

УДК 517.9

Т.И. КАРИМОВА

Брест, БрГТУ

АППРОКСИМАЦИЯ МНОГОМЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ θ -ИНТЕГРАЛОВ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕОДНОРОДНОМ СЛУЧАЕ

Современная теория стохастических дифференциальных уравнений базируется на понятиях стохастических интегралов. Наиболее общий среди них – стохастический θ -интеграл, где параметр θ принадлежит отрезку $[0; 1]$ [1]. Для исследования решений таких уравнений разработана специальная теория. В сообщении [2] анонсирована конструкция алгебры обобщенных случайных процессов, которая позволила с единых позиций исследовать решения стохастических уравнений различных классов (см. напр.[3]) с помощью решений соответствующих уравнений в дифференциалах в этой алгебре.

Рассмотрим случай, когда параметр $\theta \in [1/2, 1]$. При этом исследование ассоциированных решений уравнений в дифференциалах сводится к исследованию предельного поведения конечных сумм с опережением следующего вида:

$$\sum_{k=0}^{m-1} f_n(L_n(t_{k+1}))(L_n(t_{k+1}) - L_n(t_k)), \text{ где } 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t,$$

$t \in T = [0, a] \subset \mathbb{R}$, а f_n и L_n – соответственно свертки функции f и случайного процесса L с δ -образной последовательностью. В статьях [3, 4] показано, что пределы подобных сумм в случае когда $L(t)$ стандартный процесс броуновского движения [1] полностью описываются стохастическими

θ -интегралами [5] вида $(\theta) \int_0^t f(L(s)) dL(s)$, $t \in T$ в зависимости от связи диаметра разбиения и δ -образной последовательности.

Пусть (Ω, A, P) – полное вероятностное пространство, $L(t)$ – многомерный стандартный процесс броуновского движения, а функция f зависит еще и от времени $t \in T$, т.е. $f = f(t, x)$.

Пусть $h_n > 0$, $h_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ – произвольная последовательность. Для любой фиксированной точки t отрезка T имеет место представление: $t = \tau_i + m_i h_n$, $h_n > 0$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $\tau_i \in [0, h_n)$, $m_i \in \mathbb{Z}$. Обозначим:

$$S_n f(t, \bar{B}(t)) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} f_n(t, \bar{B}_n(\tau_i + (k-1)h_n)) [B'_n(\tau_i + kh_n) - B'_n(\tau_i + (k-1)h_n)],$$

где $B'_n(t) = \int_0^{1/n} B'(t+s) \rho'_n(s) ds$, $\rho'_n(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\rho'_n(t) \geq 0$, $\text{supp } \rho'_n(t) \subset [0, 1/n]$,

$$\int_0^{1/n} \rho'_n(s) ds = 1, \quad i = \overline{1, r}, \quad \overline{B'_n(t)} = (B_n^1(t), B_n^2(t), \dots, B_n^r(t)),$$

$$f_n(t, t_1, t_2, \dots, t_r) = \int_0^{1/n} \dots \int_0^{1/n} f(t+s, t_1+s_1, t_2+s_2, \dots, t_r+s_r) \overline{\rho}_n(s, s_1, s_2, \dots, s_r) ds ds_1 ds_2 \dots ds_r$$

$\overline{\rho}_n$ – неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, носитель

которой содержится в $[0, 1/n]^{r+1}$ и $\int_0^{1/n} \dots \int_0^{1/n} \overline{\rho}_n(s, s_1, s_2, \dots, s_r) ds ds_1 ds_2 \dots ds_r = 1$.

$$K_i(n, h_n) = \iint_{\substack{0 < s, \tau < 1/n \\ s - \tau \leq h_n}} (1 - |s - \tau| h_n^{-1}) \rho_i^n(s) \rho_i^n(\tau) ds d\tau.$$

Доказана теорема, которая является необходимым и достаточным условием сходимости суммы $S_n f(t, \overline{B}(t))$.

Теорема 1. Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ и последовательность $h_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, причем $1/n^2 = o(h_n)$. Конечная сумма $S_n f(t, \overline{B}(t))$ сходится в $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и равномерно по $t \in T$ при $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ тогда и только тогда, когда числовые последовательности $K_i(n, h_n)$, $i = \overline{1, r}$ сходятся при $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда, если $K_i(n, h_n) \rightarrow (2\theta_i - 1)$, $\theta_i \in [1/2, 1]$, $i = \overline{1, r}$ при $n \rightarrow \infty$, $h_n \rightarrow 0$ причем $1/n^2 = o(h_n)$, то

$$\sup_{t \in T} E \left(S_n f(\tau_i + (k-1)h_n, \overline{B}(\tau_i + (k-1)h_n)) - \sum_{i=1}^r (\theta_i) \int_0^{\tau_i} f(s, \overline{B}(s)) dB_i(s) \right)^2 \rightarrow 0$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Ватанабэ С., Икеда Н. *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузные процессы*. М.: Наука, 1986, 448с.
- 2 Лазакович Н.В. // Доклады АН Беларуси. – 1995 – Т.39 № 3 – С.20-22.
- 3 Лазакович Н.В., Сташуленок С.П., Яблонский О.Л. // Литовский математический сборник. – 1999. – Т.39, № 2 – С. 248-256.
- 4 Яблонский О.Л. // Доклады АН Беларуси. – 2000 – Т.44 №2 – С.22-26
- 5 Пугачев В.С., Синицын И.Н. *Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация*. М.: Наука, 1990, 630с.