

**СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА С
ПОПЕРЕМЕННО ЧЕРЕДУЮЩИМСЯ ШАГОМ В
СЛУЧАЕ НЕЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ
ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ**

Дерачиц Н. А.
(БрГТУ, Брест)

Рассмотрим в гильбертовом пространстве H операторное уравнение первого рода

$$Ax = y \quad (1)$$

с положительным самосопряженным ограниченным оператором A , для которого нуль является собственным значением, в этом случае уравнение (1) имеет бесединственное решение. Причем нуль принадлежит спектру оператора A , т. е. задача некорректна. Для решения задачи предлагается явный итерационный метод с попеременно чередующимся шагом.

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y), \quad x_0 = 0, \quad (2)$$

$$\alpha_{2n+1} = \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y , ищем его приближение $x_{n\delta}$ при приближенной правой части y_δ , $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. В этом случае метод (2) примет вид:

$$x_{n+1,\delta} = x_{n\delta} - \alpha_{n+1}(Ax_{n\delta} - y_\delta), \quad x_{0,\delta} = 0, \quad (3)$$

$\alpha_{2n+1} = \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$ Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, $M(A)$ — ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H . Пусть $P(A)x$ — проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ — проекция $x \in H$ на $M(A)$. Доказана теорема:

Пусть $A \geq 0$, $y \in H$, $0 < \alpha < 2$, $(\alpha + \beta)^2 < 8\alpha\beta$, $\alpha\beta < \alpha + \beta$ тогда для итерационного процесса (2) верны следующие утверждения:

1) $Ax_n \rightarrow P(A)y$, $\|Ax_n - y\| \rightarrow J(A, y) = \inf_{x \in H} \|Ax - y\|$;

2) метод (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение $Ax = P(A)y$ разрешимо. В последнем случае $x_n \rightarrow P(A)x_n + x^*$, где x^* – минимальное решение уравнения.

Замечание. Так как $x_0 = 0$, то $x_n \rightarrow x^*$, т. е. процесс (2) сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.

ЛИТЕРАТУРА

1 Лисковец, О. А. Метод простых итераций с попеременно чередующимся шагом для уравнений I рода / О. А. Лисковец, В. Ф. Савчук // Докл. АН БССР. – 1977. – Т.21, № 1. – С. 9–12.