

VOLCHEK A.A., HLADKI I.I., MAKHNIST L.P., RUBANOV V.S. About parametres of the distribution of probabilities of the stochastic hydrology diffusive model

This research work deals with the model of several years' fluctuation of the river flow, which was received by applying the stochastic differential equation of Ornstein–Uhlenbeck. The process under consideration is the homogeneous in terms of time Markow process of diffusion type with corresponding coefficient of drift and diffusion. It gives the opportunity to evaluate the mathematical expectation and the moment of frequency distribution of the river flow. The parameters are the solution to the set of second-order differential equations with boundary condition received by applying Fokker–Planck equation and by Kolmogorov's backward equation for transition probability density. In contrast to the use of numeric integration of the set of differential equations our research work gives the solution presented in power series.

УДК 681.3: 634.04

Игнатюк В.И., Семенюк О.С.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ УСИЛИЙ В БЕСШАРНИРНЫХ КРУГОВЫХ АРКАХ, ЗАГРУЖЕННЫХ РАДИАЛЬНО ДЕЙСТВУЮЩИМИ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ НАГРУЗКАМИ

Введение. В практике проектирования находят применение длинные цилиндрические оболочки, выполненные из лёгких материалов. Для таких оболочек особую роль играет ветровая нагрузка, действующая в радиальных направлениях [1]. Расчётная схема длинной цилиндрической оболочки может быть сведена к бесшарнирной арке. Решение задачи расчёта бесшарнирной полукруговой арки на радиальное нагружение равномерно распределённой нагрузкой на всю арку представлено в работе [3]. Таким образом расчёт бесшарнирных арок кругового очертания на действие радиально направленных равномерно распределённых нагрузок (рис. 1) актуален и представляет интерес.

задачи используется метод сил с переносом неизвестных в упругий центр (рис. 2). При определении перемещений наряду с изгибающим моментом учитываются поперечные и продольные силы. Учитывая, что рассматриваются круговые арки, для упрощения вычисления интегралов Мора воспользуемся полярной системой координат. За полюс принимается точка в центре окружности (точка O), а в качестве оси, относительно которой будем отсчитывать угол (θ), примем вертикальную ось, направленную от полюса вертикально вверх.

Получение расчётных зависимостей. Зависимость между декартовой (x, y) и полярной (r, θ) системами координат здесь имеет вид:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta; \\ y = c + y_1 = c - r(1 - \cos \theta), \end{cases}$$

где $y_1 = -r(1 - \cos \theta)$; c – расстояние от верхней средней точки до упругого центра, определяемое выражением [2]

$$c = \frac{\int y_1 ds}{\int \frac{ds}{EI}} = \frac{\int [r(1 - \cos \theta)] r d\theta}{\int \frac{rd\theta}{EI}} = \frac{\int [r(1 - \cos \theta)] d\theta}{\int \frac{d\theta}{EI}}.$$

В случае $EI = \text{const}$, получим:

$$c = r - r \frac{\cos \theta_0}{\frac{\pi}{2} - \theta_0}.$$

Бесшарнирная арка как статически неопределимая система имеет три лишних связи. Система канонических уравнений метода сил будет иметь вид [2]:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0; \\ \delta_{33} X_3 + \Delta_{3p} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Выражения для усилий в сечениях основной системы метода сил от действия единичных неизвестных имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= c - r(1 - \cos \theta); & \bar{Q}_1 &= \sin \theta; & \bar{N}_1 &= -\cos \theta; \\ \bar{M}_2 &= r \sin \theta; & \bar{Q}_2 &= -\cos \theta; & \bar{N}_2 &= -\sin \theta; \\ \bar{M}_3 &= 1; & \bar{Q}_3 &= 0; & \bar{N}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Единичные перемещения вычислим по формуле Мора [2]:

$$\delta_{ik} = \int_0^s \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k ds}{EI} + \int_0^s \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_k ds}{GA} + \int_0^s \frac{\bar{N}_i \bar{N}_k ds}{EA}, \quad (3)$$

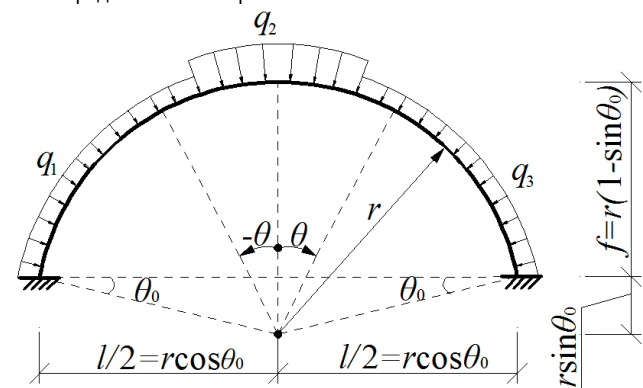


Рис. 1. Расчётная схема

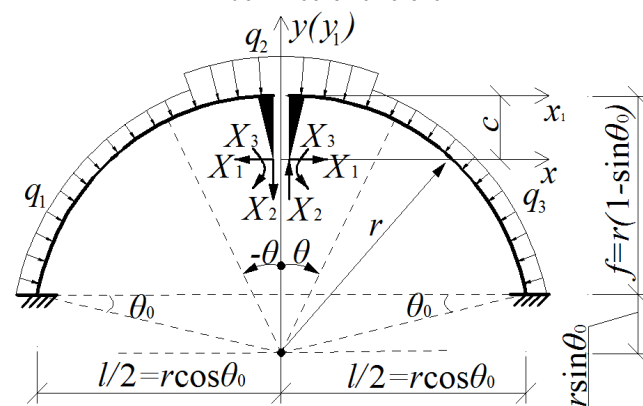


Рис. 2. Основная система метода сил

Постановка задачи. Рассмотрим задачу определения усилий в бесшарнирных арках постоянной жёсткости кругового очертания при статическом действии произвольного количества радиально направленных равномерно распределённых нагрузок (рис. 1). Для решения

Игнатюк Валерий Иванович, кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой строительной механики Брестского государственного технического университета.

Семенюк Ольга Сергеевна, студентка Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БрГУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Физика, математика, информатика

где EI , GA , EA – жёсткости сечений арки соответственно на изгиб, сдвиг и растяжение-сжатие; η – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по высоте сечений при изгибе.

Подставив выражения (2) в (3), учитывая, что $ds = r d\theta$ (рис. 2), и выполнив интегрирование, получим единичные перемещения в виде:

$$\delta_{11} = \frac{r}{EI} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \left[2(c-r)^2 + r^2 \right] + 4r(c-r)\cos\theta_0 + \frac{1}{2}r^2 \sin 2\theta_0 \right] + \eta \frac{r}{GA} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right] + \frac{r}{EA} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) + \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right]; \quad (4)$$

$$\delta_{22} = \frac{r^3}{EI} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right] + \frac{r}{GA} \eta \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) + \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right] + \frac{r}{EA} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right];$$

$$\delta_{33} = \frac{2r}{EI} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right).$$

Грузовые перемещения найдём по формулам Мора [2]:

$$\Delta_{ip} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_p ds}{EI} + \sum \int \eta \frac{\bar{Q}_i Q_p ds}{GA} + \sum \int \frac{\bar{N}_i N_p ds}{EA}. \quad (5)$$

Для получения выражений внутренних сил в произвольном сечении (θ) от действия внешних радиально направленных равномерно распределённых нагрузок рассмотрим равновесие правой и левой частей арок относительно сечения и выразим их через элементарные нагрузки на бесконечно малых участках $ds = r d\varphi$ (рис. 3,а,б):

$$M_p^\Pi = \sum_{i=1}^{n_q^\Pi} \int_{\theta_i^H}^{\theta_i^K} q_i r^2 (\sin\theta \cos\varphi - \cos\theta \sin\varphi) d\varphi + \int_{\theta_i^H}^{\theta} q_i r^2 (\sin\theta \cos\varphi - \cos\theta \sin\varphi) d\varphi; \quad (6)$$

$$M_p^\Pi = - \sum_{j=1}^{n_q^\Pi} \int_{\theta_j^H}^{\theta_j^K} q_j r^2 (\sin\theta \cos\varphi - \cos\theta \sin\varphi) d\varphi - \int_{\theta}^{\theta_j^K} q_j r^2 (\sin\theta \cos\varphi - \cos\theta \sin\varphi) d\varphi; \quad (7)$$

$$Q_p^\Pi = - \sum_{i=1}^{n_q^\Pi} \int_{\theta_i^H}^{\theta_i^K} q_i r (\cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi) d\varphi - \int_{\theta_i^H}^{\theta} q_i r (\cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi) d\varphi; \quad (8)$$

$$Q_p^\Pi = - \sum_{j=1}^{n_q^\Pi} \int_{\theta_j^H}^{\theta_j^K} q_j r (\cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi) d\varphi - \int_{\theta}^{\theta_j^K} q_j r (\cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi) d\varphi; \quad (9)$$

$$N_p^\Pi = \sum_{i=1}^{n_q^\Pi} \int_{\theta_i^H}^{\theta_i^K} q_i r (\cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi) d\varphi + \int_{\theta_i^H}^{\theta} q_i r (\cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi) d\varphi; \quad (10)$$

$$N_p^\Pi = \sum_{j=1}^{n_q^\Pi} \int_{\theta_j^H}^{\theta_j^K} q_j r (\cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi) d\varphi + \int_{\theta}^{\theta_j^K} q_j r (\cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \sin\varphi) d\varphi;$$

$$N_p^\Pi = - \sum_{i=1}^{n_q^\Pi} \int_{\theta_i^H}^{\theta_i^K} q_i r (\sin\theta \cos\varphi - \cos\theta \sin\varphi) d\varphi - \int_{\theta}^{\theta_i^K} q_i r (\sin\theta \cos\varphi - \cos\theta \sin\varphi) d\varphi;$$

$$N_p^\Pi = - \sum_{j=1}^{n_q^\Pi} \int_{\theta_j^H}^{\theta_j^K} q_j r (\sin\theta \cos\varphi - \cos\theta \sin\varphi) d\varphi - \int_{\theta_j^H}^{\theta} q_j r (\sin\theta \cos\varphi - \cos\theta \sin\varphi) d\varphi;$$

$$N_p^\Pi = \sum_{j=1}^{n_q^\Pi} \int_{\theta_j^H}^{\theta_j^K} q_j r (\cos\theta \sin\varphi - \sin\theta \cos\varphi) d\varphi + \int_{\theta}^{\theta_j^K} q_j r (\cos\theta \sin\varphi - \sin\theta \cos\varphi) d\varphi; \quad (11)$$

$$+ \int_{\theta}^{\theta_j^K} q_j r (\cos\theta \sin\varphi - \sin\theta \cos\varphi) d\varphi,$$

где под оператором суммирования стоят усилия от нагрузок, которые полностью (от начала до конца) действуют на отсечённых участках; второе слагаемое в каждом из выражений определяет усилия от нагрузок, которые пересекаются рассматриваемым сечением, в результате чего на сечение действует только часть этих нагрузок.

Последние слагаемые в каждом из выражений будут присутствовать только в случаях, если рассматриваемое сечение находится на участке действия распределённой нагрузки.

После интегрирования выражений (6)–(11) в пределах участков действия нагрузок получим:

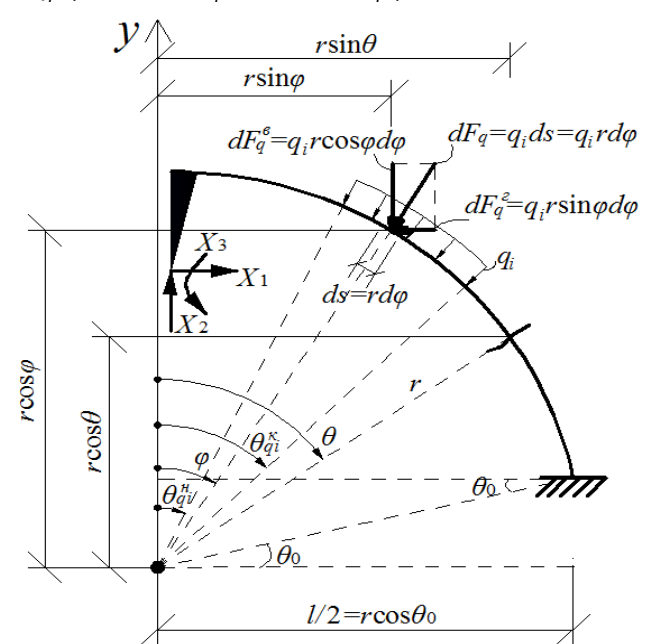
$$M_p^\Pi = \sum_{i=1}^{n_q^\Pi} q_i r^2 \left[\sin\theta (\sin\theta_i^K - \sin\theta_i^H) + \cos\theta (\cos\theta_i^K - \cos\theta_i^H) \right] + q_i r^2 (1 - \sin\theta \sin\theta_i^H - \cos\theta \cos\theta_i^H); \quad (12)$$

$$M_p^\Pi = - \sum_{j=1}^{n_q^\Pi} q_j r^2 \left[\sin\theta (\sin\theta_j^K - \sin\theta_j^H) + \cos\theta (\cos\theta_j^K - \cos\theta_j^H) \right] + q_j r^2 (1 - \sin\theta \sin\theta_j^K - \cos\theta \cos\theta_j^K); \quad (13)$$

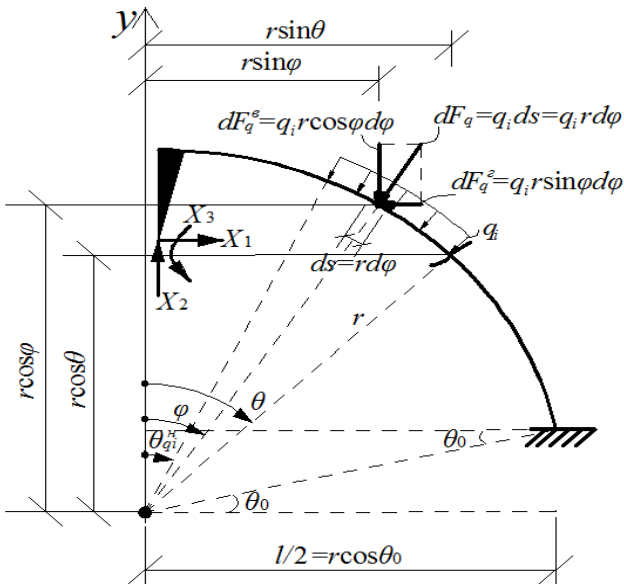
$$Q_p^\Pi = - \sum_{i=1}^{n_q^\Pi} q_i r \left[\cos\theta (\sin\theta_i^K - \sin\theta_i^H) - \sin\theta (\cos\theta_i^K - \cos\theta_i^H) \right] + q_i r (\cos\theta \sin\theta_i^H - \sin\theta \cos\theta_i^H); \quad (14)$$

$$Q_p^\Pi = \sum_{j=1}^{n_q^\Pi} q_j r \left[\cos\theta (\sin\theta_j^K - \sin\theta_j^H) - \sin\theta (\cos\theta_j^K - \cos\theta_j^H) \right] + q_j r (\cos\theta \sin\theta_j^K - \sin\theta \cos\theta_j^K); \quad (15)$$

$$N_p^\Pi = - \sum_{i=1}^{n_q^\Pi} q_i r \left[\sin\theta (\sin\theta_i^K - \sin\theta_i^H) + \cos\theta (\cos\theta_i^K - \cos\theta_i^H) \right] - q_i r (1 - \sin\theta \sin\theta_i^H - \cos\theta \cos\theta_i^H); \quad (16)$$



а) сечение на участке, свободном от нагрузки



б) сечение на участке распределённой нагрузки
Рис. 3. Отсечение части арки

$$N_p^{\eta} = -\sum_{j=1}^{n_q} q_j r [\sin\theta(\sin\theta_j^K - \sin\theta_j^H) + \cos\theta(\cos\theta_j^K - \cos\theta_j^H)] + (17)$$

$$+ q_j r (1 - \cos\theta \cos\theta_j^K - \sin\theta \sin\theta_j^K).$$

Каждое из выражений (12)–(17) имеет два слагаемых, которые в зависимости от типа участка, на котором находится сечение, могут присутствовать, а могут и не присутствовать в выражениях. Первое и второе слагаемые отражают воздействие распределённых нагрузок и будут присутствовать, если соответствующая распределённая нагрузка действует слева от сечения (для правой части арки) или справа от сечения (для левой части арки). При этом первое слагаемое учитывает распределённые нагрузки, которые полностью действуют слева от сечения для правой части арки (например, нагрузки q_4 и q_5 для сечений 10, 11, 12) и справа от сечения для левой части арки (например, нагрузки q_2 и q_3 для сечений 1, 2, 3), а второе слагаемое учитывает распределённые нагрузки, действующие частично слева от сечения для правой части арки (нагрузка q_4 для сечения 7, нагрузка q_5 для сечения 9, нагрузка q_6 для сечения 11) и действующие частично справа от сечения для левой части арки (нагрузка q_1 для сечения 2, нагрузка q_2 для сечения 4, нагрузка q_3 для сечения 6), то есть эти распределённые нагрузки находятся на участках, в пределах которых проходит рассматриваемое сечение.

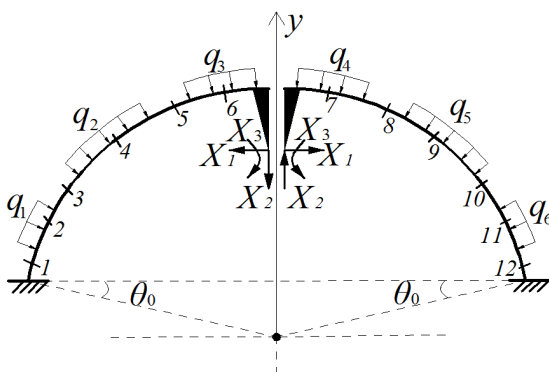


Рис. 4. Схема возможных расположений расчётных сечений

Подставив выражения (2), (12)–(17) в (5) и проинтегрировав по участкам непрерывности эпюр, получим грузовое перемещение,

которое состоит из трёх слагаемых, учитывающих соответственно три вида внутренних сил в арках – усилий M , Q и N :

$$\Delta_{ip}^M = \Delta_{ip}^{M^M} + \Delta_{ip}^{M^Q} + \Delta_{ip}^{M^N},$$

где в свою очередь $\Delta_{ip}^M = \Delta_{ip}^{MP} + \Delta_{ip}^{ML}$, $\Delta_{ip}^Q = \Delta_{ip}^{QP} + \Delta_{ip}^{QL}$,

$$\Delta_{ip}^N = \Delta_{ip}^{NP} + \Delta_{ip}^{NL}.$$

Окончательно слагаемые выражений для определения грузовых перемещений получим в виде (18).

Теперь можно решить систему канонических уравнений метода сил (1) и найти неизвестные X_1 , X_2 , X_3 . Окончательные значения внутренних усилий в сечениях правых частей рассматриваемых арок определяются по выражениям:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3 + M_p^{\eta};$$

$$Q = \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \bar{Q}_3 X_3 + Q_p^{\eta};$$

$$N = \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \bar{N}_3 X_3 + N_p^{\eta}.$$

Для сечений левой части рассматриваемых арок окончательные значения внутренних усилий будут иметь вид:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3 + M_p^{\eta};$$

$$Q = \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \bar{Q}_3 X_3 + Q_p^{\eta};$$

$$N = \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \bar{N}_3 X_3 + N_p^{\eta}.$$

Апробация результатов. На основе полученных зависимостей составлена MathCad- программа, с использованием которой выполнены расчёты конкретных арок. На рис. 5 и 6

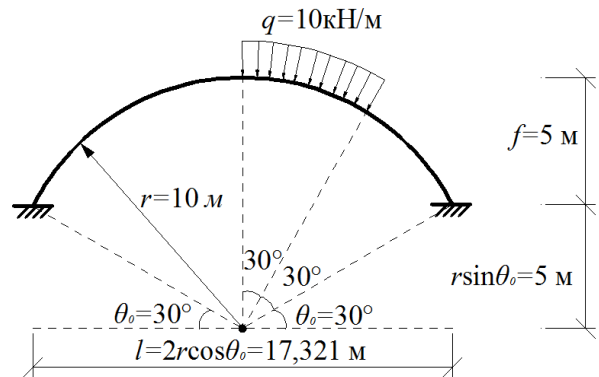
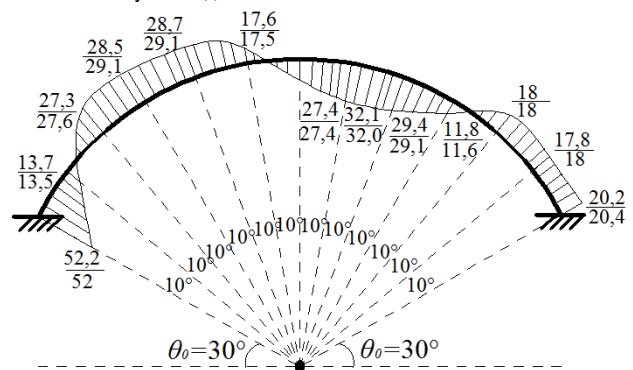


Рис. 5. Расчётная схема арки

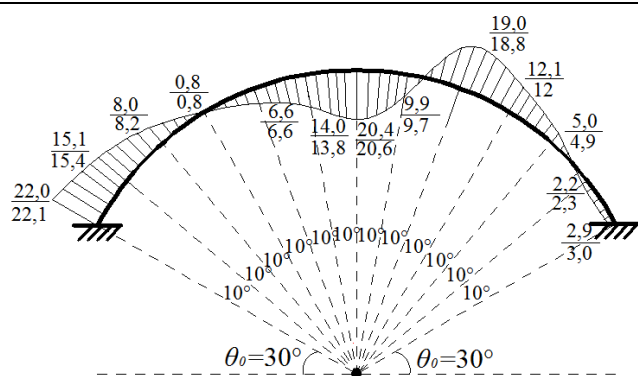
представлен один из примеров расчёта. Расчёт арки на рис. 5 также был выполнен методом конечных элементов в программе SCAD. Сравнение результатов расчёта показало их хорошее совпадение, что подтверждает эффективность разработанной методики, полученной в замкнутом виде.



а) эпюра изгибающих моментов [кН·м]: результаты в числителе получены по разработанной методике, в знаменателе – по программе SCAD

$$\begin{aligned}
 \Delta_{1p}^M &= \frac{r^3}{EI} \sum_{i=1}^{n_q^H} q_i \left\{ (c-r)(\theta_i^K - \theta_i^H) + (c-r)\sin\theta_i^H(\cos\theta_i^K - \cos\theta_i^H) - (c-r)\cos\theta_i^H(\sin\theta_i^K - \sin\theta_i^H) + \right. \\
 &+ r(\sin\theta_i^K - \sin\theta_i^H) - \frac{1}{2}r\sin\theta_i^H(\sin^2\theta_i^K - \sin^2\theta_i^H) - \frac{1}{2}r\cos\theta_i^H(\theta_i^K - \theta_i^H) - \\
 &- \frac{1}{4}r\cos\theta_i^H(\sin 2\theta_i^K - \sin 2\theta_i^H) \left. \right\} + \frac{r^3}{EI} \sum_{i=1}^{n_q^K} q_i \left\{ (c-r)(\sin\theta_i^K - \sin\theta_i^H)(\cos\theta_i^K - \sin\theta_0) + \right. \\
 &+ (c-r)(\cos\theta_i^K - \cos\theta_i^H)(\cos\theta_0 - \cos\theta_i^K) + \frac{r}{2}(\sin\theta_i^K - \sin\theta_i^H)(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_i^K) + \\
 &+ \frac{r}{2}(\cos\theta_i^K - \cos\theta_i^H) \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 - \theta_i^K \right) + \frac{1}{2}(\sin 2\theta_0 - \sin 2\theta_i^K) \right] \left. \right\} + \frac{r^3}{EI} \sum_{j=1}^{n_q^H} q_j \left\{ (c-r)(\theta_j^K - \theta_j^H) + \right. \\
 &+ (c-r)\sin\theta_j^K(\cos\theta_j^K - \cos\theta_j^H) - (c-r)\cos\theta_j^K(\sin\theta_j^K - \sin\theta_j^H) + r(\sin\theta_j^K - \sin\theta_j^H) - \\
 &- \frac{1}{2}r\sin\theta_j^K(\sin^2\theta_j^K - \sin^2\theta_j^H) - \frac{1}{2}r\cos\theta_j^K(\theta_j^K - \theta_j^H) - \frac{1}{4}r\cos\theta_j^K(\sin 2\theta_j^K - \sin 2\theta_j^H) \left. \right\} - \\
 &- \frac{r^3}{EI} \sum_{j=1}^{n_q^K} q_j \left\{ (c-r)(\sin\theta_j^K - \sin\theta_j^H)(\sin\theta_0 - \cos\theta_j^H) + (c-r)(\cos\theta_j^K - \cos\theta_j^H)(\cos\theta_0 + \sin\theta_j^H) + \right. \\
 &+ \frac{r}{2}(\sin\theta_j^K - \sin\theta_j^H)(\sin^2\theta_j^H - \cos^2\theta_0) + \frac{r}{2}(\cos\theta_j^K - \cos\theta_j^H) \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 + \theta_j^H \right) + \frac{1}{2}(\sin 2\theta_0 + \sin 2\theta_j^H) \right] \left. \right\} - \\
 \Delta_{1p}^Q &= -\eta \frac{r^2}{GA} \sum_{i=1}^{n_q^H} q_i \left[\frac{1}{2}\sin\theta_i^H(\sin^2\theta_i^K - \sin^2\theta_i^H) - \frac{1}{2}\cos\theta_i^H(\theta_i^K - \theta_i^H) + \frac{1}{4}\cos\theta_i^H(\sin 2\theta_i^K - \sin 2\theta_i^H) \right] - \\
 &- \eta \frac{r^2}{GA} \sum_{i=1}^{n_q^K} q_i \left\{ \frac{1}{2}(\sin\theta_i^K - \sin\theta_i^H)(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_i^K) - \frac{1}{2}(\cos\theta_i^K - \cos\theta_i^H) \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 - \theta_i^K \right) - \frac{1}{2}(\sin 2\theta_0 - \sin 2\theta_i^K) \right] \right\} + \\
 &+ \eta \frac{r^2}{GA} \sum_{j=1}^{n_q^H} q_j \left[\frac{1}{2}\sin\theta_j^K(\sin^2\theta_j^K - \sin^2\theta_j^H) - \frac{1}{2}\cos\theta_j^K(\theta_j^K - \theta_j^H) + \frac{1}{4}\cos\theta_j^K(\sin 2\theta_j^K - \sin 2\theta_j^H) \right] + \\
 &+ \eta \frac{r^2}{GA} \sum_{j=1}^{n_q^K} q_j \left\{ \frac{1}{2}(\sin\theta_j^K - \sin\theta_j^H)(\sin^2\theta_j^H - \cos^2\theta_0) - \frac{1}{2}(\cos\theta_j^K - \cos\theta_j^H) \left[\left(\frac{\pi}{2} + \theta_j^H - \theta_0 \right) - \frac{1}{2}(\sin 2\theta_j^H + \sin 2\theta_0) \right] \right\}; \\
 \Delta_{1p}^N &= \frac{r^2}{EA} \sum_{i=1}^{n_q^H} q_i \left\{ (\sin\theta_i^K - \sin\theta_i^H) - \frac{1}{2}\sin\theta_i^H(\sin^2\theta_i^K - \sin^2\theta_i^H) - \frac{1}{2}\cos\theta_i^H[(\theta_i^K - \theta_i^H) + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2}(\sin 2\theta_i^K - \sin 2\theta_i^H)] \right\} + \frac{r^2}{EA} \sum_{i=1}^{n_q^K} q_i \left\{ \frac{1}{2}(\sin\theta_i^K - \sin\theta_i^H)(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_i^K) + \right. \\
 &+ \frac{1}{2}(\cos\theta_i^K - \cos\theta_i^H) \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 - \theta_i^K \right) + \frac{1}{2}(\sin 2\theta_0 - \sin 2\theta_i^K) \right] \left. \right\} + \frac{r^2}{EA} \sum_{j=1}^{n_q^H} q_j \left\{ \frac{1}{2}\sin\theta_j^K(\sin^2\theta_j^K - \sin^2\theta_j^H) - (\sin\theta_j^K - \sin\theta_j^H) + \right. \\
 &+ \frac{1}{2}\cos\theta_j^K[(\theta_j^K - \theta_j^H) + \frac{1}{2}(\sin 2\theta_j^K - \sin 2\theta_j^H)] \left. \right\} + \frac{1}{2}\cos\theta_j^K[(\theta_j^K - \theta_j^H) + \frac{1}{2}(\sin 2\theta_j^K - \sin 2\theta_j^H)] \left. \right\} + \\
 &+ \frac{r^2}{EA} \sum_{j=1}^{n_q^K} q_j \left\{ \frac{1}{2}(\sin\theta_j^K - \sin\theta_j^H)(\sin^2\theta_j^H - \cos^2\theta_0) + \frac{1}{2}(\cos\theta_j^K - \cos\theta_j^H) \left[\left(\frac{\pi}{2} + \theta_j^H - \theta_0 \right) + \frac{1}{2}(\sin 2\theta_j^H + \sin 2\theta_0) \right] \right\}; \\
 \Delta_{2p}^M &= \frac{r^4}{EI} \sum_{i=1}^{n_q^H} q_i \left\{ -(\cos\theta_i^K - \cos\theta_i^H) - \frac{1}{2}\cos\theta_i^H(\sin^2\theta_i^K - \sin^2\theta_i^H) - \frac{1}{2}\sin\theta_i^H[(\theta_i^K - \theta_i^H) - \right. \\
 &- \left. \frac{1}{2}(\sin 2\theta_i^K - \sin 2\theta_i^H)] \right\} + \frac{r^4}{EI} \sum_{i=1}^{n_q^K} q_i \left\{ \frac{1}{2}(\sin\theta_i^K - \sin\theta_i^H) \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 - \theta_i^K \right) - \frac{1}{2}(\sin 2\theta_0 - \sin 2\theta_i^K) \right] + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2}(\cos \theta_j^K - \cos \theta_j^H)(\cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_j^K) \left. \right\} + \frac{r^4}{EI} \sum_{j=1}^{n_q^H} q_j \left\{ -(\cos \theta_j^K - \cos \theta_j^H) - \frac{1}{2} \cos \theta_j^K (\sin^2 \theta_j^K - \sin^2 \theta_j^H) - \right. \\
 & - \frac{1}{2} \sin \theta_j^K [(\theta_j^K - \theta_j^H) - \frac{1}{2}(\sin 2\theta_j^K - \sin 2\theta_j^H)] \left. \right\} + \frac{r^4}{EI} \sum_{j=1}^{n_q^H} q_j \left\{ \frac{1}{2}(\sin \theta_j^K - \sin \theta_j^H) \left[\frac{1}{2}(\sin 2\theta_j^H + \sin 2\theta_0) - \right. \right. \\
 & - (\theta_j^H + \frac{\pi}{2} - \theta_0) \left. \right] - \frac{1}{2}(\cos \theta_j^K - \cos \theta_j^H)(\sin^2 \theta_j^H - \cos^2 \theta_0) \left. \right\}; \\
 \Delta_{2p}^Q & = \eta \frac{r^2}{GA} \sum_{i=1}^{n_q^H} q_i \left\{ (\sin \theta_i^K - \sin \theta_i^H) - \frac{1}{2} \sin \theta_i^H (\sin^2 \theta_i^K - \sin^2 \theta_i^H) - \frac{1}{2} \cos \theta_i^H [(\theta_i^K - \theta_i^H) + \right. \\
 & + \frac{1}{2}(\sin 2\theta_i^K - \sin 2\theta_i^H)] \left. \right\} + \eta \frac{r^2}{GA} \sum_{i=1}^{n_q^H} q_i \left\{ \frac{1}{2}(\sin \theta_i^K - \sin \theta_i^H)(\cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_i^K) + \right. \\
 & + \frac{1}{2}(\cos \theta_i^K - \cos \theta_i^H) \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 - \theta_i^K \right) + \frac{1}{2}(\sin 2\theta_0 - \sin 2\theta_i^K) \right] \left. \right\} + \\
 & + \eta \frac{r^2}{GA} \sum_{j=1}^{n_q^H} q_j \left\{ \frac{1}{2} \sin \theta_j^K (\sin^2 \theta_j^K - \sin^2 \theta_j^H) - (\sin \theta_j^K - \sin \theta_j^H) + \frac{1}{2} \cos \theta_j^K [(\theta_j^K - \theta_j^H) + \right. \\
 & + \frac{1}{2}(\sin 2\theta_j^K - \sin 2\theta_j^H)] \left. \right\} + \eta \frac{r^2}{GA} \sum_{j=1}^{n_q^H} q_j \left\{ \frac{1}{2}(\sin \theta_j^K - \sin \theta_j^H)(\sin^2 \theta_j^H - \cos^2 \theta_0) + \right. \\
 & + \frac{1}{2}(\cos \theta_j^K - \cos \theta_j^H) \left[\left(\frac{\pi}{2} + \theta_j^H - \theta_0 \right) + \frac{1}{2}(\sin 2\theta_j^H + \sin 2\theta_0) \right] \left. \right\}; \\
 \Delta_{2p}^N & = \frac{r^2}{EA} \sum_{i=1}^{n_q^H} q_i \left[\frac{1}{2} \sin \theta_i^H (\sin^2 \theta_i^K - \sin^2 \theta_i^H) - \frac{1}{2} \cos \theta_i^H (\theta_i^K - \theta_i^H) + \frac{1}{4} \cos \theta_i^H (\sin 2\theta_i^K - \sin 2\theta_i^H) \right] + \\
 & + \frac{r^2}{EA} \sum_{i=1}^{n_q^H} q_i \left\{ \frac{1}{2}(\sin \theta_i^K - \sin \theta_i^H)(\cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_i^K) - \frac{1}{2}(\cos \theta_i^K - \cos \theta_i^H) \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 - \theta_i^K \right) - \right. \right. \\
 & - \frac{1}{2}(\sin 2\theta_0 - \sin 2\theta_i^K) \left. \right\} - \frac{r^2}{EA} \sum_{j=1}^{n_q^H} q_j \left[\frac{1}{2} \sin \theta_j^K (\sin^2 \theta_j^K - \sin^2 \theta_j^H) - \frac{1}{2} \cos \theta_j^K (\theta_j^K - \theta_j^H) + \right. \\
 & + \frac{1}{4} \cos \theta_j^K (\sin 2\theta_j^K - \sin 2\theta_j^H) \left. \right] - \frac{r^2}{EA} \sum_{j=1}^{n_q^H} q_j \left[\frac{1}{2} \sin \theta_j^K (\sin^2 \theta_j^K - \sin^2 \theta_j^H) - \frac{1}{2} \cos \theta_j^K (\theta_j^K - \theta_j^H) + \right. \\
 & + \frac{1}{4} \cos \theta_j^K (\sin 2\theta_j^K - \sin 2\theta_j^H) \left. \right] - \frac{r^2}{EA} \sum_{j=1}^{n_q^H} q_j \left\{ \frac{1}{2}(\sin \theta_j^K - \sin \theta_j^H)(\sin^2 \theta_j^H - \cos^2 \theta_0) - \right. \\
 & - \frac{1}{2}(\cos \theta_j^K - \cos \theta_j^H) \left[\left(\frac{\pi}{2} + \theta_j^H - \theta_0 \right) - \frac{1}{2}(\sin 2\theta_j^H + \sin 2\theta_0) \right] \left. \right\}; \\
 \Delta_{3p}^M & = \frac{r^3}{EI} \sum_{i=1}^{n_q^H} q_i [(\theta_i^K - \theta_i^H) + \sin \theta_i^H (\cos \theta_i^K - \cos \theta_i^H) - \cos \theta_i^H (\sin \theta_i^K - \sin \theta_i^H)] + \\
 & + \frac{r^3}{EI} \sum_{i=1}^{n_q^H} q_i [(\cos \theta_i^K - \cos \theta_i^H)(\cos \theta_0 - \sin \theta_i^K) - (\sin \theta_i^K - \sin \theta_i^H)(\sin \theta_0 - \cos \theta_i^K)] + \\
 & + \frac{r^3}{EI} \sum_{j=1}^{n_q^H} q_j [(\theta_j^K - \theta_j^H) + \sin \theta_j^K (\cos \theta_j^K - \cos \theta_j^H) - \cos \theta_j^K (\sin \theta_j^K - \sin \theta_j^H)] + \\
 & + \frac{r^3}{EI} \sum_{j=1}^{n_q^H} q_j [(\sin \theta_j^K - \sin \theta_j^H)(\cos \theta_j^H - \sin \theta_0) - (\cos \theta_j^K - \cos \theta_j^H)(\sin \theta_j^H + \cos \theta_0)].
 \end{aligned}
 \tag{18}$$



б) эпюра поперечных сил [кН]: результаты в числителе получены по разработанной методике, в знаменателе – по программе SCad

Рис. 6. Эпюры усилий

Заключение. Разработана в замкнутом виде методика расчёта бесшарнирных арок постоянной жёсткости кругового очертания при статическом действии радиально направленных равномерно распределённых ветровых нагрузок. Методика реализована в программе, составленной в среде MathCad.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Нагрузки и воздействия: СНиП 2.01.07–85 / Госстрой СССР. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1986. – 48 с.
2. Строительная механика: учебное пособие / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Мн.: БНТУ, 2009. – 756 с.
3. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Расчётно-теоретический: в 2 кн. / Под ред. А.А. Уманского. – М.: Стройиздат, 1972. – Кн. 2. – 600 с.

Материал поступил в редакцию 28.09.10

IGNATIUK V.I., SIEMIENIUK O.S. Defining efforts in fixed-end circular archs loading radially acting evenly distributing loads

Problem of defining efforts in fixed-end archs of constant hardness of circular outline in static action of radially directed evenly distributing wind loads is solved. Dependences are got with help of method of strength in a frame of reference. Approbation of results is done. Methods are realized in the program composed in MathCad.

УДК 519.854

Гурин А.М.

О ТЕОРЕМЕ ПОГОРЕЛОВА 2002 ГОДА

Введение. Гипотеза Стокера [1], согласно редакции ее в [2], состоит в решении следующего вопроса. Можно ли утверждать, что если у двух замкнутых выпуклых многогранников одинакового комбинаторного строения соответствующие двугранные углы равны, то у них соответствующие плоские углы тоже равны?

Первое подтверждение справедливости гипотезы Стокера получено Каршером [3] для многогранников с пятью вершинами и многогранников, описанных вокруг сферы.

Обратившись к этой гипотезе, Погорелов модифицировал ее формулировку и доказал следующую теорему[2].

Теорема (А.В.Погорелов). Пусть Р - замкнутый выпуклый многогранник, у которого грани - остроугольные треугольники. Пусть многогранник Р деформируется с сохранением комбинаторной структуры. Тогда, если при этой деформации двугранные углы многогранника не изменяются, то его плоские углы граней тоже не изменяются.

Постановка задачи. Мы адаптируем метод доказательства Погорелова до применимости его метода в доказательстве традиционной гипотезы Стокера и докажем выполнимость гипотезы Стокера для октаэдра.

Теорема. Пусть у двух замкнутых выпуклых многогранников М₁ и М₂ одинакового комбинаторного строения октаэдра грани - остроугольные треугольники, а соответствующие двугранные углы равны, тогда у них и соответствующие плоские углы тоже равны.

Доказательство. Аналогично методу Коши, примененному им в его знаменитой лемме [4], сравним соответствующие по комбинаторике плоские углы многогранников М₁ и М₂ и поставим знаки + и – на тех плоских углах многогранников М₁ и М₂, которые оказались отличными. Соответственно, большими или меньшими в каждой паре сравнения углов между собой. Найдем все возможные разметки. Существуют две различные разметки плоских углов многогранников М₁ и М₂. Действительно, обратимся к рис. 1. Согласно Коши, произвольную, отдельно взятую вершину Т можно всегда разметить, как показано на рис. 1. Сочетание же разметок соседних вершин, А,В,С,Д, порождает разветвление графа разметок. Например, в тре-

угольнике СМД при вершинах С и D могут быть или два знака “плюс”, или один знак “плюс” и один знак “минус” (два знака “минус” исключаем как повторение ситуации).

Выясним, сколько вариантов разметки всех углов многогранника возможно при этих первых двух вариантах разметки знаками углов вершин С и D.

Первый вариант. Пусть плоские углы треугольника СМД, инцидентные вершинам С и D, отмечены знаками «плюс» (рис. 2).

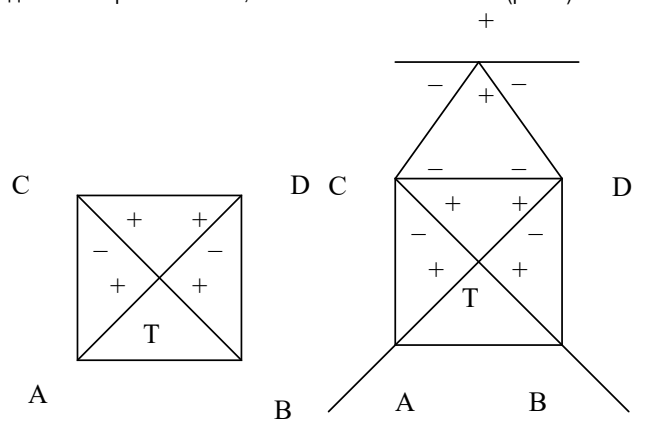


Рис. 1.

Рис. 2.

Если плоские углы САТ и ТВД отметим знаком “плюс”, то в треугольнике АВТ все плоские углы приобретут знак «минус», что невозможно. Рассмотрим два оставшихся варианта. Пусть угол САТ отмечен знаком “минус” (рис. 3).

Угол ТВД отметим знаком «плюс». Остальная разметка осуществляется стандартным алгоритмом и дает в итоге разметку рис. 3.

Пусть угол САТ отмечен знаком “минус” и угол ТВД отмечен знаком “минус” (рис. 4). Тогда продолжение расстановки знаками однозначно распространяется на все оставшиеся углы (рис. 4).