нагрузки для данного района (соответственно, Гумбеля, Фреше или Вейбулла), конкретная функция для подрайона определялась в итоге единственным коэффициентом. Данный коэффициент выбирался так, чтобы достичь наилучшей обеспеченности расчетных значений снеговой нагрузки во всем практически значимом диапазоне $T = 10 \ldots 100$ лет. Мы полагали при этом, что соответствующий период повторяемости *расчетных* значений должен не менее чем в пять раз превышать аналогичный период для *характеристических* значений (т.е. составлять от 50 до 500 лет; или, иначе, достигать обеспеченности от 0.98 до 0.998).

Найденные для всех подрайонов итоговые зависимости сведены в таблицу, пригодную для практического использования и не требующую дополнительных пояснений. Прочерки в некоторых графах таблицы означают, что на территории Республики Беларусь соответствующие подрайоны отсутствуют.

Заключение. Предложены новые методики картографирования, адаптированные к задачам долгосрочного прогнозирования экстремальных значений климатических факторов (максимумов снеговой нагрузки и скорости ветра, максимальных и минимальных температур и т.п.). Методика гридинга, использующая принцип «отражающей границы», позволяет надежно картографировать и районировать ограниченную территорию при отсутствии данных для окрестностей за ее пределами. Районирование территории по типам вероятностных распределений экстремальных значений фактора обеспечивает возможность адекватного пересчета прогнозируемых значений при изменении длительности прогноза.

Результаты работы внедрены в национальные приложения Республики Беларусь к техническим кодексам (стандартам) ТКП ЕН 1991-1-3 «Еврокод 1: Воздействия на конструкции. Часть 1–3: Общие воздействия. Снеговые нагрузки» и ТКП ЕН 1991-1-4 «Еврокод 1: Воздействия на конструкции. Часть 1–4: Общие воздействия. Ветровые нагрузки», введенным в действие 1.01.2010.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Берлянт, А.М. Карты фоновых и остаточных поверхностей и их применение в географических исследованиях // Вестник Московского Университета. – 1969. – № 4: География. – С. 80–89.
2. Тур, В.В. Нормирование снеговых нагрузок для территории Республики Беларусь / В.В. Тур, В.Е. Валуев, С.С. Дереченник, О.П. Мешик, И.С. Воскобойников // Строительная наука и техника (Минск). – 2008. – №2. – С. 27–45.
3. Дмитриева, А.В. Итерационный алгоритм гридинга с покоординатной аппроксимацией для районирования метеорологических данных // Сб. конкурс. науч. раб. студ. и магистр. – Брест: БрГТУ, 2009. – Ч.1. – С. 148–152.
4. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. – М.: Мир, 1982. – Кн. 2. – 480 с.
5. Снеговые нагрузки на покрытиях зданий в условиях Севера / В.В. Филиппов, А.Т. Копылов, Т.А. Корнилов [и др.]. – М.: Наука, 2000. – 246 с.
6. Tur V., Valuev V., Derechennik S., Meshik O. Ground Snow Loads in Belarusian Code // Environmental Effects on Building, Structures, Materials and People / Lublin Univ. of Technology; Ed. A.Flaga and T.Lipecki. – Lublin, 2007. – P. 131–138.
7. Дереченник, С.С. Интегральная оценка качества регрессионных моделей / С.С. Дереченник, А.В. Дмитриева, С.С.-мл. Дереченник // Вестник Брестского государственного технического университета. – 2009. – № 5: Физика, математика, информатика. – С. 77–80.

Материал поступил в редакцию 29.10.10

DERECHENNIK S.S., DMITRIEVA A.V. Geo-mapping automation in tasks of long-term climate forecast

New approaches of geo-mapping are proposed for long-term forecasting results of different climate factors. Adequate maps for limited territory can be obtained using the “reflecting border” principle at griding when there are no data for outer neighborhood. Zoning on types of probability distribution of the factor extreme values makes it possible to recalculate the forecast values when changing the length of a forecast. Approaches were successfully tested in task of characteristic values zoning of snow load in Belarus.

УДК 551.492

Волчек А.А., Гладкий И.И., Махнист Л.П., Рубанов В.С.

О ПАРАМЕТРАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГИДРОЛОГИИ

Введение. Рассмотрим марковский процесс для описания колебаний речного стока, используемый в стохастической гидрологии.

Пусть $\overline{V}$ – среднегодовой расход воды, а V_t – расход воды в момент времени t. Тогда, полагая $X_t = (V_t - \overline{V}) / \overline{V}$, процесс многолетних колебаний стока можно описать с помощью стационарного решения стохастического дифференциального уравнения (СДУ) Орнштейна–Уленбека с непрерывным временем [1]:

$$dX_t = -kX_t dt + \sigma dW_t, \qquad (1)$$

где W_t – стандартный винеровский процесс (так что $\dfrac{dW_t}{dt} = W_t'$ – обобщенный случайный процесс белого шума с параметром $\sigma = C_V \sqrt{2k}$), C_V – коэффициент вариации, k^{-1} – время релаксации речного стока.

Орнштейна–Уленбека процесс является однородным по времени марковским процессом диффузионного типа с коэффициентом сноса $a(t,x) = -kx$ и диффузии $\sigma(t,x) = \sigma^2$, переходная плотность вероятности $p(t,\, x, y)$ которого является фундаментальным решением соответствующего уравнения Фоккера–Планка (т.е. прямого уравнения Колмогорова) вида

$$\frac{\partial p}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial y}(yp) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2},$$

где коэффициент k определяется по формуле $k = -\ln r$, так как

Волчек Александр Александрович, *д.г.н., профессор, декан факультета водоснабжения и гидромелиорации Брестского государственного технического университета.*
Гладкий Иван Иванович, *старший преподаватель кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Махнист Леонид Петрович, *к.т.н., доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Рубанов Владимир Степанович, *к.ф.-м.н., проректор по научной работе, профессор кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

автокорреляционная функция колебаний стока имеет вид $e^{-k\tau}$, а r – коэффициент автокорреляции годового стока.

Пусть в начальный момент времени $t=0$ сток равен x, а x_* – некоторое фиксированное значение стока. Выясним, за какой промежуток времени значение V будет находиться в полуинтервале $[x_*,\infty)$ при условии, что $x\in[x_*,+\infty)$. Решить эту задачу можно с помощью обратного уравнения Колмогорова. Так как случайные колебания стока, описываемые СДУ, однородны по времени, обратное уравнение Колмогорова для процесса (1) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,x,y)=-kx\frac{\partial}{\partial x}p(t,x,y)+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Пусть T – момент времени, в который значение V покинет промежуток $[x_*,+\infty)$. Тогда

$$prob(T\ge t)=G(t,x), G(t,x)=\int_{x_*}^{+\infty}p(t,x,y)dy.$$

Интегрируя (2) по y на интервале от x_* до $+\infty$, получаем

$$\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}=-kx\frac{\partial G(t,x)}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 G(t,x)}{\partial x^2}.$$

Учитывая условия отражения на бесконечности и поглощения в точке $x=x_*$, получим следующие краевые условия:

$$G(t,x)\big|_{x=x_*}=0, \left.\frac{\partial G(t,x)}{\partial x}\right|_{x=+\infty}=0.$$

Так как функция $1-G(t,x)$ является распределением случайной величины T, то моменты n-ого порядка времени достижения границы x_* определяются соотношениями

$$T_k=-\int_0^{+\infty}t^k\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}dt=\int_0^{+\infty}kt^{k-1}G(t,x)dt.$$

Интегрируя по t на интервале от 0 до $+\infty$ соотношение

$$nt^{n-1}\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}=-kx\frac{\partial}{\partial x}\left(nt^{n-1}G(t,x)\right)+$$
$$+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(nt^{n-1}G(t,x)\right)$$

и учитывая, что

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}dt=G(+\infty,x)-G(0,x)=-1,$$

получаем следующие уравнения для T_1 и T_n:

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2T_1}{dx^2}-kx\frac{dT_1}{dx}=-1 \quad \text{при} \quad \frac{dT_1}{dx}(+\infty)=0,$$
$$T_1(x)\big|_{x=x_*}=0,$$

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2T_n}{dx^2}-kx\frac{dT_n}{dx}=-nT_{n-1}, \quad \text{при} \quad \frac{dT_n}{dx}(+\infty)=0,$$
$$T_n(x)\big|_{x=x_*}=0.$$

Введя безразмерные величины

$$kT_1=\theta_1, \quad k^2T_2=\theta_2,$$

$$x\frac{\sqrt{2k}}{\sigma}=\frac{x}{C_V}=\xi, \quad x_*\frac{\sqrt{2k}}{\sigma}=\frac{x_*}{C_V}=\xi_*,$$

приходим к системе для оценки математического ожидания T_1 и среднего квадратичного отклонения $\sqrt{T_2-T_1^2}$:

$$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2}-\xi\frac{d\theta_1}{d\xi}=-1, \quad \frac{d\theta_1}{d\xi}(+\infty)=0, \theta_1(\xi)\big|_{\xi=\xi_*}=0,$$
$$\frac{d^2\theta_2}{d\xi^2}-\xi\frac{d\theta_2}{d\xi}=-2\theta_1, \frac{d\theta_2}{d\xi}(+\infty)=0, \theta_2(\xi)\big|_{\xi=\xi_*}=0. \quad (3)$$

Система (3), приведенная в [1], при решении различных прикладных задач, например, в [2], интегрировалась численными методами.

Решение уравнений модели. Найдем точное решение первого уравнения системы (3).

Введя замену $\frac{d\theta_1}{d\xi}=f_1(\xi)$, приходим к линейному дифференциальному уравнению первого порядка $\frac{df_1}{d\xi}-\xi f_1=-1$ с начальным условием $f_1(\xi)\big|_{\xi=+\infty}=0$.

Тогда $f_1(\xi)=(C-\int e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi)e^{\frac{\xi^2}{2}}$ – общее решение дифференциального уравнения $\frac{df}{d\xi}-\xi f=-1$.

Заметим, что $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1$. Тогда, учитывая начальное условие $f_1(\xi)\big|_{\xi=+\infty}=0$, имеем

$$f_1(\xi)=\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\xi}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)e^{\frac{\xi^2}{2}}.$$

Используя разложение функции e^z в ряд Маклорена, имеем:

$$e^{\frac{\xi^2}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!} \text{ и } e^{-\frac{t^2}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!}.$$

Тогда $\int_0^{\xi}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\xi^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}$ и, следовательно, $f_1(\xi)$ можно представить в виде

$$f_1(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}-\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\xi^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}\right).$$

Тогда, используя правило Коши умножения рядов, получим

$$f_1(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}\right)\frac{\xi^{2n+1}}{2^n n!}.$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма. $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m}=\frac{(2n)!!(m-1)!!}{(2n+1+m)!!}$ для любого натурального m.

Доказательство. Используя бином Ньютона $x^m(1-x^2)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{2k+m}$ и интегрируя, имеем:

$$I_{m,n}=\int_0^1 x^m(1-x^2)^n dx=$$

$$=\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{2k+m}dx=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m}.$$

Заметим, что с другой стороны

$$I_{m,n}=\frac{x^{m+1}(1-x^2)^n}{m+1}\Bigg|_0^1-\int_0^1\frac{x^{m+1}}{m+1}d(1-x^2)^n=$$

$$=\frac{2n}{m+1}I_{m+2,n-1}.$$

Тогда $I_{m,n}=\dfrac{(2n)!!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(m+2k-1)}I_{m+2n,0}$.

Учитывая, что

$$I_{m+2n,0}=\int_0^1 x^{m+2n}dx=\frac{x^{m+2n+1}}{m+2n+1}\Bigg|_0^1=\frac{1}{m+2n+1},$$

имеем

$$I_{m,n}=\frac{(2n)!!}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}(m+2k-1)}.$$

Следовательно, $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m}=\dfrac{(2n)!!(m-1)!!}{(2n+1+m)!!}$

для любого натурального m и $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}=\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

Заметим также, что значения $I_{m,n}$ связаны с бета-функцией $\mathrm{B}(p,q)=\int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ соотношением:

$$I_{m,n}=\int_0^1 x^m(1-x^2)^n dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^n dt=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2},n+1\right).$$

Тогда, используя свойства бета-функции $\mathrm{B}(p,q)$ и гамма-функции $\Gamma(z)=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ – интегралов Эйлера первого и второго рода, получим

$$I_{m,n}=I_{2i,n}=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(i+\frac{1}{2},n+1\right)=\frac{\Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{2\Gamma\left(i+\frac{1}{2}+n+1\right)}=$$

$$=\frac{\prod\limits_{j=1}^{i}\left(i+\frac{1}{2}-j\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)n!}{2\prod\limits_{j=1}^{i+n+1}\left(i+\frac{1}{2}+n+1-j\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2^i\prod\limits_{j=1}^{i}\left(i+\frac{1}{2}-j\right)2^n n!}{2^{i+n+1}\prod\limits_{j=1}^{i+n+1}\left(i+\frac{1}{2}+n+1-j\right)}=$$

$$=\frac{\prod\limits_{j=1}^{i}(2i+1-2j)(2n)!!}{\prod\limits_{j=1}^{i+n+1}(2i+1+2n+2-2j)}=$$

$$=\frac{(2i-1)!!(2n)!!}{(2i+1+2n)!!}=\frac{(m-1)!!(2n)!!}{(m+1+2n)!!}$$

$$I_{m,n}=I_{2i-1,n}=\frac{\mathrm{B}(i,n+1)}{2}=\frac{\Gamma(i)\Gamma(n+1)}{2\Gamma(i+n+1)}=$$

$$=\frac{2^{i-1}(i-1)!2^n n!}{2^{i+n}(i+n)!}=\frac{(2i-2)!!(2n)!!}{(2i+2n)!!}=$$

$$=\frac{(m-1)!!(2n)!!}{(m+2n+1)!!}.$$

Утверждение доказано.

Следовательно, $f_1(\xi)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\xi^{2n}}{2^n n!}-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!}$.

Так как $\dfrac{d\theta_1}{d\xi}=f_1(\xi)$, то

$$\theta_1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}+C$$

– решение уравнения $\dfrac{d^2\theta_1}{d\xi^2}-\xi\dfrac{d\theta_1}{d\xi}=-1$.

Учитывая начальное условие, $\theta_1(\xi)\big|_{\xi=\xi_*}=0$, получаем, что

$$\theta_1(\xi)=S_1(\xi)-S_1(\xi_*), \qquad (4)$$

где

$$S_1(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$$

или

$S_1(\xi)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}\dfrac{(-1)^{k-1}\xi^k}{(k-1)!!k}$, а $\{t\}$ – дробная часть числа t.

Используя предлагаемую методику [3], найдем решение уравнения:

$$\frac{d^2G}{d\xi^2}-\xi\frac{dG}{d\xi}=-S_1(\xi),\quad \frac{dG}{d\xi}\bigg|_{\xi=+\infty}=0,\quad G(\xi)\big|_{\xi=\xi_*}=0.$$

Введя замену $\dfrac{dG}{d\xi}=f_2(\xi)$, приходим к линейному дифференциальному уравнению первого порядка $\dfrac{df_2}{d\xi}-\xi f_2=-S_1(\xi)$ с начальным условием $f_2(\xi)\big|_{\xi=+\infty}=0$.

Аналогично, как и для первого уравнения системы (3), получим $f_2(\xi)=(C-\int\limits_0^\xi e^{-\frac{t^2}{2}}S_1(t)dt)e^{\frac{\xi^2}{2}}$ – общее решение дифференциального уравнения $\dfrac{df_2}{d\xi}-\xi f_2=-S_1(\xi)$.

Учитывая начальное условие $f_2(\xi)\big|_{\xi=+\infty}=0$, имеем

$$f_2(\xi)=\Big(\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}S_1(t)dt-\int_0^{\xi}e^{-\frac{t^2}{2}}S_1(t)dt\Big)e^{\frac{\xi^2}{2}}.$$

Учитывая, что $S_1(\xi)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}\frac{(-1)^{k-1}\xi^k}{(k-1)!!k}$, найдем

$$\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}S_1(t)dt=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}}{(k-1)!!k}\int_0^{+\infty}t^ke^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Заметим, что для любого $n\geq 2$ выполняется

$$J_n=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}t^ndt=-t^{n-1}e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^{+\infty}+$$

$$+(n-1)\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}t^{n-2}dt=(n-1)J_{n-2}.$$

Учитывая, что $J_0=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и

$J_1=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}tdt=-e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^{+\infty}=1$, имеем

$J_{2k}=(2k-1)!!J_0=(2k-1)!!\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и

$J_{2k+1}=(2k)!!J_1=(2k)!!$ для любого натурального k.

Заметим, что значения J_n связаны с гамма-функцией соотношением:

$$J_n=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}t^ndt=\int_0^{+\infty}e^{-p}(2p)^{\frac{n-1}{2}}dp=\sqrt{2^{n-1}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Тогда, используя свойства гамма-функции, получим

$J_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $J_1=\Gamma(1)=0!=1$ и

$$J_{2k}=\frac{2^k}{\sqrt{2}}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{2^k}{\sqrt{2}}\prod_{i=1}^{k}\left(i+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}(2k+1)!!,$$

$$J_{2k+1}=2^k\Gamma(k+1)=2^kk!=(2k)!!.$$

Следовательно, $J_k=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k-1}{2}\right\}}(k-1)!!$ и

$$\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\theta_1(t)dt=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}J_k}{(k-1)!!k}=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ln 2,$$

так как $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2$.

Таким образом, $f_2(\xi)=\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ln 2-\int_0^{\xi}e^{-\frac{t^2}{2}}S_1(t)dt\right)e^{\frac{\xi^2}{2}}$ – решение дифференциального уравнения $\frac{df_2}{d\xi}-\xi f_2=-S_1(\xi)$, удовлетворяющее начальному условию $f_2(\xi)\big|_{\xi=+\infty}=0$.

Заметим, что

$$J_k(\xi)=\int_0^{\xi}e^{-\frac{t^2}{2}}t^kdt=\int_0^{\frac{\xi^2}{2}}e^{-x}(2x)^{\frac{k-1}{2}}dx=$$

$$=\sqrt{2^{k-1}}\Gamma_{\frac{\xi^2}{2}}\left(\frac{k+1}{2}\right),$$

где $\Gamma_z(p)=\int_0^{z}e^{-t}t^{p-1}dt$ – неполная гамма-функция.

Используя разложение функции e^z в ряд Маклорена, имеем

$$J_k(\xi)=\int_0^{\xi}e^{-\frac{t^2}{2}}t^kdt=\int_0^{\xi}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^mt^{2m}}{2^mm!}\right)t^kdt=$$

$$=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m\xi^{2m+1+k}}{(2m)!!(2m+1+k)}$$ и

$$\int_0^{\xi}e^{-\frac{t^2}{2}}\theta_1(t)dt=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}}{(k-1)!!k}\int_0^{\xi}t^ke^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}J_k(\xi)}{(k-1)!!k}.$$

Тогда $f_2(\xi)=e^{\frac{\xi^2}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ln 2-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}J_k(\xi)e^{\frac{\xi^2}{2}}}{(k-1)!!k}.$

Используя правило Коши умножения рядов, получим

$$J_m(\xi)\cdot e^{\frac{\xi^2}{2}}=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\xi^{2n+1+m}}{2^nn!(2n+1+m)}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^nn!}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\xi^{2n+1+m}}{2^kk!(2k+1+m)2^{n-k}(n-k)!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kC_n^k}{2k+1+m}\right)\frac{\xi^{2n+1+m}}{2^nn!}.$$

Следовательно, используя утверждение, для любого натурального m выполняется

$$J_m(\xi)\cdot e^{\frac{\xi^2}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kC_n^k}{2k+1+m}\right)\frac{\xi^{2n+1+m}}{2^nn!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(m-1)!!\xi^{2n+1+m}}{(2n+1+m)!!}.$$

Тогда

Таблица. Решение системы (3)

ξ_*	ξ					
	-2	-1	0	1	2	3
-3	76,5 (85,6)	84,8 (86,1)	86,9 (86,2)	87,8 (86,2)	88,4 (86,2)	**88,7** (**86,2**)
-2		8,3 (10,0)	10,4 (10,3)	11,3 (10,3)	11,9 (10,3)	12,2 (10,3)
-1			2,1 (2,4)	3,0 (2,6)	3,5 (2,6)	3,9 (2,6)
0				0,9 (0,9)	1,4 (1,0)	1,8 (1,1)

$$f_2(\xi)=e^{\frac{\xi^2}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ln 2-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}J_k(\xi)e^{\frac{\xi^2}{2}}}{(k-1)!!k}=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ln 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{(2n)!!}-\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\xi^{2n+1+k}}{(2n+1+k)!!k}.$$

Производя преобразования повторного ряда, получим

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\xi^{2n+1+k}}{(2n+1+k)!!k}=$$

$$=-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m}\right)\frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m-1}\right)\frac{\xi^{2n}}{(2n)!!}.$$

Тогда

$$f_2(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\ln 2-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m-1}\right)\frac{\xi^{2n}}{(2n)!!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m}\right)\frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!}.$$

Так как $\frac{dG}{d\xi}=f_2(\xi)$, то, учитывая начальное условие $G(\xi)|_{\xi=\xi_*}=0$, получаем, что

$G(\xi)=S_2(\xi)-S_2(\xi_*)$,

где

$$S_2(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\ln 2-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m-1}\right)\frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}+$$

$$+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m}\right)\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$$ или

$$S_2(\xi)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}\left(\ln\left(2-2\left\{\frac{k-1}{2}\right\}\right)-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\frac{1}{m-\left\{\frac{k}{2}\right\}}\right)\frac{(-1)^{k-1}\xi^k}{(k-1)!!k},$$

а $[t]$ и $\{t\}$ – целая и дробная части числа t соответственно.

Так как, учитывая (4), $H(\xi)=-S_1(\xi_*)\theta_1(\xi)$ решение уравнения

$$\frac{d^2H}{d\xi^2}-\xi\frac{dH}{d\xi}=S_1(\xi_*),\ \frac{dH}{d\xi}(+\infty)=0,\ H(\xi)|_{\xi=\xi_*}=0,$$ то

$$\theta_2(\xi)=2\left(S_2(\xi)-S_2(\xi_*)-S_1(\xi_*)\theta_1(\xi)\right). \quad (5)$$

Таким образом, соотношения (4) и (5) – решение системы дифференциальных уравнений (3).

Заключение. Рассмотрим пример, приведенный в [1]. Пусть среднегодовой сток Волги $\overline{V}=239$ км³/год (объем выборки $n=113$), среднеквадратичное отклонение равно 46 км³/год. Тогда $C_v=0{,}19$. Если коэффициент корреляции r между смежными значениями стока равен 0,42, тогда $k=-\ln 0{,}42\cong 0{,}9$ год⁻¹, $\sigma=0{,}257$ год⁻⁰·⁵, $\sigma^2=0{,}066$ год⁻¹. Предположим, что в начальный момент времени $V=377$ км³/год. Через сколько лет сток достигнет 101 км³/год, т.е. уменьшится на шесть среднеквадратичных отклонений (276 км³/год)? В данном случае $\xi_*=-3$ (это отклонение от среднегодового значения стока, взятое в долях C_V), а времени перехода стока от одного состояния к другому соответствует $\xi=3$.

В соответствии с таблицей, полученной с использованием решения системы (3), $\theta_1=88{,}7$, а размерное время составляет $m_T=\frac{\theta_1}{k}=88{,}7:0{,}9\approx 99$ лет. Так как $\sigma_T=\frac{\sqrt{\theta_2-\theta_1^2}}{k}=86{,}2:0{,}9\approx 95{,}8$, то доверительный интервал $(m_T-t\frac{\sigma_T}{\sqrt{n}};m_T+t\frac{\sigma_T}{\sqrt{n}})$ для оценки математического ожидания с надежностью $\gamma=0{,}95$ ($t=1{,}96$, $\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{\gamma}{2}$) определяется неравенством $81<m<117$.

В [4] предложено теоретическое обоснование асимптотического поведения математического ожидания, рассматриваемого распределения вероятностей многолетних колебаний речного стока, широко используемого в практике гидрологических расчетов. Анализ методики получения оценок моментов этого распределения, позволяет получить асимптотическое поведение решений рассматриваемой модели с помощью изучения соответствующих производных более высоких порядков, что может послужить темой дальнейших исследований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Найденов, В.И. Нелинейные модели колебаний речного стока / Найденов В.И., Швейкина В.И. // Водные ресурсы. Том 29, № 1. – М., 2002. – С. 62–67.
2. Волчек, А.А. Сравнительная оценка марковских и нелинейных моделей годового стока рек Беларуси / А.А. Волчек, С.И. Парфомук // Вестник Брестского государственного технического университета. – Брест: БрГТУ, 2006. – № 5: Физика, математика, информатика. – С. 56–60.
3. Волчек, А.А. О решении одной стохастической модели многолетних колебаний речного стока / А.А. Волчек, И.И. Гладкий, Л.П. Махнист, С.И. Парфомук // Вестник БрГТУ. – Брест: БрГТУ, 2008. – № 5: Физика, математика, информатика. – С. 83–87.
4. Волчек, А.А. Об асимптотическом поведении параметра одного из распределений вероятностей речного стока / А.А. Волчек, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов // Проблемы водоснабжения, водоотведения и энергосбережения в западном регионе Республики Беларусь: сборник материалов международной научно-технической конференции, Брест, 26–28 апреля 2010 г. – Брест: БрГТУ, 2010. – С. 45–49.

Материал поступил в редакцию 18.10.10

VOLCHEK A.A., HLADKI I.I., MAKHNIST L.P., RUBANOV V.S. About parametres of the distribution of probabilities of the stochastic hydrology diffusive model

This research work deals with the model of several years' fluctuation of the river flow, which was received by applying the stochastic differential equation of Ornstein–Uhlenbeck. The process under consideration is the homogeneous in terms of time Markow process of diffusion type with corresponding coefficient of drift and diffusion. It gives the opportunity to evaluate the mathematical expectation and the moment of frequency distribution of the river flow. The parameters are the solution to the set of second-order differential equations with boundary condition received by applying Fokker–Planck equation and by Kolmogorov's backward equation for transition probability density. In contrast to the use of numeric integration of the set of differential equations our research work gives the solution presented in power series.

УДК 681.3: 634.04

Игнатюк В.И., Семенюк О.С.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ УСИЛИЙ В БЕСШАРНИРНЫХ КРУГОВЫХ АРКАХ, ЗАГРУЖЕННЫХ РАДИАЛЬНО ДЕЙСТВУЮЩИМИ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ НАГРУЗКАМИ

Введение. В практике проектирования находят применение длинные цилиндрические оболочки, выполненные из лёгких материалов. Для таких оболочек особую роль играет ветровая нагрузка, действующая в радиальных направлениях [1]. Расчётная схема длинной цилиндрической оболочки может быть сведена к бесшарнирной арке. Решение задачи расчёта бесшарнирной полукруговой арки на радиальное нагружение равномерно распределённой нагрузкой на всю арку представлено в работе [3]. Таким образом расчёт бесшарнирных арок кругового очертания на действие радиально направленных равномерно распределённых нагрузок (рис. 1) актуален и представляет интерес.

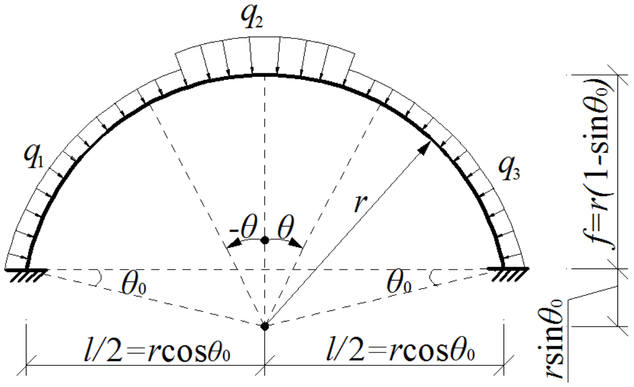

Рис. 1. Расчётная схема

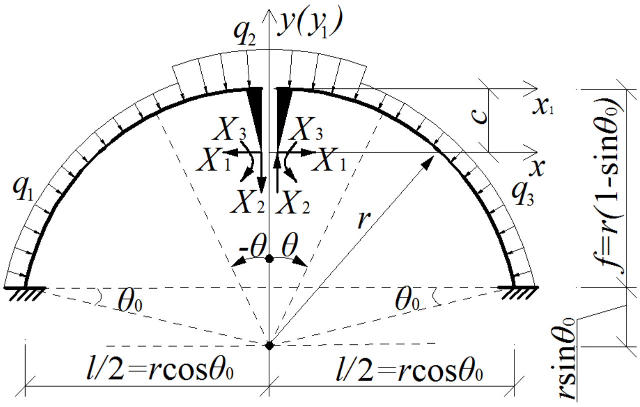

Рис. 2. Основная система метода сил

Постановка задачи. Рассмотрим задачу определения усилий в бесшарнирных арках постоянной жёсткости кругового очертания при статическом действии произвольного количества радиально направленных равномерно распределённых нагрузок (рис. 1). Для решения задачи используется метод сил с переносом неизвестных в упругий центр (рис. 2). При определении перемещений наряду с изгибающим моментом учитываются поперечные и продольные силы. Учитывая, что рассматриваются круговые арки, для упрощения вычисления интегралов Мора воспользуемся полярной системой координат. За полюс принимается точка в центре окружности (точка O), а в качестве оси, относительно которой будем отсчитывать угол (θ), примем вертикальную ось, направленную от полюса вертикально вверх.

Получение расчётных зависимостей. Зависимость между декартовой (x, y) и полярной (r, θ) системами координат здесь имеет вид:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta; \\ y = c + y_1 = c - r(1-\cos\theta), \end{cases}$$

где $y_1 = -r(1-\cos\theta)$; c – расстояние от верхней средней точки до упругого центра, определяемое выражением [2]

$$c = \frac{\int y_1 ds}{\int \frac{ds}{EI}} = \frac{\int \frac{[r(1-\cos\theta)]r d\theta}{EI}}{\int \frac{r d\theta}{EI}} = \frac{\int \frac{[r(1-\cos\theta)]d\theta}{EI}}{\int \frac{d\theta}{EI}} .$$

В случае $EI = \text{const}$, получим:

$$c = r - r\frac{\cos\theta_0}{\frac{\pi}{2}-\theta_0} .$$

Бесшарнирная арка как статически неопределимая система имеет три лишних связи. Система канонических уравнений метода сил будет иметь вид [2]:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0; \\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Выражения для усилий в сечениях основной системы метода сил от действия единичных неизвестных имеет вид:

$$\begin{aligned} &\overline{M}_1 = c - r(1-\cos\theta); \quad \overline{Q}_1 = \sin\theta; \quad \overline{N}_1 = -\cos\theta; \\ &\overline{M}_2 = r\sin\theta; \quad \overline{Q}_2 = -\cos\theta; \quad \overline{N}_2 = -\sin\theta; \\ &\overline{M}_3 = 1; \quad \overline{Q}_3 = 0; \quad \overline{N}_3 = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Единичные перемещения вычислим по формуле Мора [2]:

$$\delta_{ik} = \int_0^s \frac{\overline{M}_i \overline{M}_k ds}{EI} + \int_0^s \eta \frac{\overline{Q}_i \overline{Q}_k ds}{GA} + \int_0^s \frac{\overline{N}_i \overline{N}_k ds}{EA}, \qquad (3)$$

***Игнатюк Валерий Иванович**, кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой строительной механики Брестского государственного технического университета.*
***Семенюк Ольга Сергеевна,** студентка Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.