УДК 556.01:51-7

П.А. Меркушевич, И.Ю. Сверба, Л.П. Махнист, Т.И. Каримова
Брестский государственный технический университет

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЯДОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОЛОГИИ

В работе рассматривается модель многолетних колебаний речного стока, полученная на основе стохастического дифференциального уравнения Орнштейна–Уленбека. Рассматриваемый процесс, который является однородным по времени марковским процессом диффузионного типа с соответствующим коэффициентом сноса и диффузии, дает возможность оценить математическое ожидание распределения вероятностей изменения речного стока. Этот параметр является решением дифференциального уравнений второго порядка с краевыми условиями, полученными на основе уравнения Фоккера–Планка и обратного уравнения Колмогорова для переходной плотности вероятности. В отличие от использования численного интегрирования этого дифференциального уравнения, в работе получено решение, представленное в виде степенного ряда.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, ряд Маклорена, задачи гидрологии, модель колебаний речного стока.

Введение. Рассмотрим дифференциальное уравнение для описания колебаний речного стока, используемое в стохастической гидрологии (например, в [1]):

$$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2}-\xi\frac{d\theta_1}{d\xi}=-1,\quad \left.\frac{d\theta_1}{d\xi}\right|_{\xi=\infty}=0,\quad \left.\theta_1(\xi)\right|_{\xi=\xi_*}=0 \tag{1}$$

Уравнение (1) при решении некоторых прикладных задач, интегрировалось различными методами, например, в [2], в работе [3] исследовалось асимптотическое поведение решения, а в работах [4], [5] исследовалась сходимость решения этого уравнения. В работах [6], [7] и [8] для решения уравнения (1) использовалась система компьютерной алгебры.

Основная часть. Приведем решение этого уравнения, используя степенные ряды.

Введем обозначение $\frac{d\theta_1}{d\xi}=f_1(\xi)$. Тогда, учитывая, что $\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2}=\frac{df_1}{d\xi}$, приходим к линейному дифференциальному уравнению первого порядка $\frac{df_1}{d\xi}-\xi f_1=-1$, с начальным условием $\left.f_1(\xi)\right|_{\xi=\infty}=0$.

Решение последнего уравнения будем отыскивать в виде $f_1(\xi)=u(\xi)v(\xi)$. Тогда, учитывая, что $f_1'(\xi)=u'(\xi)v(\xi)+u(\xi)v'(\xi)$, получим уравнение:

$$u'v+u(v'-\xi v)=-1 \tag*{(2).}$$

Найдем одно из ненулевых решений уравнения $v'-\xi v=0$.

Разделяя переменные в уравнении $\frac{dv}{d\xi}=\xi v$, решением которого, очевидно, является $v=0$, получим $\frac{dv}{v}=\xi d\xi$.

Интегрируя последнее уравнение, имеем $\int\frac{dv}{v}=\int\xi d\xi+C_2$. Откуда $\ln|v|=\frac{\xi^2}{2}+\ln C_1$ или $v=\pm C_1e^{\frac{\xi^2}{2}}$.

Следовательно, $v=Ce^{\frac{\xi^2}{2}}$ – общее решение дифференциального уравнения $v'-\xi v=0$.

Выберем одно из ненулевых решений этого уравнения, например, $v=e^{\frac{\xi^2}{2}}$, при $C=1$.

Подставляя его, в уравнение (2), имеем $u'e^{\frac{\xi^2}{2}} = -1$ или $u' = -e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Откуда $u = -\int e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi + C$.

Следовательно, $f_1(\xi) = u(\xi)v(\xi) = (-\int e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi + C)e^{\frac{\xi^2}{2}}$ или $f_1(\xi) = (C - \int\limits_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt)e^{\frac{\xi^2}{2}}$.

Заметим, что $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$. Тогда, учитывая начальное условие $f_1(\xi)\big|_{\xi=\infty} = 0$, имеем $f_1(\xi) = (\sqrt{2\pi} - \int\limits_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt)e^{\frac{\xi^2}{2}}$ или $f_1(\xi) = (\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt)e^{\frac{\xi^2}{2}}$, что можно проверить, используя правило Лопиталя.

Заметим, что тогда $f_1(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Учитывая, что $f_1'(\xi) = -1 + \xi f_1(\xi)$, получим, что $f_1'(0) = -1$.

Найдем решение дифференциального уравнения $\frac{df_1}{d\xi} - \xi f_1 = -1$, разложив функцию $f_1(\xi)$ в ряд Маклорена.

Так как $f_1'(\xi) = -1 + \xi f_1(\xi)$, то $f_1''(\xi) = f_1(\xi) + \xi f_1'(\xi)$, $f_1'''(\xi) = 2 f_1'(\xi) + \xi f_1''(\xi)$, $f_1^{(4)}(\xi) = 3 f_1''(\xi) + \xi f_1'''(\xi)$ и т. д.

Следовательно, используя метод математической индукции, получим рекуррентное соотношение: $f_1^{(n)}(\xi) = (n-1) f_1^{(n-2)}(\xi) + \xi f_1^{(n-1)}(\xi)$, где $f_1^{(n)}(\xi)$ − производная функции $f_1(\xi)$ n-го порядка, где $n \in \mathrm{N}$ и $n \geq 2$, и $f_1^{(0)}(\xi) = f_1(\xi)$.

При $n = 2k$ − четное число ($k \in \mathrm{N}$), получим $f_1^{(2k)}(0) = (2k-1) f_1^{(2k-2)}(0) = (2k-1)!!\, f(0)$, где $(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)$ − двойной факториал нечетного числа $2k-1$.

При $n = 2k+1$ − нечетное число ($k \in \mathrm{N}$), получим $f_1^{(2k+1)}(0) = (2k) f_1^{(2k-1)}(0) = (2k)!!\, f_1'(0)$, где $(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k)$ − двойной факториал четного числа $2k$.

Следовательно, $\frac{f_1^{(2k)}(0)}{(2k)!} = \frac{(2k-1)!!\, f_1(0)}{(2k)!} = \frac{f_1(0)}{(2k)!!}$ и $\frac{f_1^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} = \frac{(2k)!!\, f_1'(0)}{(2k+1)!} = \frac{f_1'(0)}{(2k+1)!!}$, где $k \in \mathrm{N}$.

Тогда ряд Маклорена для функции $f_1(\xi)$ можно записать в виде:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!} \xi^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_1^{(2k)}(0)}{(2k)!} \xi^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_1^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} \xi^{2k+1} = f_1(0) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2k}}{(2k)!!} + f_1'(0) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!!}.$$

Учитывая, что $f_1(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и $f_1'(0) = -1$, получим $f_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{(2k)!!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+1}}{(2k+1)!!}$. Так как $\frac{d\theta_1}{d\xi} = f_1(\xi)$, то $\theta_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+2}}{(2k)!!(2k+1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+2}}{(2k+1)!!(2k+2)} + C$.

Учитывая, начальное условие, $\theta_1(\xi)\big|_{\xi=\xi_*} = 0$, получаем, что $\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*)$, где $S_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+2}}{(2k)!!(2k+1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+2}}{(2k+1)!!(2k+2)}$ или $S_1(\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{n}{2}\right\}} \frac{(-1)^{n-1} \xi^n}{(n-1)!!\, n}$, где $\{t\}$ − дробная часть числа t соответственно.

Заключение. Предлагаемая методика решения уравнения (1) может быть использована для решения более широкого круга задач стохастической гидрологии, которые описываются дифференциальными уравнениями аналогичного вида (например, в [4] и [5]).

Список использованных источников

1. Волчек, А.А. О моментах распределения вероятностей модели диффузионного типа в практике гидрологии / А.А. Волчек, И.И. Гладкий, Л.П. Махнист // Математика и ее приложения : межвуз. сб. науч. тр. / Ассоциация математиков вузов северо-запада ; под ред. Д.П. Голоскокова, А.Р. Шкадовой. – СПб., 2011. – Вып. 3. – С. 139–148.
2. Волчек, А.А. О параметрах распределения вероятностей диффузионной модели стохастической гидрологии / А.А. Волчек, И.И. Гладкий, Л.П. Махнист // Вестник Брестского государственного технического университета. Серия: Физика, математика, информатика. – 2010. – № 5. – С. 48–53.
3. Волчек, А.А. О решении системы дифференциальных уравнений, одной из моделей многолетних колебаний речного стока / А.А. Волчек, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4, Матэматыка. Фізіка. – 2010. – № 1. – С. 68–77.
4. Волчек, А.А. О сходимости решения одной малопараметрической модели многолетних колебаний речного стока / А.А. Волчек, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов // Вестник Брестского государственного технического университета. Серия: Физика, математика, информатика. – 2009. – № 5. – С. 2–5.
5. Волчек, А.А. Об асимптотическом поведении параметра одного из распределений вероятностей речного стока / А.А. Волчек, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов // Проблемы водоснабжения, водоотведения и энергосбережения в западном регионе Республики Беларусь : сб. материалов междунар. науч.-техн. конф., Брест, 22–23 апр. 2010 г. / Брест. гос. техн. ун-т ; редкол.: С.В. Басов [и др.]. – Брест, 2010. – С. 45–49.
6. Махнист, Л.П. Использование систем компьютерной алгебры в задаче гидрологического моделирования / Л.П. Махнист, Е.Н. Защук, И.И. Гладкий // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 22 окт. 2021 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. Д.В. Грицука. – Брест, 2021. – С. 54–56.
7. Махнист, Л.П. К решению задачи гидрологии с использованием систем компьютерной алгебры / Л.П. Махнист, Е.Н. Защук, И.И. Гладкий // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 28–29 апр. 2022 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. А.И. Басика. – Брест, 2022. – С. 17–19.
8. Махнист, Л.П. Применение систем компьютерной алгебры для решения модели стохастической гидрологии / Л.П. Махнист, Е.Н. Защук, И.И. Гладкий // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 22–23 апр. 2021 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. Н.Н. Сендера. – Брест, 2021. – С. 96–98.

УДК 669\2.8.620.178.6

В.С. Савенко[1], О.Б. Скворцов[2], В.И. Сташенко[2], Чэнь Янцзы[1]

[1]*Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина*

[2]*Институт машиноведения имени А.А. Благонравова РАН*

ЭЛЕКТРОННЫЕ И РЕШЁТОЧНЫЕ МЕХАНИЗМЫ ЭЛЕКТРОПЛАСТИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

Рассмотрены основные электронные и решёточные механизмы, методика эксперимента получения электропластического эффекта

Ключевые слова: электропластический эффект, пластическая деформация облучение, дислокации, виброперегрузки.

Введение. В 1963 г на линейном ускорителе электронов в Институте физической химии Российской академии наук О.А. Троицким был обнаружен и опубликован [1] электронно-пластический эффект, который заключался в действии ускоренных электронов на пластическую деформацию кристаллов цинка диаметром 1 мм и длиной 20 мм, находящихся в квазиупругом состоянии. Интенсивность облучения составляла 10^{11}эл/см^{2}с, энергия электронов – 1,4–1,5 МэВ. Электроны указанных энергий оказывают объёмное действие на деформируемый металл. Расстояние от выходного окна ускорителя до испытуемых образцов составляло 100–120 мм. Для деформации образцов использовалась дистанционно работающая испытательная машина типа Instron, установленная под выходное окно ускорителя. В образцах тонкой полоской туши вдоль их оси отмечалось