МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению расчетно-проектировочных работ
по курсу **«Сопротивление материалов»**
для студентов строительных специальностей

Брест 2024

УДК 539.3/8

Сопротивление материалов является одной из общепрофессиональных дисциплин при подготовке инженеров строительных специальностей.

Для закрепления теоретического материала и освоения практических методов инженерных расчетов элементов строительных конструкций студенты выполняют расчетно-проектировочные работы по основным разделам курса.

Настоящие задания и методические указания позволяют индивидуализировать и активизировать самостоятельную работу студентов при изучении дисциплины «Сопротивление материалов».

Составители: Веремейчик А. И., доцент, к. ф.-м. н.
Томашев И. Г., старший преподаватель
Черноиван Н. В., доцент, к. т. н.

Рецензенты: Шурин А. Б., заведующий кафедрой строительных конструкций учреждения образования «Брестский государственный технический университет» к. т. н., доцент

Самкевич В. А., начальник отдела обследования и проектирования строительных конструкций управления научно-исследовательских и проектно-обследовательских работ филиала «Научно-технический центр» научно-проектно-производственного республиканского унитарного предприятия «СТРОЙТЕХНОРМ», к. т. н.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Задания и методические указания к расчетно-проектировочным работам соответствуют учебным планам специальности 7-07-0732-01 Строительство зданий и сооружений и охватывают наиболее важные разделы курса сопротивления материалов, которые изучаются студентами в весеннем семестре на втором курсе. Методические указания позволяют студентам изучить и применить теоретический материал для решения задач на примерах расчета статически определимых балок, испытывающих прямой изгиб, а также внецентренно сжатой колонны и сжатой стойки на устойчивость.

УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ РАБОТ

Необходимые данные к выполнению расчетно-проектировочных работ следует принимать по схемам и таблицам согласно номеру варианта и номеру схемы.

Расчетно-проектировочная работа выполняется на стандартных листах формата А4 (210 × 297 мм) и оформляется в следующем порядке: **титульный лист, задание на расчетно-проектировочную работу, текст расчетов, выводы, перечень литературы**.

Чертежи и схемы следует выполнять на отдельных листах с соблюдением правил графики и масштабов. На эпюрах, чертежах необходимо указывать значение числовых величин, используемых в расчетах.

Значения полученных расчетных величин следует округлять до десятых или сотых с указанием размерностей и подчеркивать в конце каждого расчета.

1 ПРЯМОЙ ИЗГИБ

1.1 Общие понятия

Для большинства элементов строительных конструкций изгиб является едва ли не самым распространенным видом деформации. Прямой брус, испытывающий изгиб, называют балкой. Изгиб балок вызывают силы (нагрузки), которые перпендикулярны к продольной оси балки, или пары сил, лежащие в плоскостях, проходящих через эту ось. Если все нагрузки действуют в одной плоскости, называемой силовой, проходящей через геометрическую ось балки и одну из главных центральных осей инерции поперечного сечения, то такой изгиб называется прямым. Если в поперечных сечениях действуют только изгибающие моменты, то такой изгиб называют чистым прямым изгибом, а при одновременном действии поперечных сил и изгибающих моментов – прямой поперечный изгиб. При прямом изгибе продольная ось (геометрическое место центров тяжести поперечных сечений) из прямолинейной превращается в плавную кривую линию, называемую изогнутой осью балки или упругой линией балки. Упругая линия показывает вертикальные перемещения центров тяжести поперечных сечений под действием нагрузок.

1.2 Расчет балок на прочность

В общем случае расчет балок на прочность сводится к следующему.

а) Расчет по наибольшим нормальным напряжениям. Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \le R,$$

где M_{max} – наибольший изгибающий момент (устанавливается по эпюре M);

W_x – осевой момент сопротивления поперечного сечения балки при изгибе;

R – расчетное сопротивление материала балки.

По условию прочности можно решить три типа задач. Наибольший интерес представляет проектная задача, т. е. определение требуемого момента сопротивления поперечного сечения балки:

$$W_x = \frac{M_{max}}{R}.$$

б) Расчет по наибольшим касательным напряжениям. Используется условие прочности в виде

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_{x,max}^{отс}}{I_x b} \le R_s,$$

где Q_{max} – наибольшая поперечная сила (устанавливается по эпюре Q);

$S_{x,max}^{отс}$ – статический момент отсеченной части поперечного сечения относительно нейтральной оси x;

I_x – осевой момент инерции поперечного сечения балки относительно главной центральной оси x;

b – ширина поперечного сечения балки на уровне точек в которых определяется τ.

Обычно расчет по τ_{max} сводится к проверке прочности балок, а условия прочности составляют для опасных точек опасных поперечных сечений. Опасными сечениями являются те сечения, в которых действуют наибольшие поперечные силы (Q), а опасные точки – это точки поперечного сечения, расположенные на нейтральной оси x. В тех случаях, когда условие прочности не выполняется, поперечное сечение следует увеличить.

в) Расчет на прочность по главным напряжениям. Проверка прочности балок по главным напряжениям сводится к составлению условий прочности с использованием одной из теорий прочности. Для балок, выполненных из пластичных материалов, применяют третью или чаще всего четвертую теорию прочности, которая является наиболее экономичной. Так, условия прочности по третьей и четвертой теориям прочности имеют вид:

$$\sigma_{r_3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R;$$

$$\sigma_{r_4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R;$$

где $\sigma_{r_3}, \sigma_{r_4}$ – расчетные (или эквивалентные-$\sigma_{экв}^{III}, \sigma_{экв}^{IV}$) напряжения для проверяемых точек сечений;

σ, τ – нормальные и касательные напряжения для соответствующих точек.

По главным напряжениям следует проверять те сечения, в которых одновременно действуют наибольшие или близкие к ним поперечные силы Q и изгибающие моменты M. Опасными точками таких сечений обычно являются точки, расположенные в местах резкого изменения ширины поперечных сечений. Так, например, в двутаврах, швеллерах – это точки примыкания полок к стенкам, ширина (b) которых на порядок меньше ширины полок.

1.3 Расчет балок на жесткость.

При проверке балок на жесткость используется условие жесткости:

$$y_{max} \leq [f] \ ; \qquad [f] = l/k$$

где y_{max} – максимальный прогиб балки в пролете, консолей и т. д.;

[f] – допускаемая величина прогиба;

l – длина проверяемых участков балки;

k – коэффициент, величина которого задается нормами (k = 100; 200; 400; 500).

Для определения перемещений балок или при построении их эпюр целесообразнее использовать универсальный метод, т. е.

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 z + \sum M \frac{(z\text{-}a)^2}{2} + \sum F \frac{(z\text{-}b)^3}{6} + \sum q \frac{(z\text{-}c)^4}{24} - \sum q \frac{(z\text{-}d)^4}{24};$$

$$EI_x \theta = EI_x \theta_0 + \sum M \cdot (z\text{-}a) + \sum F \frac{(z\text{-}b)^2}{2} + \sum q \frac{(z\text{-}c)^3}{6} - \sum q \frac{(z\text{-}d)^3}{6};$$

где $y_0; \theta_0$ – начальные параметры, т. е. прогиб и угол поворота сечения, расположенного в начале координат, точка O. Начало координат чаще всего располагают на левом конце балки в центре тяжести поперечного сечения;

z – расстояние от начала координат (точка O) до сечения, для которого определяются y, θ;

a, b, c, d – расстояния от начала координат до сечений в которых приложены соответственно: M, F, q, –q.

1.4 Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит сущность методов расчета по допускаемым напряжениям, разрушаемым нагрузкам и по предельным состояниям?

2. Что понимают под пластическим шарниром и пластическим моментом сопротивления, как определяется его величина?

3. Какие сечения и точки в сечении считаются опасными при расчете балок на прочность:

а) по нормальным напряжениям;

б) по касательным напряжениям;

в) по главным напряжениям?

4. Какие поперечные сечения балок являются более рациональными?

5. Что понимают под упругой линией балки (или изогнутой осью балки)?

6. Какие известны методы определения перемещений балок?

7. Какой вид имеет приближенное дифференциальное уравнение упругой линии балки?

8. Какой вид имеет универсальное уравнение изогнутой оси балки?

9. Что понимают под начальными параметрами? Как определяется их величина?

10. Как осуществляется расчет балок на жесткость?

11. Какая существует связь эпюры прогибов и эпюры моментов?

12. Как определяются аналитически максимальные моменты и прогибы балок?

1.5 Задание по расчетно-проектировочной работе № 1

Расчет статически определимой двутавровой балки на прочность и жесткость

Дано: Двутавровая балка (принять по номеру схемы) загружена внешней нагрузкой (числовые данные принять с учетом номера варианта). Расчетное сопротивление материала балки **R = 230 МПа, R_s = 133 МПа**; модуль продольной упругости **E = 206 ГПа**; допускаемый прогиб **[f/*l*] = 1/500 и 1/100 для консолей**.

Требуется:

1) определить опорные реакции;

2) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (Q, M);

3) подобрать сечение составной балки и проверить прочность по касательным и главным напряжениям с использованием четвертой теории прочности;

4) определить главные напряжения для одной из опасных точек (точка 2);

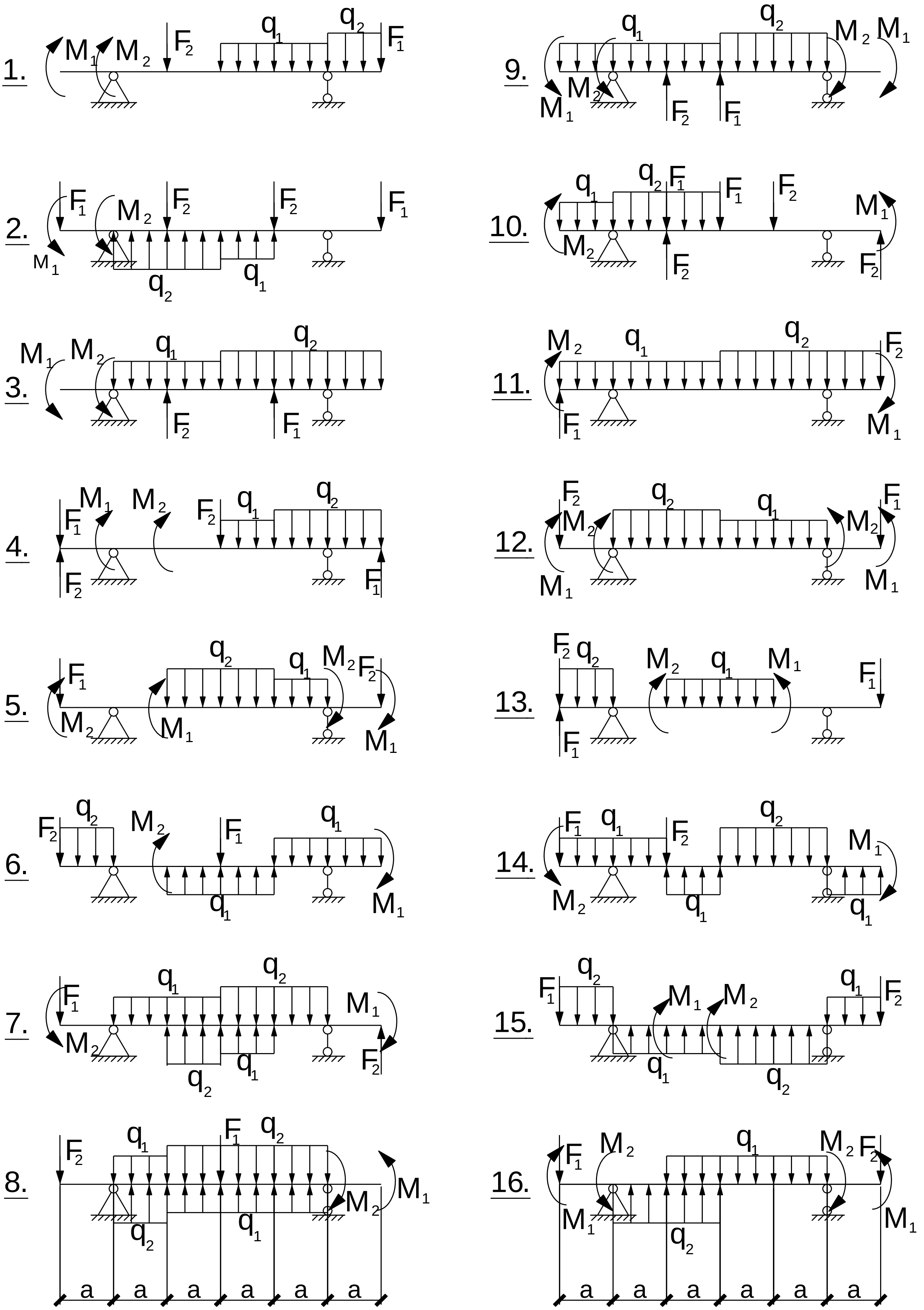
5) построить эпюры нормальных, касательных, главных и экстремальных касательных напряжений для опасного сечения по главным напряжениям;

6) построить эпюру прогибов балки, определив прогибы трех сечений в пролете и консолей;

7) проверить балку на жесткость;

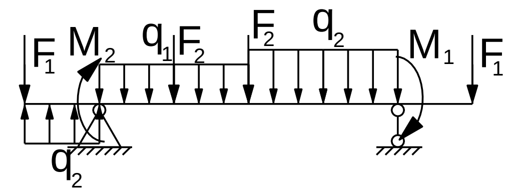
8) проверить правильность построения эпюр Q, M, y с помощью компьютера с приложением распечатки (компьютерную программу для проверки определяет преподаватель).

1.6 Схемы двутавровых балок с нагрузками

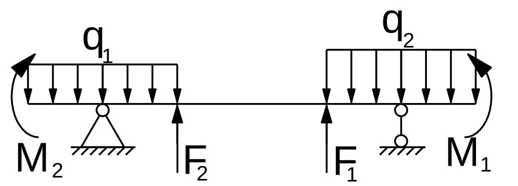


Продолжение схем балок

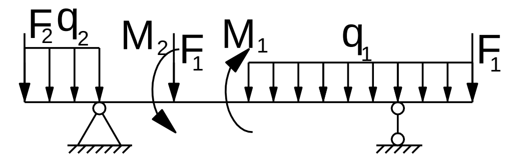
17.



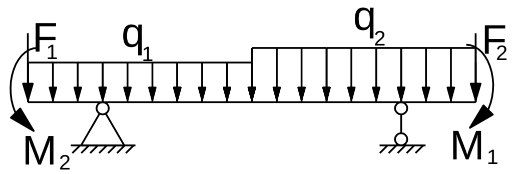
25.



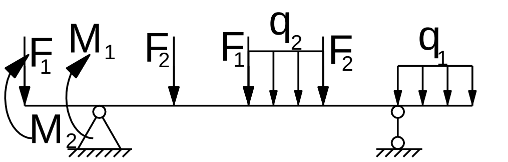
18.



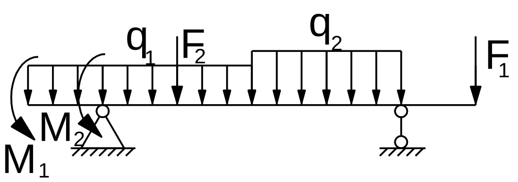
26.



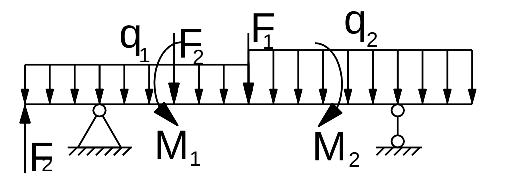
19.



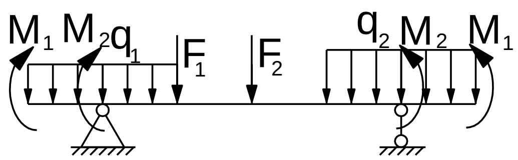
27.



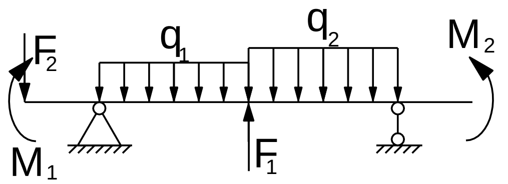
20.



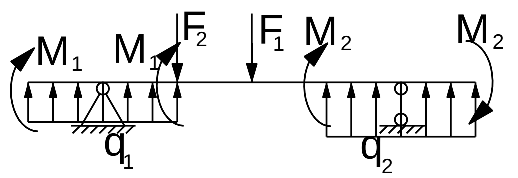
28.



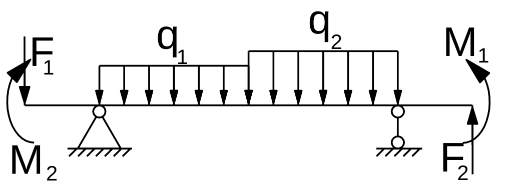
21.



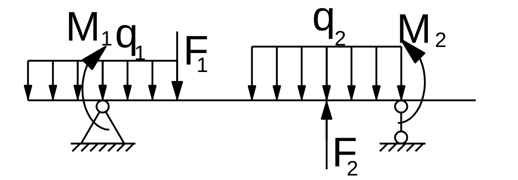
29.



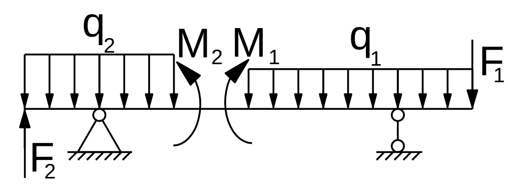
22.



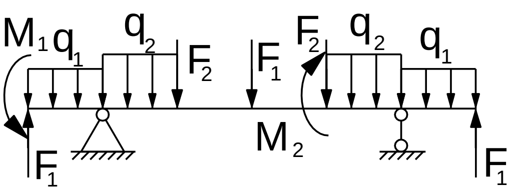
30.



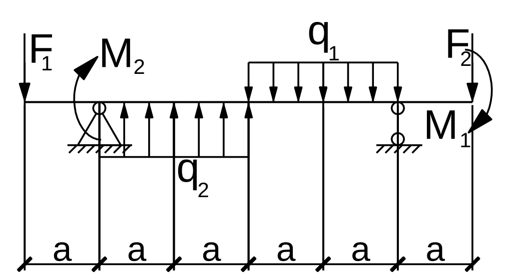
23.



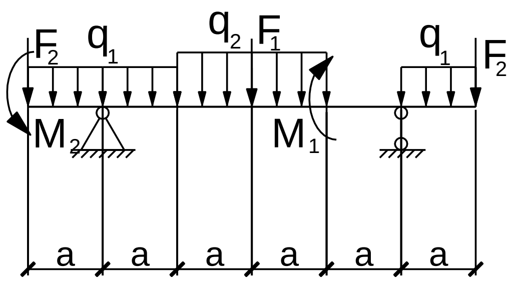
31.



24.



32.



1.7 Числовые значения нагрузок для балок

Номер варианта	Размер а, м	Нагрузка			Индекс нагрузки		
		q, кН/м	F, кН	М, кН·м	q	F	M
1	0,9	30	110	40	2	1,2	2
2	1,1	40	100	30	2	1	1
3	1,0	32	120	34	1	1	1,2
4	0,8	34	90	36	1,2	2	1
5	1,1	30	70	32	2	1	2
6	1,0	36	80	38	1	2	1,2
7	1,2	38	90	28	1,2	1	1
8	0,9	40	100	30	2	2	2
9	1,0	30	110	32	1,2	1	1,2
10	1,1	40	80	30	1	2	2
11	0,9	34	90	40	2	1	1
12	1,2	36	65	38	1,2	2	1
13	1,1	38	70	32	1	1	2
14	0,9	40	75	30	2	2	1
15	1,2	42	80	28	1	1	1,2
16	1,1	44	60	34	1,2	2	1
17	1,0	32	70	42	2	2	2
18	0,8	42	80	40	1,2	1	1,2
19	0,9	34	90	32	1	2	2
20	1,1	36	100	36	1	1	1
21	0,8	30	110	28	2	2	2
22	0,9	38	120	30	2	1	1
23	1,0	40	95	42	1	2	1,2
24	1,1	32	110	28	1,2	2	1
25	1,2	34	105	40	1	1	2
26	1,1	38	110	30	2	1	1,2
27	1,2	40	80	40	1	2	1
28	0,8	34	90	36	2	1	2
29	0,9	30	100	38	1	2	1
30	1,0	32	110	32	1,2	1	1,2
31	1,1	50	90	40	1	2	2
32	0,8	45	60	30	2	1	1
33	0,9	40	70	35	1,2	2	1
34	0,8	50	80	32	1	2	2
35	1,0	44	120	30	2	1	1
36	1,1	30	140	36	1,2	2	2
37	0,9	34	70	38	2	1	2
38	1,1	32	110	28	1	2	1
39	1,0	40	80	40	1,2	2	1
40	0,8	36	70	50	2	1	1,2

1.8 Пример расчета двутавровой балки на прочность и жесткость

Дано: Двутавровая балка (рисунок 1.1) загружена сосредоточенной силой F = 40 кН, моментом M = 50 кНм и распределенной нагрузкой q = 30 кН/м. Расчетное сопротивление материала балки R = 230 МПа, R_s = 133 МПа; модуль продольной упругости E = 206 ГПа; допускаемый прогиб [f/*l*] = 1/500 и 1/100 для консолей.

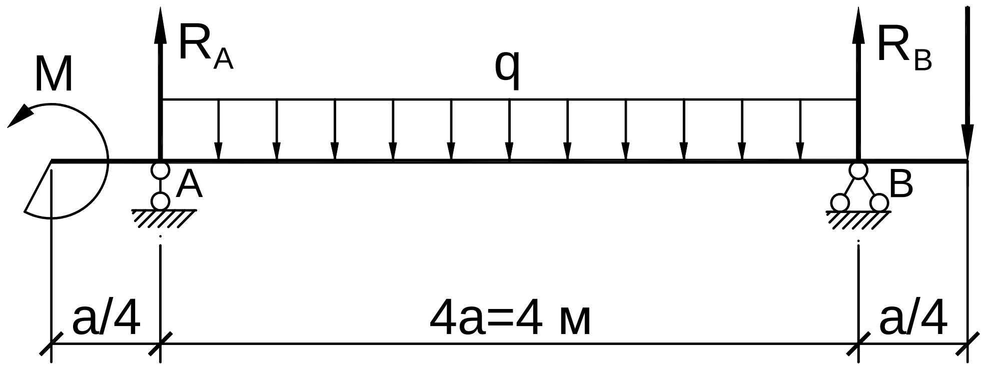


Рисунок 1.1 – Расчетная схема балки

Требуется: см. пп. 1–7.

Решение:

1. Определение опорных реакций.

Составим уравнения статического равновесия.

$\sum M_A = 0$; $4{,}25 \cdot F \cdot a + 8 \cdot q \cdot a^2 - M - 4 \cdot R_B \cdot a = 0$; $R_B = \dfrac{4.25 \cdot F \cdot a + 8 \cdot q \cdot a^2 - M}{4 \cdot a}$;

<u>R_B = 90 кН.</u>

$\sum M_B = 0$; $-M - 8q \cdot a^2 + F \cdot a + 4R_A \cdot a = 0$; $R_A = \dfrac{M + 8 \cdot q \cdot a^2 - F \cdot a}{4a}$;

<u>R_A = 70 кН.</u>

Проверка:

$\sum Y = 0$; $R_A + R_B - 4 \cdot q \cdot a - F = 0$;   70 + 90 – 120 – 40 = 160 – 160 = 0.

2. Построение эпюр Q, M.

Определяем значения Q, M в характерных сечениях балки.

$Q_0 = 0$; $Q_{A(ЛЕВ.)} = 0$; $Q_{A(ПР.)} = R_A = 70$ кН; $Q_C = F = 40$ кН;

$M_0 = -M = -50$ кНм; $M_A = -M = -50$ кН·м; $M_C = 0$; $M_B = -F \times a/4 = -40 \times 0{,}25 = -10$ кН·м.

Определим положение сечения (z_0) в котором Q = 0.

$$Q_{z_0} = R_A - q \times z_0 = 0; \quad z_0 = \frac{R_A}{q} = \frac{70}{30} = 2.33 \text{ м.}$$

Тогда величина максимального момента для сечения (z_0) будет равна:

$$M^z_{max} = -M + R_A \cdot z_0 - q\frac{z_0^2}{2} = -50 + 70 \cdot 2.33 - 30 \cdot \frac{2.33^2}{2} = 32 \text{ кНм.}$$

Из эпюры изгибающих моментов (рисунок 1.2) принимаем по модулю M_{max} = 50 кН·м = 5000 кН·см.

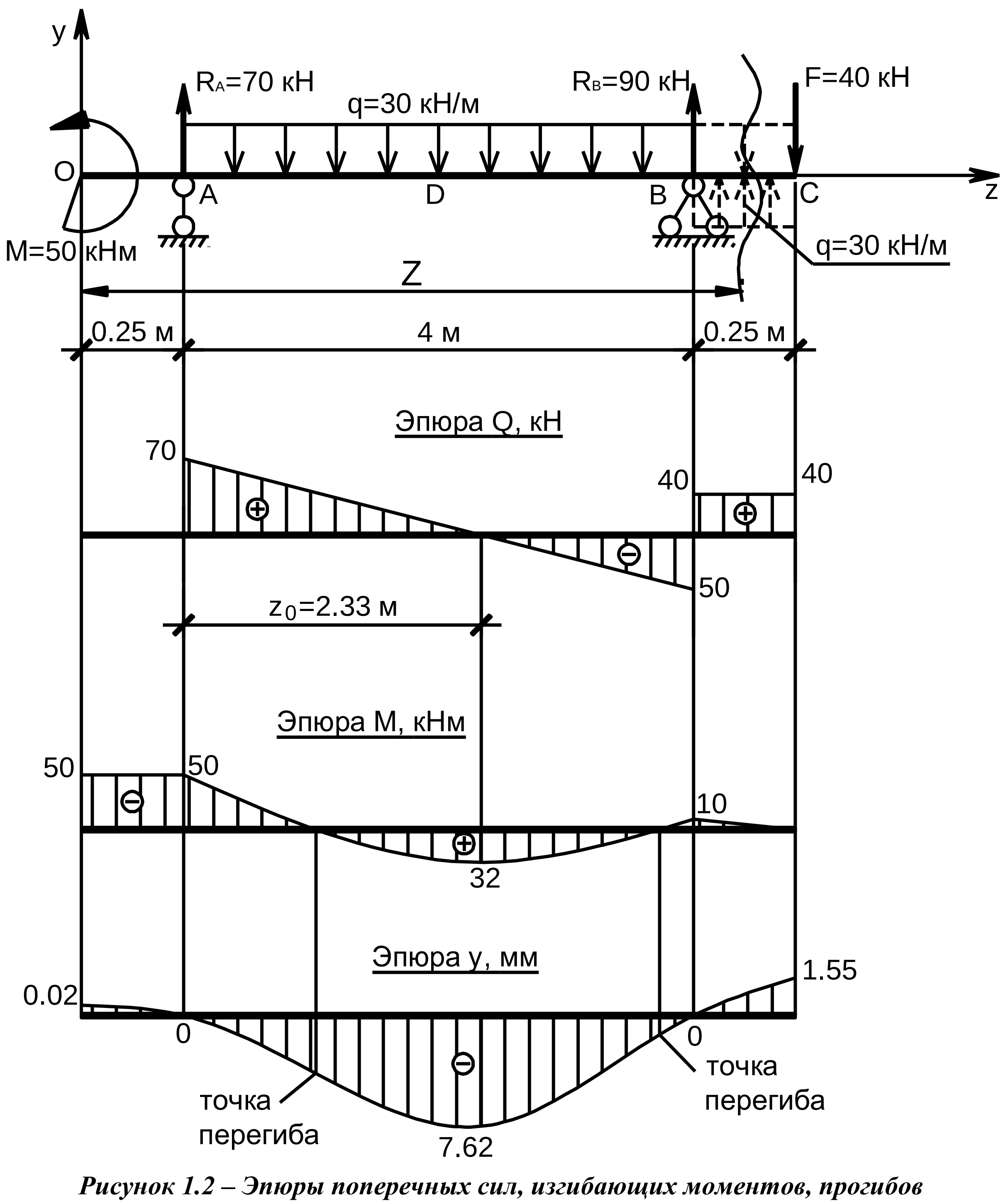


Рисунок 1.2 – Эпюры поперечных сил, изгибающих моментов, прогибов

3. Подбор сечения балки и проверка на прочность.

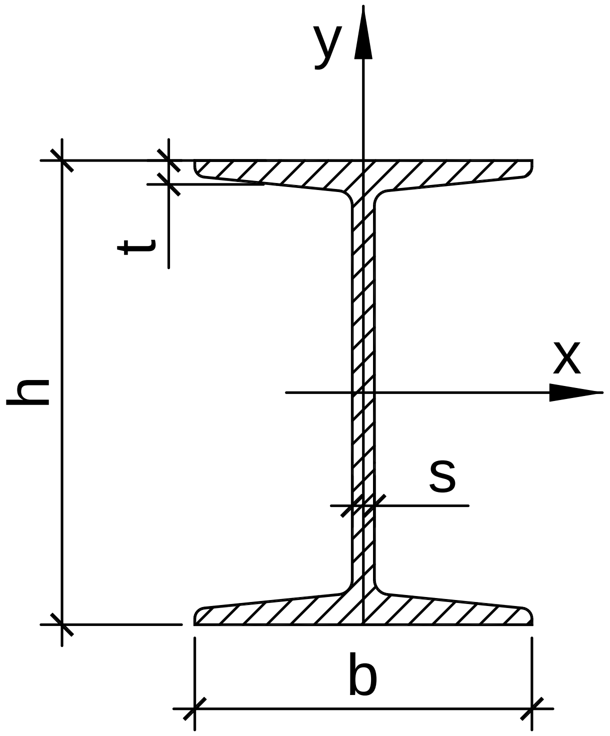
Сечение подбираем из условия прочности по нормальным напряжениям.

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \le R \cdot$$

Требуемый момент сопротивления равен

$$W_x^{тр} = \frac{M_{max}}{R} = \frac{5000}{23} = 217\,см^3.$$

По таблицам прокатных профилей предварительно выбираем двутавр № 22 (ГОСТ 8239-89).



Геометрические характеристики двутавра № 22 (ГОСТ 8239-89):

$A = 30{,}6$ см^2;
$h = 22$ см;
$b = 11$ см;
$t = 0{,}87$ см;
$s = 0{,}54$ см;
$I_x = 2550$ см^4;
$W_x = 232$ см^3;
$S^{отс}_{x,max} = 131$ см^3.

Рисунок 1.3 – Схема прокатного двутавра

Для дальнейших расчетов заменим прокатное сечение равным по габаритам сварным сечением (рисунок 1.4). При этом толщины полок и стенки первоначально округляем до ближайшего целого числа.

Примечание **–** *В данной расчетно-проектировочной работе вопросы непосредственного подбора составного сечения двутавров и проверки местной устойчивости полок и стенок балок* ***не рассматриваются****. Методики указанных выше подборов и проверок будут рассмотрены в курсе «Металлические конструкции».*

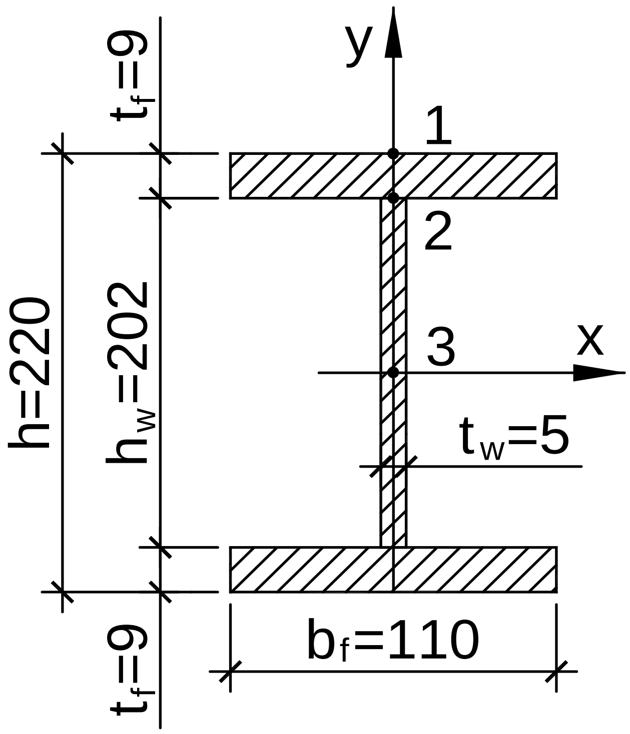


Рисунок 1.4 – Сечение принятого составного двутавра

Найдем геометрические характеристики принятого составного двутавра.

$I_x = t_w \times h_w^3/12 + 2 \times [b_f \times t_f^3/12 + b_f \times t_f \times (t_f/2 + h_w/2)^2] =$

$= 0{,}5 \times 20{,}2^3/12 + 2 \times [11 \times 0{,}9^3/12 + 11 \times 0{,}9 \times (0{,}9/2 + 20{,}2/2)^2] = 2549$ см^4;

$W_x = 2 \times I_x/h = 2 \times 2549/22 = 231{,}7$ см$^4 > W_x^{тр}$.

Проверка прочности балки по наибольшим нормальным напряжениям в точке 1 (см. рисунок 1.4) сечения А справа, где $M_{max} = 50$ кНм.

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{5000}{231.7} = 21.58\,{}^{кН}\!/_{см^2} = 215.8\ МПа < R = 230\ МПа.$$

Условие прочности по наибольшим нормальным напряжениям выполняется.

Запас прочности составляет |(215,8 – 230)/230| × 100 % = 6,17 % > 5 %.

Проверка прочности балки по главным напряжениям с использованием четвертой теории прочности.

Проверку производим для точек примыкания стенки двутавра к полкам (точка 2 см. рисунок 1.4), в сечении А справа, где $Q_A = 70$ кН; $M_A = 50$ кН·м.

Условие прочности по четвертой теории прочности имеет вид

$$\sigma_{r_4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le R.$$

Для точки 2 $\quad y_2 = \frac{h_w}{2} = \frac{20.2}{2} = 10.1 см;$

$$S_{x,2}^{отс.} = b_f \cdot t_f \cdot \frac{h_w + t_f}{2} = 11 \cdot 0.9 \cdot \frac{20.2 + 0.9}{2} = 104.4\ см^3;$$

$$\sigma_2 = \frac{M_A \cdot y_2}{I_x} = \frac{50 \cdot 10^2 \cdot 10.1}{2549} \cdot 10 = 198.1\ МПа;$$

$$\tau_2 = \frac{Q_A \cdot S_{x,2}^{отс.}}{I_x \cdot t_w} = \frac{70 \cdot 104.4}{2549 \cdot 0.5} \cdot 10 = 57.3\ МПа;$$

$$\sigma_{r_4} = \sqrt{198.1^2 + 3 \cdot 57.3^2} = 221.6\ МПа < R = 230\ МПа.$$

Условие прочности по главным напряжениям выполняется.

Запас прочности составляет |(221,6 – 230)/230| × 100 % = 3,65 % < 5 %, что допустимо.

Примечание *– Составное сечение считается подобранным верно в случае* ***минимального*** *запаса прочности* ***до 5 %. Перенапряжение (до 3 %) допускается по согласованию с преподавателем.***

В случае необходимости корректировки поперечного сечения ***рекомендуется*** *увеличивать (при перенапряжении) или уменьшать (при большом недонапряжении) высоту стенки (и высоту составного двутавра, соответственно) с градацией 5…10 мм, не изменяя при этом другие размеры.*

Проверка прочности балки по касательным напряжениям в точке 3 (см. рисунок 1.4) сечения А справа, где $Q_{max} = 70$ кН.

$$S_{x,3}^{отс.} = b_f \cdot t_f \cdot \frac{h_w + t_f}{2} + \frac{h_w}{2} \cdot t_w \cdot \frac{h_w}{4} =$$

$$= 11 \cdot 0.9 \cdot \frac{20.2 + 0.9}{2} + \frac{20.2}{2} \cdot 0.5 \cdot \frac{20.2}{4} = 129.9\,\text{см}^3;$$

$$\tau_{max} = \frac{70 \cdot 129.9}{2549 \cdot 0.5} = 7.13\,{}^{\text{кН}}\!/_{\text{см}^2} = 71.3\ \text{МПа};$$

$$\tau_{max} = 71.3\,\text{МПа} < R_S = 133\,\text{МПа}.$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

4. Определение главных напряжений для одной из опасных точек опасного сечения графическим путем.

Покажем напряженное состояние в точке 2 сечения А (справа). В соответствии с правилом знаков вектора растягивающего (положительного) нормального напряжения (σ = 198,1 МПа) направляем от граней куба, а вектора положительного касательного напряжения (τ = 57,3 МПа) по вертикальным граням куба направляем таким образом, чтобы они вращали куб по часовой стрелке. Согласно закону парности касательных напряжений дополняем горизонтальные грани куба векторами касательного напряжения. Относительно вершин куба вектора касательного напряжения должны либо сходиться, либо расходиться (см. рисунок 1.5).

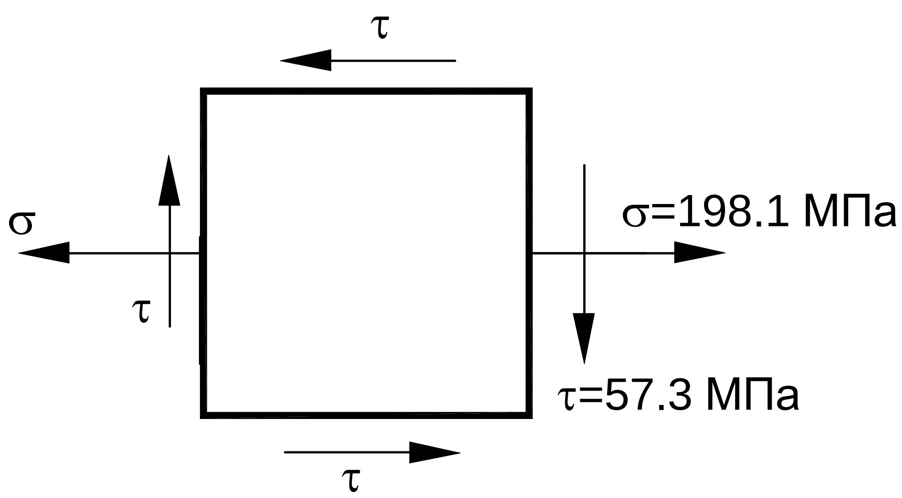


Рисунок 1.5 – Напряжения σ и τ в точке 2

В системе координат $\tau - \sigma$ (рисунок 1.6) откладываем в масштабе отрезки:

ОК = σ = 198,1 МПа; $KK_1 = \tau$ = 57,3 МПа, OK_2 = –57,3 МПа. Соединив точки K_1 и K_2 получим диаметр искомого круга напряжений с центром в точке С на котором описываем окружность. Пересечение круга с осью σ дает две точки А и В, которые характеризуют главные напряжения.

Так, отрезок ОВ в масштабе представляет σ_1 = 213,5 МПа, а ОА – σ_3 = = –15,4 МПа. Проведя прямые через точки K_1 и K_2 до их пересечения, находим полюс Р. Соединив точки Р и В, получим направление действия напряжения σ_1, а точки Р и А – направление действия σ_3.

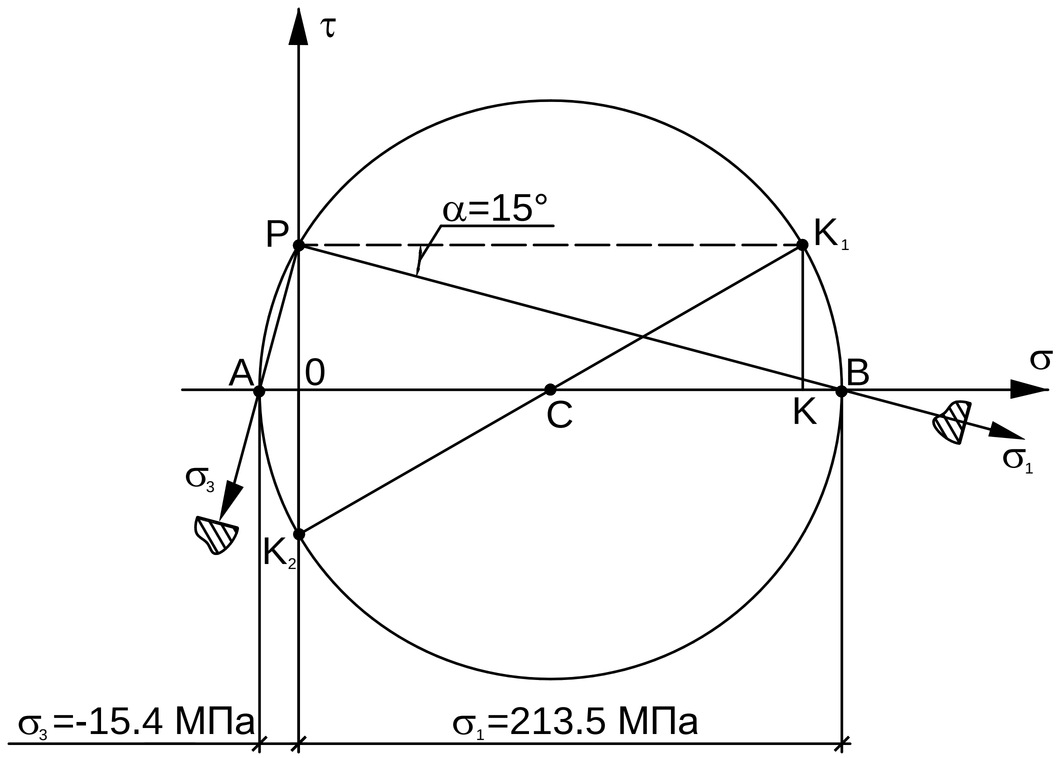


Рисунок 1.6 – Круг Мора

Переносим параллельно направление действия напряжений σ_1 и σ_3 на элемент, представленный на рисунке 1.5, и покажем положение главных площадок, которые перпендикулярны к соответствующим напряжениям σ_1, σ_3 (см. рисунок 1.7). Для контроля значения угла α можно воспользоваться аналитической формулой $\mathrm{tg}(2\alpha) = -2\tau/\sigma = -2 \times 57{,}3/198{,}1 = -0{,}578$, тогда $\alpha = -15{,}02^{\circ}$ (отрицательный угол откладывается по часовой стрелки).

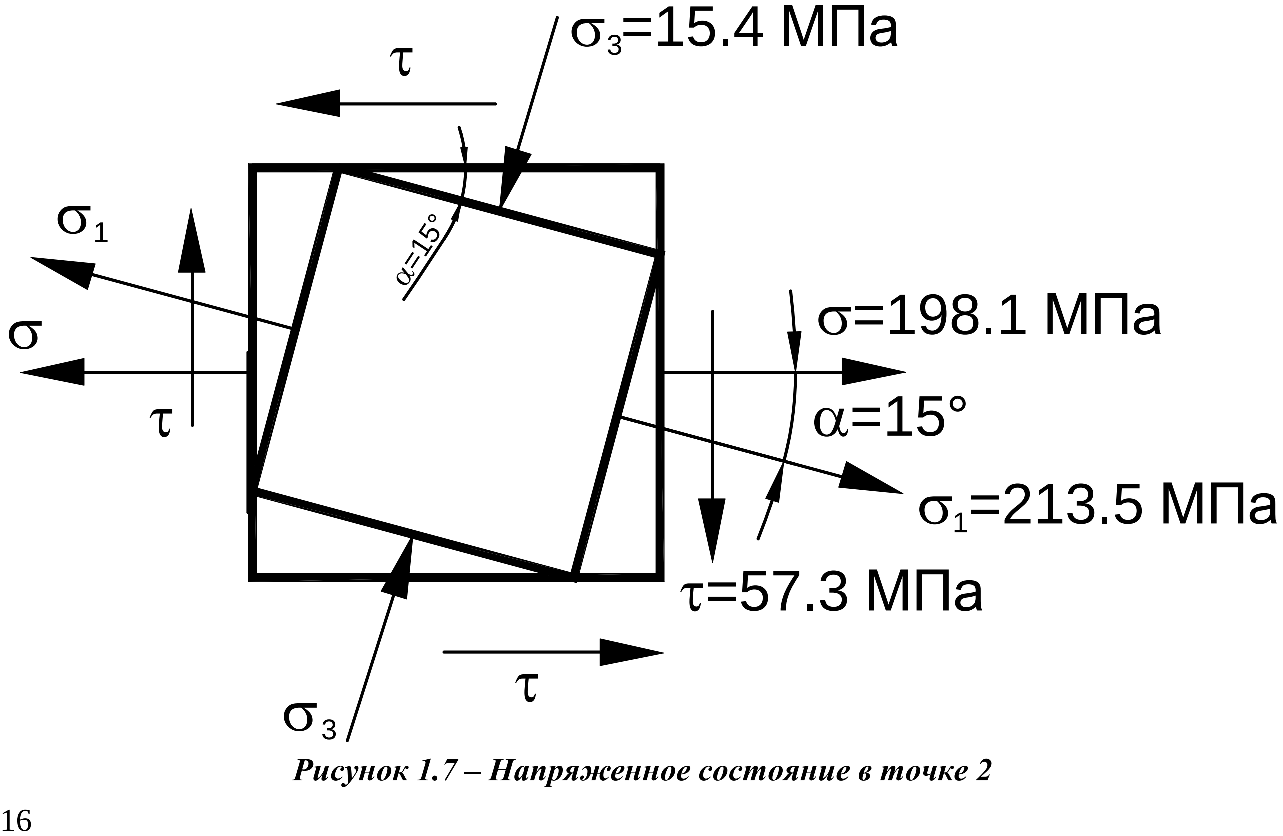


Рисунок 1.7 – Напряженное состояние в точке 2

5. Построение эпюр нормальных, касательных, главных и экстремальных касательных напряжений для опасного сечения по главным напряжениям.

При определении величины главных напряжений и экстремальных касательных напряжений воспользуемся теорией плоского напряженного состояния.

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_3\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right);\ \tau_{max,min} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \pm\ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

где σ и τ определяем по известным формулам для соответствующих точек сечения:

$$\sigma = -\frac{M_X}{I_X}\cdot y; \qquad \tau = \frac{Q\cdot S_X^{отс}}{I_X\cdot b}.$$

При этом Q, M и y необходимо подставить в формулы с учетом их знаков.

Точка 1: $\sigma = -\frac{M_X}{W_X} = \frac{50\cdot 10^2}{231.7}\cdot 10 = 215.8$ МПа;

$\tau = 0$ т.к. $S_x^{отс} = 0$; $\sigma_1 = 215.8$ МПа;

$\sigma_3 = 0$; $\tau_{max,min} = \pm\frac{\sigma_1}{2} = \pm 107.9$ МПа.

Точка 2: $\sigma = \frac{50\cdot 10^2}{2549}\cdot 10.1\cdot 10 = 198.1$ МПа;

$\tau^{пол} = \frac{70\cdot 104.4}{2549\cdot 11}\cdot 10 = 2.61$ МПа;

$\tau^{ст} = \frac{70\cdot 104.4}{2549\cdot 0.5}\cdot 10 = 57.3$ МПа;

Дальнейший ход вычислений сводим в таблицу 1 и по полученным результатам строим эпюры напряжений (рисунок 1.8).

Таблица 1 – Данные для построения эпюр напряжений

Точка сечения		**y, см**	$S_{X,2}^{отс.}$ **см³**	**σ МПа**	**τ МПа**	$\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$ **МПа**	**σ1 МПа**	**σ3 МПа**	$\tau_{max,min}$ **МПа**
1		11	0	215,8	0	215,8	215,8	0	±107,9
2	полка	10,10	104,4	198,1	2,61	198,2	198,15	–0,05	±99,1
	стенка	10,10	104,4	198,1	57,3	228,9	213,5	–15,4	±114,4
3		0	129,9	0	71,3	142,6	71,3	–71,3	±71,3
2`	полка	–10,10	104,4	–198,1	2,61	198,2	0,05	–198,15	±99,1
	стенка	–10,10	104,4	–198,1	57,3	228,9	15,4	–213,5	±114,4
1`		11	0	–215,8	0	215,8	0	–215,8	±107,9

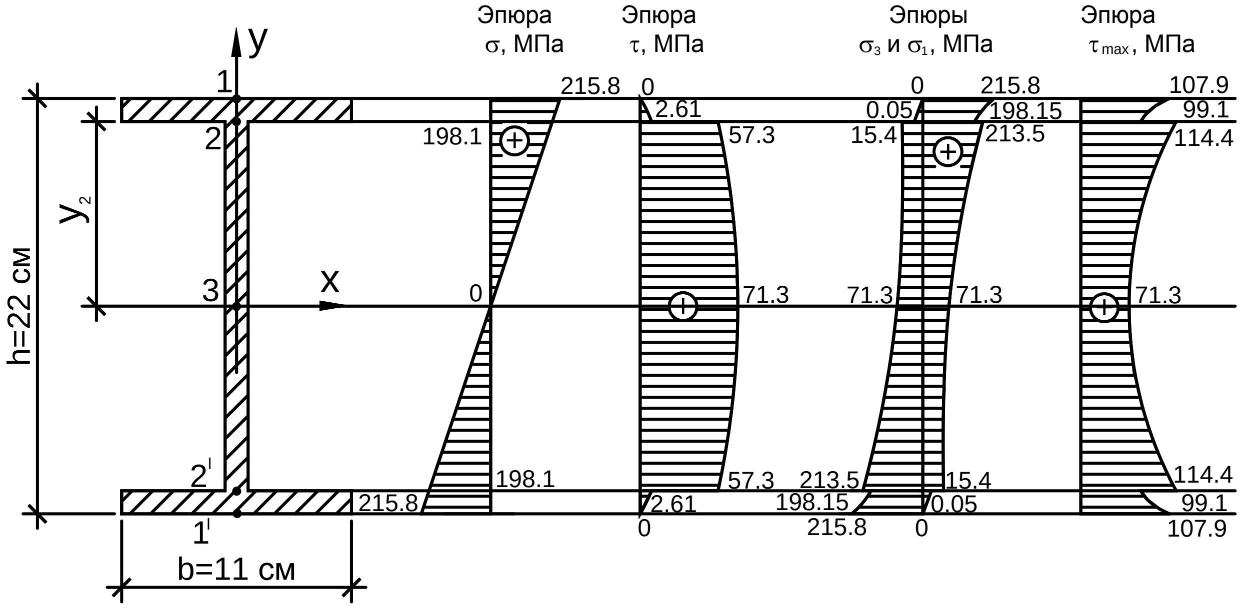


Рисунок 1.8 – Эпюры напряжений в сечении А (справа)

6. Построение эпюры прогибов балки.

Начало координат выбираем на левом конце балки (точка О). Продлим равномерно распределенную нагрузку q до правого конца балки и уравновесим ее компенсирующей распределенной нагрузкой обратного направления (рисунок 1.2).

Составим универсальное уравнение прогибов для последнего силового участка ВС.

$$E \cdot I_X \cdot Y_Z = E \cdot I_X \cdot Y_O + E \cdot I_X \cdot \theta_O \cdot z - \frac{M \cdot z^2}{2} + \frac{R_A \cdot (z - 0.25 \cdot a)^3}{6} - \frac{q \cdot (z - 0.25 \cdot a)^4}{24} +$$

$$+ \frac{R_B \cdot (z - 4.25 \cdot a)^3}{6} + \frac{q \cdot (z - 4.25 \cdot a)^4}{24},$$

где θ_0 и Y_O – начальные параметры (угол поворота и прогиб сечения в начале координат), которые определим из условий для опорных сечений:

при z = 0,25a, $Y_A = 0$

$$E \cdot I_X \cdot Y_A = E \cdot I_X \cdot Y_O + E \cdot I_X \cdot \theta_O \cdot 0.25 \cdot a - \frac{M \cdot (0.25 \cdot a)^2}{2} = 0;$$

при z = 4,25a, $Y_B = 0$,

$$E \cdot I_X \cdot Y_B = E \cdot I_X \cdot Y_O + E \cdot I_X \cdot \theta_O \cdot 4.25 \cdot a - \frac{M \cdot (4.25 \cdot a)^2}{2} + \frac{R_A \cdot (4 \cdot a)^3}{6} - \frac{q \cdot (4 \cdot a)^4}{24} = 0.$$

Решаем систему уравнения $Y_A = 0$; $Y_B = 0$.

$$\begin{cases} E \cdot I_X \cdot Y_O + 0.25 \cdot E \cdot I_X \cdot \theta_O - \dfrac{50 \cdot 0.25^2}{2} = 0; \\ E \cdot I_X \cdot Y_O + 4.25 \cdot E \cdot I_X \cdot \theta_O - \dfrac{50 \cdot 4.25^2}{2} + \dfrac{70 \cdot 4^3}{6} - \dfrac{30 \cdot 4^4}{24} = 0. \end{cases}$$

После упрощения получим

$$\begin{cases} E \cdot I_X \cdot Y_O + 0.25 \cdot E \cdot I_X \cdot \theta_O = 1.5625 \text{ кНм}^3; \\ E \cdot I_X \cdot Y_O + 4.25 \cdot E \cdot I_X \cdot \theta_O = 24.896 \text{ кНм}^3. \end{cases}$$

Тогда

$E \cdot I_X \cdot \theta_O$ = 5,833 кНм^2; $E \cdot I_X \cdot Y_O$ = 0,1041 кНм^3.

Проверка:

$$E \cdot I_X \cdot Y_A = E \cdot I_X \cdot Y_O + E \cdot I_X \cdot \theta_O \cdot 0.25a - \frac{M \cdot (0.25 \cdot a)^2}{2} = 1.5625 - 1.5625 = 0;$$

$$E \cdot I_X \cdot Y_B = E \cdot I_X \cdot Y_O + E \cdot I_X \cdot \theta_O \cdot 4.25 \cdot a - \frac{M \cdot (4.25 \cdot a)^2}{2} + \frac{R_A \cdot (4 \cdot a)^3}{6} - \frac{q \cdot (4 \cdot a)^4}{24} =$$

$$= 771.5631 - 771.5625 \approx 0.$$

Для построения эпюры прогибов балки, в нашем случае, вычислим прогибы только следующих сечений.

В сечении О (z = 0)

$E \cdot I_X \cdot Y_O$ = 0,1041 кНм^3;

$$E \cdot I_X = 206 \cdot 10^2 \cdot 2549 = 52509400 \text{ кН} \times \text{см}^2 \approx 5251 \text{ кН} \times \text{м}^2.$$

$$Y_O = \frac{0.1041}{5251} \cdot 10^3 = 0.02 \text{ мм.}$$

В сечении А (Z = a/4)

$Y_A = 0$

В сечении D, (середина пролета, Z = 2,25a)

$$E \cdot I_x \cdot Y_D = E \cdot I_x \cdot Y_0 + E \cdot I_x \cdot \theta_0 \cdot 2.25 \cdot a - \frac{M \cdot (2.25 \cdot a)^2}{2} + \frac{R_A \cdot (2 \cdot a)^3}{6} - \frac{q \cdot (2 \cdot a)^4}{24} =$$

$$= -40.0 \text{ кНм}^3; \; Y_D = -\frac{40.0}{5251} \cdot 10^3 = -7.62 \text{ мм.}$$

В сечении В (Z = 4,25a)

$Y_B = 0$

В сечении С (Z = 4,5a)

$$E \cdot I_x \cdot Y_C = E \cdot I_x \cdot Y_0 + E \cdot I_x \cdot \theta_0 \cdot 4.5 \cdot a - \frac{M \cdot (4.5 \cdot a)^2}{2} + \frac{R_A \cdot (4.25 \cdot a)^3}{6} - \frac{q \cdot (4.25 \cdot a)^4}{24} +$$

$$+ \frac{R_B \cdot (0.25 \cdot a)^3}{6} + \frac{q \cdot (0.25 \cdot a)^4}{24} = 0.1041 + 5.833 \cdot 4.5 - \frac{50 \cdot 4.5^2}{2} + \frac{70 \cdot 4.25^3}{6} -$$

$$- \frac{30 \cdot 4.25^4}{24} + \frac{90 \cdot 0.25^3}{6} + \frac{30 \cdot 0.25^4}{24} = 8.12 \text{ кНм}^3; \; Y_C = \frac{8.12}{5251} \cdot 10^3 = 1.55 \text{ мм.}$$

По данным расчета построена эпюра прогибов балки (см. рисунок 1.2).

Примечание – *В расчетно-проектировочной работе необходимо еще определить прогибы двух сечений в пролете балки,* ***т. е. при z = 2a; z = 4a****, для более точного построения эпюры прогибов.*

7. Проверка балки на жесткость.

В пролете: $l_{пр}$ = 4·а = 4 м = 4000 мм;

$$\frac{Y_D}{l_{пр}} = \frac{7.62}{4000} = \frac{1}{525} < \left[\frac{f}{l_{пр}}\right] = \frac{1}{500}.$$

На правой консоли: $l_{кон}$ = 0,25·а = 0,25 м = 250 мм;

$$\frac{Y_C}{l_{кон}} = \frac{1.55}{250} = \frac{1}{161} < \left[\frac{f}{l_{кон}}\right] = \frac{1}{100}.$$

Условие жесткости выполняется. Окончательно принимаем составной двутавр, показанный на рисунке 1.4.

Примечание *– В случае невыполнения условия жесткости необходимо корректировать (увеличивать) сечение составного двутавра и* ***пунктиром*** *показать на построенной эпюре прогибов ее окончательный вариант.*

8. Определение коэффициентов запаса по прочности и жесткости.

Запасы по напряжениям:

– по нормальным напряжениям $K_\sigma = \frac{R}{\sigma_{max}} = \frac{230}{215.8} = 1.066;$

– по касательным напряжениям $K_\tau = \frac{R_S}{\tau_{max}} = \frac{133}{71.3} = 1.865;$

– по главным напряжениям $K_{\sigma_{\tau_4}} = \frac{R}{\sigma_{\tau_4}} = \frac{230}{221.6} = 1.038.$

Запасы по жесткости:

$$K_{Y_D} = \frac{[Y_D]}{Y_D} = \frac{8.00}{7.62} = 1.050, \text{ где } [Y_D] = \frac{l_{пр}}{500} = \frac{4000}{500} = 8.0 \text{ мм};$$

$$K_{Y_C} = \frac{[Y_C]}{Y_C} = \frac{2.50}{1.55} = 1.613, \text{ где } [Y_C] = \frac{l_{кон}}{100} = \frac{250}{100} = 2.50 \text{ мм}.$$

Площадь рассмотренного составного двутавра составляет $A = t_w \times h_w + 2 \times b_f \times t_f =$ $= 0,5 \times 20,2 + 2 \times (11 \times 0,9) = 29,9$ см^2, что на 2,2 % меньше исходного прокатного двутавра.

2 СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

2.1 Общие сведения

В реальных конструкциях часто встречаются случаи, когда в поперечных сечениях действуют два или более внутренних силовых фактора, вызывающих два или более простых вида деформации. В таких случаях элементы конструкций испытывают сложное сопротивление (сложную деформацию). Имеют место следующие виды сложного сопротивления: косой изгиб; внецентренное сжатие (растяжение); кручение с изгибом и др.

2.2 Косой изгиб

Косой изгиб возникает тогда, когда силовая плоскость, проходящая через продольную ось бруса, не совпадает ни с одной из главных осей инерции поперечного сечения, или одновременное сочетание двух прямых изгибов, действующих во взаимно перпендикулярных плоскостях.

При поперечном косом изгибе в поперечных сечениях балок действуют четыре внутренних силовых фактора: поперечные силы Q_x, Q_y и изгибающие моменты M_x, M_y. Однако, как правило, влияние поперечных сил незначительно, и в расчетах ими пренебрегают. При определении напряжений и перемещений при косом изгибе используют принцип независимости действия сил. Так, суммарные нормальные напряжения определяют по следующей формуле:

$$\boldsymbol{\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \pm\left(\frac{M_x}{I_x}\right)\cdot y \pm \left(\frac{M_y}{I_y}\right)\cdot x},$$

где M_x, M_y – изгибающие моменты; x, y – координаты точек, в которых определяется σ; I_x, I_y – главные центральные моменты инерции поперечного сечения. Знаки слагаемых напряжений целесообразнее устанавливать исходя из характера деформирования продольных слоев балки.

Расчет на прочность при косом изгибе сводится к составлению условия прочности для опасного сечения балки

$$\boldsymbol{\sigma_{\substack{max\\min}} = \pm\frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \le R},$$

где W_x, W_y – осевые моменты сопротивления поперечного сечения при изгибе;

R – расчетное сопротивление материала балки на растяжение и сжатие.

По условию прочности, как обычно, можно решить три типа задач. Наибольший интерес представляет проектная задача, т. к. в условие прочности входят две неизвестные величины: W_x, W_y. Поэтому при решении проектной задачи предварительно задаются соотношением $k = W_x/W_y$. Тогда условие прочности примет вид

$$\boldsymbol{\sigma_{max} = \frac{1}{W_x}\left(M_x + kM_y\right) \le R},$$

отсюда

$$\boldsymbol{W_x = \frac{M_x + kM_y}{R};\ W_y = \frac{W_x}{k}}.$$

При этом коэффициент соотношения осевых моментов сопротивления поперечного сечения зависит от формы сечения. Так, например, для прямоугольного сечения $k = h/b$, для двутавровых $k = 8 \div 10$; швеллеров $k = 8 \div 9$ и т. д.

2.3 Внецентренное сжатие

Внецентренное сжатие (растяжение) возникает в том случае, когда брус нагружен в продольном направлении силой, приложенной внецентренно, т. е.

на некотором расстоянии от центра тяжести поперечного сечения. Деформация внецентренного сжатия является более характерной для элементов строительных конструкций.

В любом поперечном сечении бруса при внецентренном сжатии возникают три внутренних силовых фактора:

$$\mathbf{N = F; \quad M_x = F \cdot y_F; \quad M_y = F \cdot x_F,}$$

где x_F, y_F – координаты точки приложения внешней силы.

Следовательно, общий случай внецентренного сжатия сводится к центральному сжатию (N) и чистому косому изгибу (M_x, M_y), который, как описано в пункте 2.2, можно представить в виде двух чистых прямых изгибов, действующих во взаимно перпендикулярных плоскостях. С учетом принципа независимости действия сил нормальные напряжения в поперечном сечении бруса равны алгебраической сумме напряжений от каждого внутреннего силового фактора:

$$\boldsymbol{\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{N}{A} + \frac{M_x \cdot y}{I_x} + \frac{M_y \cdot x}{I_y}}.$$

Данная формула позволяет определить напряжения в любой точке поперечного сечения, характеризуемой координатами: x, y. Путем преобразования полученную формулу для определения напряжений можно представить в виде

$$\boldsymbol{\sigma = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{x_F \cdot x}{{i_y}^2} + \frac{y_F \cdot y}{{i_x}^2}\right)},$$

где F – внешняя нагрузка (при внецентренном сжатии нагрузка будет со знаком “–”, а при внецентренном растяжении – “+”); i_x^2, i_y^2 – квадраты главных радиусов инерции поперечного сечения; x, y – координаты точки в которой определяется напряжение; x_F, y_F – координаты точки приложения внешней нагрузки. При этом координаты точек: x, y, x_F, y_F следует учитывать с их знаками.

Расчет на прочность при внецентренном сжатии сводится к составлению условия прочности для опасных точек поперечного сечения. Положения опасных точек определяются при помощи нулевой линии, т. е. линии в точках которой нормальные напряжения (σ) равны нулю. Для определения положения нулевой линии вычисляют отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат:

$$\mathbf{a_x = -\frac{{i_y}^2}{x_F}; \qquad a_y = -\frac{{i_x}^2}{y_F}.}$$

По полученным отрезкам изображают в сечении нулевую линию, а проведя две касательные к сечению параллельно нулевой линии, находят две наиболее напряженные (наиболее удаленные) точки поперечного сечения в растянутой и сжатой зонах, условия прочности для которых получат вид:

$$\sigma_{max} = \frac{|F|}{A}\left(1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y{}^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x{}^2}\right) \leq R_p;$$

$$\sigma_{min} = \frac{|F|}{A}\left(1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y{}^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x{}^2}\right) \leq R_c\,,$$

где x, y – координаты опасных точек сечения; R_p, R_c – расчетные сопротивления материала бруса на растяжение и сжатие соответственно. При решении проектной задачи (подбор сечений) в общем случае приходится пренебрегать либо деформацией центрального сжатия, либо деформацией чистого косого изгиба из-за трудностей решения кубического уравнения. При этом полученные результаты округляют в большую сторону и окончательно проверяют по общему условию прочности. Но в тех случаях, когда можно выразить размеры поперечного сечения через один неизвестный параметр (например, “b”), решение задачи несколько упрощается.

2.4 Вопросы для самопроверки

1. Что понимают под внецентренным сжатием (растяжением)?
2. Какие простые деформации возникают при внецентренном растяжении?
3. Что понимают под нулевой линией? Какие свойства нулевой линии?
4. Какие используют способы определения положения нулевой линии при внецентренном сжатии?
5. Как устанавливают опасные точки в сечениях при внецентренном сжатии?
6. Как производится расчет на прочность и подбор сечений?
7. Что понимают под ядром сечения. Способы его построения?
8. В каких случаях строят ядро сечения?

2.5 Задание по расчетно-проектировочной работе № 2

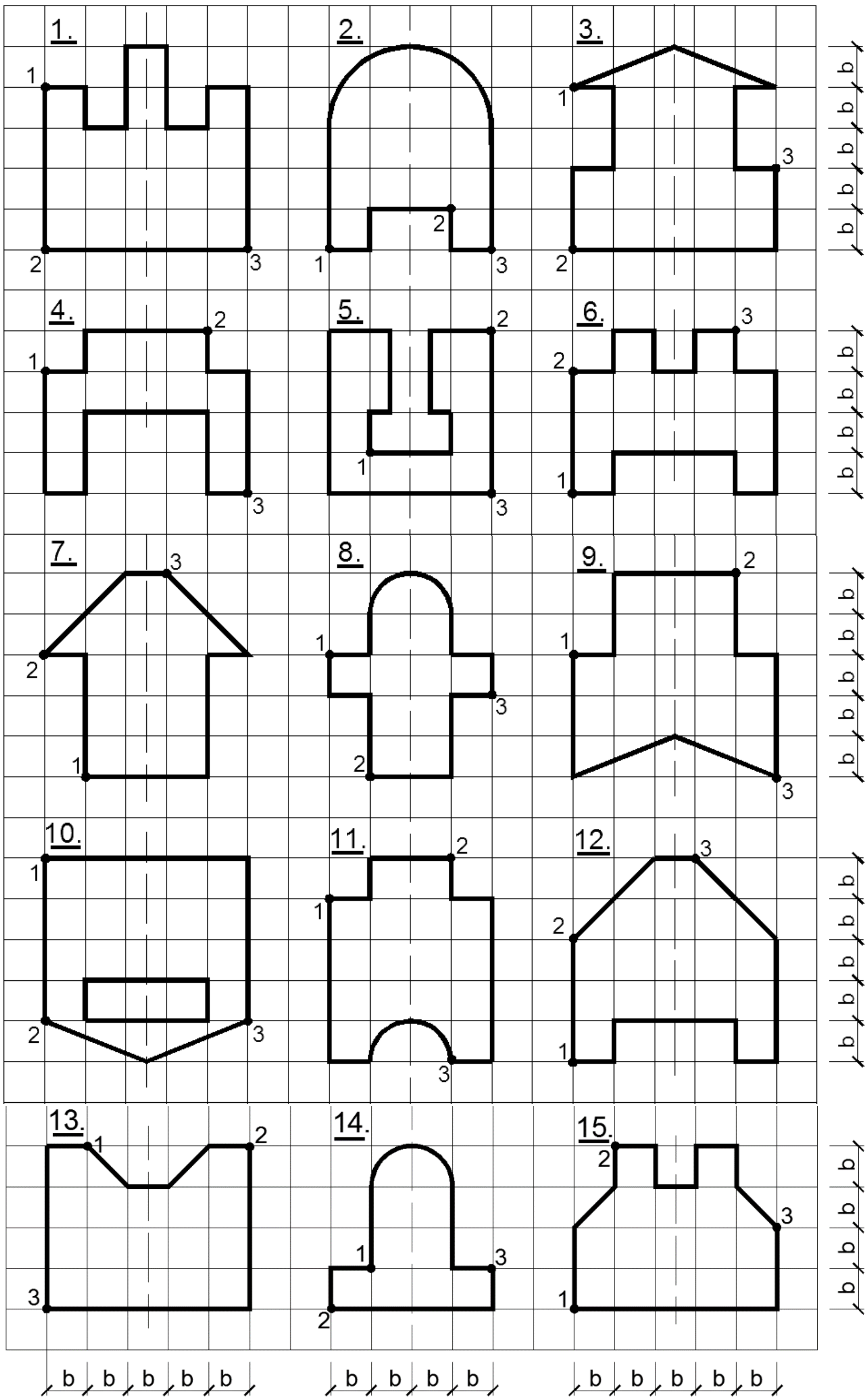
Расчет внецентренно сжатой колонны

Дано: колонна (принять по номеру схемы) сложной формы поперечного сечения подвергнута внецентренному сжатию внешней нагрузкой F (величину нагрузки и точку нагружения принять по номеру варианта). Расчетное сопротивление материала колонны на сжатие **R_c=10 МПа**, на растяжение **R_p=1 МПа.**

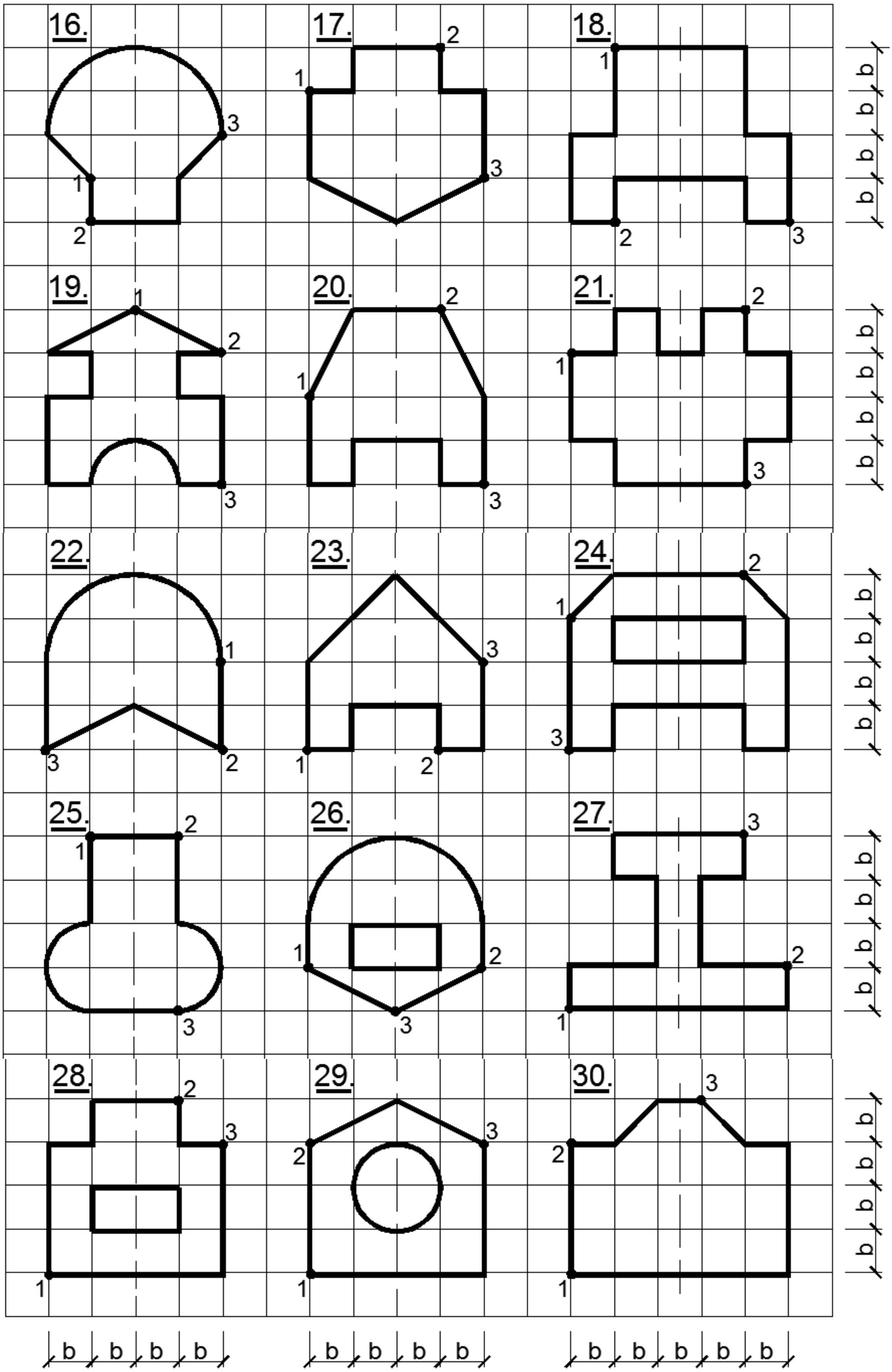
Требуется:

1) определить геометрические характеристики поперечного сечения колонны;
2) определить положение нулевой линии и опасных точек сечения;
3) вычислить наибольшие сжимающее и растягивающее напряжения;
4) подобрать размеры поперечного сечения из расчета на прочность;
5) построить эпюры нормальных напряжений;
6) построить и исследовать ядро сечения;
7) проверить правильность построения ядра сечения с помощью компьютера (компьютерную программу для проверки определяет преподаватель).

2.6 Схемы поперечных сечений колонны с точками приложения F



Продолжение схем поперечных сечений



2.7 Числовые значения нагрузок и точки их приложения

Номер варианта	F, кН	Точка приложения силы	Номер варианта	F, кН	Точка приложения силы
1	–450	1	**26**	–710	2
2	–480	2	**27**	–750	3
3	–490	3	**28**	–775	1
4	–460	1	**29**	–740	2
5	–440	2	**30**	–700	3
6	–430	3	**31**	–310	1
7	–420	1	**32**	–320	2
8	–470	2	**33**	–330	3
9	–410	3	**34**	–340	1
10	–550	1	**35**	–350	2
11	–530	2	**36**	–360	3
12	–540	3	**37**	–370	1
13	–505	1	**38**	–380	2
14	–515	2	**39**	–390	3
15	–525	3	**40**	–400	1
16	–535	1	**41**	–200	2
17	–640	2	**42**	–220	3
18	–620	3	**43**	–230	1
19	–610	1	**44**	–240	2
20	–630	2	**45**	–250	3
21	–660	3	**46**	–260	1
22	–680	1	**47**	–270	2
23	–655	2	**48**	–280	3
24	–745	3	**49**	–290	1
25	–720	1	**50**	–300	2

2.8 Пример расчета внецентренно сжатой колонны

Дано: Колонна сложной формы поперечного сечения, подвергнута внецентренному сжатию внешней нагрузкой **F = –250 кН**. Расчетное сопротивление материала колонны на сжатие $\mathbf{R_c}$ **= 10 МПа**, на растяжение $\mathbf{R_p}$ **= 1 МПа**.

Требуется: см. пп.1–6.

Решение:

1. Определение геометрических характеристик поперечного сечения колонны

Покажем поперечное сечение колонны в масштабе и выберем вспомогательные оси координат x, y. Разбиваем сечение на два простых и определим координаты центров тяжести простых сечений, их площади.

1. Для первого сечения (полукруг):

$$\mathbf{x_1 = 3b + \frac{4b}{3\pi} = 3{,}43b;\quad y_1 = 0;\qquad A_1 = 1{,}57b^2.}$$

2. Для второго сечения (прямоугольник):

$$\mathbf{x_2 = 1,5b;} \qquad \mathbf{y_2 = 0;} \qquad\qquad \mathbf{A_2 = 6b^2.}$$

Ось x совпадает с осью симметрии сечения, следовательно, она является одной из главных центральных осей инерции.

Определим статический момент сечения относительно оси y

$$\mathbf{S_y = {S_y}^I + {S_y}^{II} = A_1x_1 + A_2x_2 = 1,57b^2 \cdot 3,43b + 6b^2 \cdot 1,5b = 14,38b^3,}$$

общая площадь

$$\mathbf{A = A_1 + A_2 = 1,57b^2 + 6b^2 = 7,57b^2.}$$

Определим координату центра тяжести сечения x_c.

$$\mathbf{x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{14,38b^3}{7,57b^2} = 1,9b.}$$

Изобразим на схеме сечения главные центральные оси x_c, y_c и определим координаты центров тяжести простых сечений относительно главных центральных осей.

$$\mathbf{x_{c_1} = x_1 - x_c = 1,53b;\ y_{c_1} = 0;}$$

$$\mathbf{x_{c_2} = x_2 - x_c = -0,4b;\ y_{c_2} = 0.}$$

Вычислим главные центральные моменты инерции всего сечения.

$$\mathbf{I_{x_c} = {I_{x_c}}^I + {I_{x_c}}^{II} = \frac{\pi(2b)^4}{128} + \frac{3b(2b)^3}{12} = 2,39b^4;}$$

$$\mathbf{I_{y_c} = {I_{y_c}}^I + {I_{y_c}}^{II} = I_{y_1} + {x_{c_1}}^2 \cdot A_1 + {I_{y_2}}^{II} + {x_{c_2}}^2 \cdot A_2 =}$$

$$\mathbf{= 0,11b^4 + (1,53b)^2 \cdot 1,57b^2 + \frac{3b(2b)^3}{12} + (-0,4b)^2 \cdot 6b^2 = 9,2b^4.}$$

Определим квадраты радиусов инерции.

$$\mathbf{{i_x}^2 = \frac{I_{x_c}}{A} = \frac{2,39b^4}{7,57b^2} = 0.32b^2;} \qquad \mathbf{{i_y}^2 = \frac{I_{y_c}}{A} = \frac{9,2b^4}{7,57b^2} = 1,22b^2.}$$

2. Определение положения нулевой линии и опасных точек сечения.

Координаты точки приложения внешней нагрузки: $\mathbf{x_F = -1,9b;\ y_F = b}$.

Вычислим отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат.

$$\mathbf{a_x = -\frac{{i_y}^2}{x_F} = \frac{1,22b^2}{1,90b} = 0,64b;} \qquad \mathbf{a_y = -\frac{{i_x}^2}{y_F} = \frac{0,32b^2}{b} = -0,32b.}$$

Нулевая линия показана на рисунке 2.1.

Найдем положение опасных точек. Проведя касательные к сечению параллельно нулевой линии, устанавливаем, что наиболее напряженные точки сечения, это точки F и D, которые наиболее удалены от нулевой линии. В точке F действует наибольшее сжимающее напряжение, а в точке D – наибольшее растягивающее.

3. Вычисление наибольших напряжений.

Напряжения в опасных точках определим по следующим формулам:

$$\boldsymbol{\sigma_F = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{y_F \cdot y_F}{{i_x}^2} + \frac{x_F \cdot x_F}{{i_y}^2}\right);\qquad \sigma_D = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{y_F \cdot y_D}{{i_x}^2} + \frac{x_F \cdot x_D}{{i_y}^2}\right),}$$

где $\mathbf{x_F = -1,9b}$; $\mathbf{y_F = b}$; $\mathbf{x_D = (3b - x_c) + b \cdot \cos(\alpha)}$; $\mathbf{y_D = -b \cdot \sin(\alpha)}$;

$$\boldsymbol{\mathrm{tg}(\alpha) = \left|\frac{a_x}{a_y}\right| = \frac{0,64b}{0,32b} = 2;\ \alpha = 63,7°;\ \cos(\alpha) = 0,443;\ \sin(\alpha) = 0,897;}$$

$$\boldsymbol{x_D = 1,1b + 0,443b = 1,543b;\qquad y_D = -0,897b.}$$

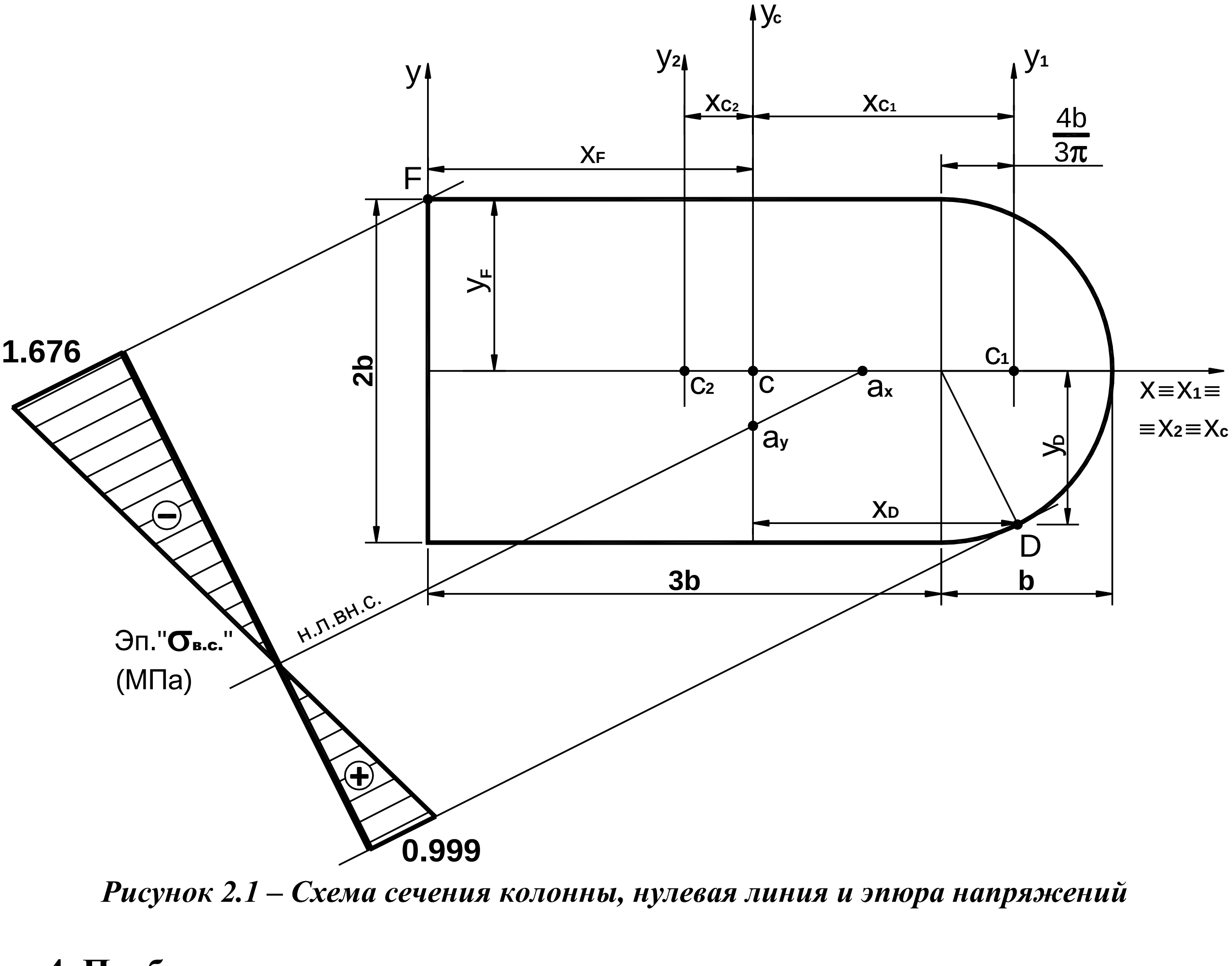


Рисунок 2.1 – Схема сечения колонны, нулевая линия и эпюра напряжений

4. Подбор размеров поперечного сечения из расчета на прочность.

Составим условие прочности для опасной точки в сжатой области сечения.

$$\boldsymbol{\sigma_F = \frac{|F|}{A}\left(1 + \frac{y_F \cdot y_F}{{i_x}^2} + \frac{x_F \cdot x_F}{{i_y}^2}\right) \le R_c;}$$

$$\boldsymbol{\sigma_F = \frac{|F|}{7,57b^2}\left(1 + \frac{b \cdot b}{0,32b^2} + \frac{1,9b \cdot 1,9b}{1,22b^2}\right) \le R_c,}$$

$$\mathbf{\sigma_F = \frac{|F|}{7,57b^2} \cdot 7,136 = 0,943 \cdot \frac{|F|}{b^2} \le R_c},$$

$$\mathbf{b = \sqrt{\frac{0,943 \cdot |F|}{R_c}} = \sqrt{\frac{0,943 \cdot 250}{1}} = 15,35\ см.}$$

Составим условие прочности для наиболее удаленной точки в растянутой области сечения.

$$\mathbf{\sigma_D = \frac{|F|}{A}\left(1 + \frac{y_F \cdot y_D}{{i_x}^2} + \frac{x_F \cdot x_D}{{i_y}^2}\right) \le R_p}.$$

$$\mathbf{\sigma_D = \frac{|F|}{7,57b^2}\left(1 + \frac{b(-0,897b)}{0,32b^2} + \frac{(-1,9b)^2 \cdot 1,543b}{1,22b^2}\right) \le R_p}$$

$$\mathbf{\sigma_D = \frac{|F|}{7,57b^2} \cdot 4,252 = 0,562 \cdot \frac{|F|}{b^2} \le R_p},$$

откуда

$$\mathbf{b = \sqrt{\frac{0,562 \cdot |F|}{R_p}} = \sqrt{\frac{0,562 \cdot 250}{0,1}} = 37,47\ см.}$$

За расчетную величину принимаем большее из двух полученных значение с округлением до 0,5 см – $\mathbf{b = 37,5\ см}$.

Определим напряжения в опасных точках сечения и выполним проверку прочности.

$$\mathbf{\sigma_F = \frac{|F|}{A}\left(1 + \frac{y_F \cdot y_F}{{i_x}^2} + \frac{x_F \cdot x_F}{{i_y}^2}\right) =}$$

$$\mathbf{= 0,943 \cdot \frac{|F|}{b^2} = 0,943 \cdot \frac{|-250|}{37,5^2} = 0,1676\ \frac{кН}{см^2} = 1,676\ МПа < R_c = 10\ МПа;}$$

$$\mathbf{\sigma_D = \frac{|F|}{A}\left(1 + \frac{y_F \cdot y_D}{{i_x}^2} + \frac{x_F \cdot x_D}{{i_y}^2}\right) =}$$

$$\mathbf{= 0,562 \cdot \frac{|F|}{b^2} = 0,562 \cdot \frac{|-250|}{37,5^2} = 0,0999\ \frac{кН}{см^2} = 0,999\ МПа < R_p = 1\ МПа.}$$

Эпюра напряжений при внецентренном сжатии показана на рисунке 2.1.

5. Построение и исследование ядра сечения.

Для построения ядра сечения определим отрезки, отсекаемые нулевой линией.

1. Нулевая линия 1–1: $\mathbf{a_x = -1,9b}$; $\mathbf{a_y} = \infty$.

Координаты точки приложения силы (точка 1):

$$\mathbf{x_{F_1} = -\frac{{i_y}^2}{a_x} = -\frac{1,22b^2}{-1,9b} = 0,642b = 0,642 \cdot 37,5 = 24,08\ см;}$$

$$\mathbf{y_{F_1} = -\frac{{i_x}^2}{a_y} = 0.}$$

2. Нулевая линия 2–2: $\mathbf{a_x}$= ∞; $\mathbf{a_y = -b}$.

$$\mathbf{x_{F_2} = -\frac{{i_y}^2}{a_x} = 0; \qquad y_{F_2} = -\frac{{i_x}^2}{a_y} = -\frac{0,32b^2}{-b} = 0,32b = 0,32 \cdot 37,5 = 12\ см.}$$

3. Нулевая линия 3–3: $\mathbf{a_x = 2,1b}$; $\mathbf{a_y}$= ∞;

$$\mathbf{x_{F_3} = -\frac{{i_y}^2}{a_x} = -\frac{1,22b^2}{2,1b} = -0,579b = 0,579 \cdot 37,5 = -21,71\ см};$$

$$\mathbf{y_{F_3} = -\frac{{i_x}^2}{a_y} = 0.}$$

4. Нулевая линия 4–4: $\mathbf{a_x}$= ∞; $\mathbf{a_y = b}$;

$$\mathbf{x_{F_4} = -\frac{{i_y}^2}{a_x} = 0;\ \ y_{F_4} = -\frac{{i_x}^2}{a_y} = -\frac{0,32b^2}{b} = -0,32b = -12\ см.}$$

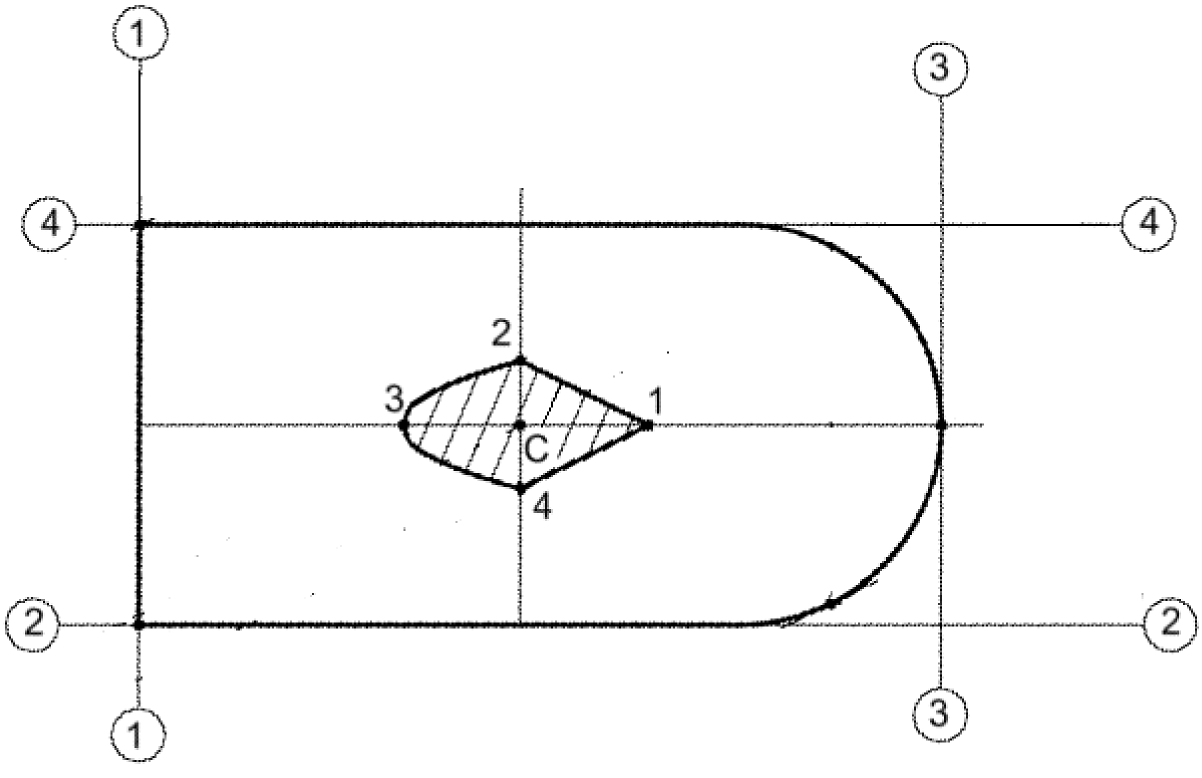


Рисунок 2.2 – Ядро сечения

Соединяя полученные точки прямыми или кривыми линиями, получаем ядро сечения (рисунок 2.2).

Для исследования ядра сечения прикладываем силу поочередно в точках С, 1, 2, 3 (рисунок 2.3).

а) силу прикладываем в центре тяжести сечения (точка С):

$$\boldsymbol{\sigma_N = \frac{F}{A} = \frac{-250}{7,57 \cdot 37,5^2} = 0,0235\frac{кН}{см^2} = -0,235\ МПа;}$$

б) силу прикладываем в области ядра сечения (точка 1): $\mathbf{x_F = 0{,}32b;\ y_F = 0.}$

Напряжения в крайних точках сечения будут

$$\boldsymbol{\sigma_E = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{x_F\ \cdot x_E}{i_y^2}\right) = \frac{-250}{7,57b^2}\left(1 + \frac{0,32b \cdot (-1,9b)}{1,22b^2}\right) =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{-250 \cdot 0,5}{7,57 \cdot 37,5^2} = -0,0117\frac{кН}{см^2} = -0,117\ МПа;}$$

$$\boldsymbol{\sigma_0 = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{x_F\ \cdot x_0}{i_y^2}\right) = \frac{-250}{7,57b^2}\left(1 + \frac{0,32b \cdot 2,1b}{1,22b^2}\right) =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{-250 \cdot 1,55}{7,57 \cdot 37,5^2} = -0,0365\frac{кН}{см^2} = -0,365\ МПа.}$$

в) силу прикладываем на границе ядра сечения (точка 2): $\mathbf{x_F = 0{,}64b;\ y_F = 0.}$

$$\boldsymbol{\sigma_E = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{x_F\ \cdot x_E}{i_y^2}\right) = \frac{-250}{7,57b^2}\left(1 + \frac{0,64b \cdot (-1,9b)}{1,22b^2}\right) = 0};$$

$$\boldsymbol{\sigma_0 = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{x_F\ \cdot x_0}{i_y^2}\right) = \frac{-250}{7,57b^2}\left(1 + \frac{0,64b \cdot 2,1b}{1,22b^2}\right) =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{-250 \cdot 2,11}{7,57 \cdot 37,5^2} = -0,0495\frac{кН}{см^2} = -0,495\ МПа.}$$

г) силу прикладываем за ядром сечения (точка 3): $\mathbf{x_F = 1{,}1b;\ y_F = 0.}$

$$\boldsymbol{\sigma_E = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{x_F\ \cdot x_E}{i_y^2}\right) = \frac{-250}{7,57b^2}\left(1 + \frac{1,1b \cdot (-1,9b)}{1,22b^2}\right) =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{-250 \cdot (-0,72)}{7,57 \cdot 37,5^2} = 0,0169\frac{кН}{см^2} = 0,169\ МПа;}$$

$$\boldsymbol{\sigma_0 = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{x_F\ \cdot x_0}{i_y^2}\right) = \frac{-250}{7,57b^2}\left(1 + \frac{1,1b \cdot 2,1b}{1,22b^2}\right) =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{-250 \cdot 2,90}{7,57 \cdot 37,5^2} = -0,0681\frac{кН}{см^2} = -0,681\ МПа.}$$

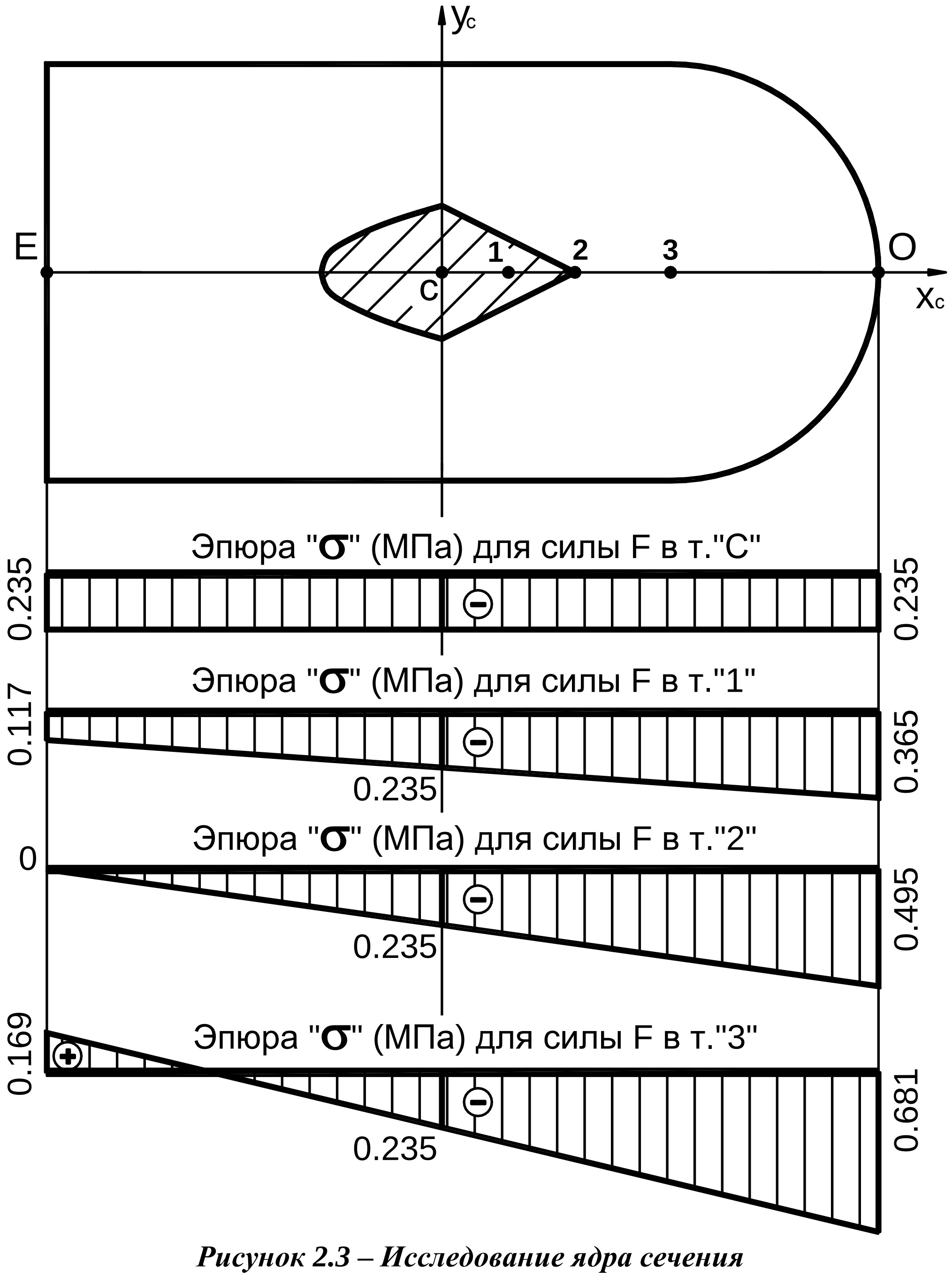


Рисунок 2.3 – Исследование ядра сечения

По полученным значениям напряжений строим их эпюры (рисунок 2.3). Анализ эпюр напряжений, при различном расположении сжимающей силы F, показывает, что наиболее выгодным является загружение колонны центрально приложенной сжимающей силой. Для получения напряжений одного знака во всех точках поперечного сечения силу следует прикладывать в зоне ядра сечения.

3 УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ БРУСЬЕВ

3.1 Понятие об устойчивости первоначальной формы равновесия

Оказывается, что несущая способность сжатого бруса может оказаться исчерпанной вследствие потери устойчивости, т. е. в результате искривления (выпучивания), которое происходит раньше, чем брус выйдет из строя непосредственно от деформации сжатия. Из теоретической механики известно, что равновесие абсолютно твердого тела бывает устойчивым, безразличным и неустойчивым. Аналогичное явление имеет место и в механике деформируемого тела (сопротивлении материалов), с той лишь разницей, что вид равновесия зависит от величины прикладываемой внешней нагрузки. Примером может служить равновесие бруса, испытывающего центральное сжатие. При сравнительно небольшом значении сжимающей нагрузки F брус испытывает сжатие и находится в состоянии устойчивого равновесия, т. к., получив малое искривление геометрической оси за счет поперечного «возмущающего» усилия, брус быстро возвращается в исходное положение. По мере увеличения сжимающей нагрузки F брус все медленнее возвращается в первоначальное положение после «возмущения» и при некотором критическом значении $F_{кр}$ наступает состояние как бы безразличного равновесия: после самостоятельного искривления брус приобретает равновесие и в искривленном состоянии. Происходит раздвоение равновесия: прямолинейная форма теряет устойчивость, а криволинейная еще не успевает ее приобрести, которая теоретически становится устойчивой при $F>F_{кр}$. Однако такое состояние практически неприемлемо, т. к. брус работает уже не на сжатие, а на сжатие с изгибом, а, следовательно, возникают большие перемещения и напряжения, которые связаны между собой нелинейной зависимостью, что приводит к разрушению.

Изгиб, связанный с потерей устойчивости прямолинейной формы равновесия, называют продольным, т. к. он возникает от продольной нагрузки. Наибольшее значение продольной сжимающей силы, до которой сохраняется прямолинейная форма равновесия стоек, называется критической силой.

3.2 Критическая сила. Формула Эйлера

Формулу для определения величины критической силы для стойки, шарнирно закрепленной обоими концами, впервые (1744 г.) получил Л. Эйлер, поэтому ее и назвали формулой Эйлера, а силу часто называют эйлеровой силой. Формула имеет вид

$$\mathbf{F}_{\text{кр}} = \frac{\boldsymbol{\pi}^2 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{I}}{\boldsymbol{l}^2},$$

т. е. величина критической силы прямо пропорциональна жесткости (EI) и обратно пропорциональна квадрату длины стойки (l).

Для различных случаев закрепления концов сжатых стоек величину критической силы определяем по формуле в виде

$$\mathbf{F}_{\text{кр}} = \frac{\boldsymbol{\pi}^2 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{I}}{(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{l})^2},$$

где $\boldsymbol{\mu}$ – коэффициент приведенной длинны, а величина $\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}_{\text{пр}}$ – приведенная длина.

3.3 Критические напряжения. Гибкость стержней

С учетом формулы Эйлера получим:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{кр}} = \frac{\mathbf{F}_{\text{кр}}}{\mathbf{A}} = \frac{\boldsymbol{\pi}^2 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{I}}{(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{l})^2 \cdot \mathbf{A}} = \frac{\boldsymbol{\pi}^2 \cdot \mathbf{E}}{\boldsymbol{\lambda}^2}$$

где $\boldsymbol{\lambda} = \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{l}}{\mathbf{i}}$ – гибкость стержня, зависит от его геометрических размеров;

$\mathbf{i} = \sqrt{\mathbf{I}/\mathbf{A}}$ – радиус инерции поперечного сечения стоек.

Из полученного выражения следует, что критические напряжения зависят от упругой константы материала (E) и гибкости бруса (λ).

Учитывая, что критические напряжения не должны превышать предела пропорциональности (σ_{pr}), легко можно определить предельную гибкость, т. е.

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{кр}} = \frac{\boldsymbol{\pi}^2 \cdot \mathbf{E}}{\boldsymbol{\lambda}^2} \leq \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{pr}}; \quad \boldsymbol{\lambda}_{\text{пр}} = \boldsymbol{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\mathbf{E}}{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{pr}}}}.$$

В отличие от геометрической гибкости предельная гибкость ($\lambda_{\text{пр}}$) зависит от физико-механических свойств материала, из которого изготовлена стойка, т. е. модуля продольной упругости (E) и предела пропорциональности (σ_{pr})

Формула Эйлера применяется в тех случаях, когда действительная гибкость (λ) больше предельной ($\lambda_{\text{пр}}$). Если же гибкость сжатого бруса меньше предельной гибкости ($\lambda<\lambda_{\text{пр}}$), то критические напряжения и сила определяются по эмпирической формуле Ясинского:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{кр}} = \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\lambda}; \qquad \mathbf{F}_{\text{кр}} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{кр}} \cdot \mathbf{A},$$

где a и b – коэффициенты, зависящие от материала (например, для стали **a = 310 МПа, b = 1,14 МПа**).

3.4 Расчет на устойчивость

Для центрально сжатых стоек используется следующее условие устойчивости:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{кр}} = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{A}} \leq \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{R},$$

где N – нормальная сила от расчетной сжимающей нагрузки; A – площадь поперечного сечения стойки; $\boldsymbol{\varphi}$ – коэффициент продольного изгиба или коэффициент, уменьшающий расчетное сопротивление сжатию R до значения, которое гарантирует устойчивость прямолинейной формы равновесия.

Условие устойчивости позволяет выполнить три вида расчета, аналогично расчетам на прочность. Наибольший интерес представляет проектная задача, т. е. подбор сечений по заданной нагрузке и расчетному сопротивлению материала R, длине стоек *l* и способах закрепления ее концов.

$$\mathbf{A} \geq \frac{\mathbf{N}}{\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{R}}.$$

Использование этого неравенства затруднено тем, что в него входят две неизвестные величины А и $\boldsymbol{\varphi}$. Поэтому подбор сечения производят способом последовательных приближений.

Первоначально задается значение коэффициента $\boldsymbol{\varphi} \approx 0{,}5$, определяют величину площади А, конструируют сечение таким образом, чтобы главные центральные моменты инерции были примерно равными: $\mathbf{I_x} \approx \mathbf{I_y}$ (допускаются отклонения до 10 %).

Далее, определяется гибкость λ, а по таблицам устанавливают величину коэффициента $\boldsymbol{\varphi}$ с учетом интерполирования. После этого определяется фактическое напряжение и сравнивается с расчетным сопротивлением R с учетом коэффициента $\boldsymbol{\varphi}$. Превышение фактического напряжения над расчетным сопротивлением **<u>не допускается</u>**. Если фактическое напряжение существенно меньше расчетного сопротивления (разница превышает 10…15 %), то **расчет следует повторить**.

3.5 Вопросы для самопроверки

1. Что понимают под потерей устойчивости сжатого бруса?
2. Дайте определение устойчивого и неустойчивого состояния стоек.
3. Дайте определение критической силы.
4. Какое дифференциальное уравнение используется при выводе формулы Л. Эйлера?
5. Как определяются критические силы и напряжения?
6. Какие влияния оказывают жесткость поперечного сечения и длина стойки на величину критической силы?
7. Что понимают под гибкостью бруса? Приведите формулу определения геометрической гибкости.
8. Что понимают под приведенной (расчетной) длиной бруса? Как определяется и чему равен коэффициент приведения длины для различных условий закрепления стоек?
9. В каких случаях используют формулу Л. Эйлера?
10. Когда применяется при расчетах формула Ясинского?
11. К чему сводится расчет на устойчивость?
12. Что понимают под коэффициентом продольного изгиба, и как определяется его величина?
13. Как осуществляется подбор сечений стоек при расчете на устойчивость?
14. Для чего используются условия равноустойчивости, и что это такое?
15. Приведите график критических напряжений ($\sigma_{кр}$ – λ).

3.6 Задание по расчетно-проектировочной работе № 3

Расчет сжатой стойки на устойчивость

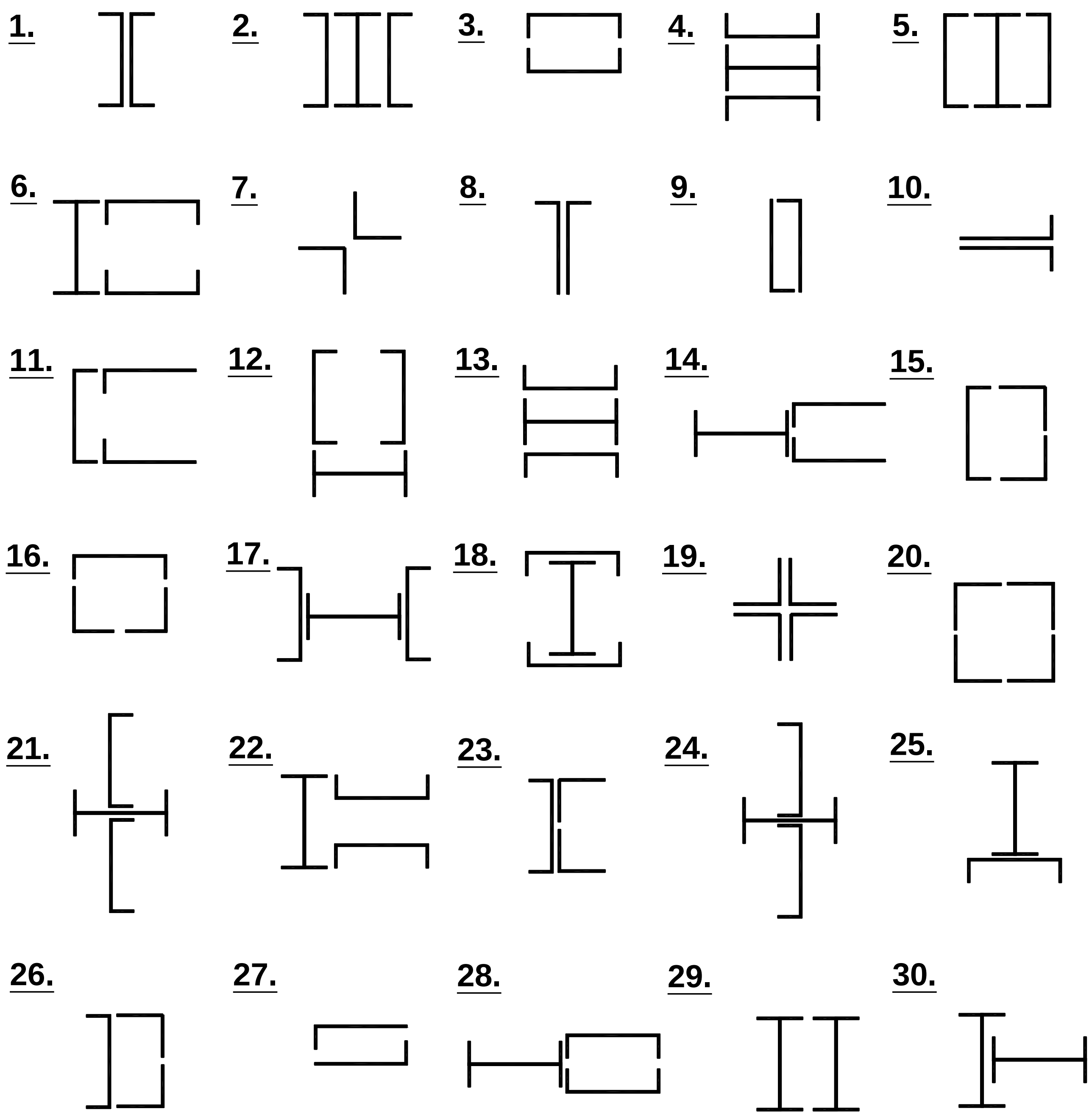
Дано: стальная стойка длиной *l* (принять по номеру варианта) нагружена продольной сжимающейся нагрузкой F. Расчетное сопротивление материала стойки **R = 240 МПа**; модуль продольной упругости материала **E = 206 ГПа**.

Требуется:

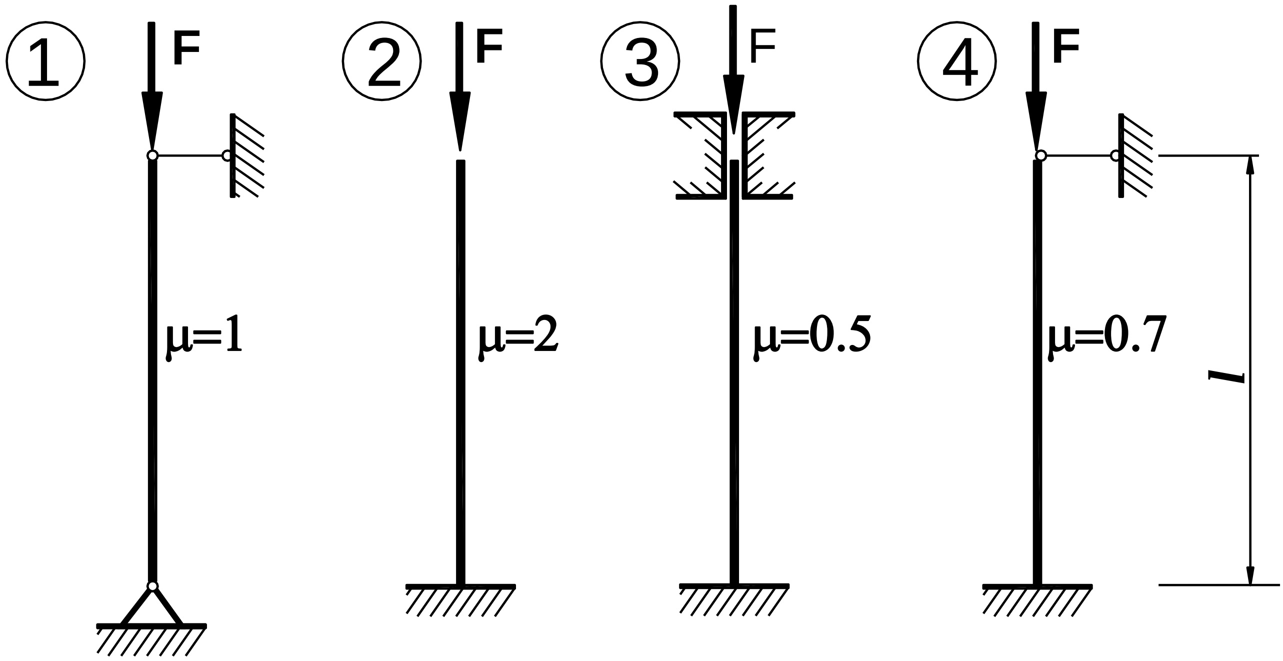
1) подобрать размеры поперечного сечения составной стойки (поперечное сечение стойки принять по номеру схемы);

2) определить величину критической силы и сравнить ее с заданной нагрузкой F.

3.7 Схемы поперечного сечения составных стоек



3.8 Схема закрепления стоек



3.9 Числовые значения длины стоек и нагрузок

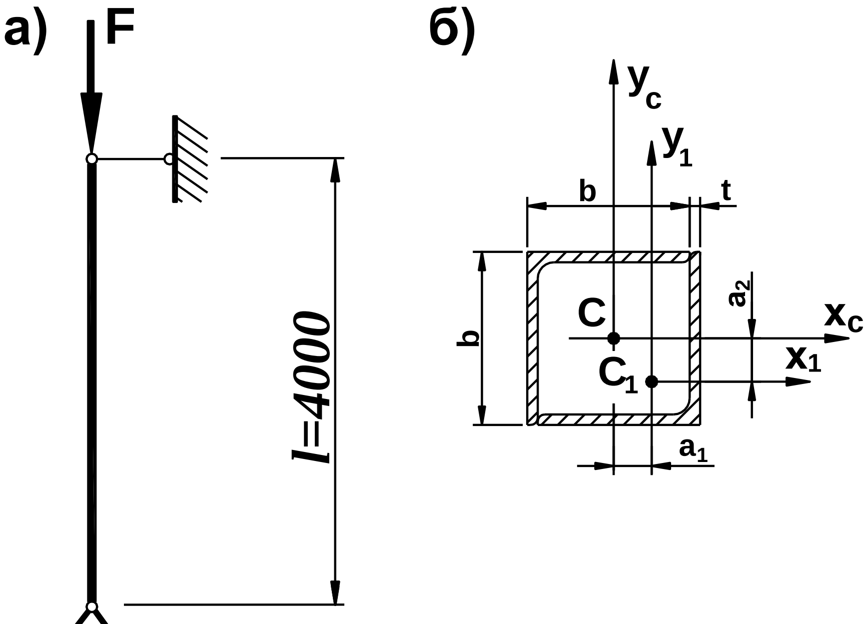
Номер варианта	Схема стойки	*l*, м	F, кН	Номер варианта	Схема стойки	*l*, м	F, кН
1	3	2,40	450	**26**	1	2,40	710
2	1	2,40	480	**27**	2	3,05	750
3	2	3,00	490	**28**	3	3,20	775
4	3	3,20	460	**29**	1	3,10	740
5	1	2,60	440	**30**	2	2,10	700
6	2	2,50	430	**31**	3	2,20	310
7	3	3,20	420	**32**	1	3,20	320
8	1	3,30	470	**33**	2	3,30	330
9	2	2,90	410	**34**	3	3,45	340
10	3	2,60	550	**35**	1	2,65	350
11	1	3,30	530	**36**	2	2,85	360
12	2	2,80	540	**37**	3	3,10	370
13	3	2,85	505	**38**	1	2,80	380
14	1	2,45	515	**39**	2	2,10	390
15	2	3,00	525	**40**	3	3,10	400
16	3	3,30	535	**41**	1	3,20	200
17	1	3,15	640	**42**	2	3,30	220
18	2	2,55	620	**43**	3	1,60	230
19	3	2,60	610	**44**	1	2,50	240
20	1	3,25	630	**45**	2	3,40	250
21	2	2,90	660	**46**	3	3,20	260
22	3	2,55	680	**47**	1	1,70	270
23	1	2,75	655	**48**	2	2,60	280
24	2	3,40	745	**49**	3	3,30	290
25	3	2,95	720	**50**	1	2,95	190

3.10 Значения коэффициентов φ для стали класса С245 (R = 240 МПа)

Гибкость элементов λ	Коэффициент φ	Гибкость элементов λ	Коэффициент φ
0	1,000	**120**	0,419
10	0,987	**130**	0,364
20	0,962	**140**	0,315
30	0,931	**150**	0,276
40	0,894	**160**	0,244
50	0,852	**170**	0,218
60	0,805	**180**	0,196
70	0,754	**190**	0,177
80	0,686	**200**	0,161
90	0,612	**210**	0,147
100	0,542	**220**	0,135
110	0,478	**230**	0,125

3.11 Пример расчета на устойчивость

Дано: стальная стойка длиной ***l* = 4 м** (рисунок 3.1, а); нагружена продольной сжимающей нагрузкой **F = 560 кН**. Расчетное сопротивление материала стойки **R = 240 МПа**; модуль упругости **E = 206 ГПа**.



а) расчетная схема стойки; б) ее поперечное сечение

Рисунок 3.1 – Расчетная схема стойки и ее поперечное сечение

Требуется: см. пп. 1–2.

Решение:

1. Подбор размеров поперечного сечения

Первое приближение. Принимаем $\varphi_1 = 0{,}5$. Тогда из условия устойчивости

$$\mathbf{A_1 = \frac{F}{\varphi_1 \cdot R} = \frac{560}{0.5 \cdot 24} = 46,7\ см^2.}$$

Принимаем два равнобоких уголка 125 × 125 × 10 (ГОСТ 8509-93);

A_1 = 24,33 см^2, A = 48,66 см^2, I_{x1} = I_{y1} = 359,82 см^4; z_0 = 3,45 см.

Определим геометрические характеристики сечения.

$$a_1 = (b + t)/2 - z_0 = (12,5 + 1,0)/2 - 3,45 = 3,30 \text{ см};$$

$$a_2 = b/2 - z_0 = 12,5/2 - 3,45 = 2,80 \text{ см};$$

$$I_x = 2 \cdot \left(I_{x_1} + a_2^2 \cdot A_1\right) = 2 \cdot (359,82 + 2,80^2 \cdot 24,33) = 1101,1 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 2 \cdot \left(I_{y_1} + a_1^2 \cdot A_1\right) = 2 \cdot (359,82 + 3,30^2 \cdot 24,33) = 1249,5 \text{ см}^4;$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{1101,1}{48,66}} = 4,76 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}} = \frac{0,7 \cdot 400}{4,76} = 58,86.$$

По таблице φ принимаем

$$\varphi_1^* = 0.852 - \frac{0,852 - 0,805}{10} \cdot 8,86 = 0,810;$$

$$\varphi_1^* = 0,810 \gg \varphi_1 = 0,5.$$

Второе приближение. Принимаем

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^*}{2} = \frac{0,5 + 0,810}{2} = 0,655.$$

Тогда

$$A_2 = \frac{F}{\varphi_2 \cdot R} = \frac{560}{0,655 \cdot 24} = 35,6 \text{ см}^2.$$

Принимаем два равнобоких уголка 110 × 110 × 8 (ГОСТ 8509-93);

A_1= 17,20 см^2, A = 34,40 см^2, I_{x1} = I_{y1} = 198,17 см^4; z_0 = 3,00 см.

Определим геометрические характеристики сечения

$$a_1 = (b + t)/2 - z_0 = (11 + 0,8)/2 - 3,00 = 2,90 \text{ см};$$

$$a_2 = b/2 - z_0 = 11/2 - 3,00 = 2,50 \text{ см};$$

$$I_x = 2 \cdot \left(I_{x_1} + a_2^2 \cdot A_1\right) = 2 \cdot (198,17 + 2,50^2 \cdot 17,20) = 611,3 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 2 \cdot \left(I_{y_1} + a_1^2 \cdot A_1\right) = 2 \cdot (198,17 + 2,90^2 \cdot 17,20) = 685,6 \text{ см}^4;$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{611,3}{34,40}} = 4,22 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}} = \frac{0,7 \cdot 400}{4,22} = 66,35.$$

По таблице φ принимаем

$$\boldsymbol{\varphi_2^* = 0,805 - \frac{0,805 - 0,754}{10} \cdot 6,35 = 0,773};$$

$$\boldsymbol{\varphi_2^* = 0,773 > \varphi_2 = 0,655} \text{ на } \mathbf{18}\ \%.$$

Третье приближение. Принимаем

$$\boldsymbol{\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2^*}{2} = \frac{0,655 + 0,773}{2} = 0,714}.$$

Тогда

$$\mathbf{A_3 = \frac{F}{\varphi_3 \cdot R} = \frac{560}{0,714 \cdot 24} = 32,7\ см^2}.$$

Принимаем два равнобоких уголка 110 × 110 × 7 (ГОСТ 8509-93);

$\mathbf{A_1 = 15{,}15}$ **см**^{2}**,** $\mathbf{A = 30{,}30}$ **см**^{2}**,** $\mathbf{I_{x1} = I_{y1} = 175{,}61}$ **см**^{4}**;** $\mathbf{z_0 = 2{,}96}$ **см.**

Определим геометрические характеристики сечения

$$\mathbf{a_1 = (b + t)/2 - z_0 = (11 + 0,7)/2 - 2,96 = 2,89\ см;}$$

$$\mathbf{a_2 = b/2 - z_0 = 11/2 - 2,96 = 2,54\ см;}$$

$$\mathbf{I_x = 2 \cdot \left(I_{x_1} + a_2^2 \cdot A_1\right) = 2 \cdot (175,61 + 2,54^2 \cdot 15,15) = 546,7\ см^4;}$$

$$\mathbf{I_y = 2 \cdot \left(I_{y_1} + a_1^2 \cdot A_1\right) = 2 \cdot (175,61 + 2,89^2 \cdot 15,15) = 604,3\ см^4;}$$

$$\mathbf{i_{min} = \sqrt{\frac{I_{\mathit{min}}}{A}} = \sqrt{\frac{546,7}{30,30}} = 4,25\ см}; \quad \boldsymbol{\lambda = \frac{\mu \cdot \mathit{l}}{i_{min}} = \frac{0,7 \cdot 400}{4,25} = 65,88}.$$

По таблице φ находим

$$\boldsymbol{\varphi_3^* = 0,805 - \frac{0,805 - 0,754}{10} \cdot 5,88 = 0,775};$$

$$\boldsymbol{\varphi_3^* = 0,775 \approx \varphi_3 = 0,773}.$$

Проверим прочность

$$\boldsymbol{\sigma = \frac{F}{A} = \frac{560}{30,30} = 18,48}\ \mathbf{{}^{кН}/_{см^2} = 184,8\ МПа;}$$

$$\boldsymbol{\sigma = 184,8\ \text{МПа} < \varphi \cdot R = 0,775 \cdot 240 = 186,0\ \text{МПа}}.$$

Недонапряжение составляет

$$\mathbf{\left|\frac{184,8 - 186,0}{186,0}\right| \cdot 100 = 0,6\ \%,}$$

что допустимо.

Окончательно принимаем сечение из двух уголков 110×110×7 (ГОСТ 8509-93):

$$\mathbf{A = 30,30\ см^2;\ I_x = 546,7\ см^4;\ I_y = 604,3\ см^4}.$$

2. Определение критической силы

Для принятой стойки $\boldsymbol{\lambda}$ **= 65,88 <** $\boldsymbol{\lambda_{пр}}$ **= 100**, следовательно, для определения критической силы используем формулу Ясинского

$$\boldsymbol{\sigma}_{кр} = \mathbf{a - b \cdot \lambda = 310 - 1,14 \cdot 65,88 = 234,9\ МПа = 23,49\ ^{кН}/_{см^2}},$$

тогда $\mathbf{F}_{кр} = \boldsymbol{\sigma}_{кр} \cdot \mathbf{A = 23,49 \cdot 30,30 = 711,7\ кН.}$

Коэффициент отношения $F_{кр}/F$ составляет

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{F}_{кр}}{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{711,7}}{\mathbf{560}} = \mathbf{1,27}.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов / М. Д. Подскребко. – Минск : Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.

2. Старовойтов, Э. И. Сопротивление материалов / Э И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2004. – 376 с.

3. Александров, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б.П. Державин; под ред. А. В. Александрова. – М. : Высш. шк., 1995. – 560 с.

4. Заяц, В. Н. Сопротивление материалов / В. Н. Заяц, М. К. Балыкин, И. А. Голубев. – Минск : БГПА, 1998. – 367 с.

5. Павлов, П. А. Сопротивление материалов : учебник / П. А. Павлов ; под ред. Б. Е. Мельникова. – СПб. – 4-е изд. – СПб. : Лань, 2017. – 556 с.

6. Куликов, Ю. А. Сопротивление материалов. Курс лекций : учебное пособие / Ю. А. Куликов. – СПб. : Лань, 2017. – 272 с.

7. Дарков, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков. – М. : Высшая школа, 1975. – 637 с.

Учебное издание

Составители:
Веремейчик Андрей Иванович
Томашев Игорь Геннадьевич
Черноиван Николай Вячеславович

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению расчетно-проектировочных работ
по курсу **«Сопротивление материалов»**
для студентов строительных специальностей

Ответственный за выпуск: Томашев И. Г.
Редактор: Винник Н. С.
Компьютерная вёрстка: Соколюк А. П.
Корректор: Северянина А. Г.

Подписано в печать 27.12.2024 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага «Performer».
Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 2,56. Уч. изд. л. 2,75. Заказ № 1291. Тираж 30 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 3/1569 от 16.10.2017 г.