delta_B + \delta_u)\right) \quad (7)$$

где δ_u – узловая податливость (м/Н). Изгибающие моменты можно вычислить путём суммирования моментов, которые возникают от угловых перемещений торцов стержня. Рассмотрим вертикальное перемещение опоры B на рисунке 2.

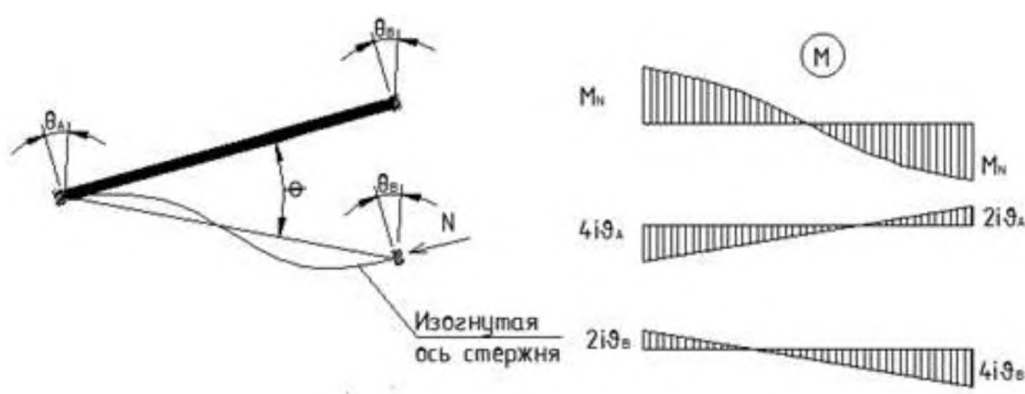


Рис. 2. Схема деформации стержня при перемещении заделки и эпюры моментов при перемещении заделки и поворотах заделок

При вертикальном перемещении опоры B , хорда стержня поворачивается на угол φ . Вместе с тем из-за податливости опор A и B происходит поворот заделок, вызванный моментами на торцах стержня. Здесь и в последующих выражения i – погонная изгибная жёсткость стержня. Полагая прямую пропорциональность углов поворота от момента, можно выразить угол поворота заделки через момент и моментную податливость заделки как $\mathcal{G}_A = M_A r_A$, $\mathcal{G}_B = M_B r_B$. Суммируя значения моментов на каждой из опор, можно составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} M_A = 6i\varphi - 4iM_A r_A - 2iM_B r_B + Nc(\varphi - M_A r_A) \\ M_B = 6i\varphi - 4iM_B r_B - 2iM_A r_A + Nc(\varphi - M_B r_B) \end{cases} \quad (9)$$

$6i\varphi$ – величина изгибающего момента при взаимном перемещении жёстких заделок на угол φ . Решая систему (9), можно получить значения моментов на торцах стержня:

$$\begin{cases} M_A = \beta \xi \frac{(6i + Nc)(1 + 2ir_B + Ncr_B)}{(1 + 4ir_A + Ncr_A)(1 + 4ir_B + Ncr_B) - 4i^2 r_A r_B} \\ M_B = \beta \xi \frac{(6i + Nc)(1 + 2ir_A + Ncr_A)}{(1 + 4ir_A + Ncr_A)(1 + 4ir_B + Ncr_B) - 4i^2 r_A r_B} \end{cases} \quad (10)$$

Узловая нагрузка на узлы пирамиды равна сумме проекций продольных и оперечных сил в стержнях. Местная потеря устойчивости фрагмента сетчатого купола с количеством n стержней в одном узле не произойдёт, если значение критической нагрузки превысит значение расчётной узловой нагрузки.

$$P = nEA\beta^3 \frac{\xi \left(1 - \frac{1}{2}\xi\right)}{1 + \frac{EA}{c_1}(\delta_{A\exists} + \delta_u)} (1 - \xi) + \frac{n\beta\xi \left(\frac{6i}{c} + N\right) (2 + 2i(r_A + r_B) + Nc(r_A + r_B))}{(1 + 4ir_A + Ncr_A)(1 + 4ir_B + Ncr_B) - 4i^2 r_A r_B} > P_{уз} \quad (11)$$

Из-за сложности использования формулы (11) необходимо ввести допущение о том, что стержни второго яруса купола, следующие за верхним ярусом, защемлены жёстко и поворотом опорных узлов второго яруса купола можно пренебречь.

Расчётная схема для определения отпорностей опорных узлов рассматриваемого фрагмента показана на рисунке 3.

На разрезе 1-1 показаны перемещения хорд стержней OB и GB . При деформации контура $ABCC'B'A'$, каждая из угловых точек перемещается на величину a . Максимальный порядок величины a равняется $10^{-3} - 10^{-5}$ м, угловое перемещение хорды стержня GB - $10^{-3} - 10^{-5}$ рад. Влияние поперечных сил в стержнях второго яруса, возникающие из-за углового перемещения хорд стержней GB и FB на величину перемещения a будут несоизмеримо малы, по сравнению с влиянием продольной силы, возникающей в стержне BO , в силу малости углового отклонения хорды стержня GB . При рассмотрении более сложной задачи в виде деформирования выпуклой сетчатой конструкции с числом ярусов больше двух, влияние каждого последующего яруса на величину a будет уменьшаться. Таким образом величину силовой отпорности δ_A можно определить с высокой точностью, рассматривая только лишь растяжение стержней опорного контура $ABCC'B'A'$.

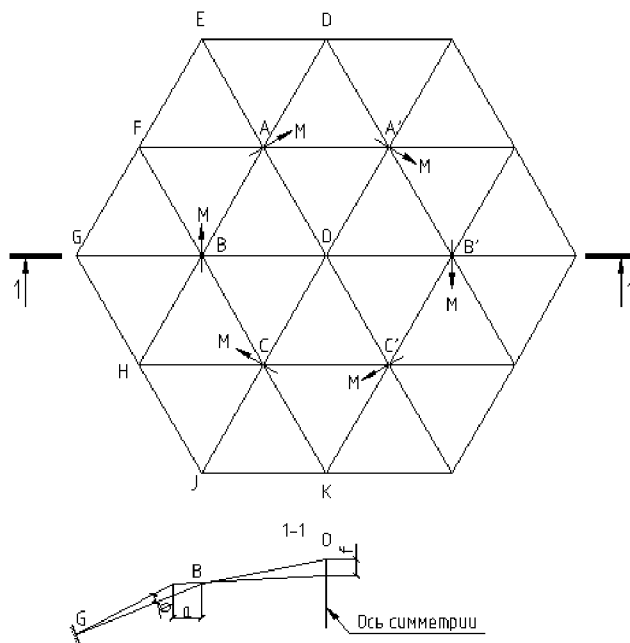


Рис. 3. Расчётная схема фрагмента сетчатой конструкции

Из того же рисунка 3 можно определить и величину жёсткости упругих заделок в узлах A, B, C, C', B', A' . Прикладывая сосредоточенные моменты, как показано на рис. 2, можно определить величину реактивного вектор-момента, выраженного через величину угла поворота торцов стержней. С небольшой допускаемой погрешностью при решении поставленной задачи стоит принять сетчатую поверхность плоской, спроецированной на проекционную плоскость.

Угол поворота торцов стержней BO и GB равен θ , угол поворота стержней FB, HB и симметричных им стержней равен $\theta' = \theta \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\theta$ в рассматриваемом примере с проекционной сетью в виде правильных треугольников. Стержни типа AB, BC, BB' испытывают чистый изгиб. На рисунке 4 показано сложение эпюр отдельных моментов, действующих на торцах стержня BB' , имеющего погонную жёсткость $\frac{i}{2}$.

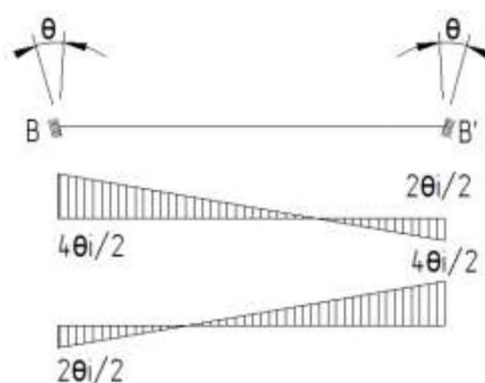


Рис. 4. Определение величин моментов в стержне BB'

Результирующий момент в точке B стержня BB' равняется $M_{BB'}^B = i\theta$. Рассуждая подобным образом, можно определить моменты в стержнях типа AB : $M_{AB}^B = i\theta$. Моменты в точке B в стержнях FB, HB, GB можно определить путём суммирования значений эпюр моментов от поворота торца в точке B и от вертикального перемещения точки B . В силу симметрии поперечные силы в стержнях FB, HB равны. Поскольку узел B находится в равновесии, то значение поперечной силы в стержне GB равно сумме поперечных сил в стержнях FB, HB . Уравнение равновесия узла B может быть записано в следующем виде:

$$\frac{6i\theta - 12i\varphi}{c} + 2\frac{3i\theta - 6i\varphi}{c} = 0 \quad (12)$$

Отсюда следует, что $\varphi = \frac{1}{3}\theta$. Значения моментов в точке В стержнях FB , HB можно определить следующим образом:

$$\begin{cases} M_{FB}^B = 2i\theta - 6i\varphi = 2i\theta - 6i\frac{1}{3}\theta = 0 \\ M_{GB}^B = 4i\theta - 6i\varphi = 4i\theta - 6i\frac{1}{3}\theta = 2i\theta \end{cases} \quad (13)$$

Реактивный момент M можно определить, суммируя моменты в точке В во всех соединяемых в ней стержнях в плоскости GBO :

$$M = i\theta + 2i\theta \cos \frac{\pi}{3} + 2i\theta = 4i\theta \quad (14)$$

Из выражения (14) следует, что момент, величиной $4i\theta$, поворачивает упругую заделку на угол θ . Сосредоточенный момент в точке B , равный моменту в точке B в стержне BO , величиной $i\theta$, способен повернуть заделку на угол $\frac{\theta}{4}$, поэтому жёсткость упругой заделки можно вычислить следующим образом:

$$r_B = \frac{4\theta}{M_{BO}^B} = \frac{4}{i} = \frac{1}{0.25i} = \frac{1}{mi} \quad (15)$$

Повторяя подобный вывод для отыскания упругих жесткостей заделок стержней в верхнем фрагменте сетчатого купола, построенного на гранях икосаэдра, гексаэдра, октаэдра и тетраэдра, можно вычислить значение коэффициента m , стоящего при i в формуле (15). В таблице 1 приведены значения величины m .

Таблица 2.1. Величина коэффициента жёсткости заделки стержня

Способ образования сетчатой конструкции	m
Проецирование узлов сети из равносторонних треугольников	0.25
Проецирование сети на гранях икосаэдра	0.196
Проецирование сети на гранях гексаэдра	0.178
Проецирование сети на гранях октаэдра	
Проецирование сети на гранях тетраэдра	0.172

С учётом выражения (15) можно переписать для жёстких узлов формулы (10), пренебрегая влиянием распора на величину момента в стержне и принимая, что $r_A = \infty$ (поворота заделки в зенитном узле не происходит).

$$\begin{cases} M_A = 6i\beta\xi \frac{m+2}{m+4} \\ M_B = 6i\beta\xi \frac{m}{m+4} \end{cases} \quad (16)$$

В случае, если узловая податливость является значительной и пренебрежение ей может привести к неверным результатам, выражение (10) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} M_A = 6i\beta\xi \frac{m+2imr_u+2}{(m+4)(m+4imr_u+4)-4ir_u} \\ M_B = 6i\beta\xi \frac{m+2}{(m+4)(m+4imr_u+4)-4ir_u} \end{cases} \quad (17)$$

Принимая узловую моментную податливость равной нулю и при малых перемещениях пренебрегая влиянием продольной силы на значение изгибающего момента, можно упростить формулу (11):

$$\frac{P}{nEA} = \beta^3 \frac{\tilde{N}}{D} + \frac{12\beta\xi}{\lambda^2} \cdot 0.28 > \frac{P_{уз}}{nEA} \quad (18)$$

где $\tilde{N} = \xi \left(1 - \frac{1}{2} \xi \right) (1 - \xi)$ - функция деформирования, график которой изображён на рис. 5,

$D = 1 + j(\delta_A + \delta_u)$ - коэффициент уменьшения продольной силы, $j = \frac{EA}{c}$ - погонная

жѐсткость стержня на растяжение-сжатие, λ - гибкость стержня сетчатой конструкции при рассмотрении его как шарнирно опѐртого на неподвижных опорах, 0,28 – минимальный из

результатов отношения $\frac{m+1}{m+4}$, при величинах m , взятой из таблицы 2.1.

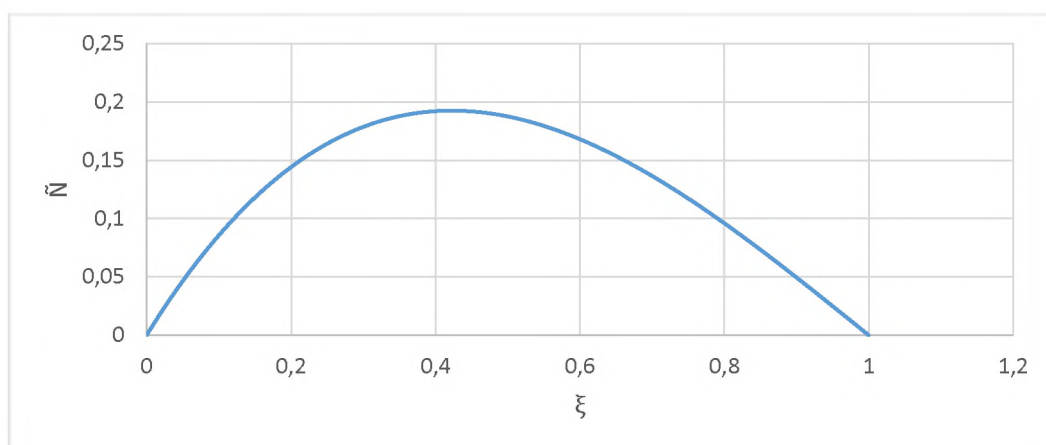


Рис. 5. График функции N

При невозможности рассмотрения узлового элемента как абсолютно тѐрдого тела при изгибе, узловую податливость необходимо всё же учитывать:

$$\frac{P}{nEA} = \beta^3 \frac{\tilde{N}}{D} + \beta \frac{12}{\lambda^2 i} \frac{m(1+ir_u)+2}{(m+4)(m+4imr_u+4)-4ir_u} > \frac{P_{уз}}{nEA} \quad (19)$$

где r_u - моментная податливость узлового элемента.

3. Выводы

Из изложенный выше зависимостей следует:

- 1) получена формула для вычисления критической нагрузки на узел для сетчатых конструкций с упругими узлами, загруженными равной по величине узловой нагрузкой,
- 2) процесс деформирования стержней пирамиды не будет связан с прямо пропорциональным приращением усилий в стержнях при заданном приращении нагрузки
- 3) произведено сравнение экспериментальных и теоретических значений внутренних сил и перемещений фрагмента сетчатого купола с упруго-податливыми узлами при узловой нагрузке,
- 4) полученные результаты позволяют с достаточно высокой точностью описать процесс деформации пологих многогранников в составе сетчатого купола, производить расчёт на местную устойчивость.

Ссылки

1. Металлические конструкции: учебное пособие: в 3 т. / В.В. Горев [и др.]. – 3-е изд., стер. – М.: Высш. школа, 2004. – Т. 2: Конструкции зданий. – 528 с.
2. Лепницкий, М.Е. Купола (расчёт и проектирование): практическое пособие / М.Е. Лепницкий, М.Е. Дьяков. – Ленинград: Стройиздат, 1973. – 129 с.
3. Беленя, Е.И. Металлические конструкции: учебное пособие / Е.И. Беленя. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1986. – 560 с.
4. Klöppel, K. Zur Berechnung von Netzkuppeln / K. Klöppel, R. Schardt // Der Stahlbau. – 1962. – № 5. – P. 129–136.
5. Журавлёв, А.А. Устойчивость пирамидальных элементов сетчатого купола / А.А. Журавлёв // Межотраслевые вопросы строительства / ЦИНИС, реферат. инф. – М., 1972. – Вып. 4. – С. 66-70.

6. Журавлёв, А.А. Местная устойчивость куполов с треугольными ячейками / А.А. Журавлёв, В. В. Мартинец // Межотраслевые вопросы строительства / ЦИНИС, реферат. инф. – М., 1971. – Вып. 8. – С. 8-10.
7. Matthees, W. Experimentelle und theoretische Untersuchung des Trag- und Stabilitätsverhaltens einschaliger räumlicher Gelenknetzwerke im elastischen Bereich / W. Matthees, P. Wegener // IVBH Kongressbericht. - Berlin, BRD: Bundesanstalt für Materialprüfung, 1972. – S. 473 – 478.
8. Савельев, В.А. Влияние начальных несовершенств и неравномерности загрузки на устойчивость сферического купола с жёсткими узлами / В.А. Савельев // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1971. – № 5. – С. 32–34.
9. Савельев, В.А. Теоретические основы проектирования металлических куполов: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.23.01 / В.А. Савельев. – М., 1995. – 39 с.
10. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1967. – 948 с.
11. Борисевич, А.А. Строительная механика / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – 2-е изд., перераб. и доп. – Мн.: БНТУ, 2009. – 756 с.

Local stability of flat polyhedrons of mesh domes

Abstract

The dependences for determining the stress-strain state of a fragment of a mesh dome. These formulas are valid for the case of constant-largest hub load on a mesh dome. Experimentally determined tense and strained state of the dome fragment. The proposed method has a good agreement with the experimental results.

Keywords: stress-strain state, fragment, mesh dome.