

Чопанов Г. А.

ВОЗМОЖНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ ЦИФРОВЫМИ ТЕХНОЛОГИЯМИ

Кафедра науки и технологий Академии наук Туркменистана, старший преподаватель

Аннотация

В работе рассматривается задача моделирования свободной конвекции в прямоугольнике. Приводятся результаты вычислений интегрального числа Нуссельта при разных значениях числа Грасгофа и отношений сторон прямоугольника. Также уточнено, что при малых ошибках в процессе вычисления поля скоростей приводят к заметным отклонениям решения от стационарного значения, и при использовании стационарного решателя итерационный процесс не сходится. Поэтому при вычислении свободной конвекции для больших значений числа Грасгофа, даже при стационарной постановке, необходимо использование нестационарного решателя.

Ключевые слова: число Грасгофа, число Нуссельта, свободная конвекция, MATLAB, COMSOL Multiphysics.

В статье рассматривается задача моделирования свободной конвекции в прямоугольнике. Свободная конвекция жидкостей очень важна в геофизике, где благодаря разнице плотности происходит движение жидкостей, например, на побережье и озерах. В примере, приводимом ниже, свободная конвекция жидкости происходит из-за разности плотностей, которая возникает благодаря вариациям температуры, от которой зависит плотность.

На рисунке 1 изображена геометрия модели. Будем рассматривать стационарную свободную конвекцию в прямоугольной области шириной L и высотой H . В рамках такой постановки поле течения и перенос тепла в рассматриваемой области описывается системой уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска (В. И. Полежаев, А. В. Бунэ, Н. А. Верзуб, Г. С. Глушко, В. Л. Грязнов, К. Г. Дубовик, С. А. Никитин, А. И. Простомолотов, А. И. Федосеев, С. Г. Черкасов 1987 г.):

$$\rho(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \eta\nabla^2\mathbf{u} + \rho_0\mathbf{g}\beta(T - T_0), \quad (1)$$

$$\nabla\mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\rho C_p \mathbf{u}\nabla T - \nabla(k\nabla T) = 0, \quad (3)$$

здесь $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y) = (u, v)$ – поле скоростей, $p(x, y)$ – давление, ρ – плотность жидкости, η – динамическая вязкость, C_p – теплоемкость при постоянном давлении, k – коэффициент теплопроводности, T_0 – характерная температура, ρ_0 – плотность жидкости при температуре T_0 , β – коэффициент теплового расширения.

Для однозначного решения задачи помимо уравнений нужно задавать пограничные условия. Для уравнения Навье-Стокса на границе ставится условие прилипания (т. е. оба компонента скорости обращаются в ноль) и задается давление в левом нижнем углу ($p = p_0$). Что касается пограничных условий для температуры, то считается, что на вертикальных сторонах прямоугольника поддерживаются постоянные температуры ($T = T_0$ в левой и $T = T_1$ на правой стороне), а горизонтальные стороны теплоизолированы.

Для рассматриваемой задачи относительная вариация температуры $|T - T_0| / (T_1 + T_0) \ll 1$, так что коэффициенты уравнений (которые, вообще говоря, зависят от температуры) можно считать постоянными: $\rho = \rho_0, \eta = \text{const}, k = \text{const}, C_p = \text{const}$.

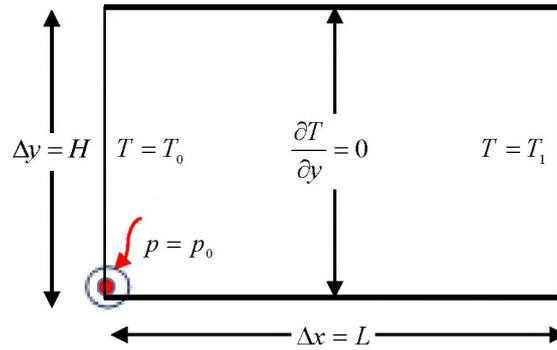


Рисунок 1 – Геометрия задачи о свободном конвекции на прямоугольнике

Перейдем к постановке задачи в безразмерных переменных:

$$x' = \frac{x}{L}, y' = \frac{y}{L}, u' = \frac{u}{U}, v' = \frac{v}{U}, p' = \frac{p - p_0}{\rho_0 U^2}, T' = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1},$$

здесь $U = \frac{\eta}{\rho_0 L}$ – величина имеющее размерность скорости (m/s).

Здесь и далее полагаем, $T_0 > T_1$, т. е. левая сторона горячее, чем правая. Тогда система уравнений, которая описывает рассматриваемый процесс, будет иметь вид:

$$(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' = -\nabla p' + \nabla^2 \mathbf{u}' + \mathbf{e}_y \cdot \text{Gr} \cdot T', \quad (4)$$

$$\nabla \mathbf{u}' = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{u}' \cdot \nabla \cdot T' = \frac{1}{\text{Pr}} \nabla^2 T', \quad (6)$$

здесь $\mathbf{e}_y = (0, 1)$ – единичный вектор направленный вдоль оси Oy , $\text{Gr} = g\beta(T_0 - T_1)L^3\rho^2/\eta^2$ – число Грасгофа, $\text{Pr} = \eta\rho_0 C_p / (\rho k)$ – число Прандтля (безразмерные величины).

Геометрия задачи и граничные условия изображены на рисунке 2. Здесь $A = H/L$ – отношение длины сторон исходного прямоугольника.

Как видно из уравнения (1), с ростом числа Грасгофа вязкие члены становятся менее значимым за исключением вблизи границы, где происходят большие перепады зависимых переменных. Поэтому очень важно подобрать правильную стратегию выбора сетки: внутри области она может быть достаточно грубой, но должна сгущаться при приближении к границе. Еще немаловажным аспектом правильного решения поставленной задачи является удачный выбор начального приближения. Этот вопрос успешно решается с выбором параметрического решателя по числу Грасгофа. При этом число Прандтля остается постоянным.

Мы будем считать $\text{Pr} = 0.7$ (что соответствует воздуху при нормальной температуре), а число Грасгофа будем брать из диапазоне $10^3 \leq \text{Gr} \leq 10^6$. Заметим, что число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{|\mathbf{u}'| L \rho}{\eta} = |\mathbf{u}'|,$$

что позволяет проследить режим течения ($Re < 2100$ – ламинарное, $Re > 2100$ – турбулентное течение).

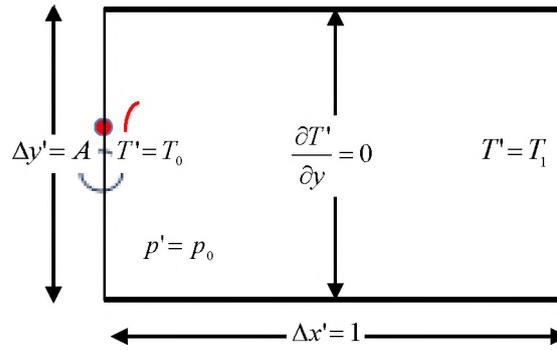


Рисунок 2 – Геометрия задачи в безразмерных переменных

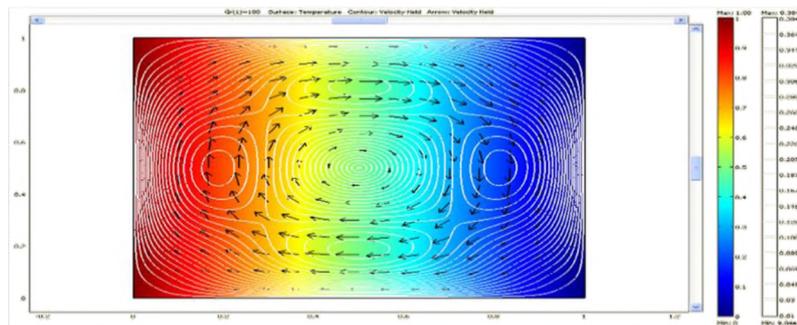


Рисунок 3 – $Gr = 10^2$: Цветное изображение – температурное поле. стрелки – поля скоростей.

Задача решена в COMSOL Multiphysics (Г. Е. Красников, О. В. Нагорнов, Н. В. Старостин 2012 г.). На рисунках 3–5 приводятся результаты расчета свободной конвекции внутри прямоугольника при различных значениях числа Грасгофа. При этом $A=1$, число Прандтля $Pr=0.7$. Температурное поле изображено цветным графиком (**surface plot**), поля скоростей стрелками (**arrows**), а линии (**contours**) соответствуют линиям уровня абсолютной безразмерной скорости $|\mathbf{u}'| = Re$. Максимальное и минимальное значение $|\mathbf{u}'|$ расположены на самом верху и самом внизу самой правой колонки рисунка. Например, при $Gr = 10^8$, как это видно из рисунка 5, $Re_{max} = 2587.27$.

Из этих рисунков видно, что в случаях, представленных на рисунках 3–4, поле течения ламинарное, а в случае (рисунок 5) – турбулентное (поскольку в последнем случае максимальное значение абсолютной безразмерной скорости, которая равна числу Рейнольдса, превосходит критическое значение, равное 2100).

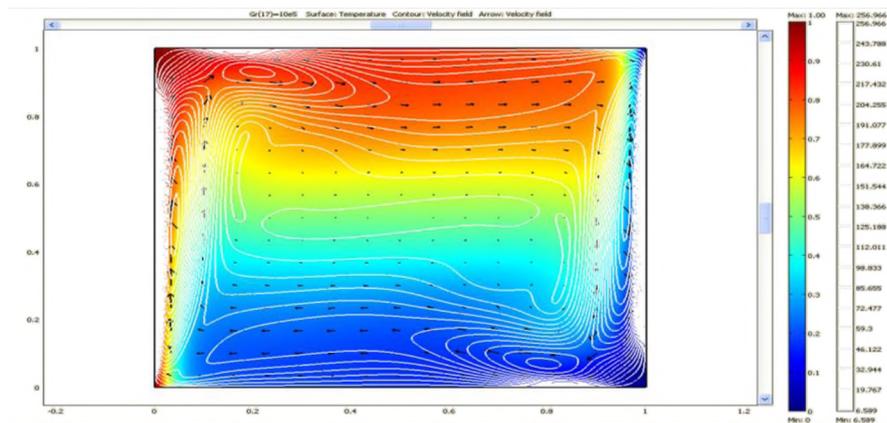


Рисунок 4 – Безразмерные решения для значения числа

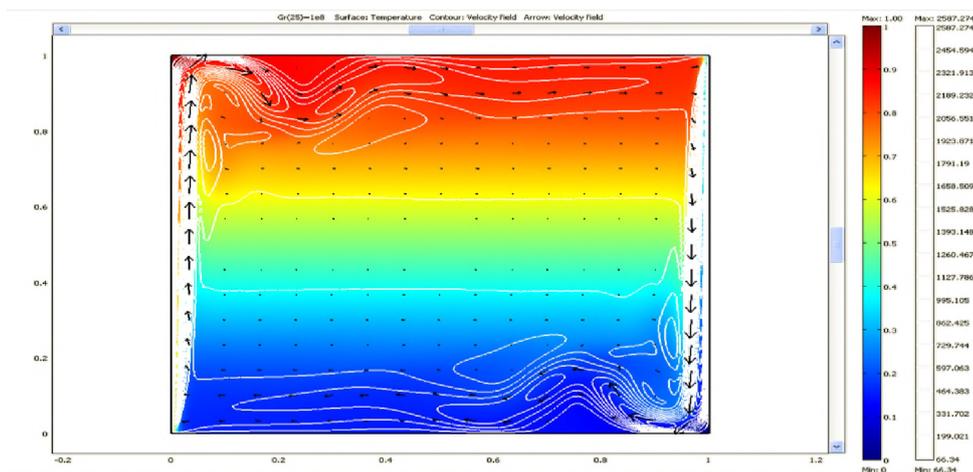


Рисунок 5 – Безразмерные решения для значения числа
Грасгофа $Gr = 10^8$

Одним из важных теплофизических зависимостей является зависимость интегрального числа Нуссельта от числа Грасгофа:

$$Nu = \frac{QL}{k(T_0 - T_1)} = f(Gr),$$

$$\text{здесь: } Q = \frac{1}{H} \int_0^H \left[-k \frac{\partial T}{\partial x}(0, y) \right] dy$$

– средний поток тепла в горизонтальном направлении, приходящийся на единичную длину вертикальных сторон.

Из равенства

$$Q = \frac{1}{H} \int_0^H \left(-k \frac{\partial T}{\partial x}(0, y) \right) dy = \frac{k(T_0 - T_1)}{L} \cdot \frac{1}{A} \int_0^A \left(-\frac{\partial T'}{\partial x'}(0, y') \right) dy'$$

следует

$$Nu = \frac{QL}{k(T_0 - T_1)} = \frac{1}{A} \int_0^A \left(-\frac{\partial T'}{\partial x'}(0, y') \right) dy'.$$

(7)

Таким образом, интересующая нас величина Nu является интегралом по левой стороне прямоугольника. Приведем теперь последовательность построения графика зависимости $Nu = f(Gr)$.

Применяем результат $Gr = 10^8$, полученный в COMSOL Multiphysics. В окне **Postprocessing > Boundary Integration** из пункта **Boundary selection** выбираем границу 1, а из пункта **Predefined quantities – Convection and Conduction in Porous Media (eshcc) > Normal total heat flux**. Затем, появившемся поле **Expression**, выражение “ntflux_eshcc” редактируем в виде “-Pr*ntflux_eshcc”.

В COMSOL Multiphysics для данного приложения под выражением “ntflux_eshcc” подразумевается полный тепловой поток в нормальном к границе направлении. В данном случае:

$$ntflux_eshcc = \frac{1}{Pr} \cdot \frac{\partial T'}{\partial x'}$$

Для получения Nu по формуле (7), мы должны интегрировать на границе выражение “-Pr*ntflux_eshcc”. Если рассматриваемая область не квадратная ($A \neq 1$), то применяется выражение “-(Pr/A)*ntflux_eshcc”. При этом параметр A должна быть заблаговременно (т. е. перед тем как будет проведен расчет задачи) занесена в список констант.

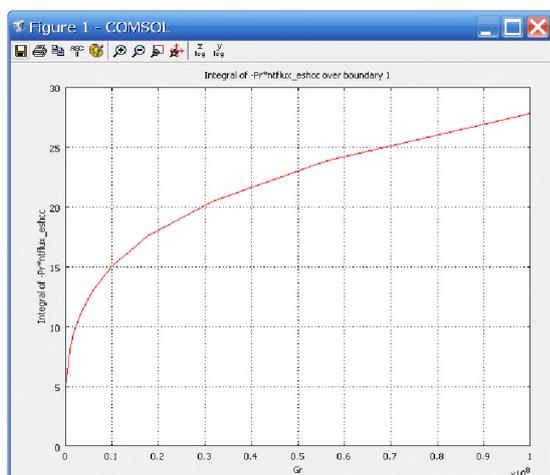


Рисунок 6 – Зависимость числа Нуссельта от числа Грасгофа

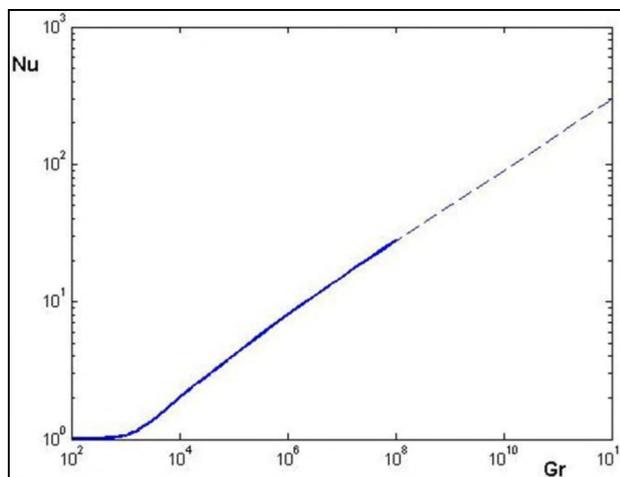


Рисунок 7 – Зависимость числа Нуссельта от числа Грасгофа при $A=1$

На рисунке 6 приведена зависимость числа Нуссельта от числа Грасгофа. После она обработана на языке MATLAB. На рисунке 7 приведены сравнения данного результата (“—”) с результатами, полученными авторами на работе (М. Н. Ашугбаев, О. А. Gurbanmyradow, G. A. Çoranow 2009 г.) (“---”).

Сравнение результатов, полученных в COMSOL Multiphysics в двух работах при значении отношении длин сторон, приводится на рисунке 8. В этом случае, в отличие от случая $A=1$, в рамках стационарной постановки, устойчивый расчет удастся провести лишь при $Gr \leq 9 \cdot 10^6$. Действительно, на рисунке 8 изображено распределение абсолютной безразмерной скорости, т. е. числа Рейнольдса) при $A=4$, и $Gr = 5.62 \cdot 10^6$.

Из этого результата следует, что максимальное значение числа Рейнольдса при заданном значении параметров A и Gr равняется 1251.9. Это число базировалось на ширине прямоугольника, но, как видно из рисунков 3–4 и 9, максимальные скорости

течения воздуха происходят вдоль вертикальных сторон. Поэтому с физической точки зрения более корректно рассмотрение числа Рейнольдса,

$$Re_H = \frac{|\mathbf{u}| H \rho}{\eta} = A \cdot Re,$$

базирующееся на длину вертикальной стороны, которая A раз превосходит число Рейнольдса, базирующегося на ширине. Таким образом, максимальное значение числа, Re_H равняется 5007,6, что говорит о том, что поле течения турбулентное.

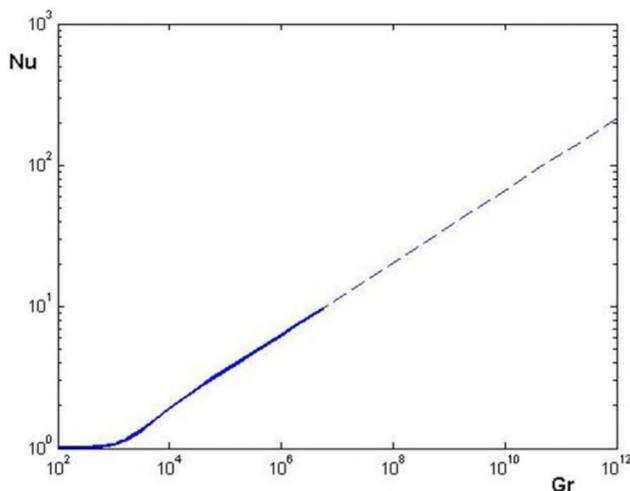


Рисунок 8 – Зависимость числа Нуссельта от числа Грасгофа при $A = 4$

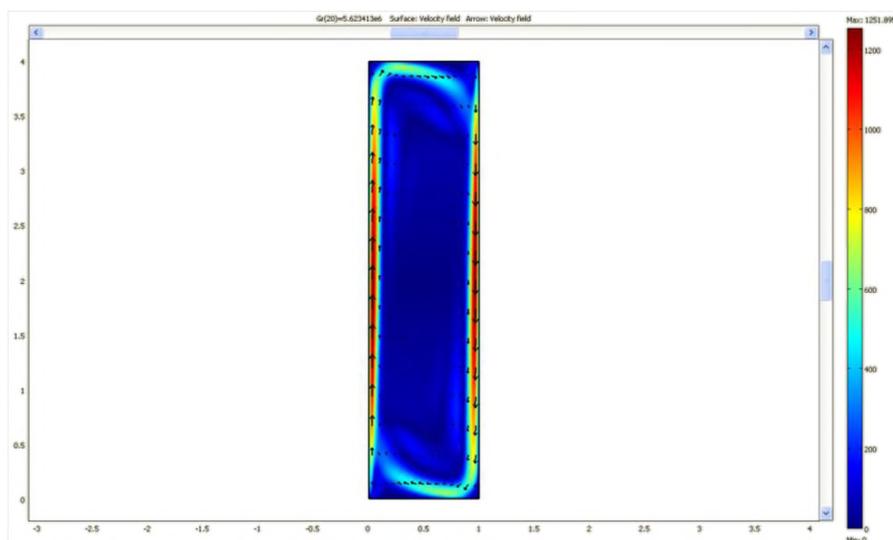


Рисунок 9 – Изображение абсолютного значения $|u'|$ (surface plot) и вектора u' (arrow) безразмерной скорости при $A = 4$ и $Gr = 5.62 \cdot 10^6$

В силу сказанного, малые ошибки в процессе вычисления поля скоростей приводят к заметным отклонениям решения от стационарного значения. Поэтому, при использовании стационарного решателя, итерационный процесс не сходится.

Список использованных источников

1. Ашырбаýев, М. Н. Gönüburçlukda erkin konwektiw ýylylyk çalşygynyň Nawýe-Stoksuň iki ölçegli deňlemesiniň çäklerindäki deňewi / М. Н. Ашырбаýев, О. А. Gurbanmyradow, G. A. Çopanow / HTTU. Türkmen ylmy galkynyş we halkara gatnaşyklar ýolunda (Ylmy makalalar ýygynyndysy – 2), Aşgabat, Ylym. – 2009, 186–206 s.

2. Красников, Г. Е. Моделирование физических процессов с использованием пакета Comsol Multiphysics: учеб. пособие / Г. Е. Красников, О. В. Нагорнов, Н. В. Старостин; – М. : НИЯУ МИФИ, 2012. – 184 с.
3. Полежаев, В. И. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье – Стокса / В. И. Полежаев [и др.] – М. : Наука, 1987. – 273 с.