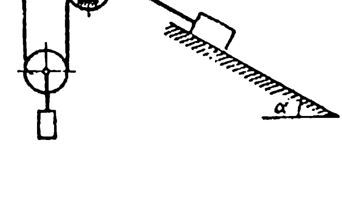
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

Задания и методические указания
к выполнению расчетно-графических работ по теоретической механике (кинематика и динамика)

для студентов специальности
1 – 36 09 01 Машины и аппараты пищевых производств



Брест 2023

УДК 539.3: 624.04

Теоретическая механика является одной из основных общетехнических дисциплин, составляющих фундамент для изучения специальных дисциплин и подготовки квалифицированных инженеров технических специальностей. Для приобретения навыков инженерных расчетов студенты выполняют расчетно-графические работы по основным разделам курса теоретической механики. Методические указания содержат краткий теоретический материал и условия заданий для выполнения расчетно-графических работ.

Составители: А. И. Веремейчик, доцент, к.ф.-м.н.
В. М. Хвисевич, профессор, к.т.н.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Выполнение расчетно-графических работ, их оформление и защита являются элементами самостоятельной работы студентов и призваны помочь им в усвоении соответствующего раздела курса. Перед выполнением работы студенту необходимо изучить теоретический материал, проработать с помощью учебников и пособий практические способы решения задач по данной теме, научиться на конкретных примерах применять имеющиеся методики решения и выбирать оптимальные из них. При защите расчетно-графической работы необходимо ответить на контрольные вопросы, связанные с ее выполнением, и показать умение решать задачи по ее тематике.

Задания и методические указания соответствуют учебному плану специальности 1 – 36 09 01 Машины и аппараты пищевых производств, и включают краткие теоретические сведения, условия задания для выполнения расчетно-графических работ, примеры расчетов и вопросы для самоконтроля.

УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

1. Расчетно-графические работы выполняются на стандартных листах формата А4 (210×297 мм) со штампом 15 мм и нумерацией страниц.

2. Порядок оформления: титульный лист с указанием варианта; задание с указанием исходных данных и схем; текст решения с необходимыми пояснениями и расчетными схемами; выводы; список литературы.

3. Текстовая часть выполняется в соответствии с требованиями к оформлению текстовых документов. Расчеты выполняются в общем виде, в полученные выражения подставляются значения входящих в них величин, записывается

числовой результат с указанием размерности ответа. Все вычисления производятся в десятичных дробях с точностью до трех-четырех значащих цифр.

4. Схемы выполняются с соблюдением правил графики и масштабов стандарта БрГТУ. Для наглядности и удобства схемы и графики можно выполнять на миллиметровой бумаге. Все рисунки (схемы, графики и т. д.) должны быть пронумерованы и упомянуты в тексте.

ЗАДАНИЕ 1. КИНЕМАТИКА ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМА

1.1. Краткие теоретические сведения

1.1.1 Разложение плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное

Плоскопараллельным (плоским) называется такое движение тела, при котором все его точки перемещаются в параллельных плоскостях. На рисунке 1.1 показан ряд положений стержня AB, совершающего плоскопараллельное движение в плоскости рисунка.

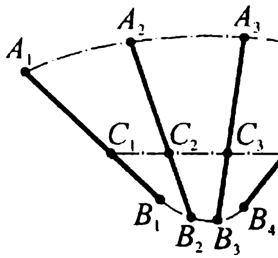


Рисунок 1.1 – Схема плоскопараллельного движения

Из представленной схемы видно, что каждая точка стержня движется по своей траектории, форма которой отличается от траекторий иных точек. При этом в процессе движения происходит поворот тела. Поэтому плоское движение характеризуется как линейными скоростями отдельных точек тела, так и угловой скоростью поворота тела.

Плоскопараллельное движение можно представить как результат сложения двух движений: поступательного вместе с некоторой точкой, принимаемой за полюс, и вращательного вокруг полюса. Как правило, в качестве полюса выбирается точка с известными кинематическими параметрами (траекторией, скоростью, ускорением). На рисунке 1.2, а показано, как перемещение отрезка AB из положения A_0B_0 в положение A_1B_1 может быть представлено в виде последовательности двух перемещений: поступательного вместе с точкой A и поворота на угол φ вокруг точки A.

Из анализа приведенной схемы движения отрезка следует, что скорость точки B может быть найдена в виде геометрической суммы векторов скорости точки A и скорости точки B в ее вращении вокруг точки A (рисунок 1.2, б):

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA}. \qquad (1.1)$$

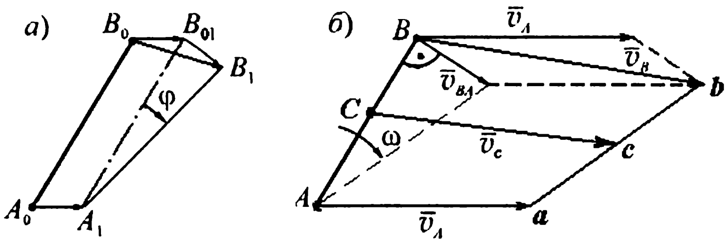


Рисунок 1.2 – Схема сложения двух движений

Поскольку движение точки B вокруг A происходит по дуге окружности радиуса AB, то вектор $\bar{v}_{BA}$ направляется перпендикулярно отрезку AB в сто-рону вращения тела вокруг точки A. Численное значение этой скорости равно произведению угловой скорости тела на расстояние AB:

$$v_{BA} = \omega \cdot AB. \tag{1.2}$$

Из построений на рисунке 1.2, б видно, что имеет место соотношение:

$$\frac{ac}{ab} = \frac{AC}{AB},$$

которое дает удобный графический способ нахождения скорости произвольной точки C прямой AB (в том числе вне самого отрезка AB).

При решении задач с использованием соотношения (1.1) следует выполнить построение векторов $\bar{v}_A$, $\bar{v}_{BA}$ и $\bar{v}_B$. После этого искомые скорости можно определить либо проецированием векторного соотношения (1.1) на оси координат, либо путем решения геометрической задачи об определении длин сторон или углов в треугольнике, образованного указанными векторами.

Вследствие того, что $\bar{v}_{BA} \perp BA$, из соотношения (1.1) следует теорема, которая позволяет определить скорость точки, если известно направление ее вектора (рисунок 1.3): проекции векторов скоростей любых двух точек абсолютно твердого тела на прямую, соединяющую эти две точки, равны между собой: $v_{Bx} = v_{Ax}$.

Применительно к рисунку 1.3 в соответствии с этой теоремой можно записать:

$$v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta . \tag{1.3}$$

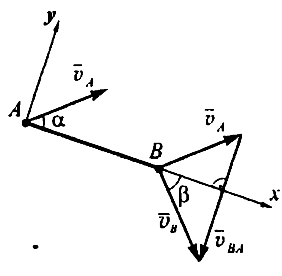


Рисунок 1.3 – Графическая интерпретация теоремы о проекциях скоростей

Физический смысл, заключенный в этой теореме, очевиден – в абсолютно твердом теле расстояние между любыми точками должно всегда оставаться неизменным. Проецируя (1.3) на ось y, можно найти угловую скорость тела, если известны скорости двух любых его точек:

$$\omega = \frac{v_{By} - v_{Ay}}{AB}. \tag{1.4}$$

1.1.2. Определение скоростей точек фигуры с использованием мгновенного центра скоростей

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка плоской фигуры, движущейся в своей плоскости, линейная скорость которой в данный момент времени равна нулю. Эта точка может находиться за пределами периметра фигуры, но обязательно лежит в одной подвижной плоскости вместе с фигурой.

Существует два основных варианта определения положения МЦС, каждый из которых связан с наличием тех или иных исходных данных.

1. Условием задачи оговорено, что плоская фигура катится без скольжения по неподвижной поверхности. В этом случае МЦС находится в точке соприкосновения фигуры с поверхностью, как это показано на рисунке 1.4, а.

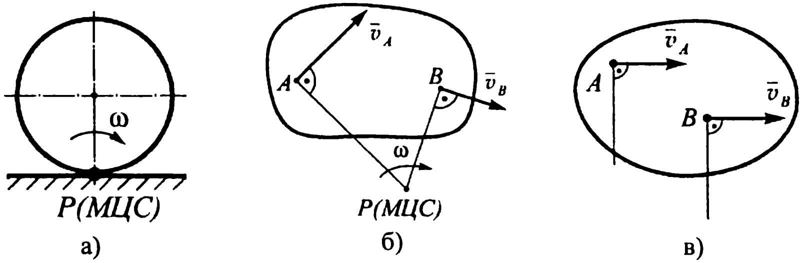


Рисунок 1.4 – Способы определения положения МЦС

2. Известны направления векторов скоростей двух точек плоской фигуры. Тогда для определения положения МЦС необходимо провести перпендикуляры к векторам скоростей. Возможны три случая:

а) если векторы скоростей точек плоской фигуры не параллельны, то точка пересечения перпендикуляров, проведенных к ним, является мгновенным центром скоростей (рисунок 1.4, б).

б) перпендикуляры к векторам скоростей параллельны (рисунок 1.4, в). Такое их расположение приводит к тому, что эти перпендикуляры не пересекаются. Следовательно, отсутствует мгновенный центр вращения. Это означает, что в данный момент времени отсутствует вращение тела, и тело движется мгновенно-поступательно. Поэтому в данный момент времени скорости всех то-чек тела одинаковы, а угловая скорость тела равна нулю.

в) перпендикуляры к векторам скоростей двух точек тела совпадают. В этом случае мгновенный центр скоростей находится на пересечении двух линий:

общего перпендикуляра к векторам скоростей и отрезка, проведенного через концы этих векторов, как это показано на рисунке 1.5.

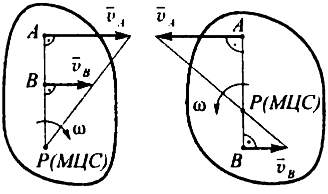


Рисунок 1.5 – Определение положения МЦС

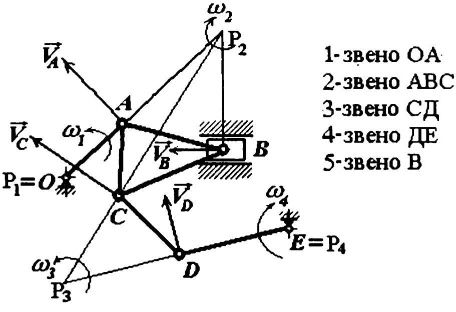


Рисунок 1.6 – Схема механизма, вектора скоростей точек его звеньев и направления угловых скоростей

Общим для всех случаев является перпендикулярность вектора скорости любой точки плоской фигуры относительно направления от точки на МЦС (так как фигура в ее мгновенном положении вращается вокруг МЦС). Это свойство используется также для определения направлений векторов скоростей точек при известном положении мгновенного центра скоростей. Если положение МЦС найдено, то для определения угловой скорости тела и скорости заданной точки при известной величине скорости другой точки можно воспользоваться соотношениями:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}. \qquad (1.5)$$

Из соотношений видно, что скорости точек пропорциональны расстояниям до МЦС. Это обстоятельство можно использовать также и для контроля вычислений.

На рисунке 1.6 показано построение мгновенных центров скоростей точек звеньев механизма, направления векторов скоростей точек и угловых скоростей звеньев. Построив МЦС звена, по направлению вектора скорости полюса находим и показываем направление угловой скорости звена, а затем направляем в соответствующую сторону вектор скорости очередной рассматриваемой точки. Отметим, что каждое звено механизма имеет свой МЦС, который перемещается по плоскости при движении механизма.

1.1.3 Определение ускорений точек тела, совершающего плоскопараллельное движение

Представление плоскопараллельного движения тела в виде комбинации поступательного движения вместе с полюсом и вращательного вокруг полюса приводит к следующему соотношению для расчета ускорений, которое можно получить путем дифференцирования (1.1):

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}. \qquad (1.6)$$

где $\bar{a}_A$ – ускорение полюса, $\bar{a}^n_{BA}$, $\bar{a}^\tau_{BA}$ – нормальное и касательное ускорения точки B при движении вокруг полюса A. Расчет этих ускорений ведется по формулам:

$$a^\tau_{BA} = \varepsilon \cdot AB, \quad a^n_{BA} = \omega^2 \cdot AB. \tag{1.7}$$

Вектор $\bar{a}^\tau_{BA}$ направляется перпендикулярно AB в сторону углового ускорения тела, а вектор $\bar{a}^n_{BA}$ – от точки B к точке A, как это показано на рисунке 1.7, причем угол наклона вектора ускорения $\bar{a}_{BA}$ одинаков для всех точек тела ($tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$), а его направление соответствует направлению ε.

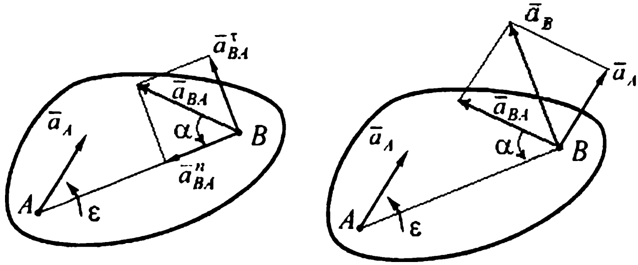


Рисунок 1.7 – Определение ускорения точки В

Угловые скорости ω звеньев механизма в результате расчета скоростей являются известными, поэтому нормальные компоненты ускорений легко вычисляются. Если расстояние от какой-либо точки до МЦС постоянно в течение всего процесса движения или изменяется по известному или легко определяемому закону, то угловое ускорение определяют как производную от угловой скорости тела. Этот прием, в частности, используется для расчетов угловых ускорений катящихся тел. В иных случаях нахождение касательных ускорений в движении точек вокруг полюса, а с ними и угловых ускорений тел, осуществляется путем решения векторного уравнения (1.6), что практически лучше всего выполняется построением плана ускорений для данной точки звена или для всего механизма в целом. Задача по определению ускорения точки может решаться с использованием одного или двух полюсов в зависимости от того, известно или неизвестно направление полного ускорения рассматриваемой точки (решается одно или два векторных уравнения). Построение выполняется последовательно, начиная с точки, принадлежащей ведущему звену.

Пример построения плана ускорений для точек механизма приведен на рисунке 1.8, для случая, когда $\omega_1 = const$. Модули векторов ускорений определяются с использованием принятого масштаба плана ускорений. По величине и направлению касательных ускорений находятся величины и направления угловых ускорений звеньев.

Более подробно о методике решения векторного уравнения (1.6) можно познакомиться по литературе [1–8].

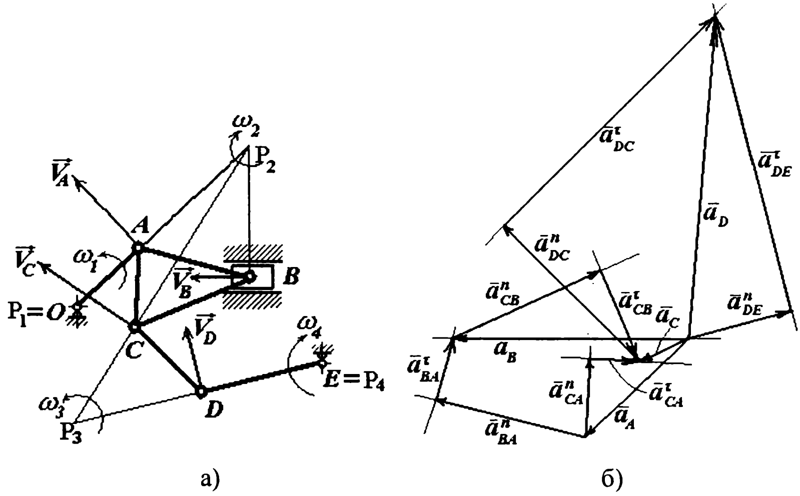


Рисунок 1.8 – Схема механизма (а) и план ускорений (б)

1.2. Задание 1 к выполнению расчетно-графической работы «Кинематический анализ плоского механизма»

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек *B* и *C*, а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат. Необходимые для расчета исходные данные приведены в таблице 1.1, а схемы механизмов приведены на рисунке 1.9. Номер варианта для выбора исходных данных и схем указывается преподавателем при выдаче задания.

Таблица 1.1 – Исходные данные к заданию 1

Вариант	**Размеры, см**				ω_{OA}, рад/с	ω_l, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2	v_A, см/с	a_A, см/с^2
	OA	*R*	*AB*	*AC*					
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1	40	–	–	15	5	–	8	–	–
2	30	13	–	9	3	–	3	–	–
3	–	45	–	–	–	–	–	50	100
4	35	–	–	40	4	–	7	–	–
5	25	–	–	15	1	–	2	–	–
6	40	20	–	8	1	1,5	0	–	–
7	35	–	75	55	5	–	8	–	–
8	–	–	20	12	–	–	–	40	20
9	–	–	45	25	–	–	–	20	10
10	25	–	80	15	1	–	3	–	–
11	–	–	30	20	–	–	–	10	0
12	–	–	30	18	–	–	–	20	20
13	25	–	55	45	2	–	5	–	–

Продолжение таблицы 1.1

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
14	45	20	–	9	3	10	0	–	–
15	40	20	–	9	1	–	2	–	–
16	55	15	–	–	2	–	4	–	–
17	–	35	–	15	–	–	–	80	50
18	10	–	10	7	2	–	5	–	–
19	20	13	–	8	1	2	0	–	–
20	–	–	20	7	–	–	–	10	15
21	30	–	60	20	3	–	7	–	–
22	35	–	60	35	4	–	8	–	–
23	–	–	60	15	–	–	–	5	10
24	25	–	35	10	2	–	2	–	–
Примечание: ω_{OA} и ε_{OA} – угловая скорость и угловое ускорение кривошипа OA при заданном положении механизма; ω_1 – угловая скорость колеса I (постоянная); v_A и a_A – скорость и ускорение точки A. Качение колес происходит без скольжения.									

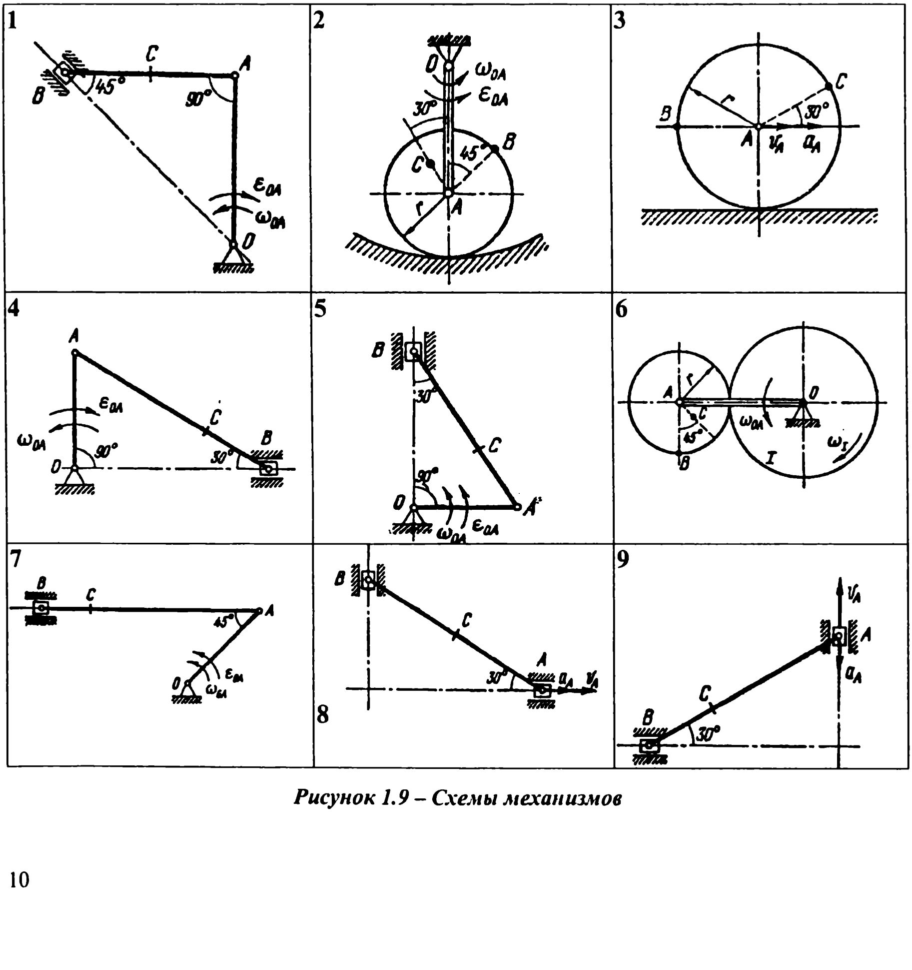
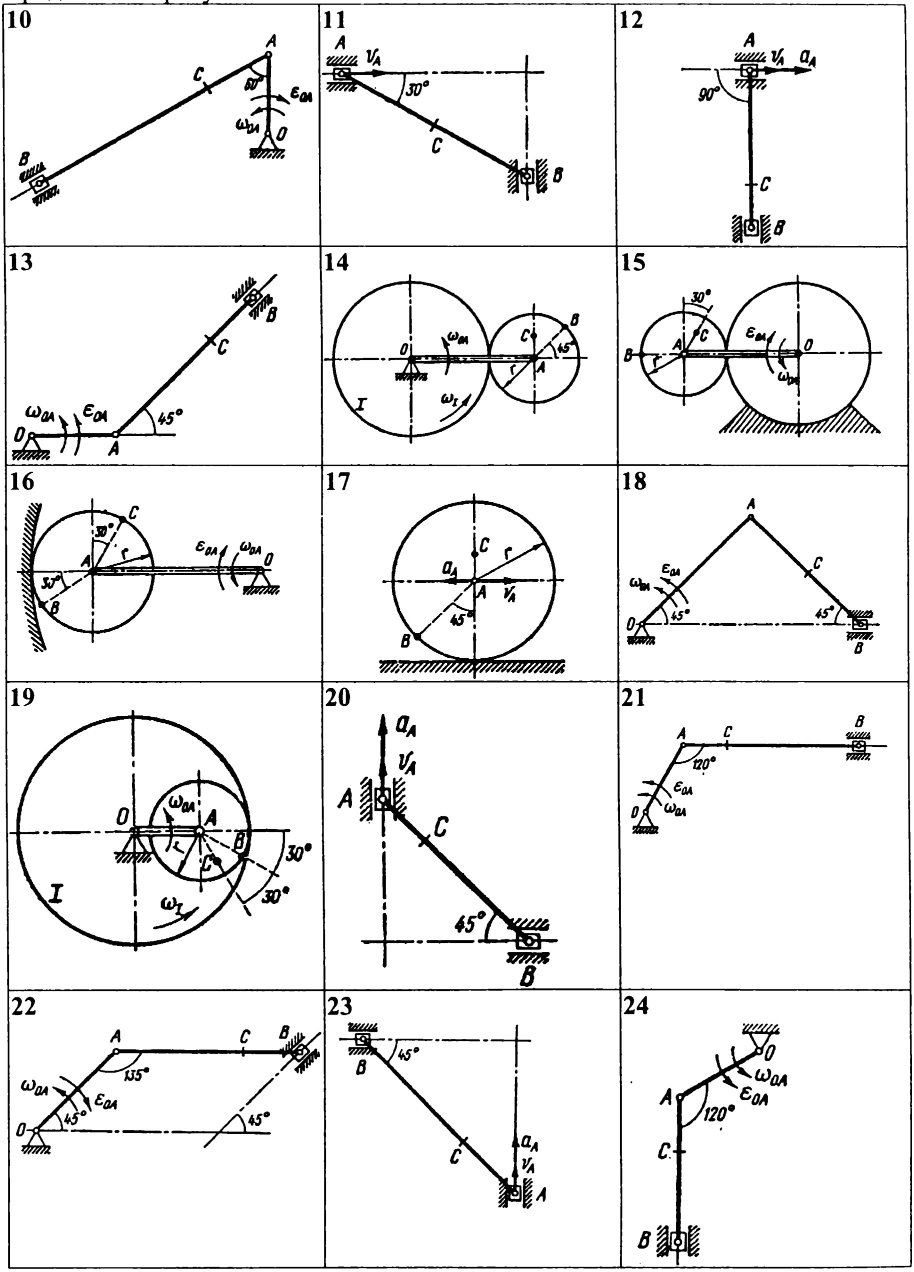


Рисунок 1.9 – Схемы механизмов

Продолжение рисунка 1.9



1.3. Пример расчета

Определить скорость и ускорение точки B, а также угловую скорость и угловое ускорение звена 2 механизма, изображенного на рисунке 1.10.

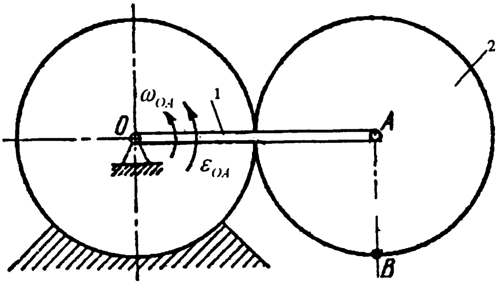


Рисунок 1.10 – Схема механизма

Дано: $OA = 24$ см, $r_2 = 12$ см, $\omega_{OA} = 2$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = 8$ рад/с^2.

Решение:

1. Вычислим модуль скорости точки A кривошипа звена 1 (водила) в заданном положении. Так как звено 1 совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O, то:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 24 = 48\ см/с.$$

Вектор $\overline{v}_A$ перпендикулярен звену 1 и направлен в соответствии с ω_{OA} (рисунок 1.11).

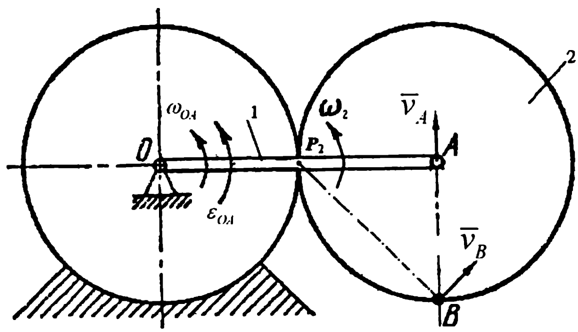


Рисунок 1.11 – Скорости точек и звеньев механизма

Звено 2 (подвижное колесо) совершает плоскопараллельное движение. Определим положение мгновенного центра скоростей звена 2. Так как колесо катится по неподвижной поверхности (неподвижному колесу), мгновенный центр скоростей звена 2 находится в точке касания колеса P_2.

Определим угловую скорость звена 2:

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP_2} = \frac{48}{12} = 4\ рад/с. \qquad (1.8)$$

Определим скорость точки B:

$$v_B = \omega_2 \cdot BP_2 = 4 \cdot 17 = 68\ см/с,$$

где BP_2 определяем с использованием теоремы Пифагора из ΔP_2AB:

$$BP_2 = \sqrt{(AP_2)^2 + (AB)^2} = \sqrt{12^2 + 12^2} \approx 17\ см.$$

Вектор $\bar{v}_B$ направлен перпендикулярно P_2B в соответствии с направлением ω_2 (рисунок 1.11).

2. Определяем ускорение точки A. Т.к. точка A принадлежит звену OA, совершающему вращательное движение, то ускорение точки разложим на 2 составляющие:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau, \tag{1.9}$$

где:

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 2^2 \cdot 24 = 96\ см/с^2,$$
$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 8 \cdot 24 = 192\ см/с^2.$$

Нормальная составляющая ускорения точки A направлена к оси O вращения, касательная составляющая – по касательной к траектории точки A (перпендикулярно радиусу OA) в соответствии с направлением углового ускорения ε_{OA}.

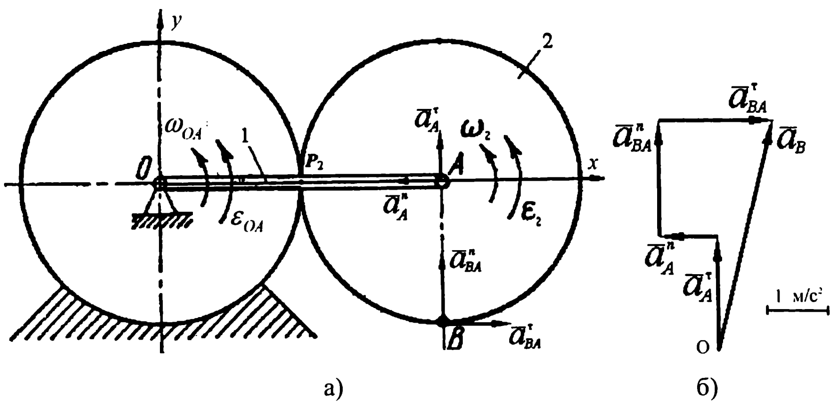


Рисунок 1.11 – Ускорения точек и звеньев механизма (а) и план ускорений (б)

Ускорение точки B найдем по теореме о сложении ускорений (1.6).

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau.$$

Так как $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau$, получим:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau. \tag{1.10}$$

По формулам (1.7) находим нормальное и касательное ускорения точки B при движении вокруг полюса A:

$$a^n_{BA} = \omega^2_{AB} \cdot AB = \omega^2_2 \cdot AB, \qquad (1.11)$$
$$a^\tau_{BA} = \varepsilon_{AB} \cdot AB = \varepsilon_2 \cdot AB.$$

Определяем угловое ускорение колеса 2:

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_A}{AP_2}\right) = \frac{1}{AP_2}\frac{dv_A}{dt} = \frac{1}{AP_2} \cdot a^\tau_A = \frac{192}{12} = 16 \text{ рад/с}^2.$$

Тогда:

$a^n_{BA} = 4^2 \cdot 12 = 192$ см/с^2, $\qquad a^\tau_{BA} = 16 \cdot 12 = 192$ см/с^2.

Ускорение точки B определим, решив уравнение (1.8).

1. Аналитическое решение. Введем систему координат Oxy и спроецируем векторное равенство (1.8) на эти оси:

$$a_{Bx} = -a^n_A + a^\tau_{BA} = -96 + 192 = 96 \text{ см/с}^2,$$
$$a_{By} = a^\tau_A + a^n_{BA} = 192 + 192 = 384 \text{ см/с}^2,$$

Ускорение точки B:

$$a_B = \sqrt{a^2_{Bx} + a^2_{By}} = \sqrt{96^2 + 384^2} = 396 \text{ см/с}^2.$$

2. Геометрическое решение. Строим план ускорений. Для этого из произвольной точки O в выбранном масштабе откладываем вектор $\bar{a}^\tau_A$, из конца вектора $\bar{a}^\tau_A$ – вектор $\bar{a}^n_A$, затем откладываем вектора $\bar{a}^n_{BA}$ и $\bar{a}^\tau_{BA}$. Соединяя точку O с концом вектора $\bar{a}^\tau_{BA}$, получаем вектор $\bar{a}_B$. Измеряя, находим: a_B=395 см/с^2. План ускорений приведен на рисунке 1.11, б.

1.4. Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение твердого тела называется плоскопараллельным?

2. Почему для описания плоскопараллельного движения тела достаточно изучить движение плоской фигуры?

3. Суммой каких движений представляют плоскопараллельное движение? Почему?

4. Зависят ли поступательное перемещение плоской фигуры и ее поворот от выбора полюса?

5. Как задают закон плоскопараллельного движения тела?

6. Сформулируйте теорему о сложении скоростей точек плоской фигуры.

Какие используются методы для расчета скоростей точек плоской фигуры?

7. Покажите, что проекции скоростей точек неизменяемого отрезка на ось, совпадающую с этим отрезком, равны между собой.

8. Как связана скорость точки отрезка прямой со скоростями двух крайних точек этого отрезка?

9. Как определить угловую скорость тела при известных векторах скоростей двух точек тела?

10. Какую точку плоской фигуры называют мгновенным центром скоростей и каковы основные случаи определения его положения?

11. Как определяется положение МЦС при условии, что скорости двух точек плоской фигуры не параллельны друг другу?

12. Скорости двух точек плоской фигуры параллельны друг другу. Как найти угловую скорость, не определяя расстояние до МЦС? Проиллюстрируйте ответ.

13. Скорости двух точек плоской фигуры антипараллельны. Как найти угловую скорость, не определяя расстояния до МЦС? Проиллюстрируйте ответ.

14. Что представляет собой картина распределения скоростей точек плоской фигуры в данный момент времени?

15. Как связана скорость точки с расстоянием до мгновенного центра скоростей?

16. Как определить величину и направление угловой скорости тела при известном положении мгновенного центра скоростей?

17. Сформулируйте теорему о сложении ускорений точек плоской фигуры.

18. По каким формулам можно вычислить величину нормального ускорения точки при ее вращении относительно выбранного полюса?

19. По какой формуле вычисляется величина касательного ускорения точки при ее вращении относительно выбранного полюса?

20. Как направлено нормальное ускорение точки при ее вращении относительно выбранного полюса?

21. Как направлено касательное ускорение точки при ее вращении относительно выбранного полюса?

22. Что такое план ускорений?

23. Каким образом можно вычислить угловую скорость и угловое ускорение тела при известных ускорениях двух точек этого тела?

ЗАДАНИЕ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ

2.1. Краткие теоретические сведения

Общее уравнение динамики применяется к исследованию движения несвободных механических систем, тела или точки которых движутся с некоторыми ускорениями. В соответствии с принципом Даламбера совокупность приложенных к механической системе активных сил, сил реакций связей и сил инерции всех точек системы образует уравновешенную систему сил. Если к такой системе применить принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа), то получим объединенный принцип Лагранжа-Даламбера: если механическая система, на которую наложены голономные, стационарные, идеальные связи, движется с ускорением, то добавляя к действующим на нее активным силам и их моментам фиктивные силы и моменты сил инерции, получим формально уравновешенную систему сил, для которой можно применить принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики можно сформулировать следующим образом: при движении несвободной механической системы с двусторонними, идеальными, стационарными и голономными связями сумма элементарных работ всех приложенных к точкам системы активных сил $\overline{F_k^a}$ и сил инерции $\overline{\Phi_k}$ на любом возможном перемещении системы равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{\Phi} = 0 \ . \qquad (2.1)$$

Выражению можно придать другие эквивалентные формы:

а) в виде скалярного произведения векторов:

$$\sum_{k=1}^{n} (\overline{F_k^a} + \overline{\Phi_k}) \cdot \delta\overline{r_k} = 0 \, ; \qquad (2.2)$$

б) в аналитическом виде:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\left(F_{kx}+\Phi_{kx}\right)\delta x_k+(F_{ky}+\Phi_{ky})\delta y_k+(F_{kz}+\Phi_{kz})\delta z_k\right]=0. \qquad (2.3)$$

В этих уравнениях сила инерции материальной точки $\overline{\Phi_k}=-m_k\overline{a_k}$, а ее проекции на оси координат $\Phi_{kx}=-m_k\ddot{x}_k$, $\Phi_{ky}=-m_k\ddot{y}_k$, $\Phi_{kz}=-m_k\ddot{z}_k$ тогда уравнения можно представить в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{n}(\overline{F_k}-m_k\overline{a_k})\cdot\delta\overline{r_k}=0, \qquad (2.4)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\left(F_{kx}-m_k\ddot{x}_k\right)\delta x_k+(F_{ky}-m_k\ddot{y}_k)\delta y_k+(F_{kz}-m_k z_k)\delta\ddot{z}_k\right]=0. \qquad (2.5)$$

Главный вектор сил инерции точек тела, при любом его движении:

$$\overline{\Phi}=-M\overline{a_C}, \qquad (2.6)$$

т.е. главный вектор равен произведению массы тела на ускорение его центра масс и направлен в сторону, противоположную ускорению центра масс.

Равнодействующая сил инерции точек тела при поступательном движении приложена к центру масс тела, и определяется по формуле (2.6).

Главный момент сил инерции точек тела относительно неподвижной оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на модуль углового ускорения и направлен в сторону, противоположную угловому ускорению:

$$M_z^{\Phi}=I_z\varepsilon. \qquad (2.7)$$

2.2. Задание 2 к выполнению расчетно-графической работы «Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы»

С помощью принципа Даламбера-Лагранжа определить ускорение груза 1 и натяжение в ветви нити, к которой он прикреплен. Массой нитей и упругих элементов пренебречь. Гибкие нити считать нерастяжимыми. Качение катка, представляющего собой однородный цилиндр, происходит без скольжения. Номера схем выбираются из рисунка 2.1 в соответствии с вариантом.

Пояснения к обозначениям и числовым данным:

m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел *1-4*, выражаемые через массу m, R, r – радиусы окружностей колес (индексы указывают на соответствующее тело), i_2, i_3 – радиусы инерции относительно осей вращения тел, проходящих через их центры масс (если радиусы инерции тела не заданы, то оно считается однородным диском), α и β – углы наклона плоскостей, f и δ – коэффициенты трения скольжения и качения (соответственно).

Дано: $m_1=3m$, $m_2=m$, $m_3=\cdot m$, $m_4=2m$, $R_2=0{,}3$ *м*, $R_3=0{,}3$ *м*, $i_2=0{,}20$ *м*, $i_3=0{,}15$ *м*, $f=0{,}2$, $\delta=0{,}25\cdot10^{-2}$ *м*, $\alpha=60°$, $\beta=45°$.

Схемы механических систем приведены на рисунке 2.1.

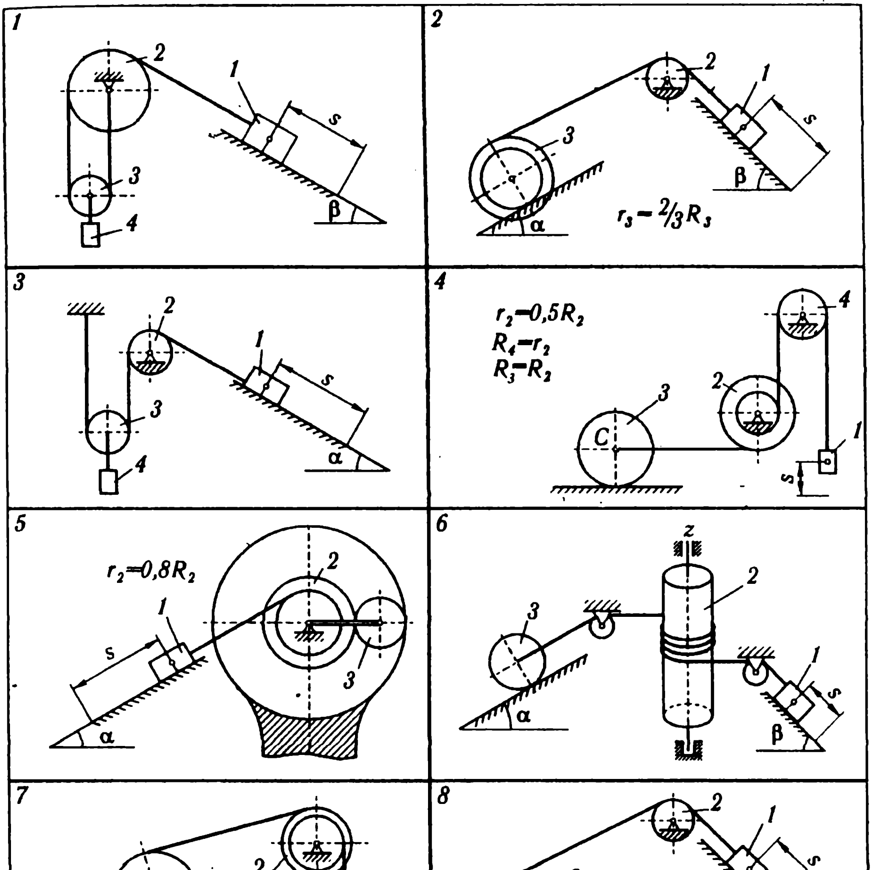
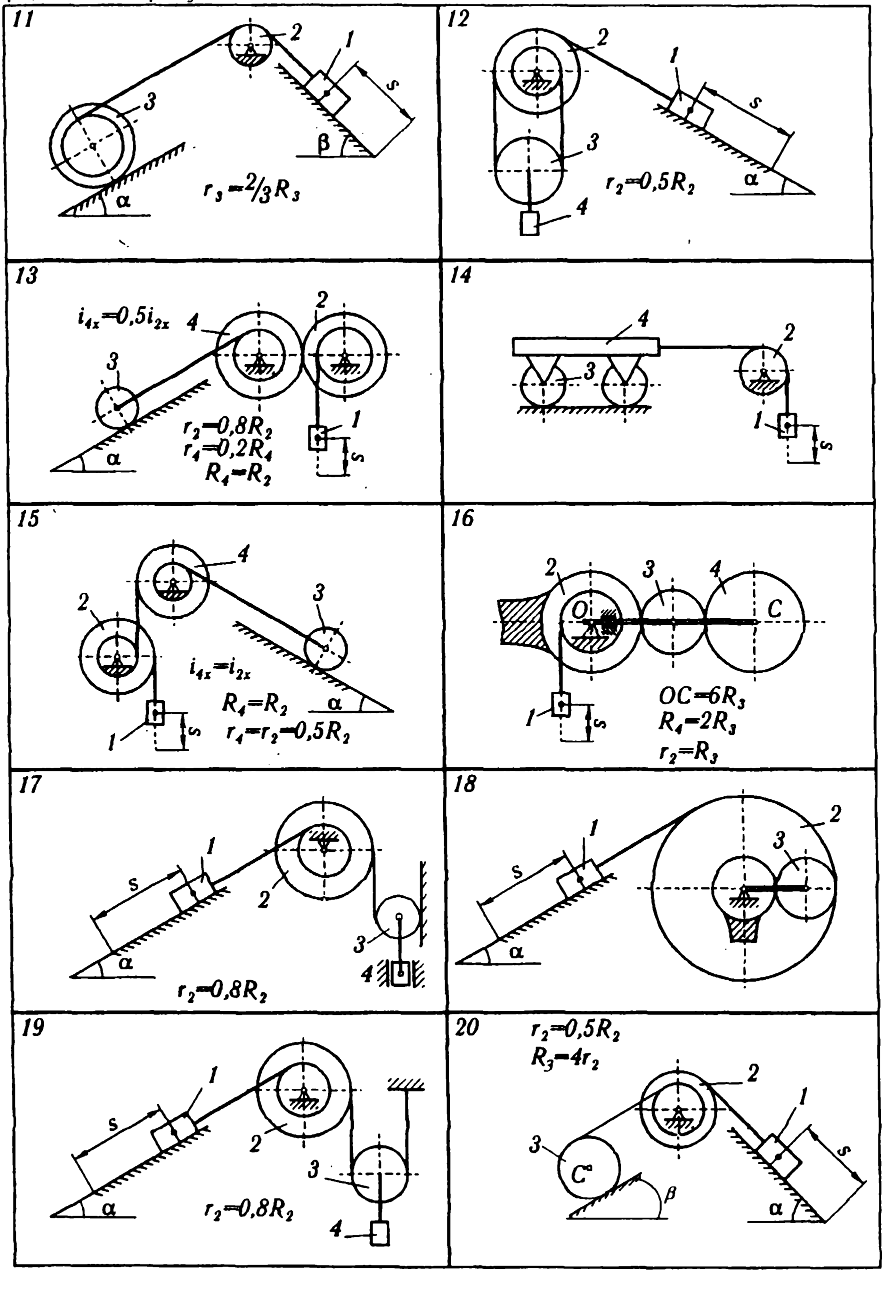
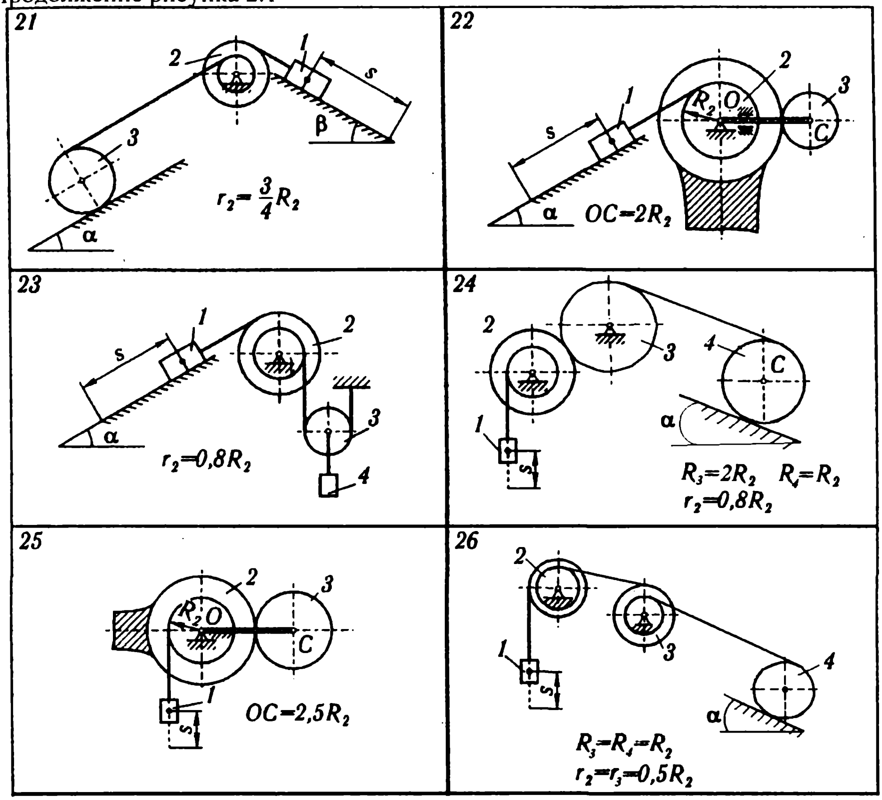


Рисунок 2.1 – Схемы механических систем

Продолжение рисунка 2.1



Продолжение рисунка 2.1



2.3. Пример выполнения задания

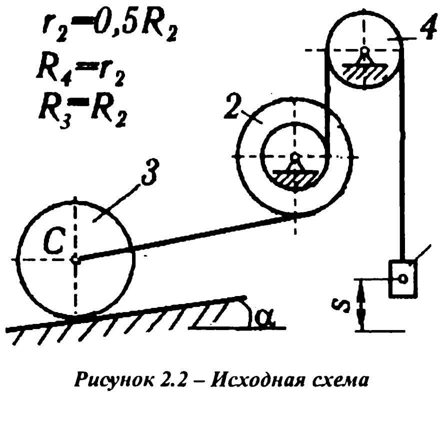


Рисунок 2.2 – Исходная схема

Решение:

Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из тел 1, 2, 3, соединенных нитями. Механическая система имеет одну степень свободы. Связи, наложенные на эту систему – идеальные. Для определения закона движения груза 1 применим общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^\Phi = 0, \tag{2.8}$$

где $\sum \delta A_k{}^a$ и $\sum \delta A_k{}^\Phi$ – сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на возможном перемещении системы.

Изображаем на чертеже активные силы $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$. Задавшись направлением ускорения $\bar{a}_1$, изображаем на чертеже силы инерции, $\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_3$ и пары сил инерции с моментами $M_2{}^\Phi$, $M_3{}^\Phi$ и $M_4{}^\Phi$, величины которых равны:

$$\Phi_1 = m_1 a_1, \qquad \Phi_3 = m_3 a_{C3}, \qquad M_2{}^\Phi = I_{C_2}\varepsilon_2 = m_2 i_2{}^2 \varepsilon_2,$$

$$M_3{}^\Phi = I_{C3}\varepsilon_3 = \frac{m_3 R_3{}^2}{2}\varepsilon_3, \quad M_4{}^\Phi = I_{C_4}\varepsilon_4 = \frac{m_4 r_4{}^2}{2}\varepsilon_4. \tag{2.9}$$

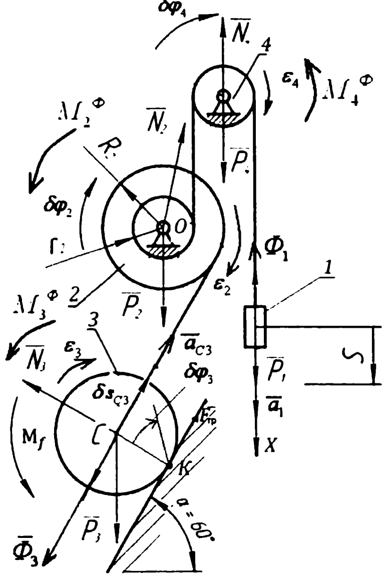


Рисунок 2.3 – Расчетная схема механизма

Сообщим системе возможное перемещение и найдем возможную работу активных сил как сумму элементарных работ:

$$\sum \delta A_k^a = \delta A(\bar{P}_1) + \delta A(\bar{P}_3) + \delta A(M_f), \tag{2.10}$$

где $\delta A(\bar{P}_1) = P_1 \cdot \delta s_1$, $\delta A(\bar{F}_a) = F_a \cdot \delta s_1$, $\delta A(M_f) = -M_f \cdot \delta\varphi_3$, где $M_f = N_3 \cdot \delta = P_3 \cos\alpha \cdot \delta = mg\cos\alpha \cdot \delta$.

Выразим все перемещения через δs_1 , а ускорения через a_1:

$$\begin{aligned}
&\delta\varphi_4 = \frac{\delta s_1}{r_4}, && \varepsilon_4 = \frac{a_1}{r_4},\\
&\delta\varphi_2 = \frac{\delta s_1}{r_2}, && \varepsilon_2 = \frac{a_1}{r_2},\\
&\delta s_{C3} = \delta\varphi_2 \cdot R_2 = \frac{\delta s_1}{r_2}\cdot R_2, && a_{C3} = \varepsilon_2 \cdot R_2 = \frac{a_1}{r_2}\cdot R_2\\
&\delta\varphi_3 = \frac{\delta s_{C3}}{R_3} = \frac{R_2}{R_3}\frac{\delta s_1}{r_2}. && \varepsilon_3 = \frac{a_{C3}}{R_3} = \frac{R_2}{R_3}\frac{a_1}{r_2}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{gathered}
\sum \delta A_k^a = m_1 g\cdot\delta s_1 - m_3 g\cdot\delta s_{C3}\cdot\sin\alpha - M_f\cdot\delta\varphi_3 = m_1 g\cdot\delta s_1 - m_3 g\cdot\frac{\delta s_1}{r_2}\cdot R_2\cdot\sin\alpha -\\
-M_f\cdot\frac{R_2}{R_3}\frac{\delta s_1}{r_2} = \left(m_1 g - m_3 g\cdot\frac{R_2}{r_2}\cdot\sin\alpha - M_f\cdot\frac{R_2}{r_2\cdot R_3}\right)\cdot\delta s_1.
\end{gathered} \tag{2.12}$$

Тогда выражение (2.12) с учетом исходных данных примет вид:

$$\begin{gathered}
\sum \delta A_k^a = \left(3mg - mg\cdot\frac{R_2}{r_2}\cdot\sin\alpha - -mg\cos\alpha\cdot\delta\cdot\frac{R_2}{r_2\cdot R_3}\right)\cdot\delta s_1 =\\
= mg\cdot\left(3 - \frac{R_2}{r_2}\cdot\sin\alpha - \cos\alpha\cdot\delta\cdot\frac{R_2}{r_2\cdot R_3}\right)\cdot\delta s_1.
\end{gathered} \tag{2.13}$$

Найдем сумму элементарных работ сил инерции:

$$\begin{gathered}
\sum \delta A_k^\Phi = -\Phi_1\cdot\delta s_1 - M_2^\Phi\cdot\delta\varphi_2 - M_4^\Phi\cdot\delta\varphi_4 - M_3^\Phi\cdot\delta\varphi_3 - \Phi_3\cdot\delta s_{C3} =\\
= -m_1 a_1\cdot\delta s_1 - m_2 i_2^2\varepsilon_2\cdot\delta\varphi_2 - \frac{m_3 R_3^2}{2}\varepsilon_3\cdot\delta\varphi_3 - \frac{m_4 r_4^2}{2}\varepsilon_4\cdot\delta\varphi_4 - m_3 a_{C3}\cdot\delta s_{C3} =\\
= -m_1 a_1\cdot\delta s_1 - m_2 i_2^2\varepsilon_2\cdot\frac{\delta s_1}{r_2} - \frac{m_3 R_3^2}{2}\varepsilon_3\cdot\frac{R_2}{R_3}\frac{\delta s_1}{r_2} - \frac{m_4 r_4^2}{2}\varepsilon_4\cdot\frac{\delta s_1}{r_4} -\\
-m_3 a_{C3}\cdot\frac{\delta s_1}{r_2}\cdot R_2 = -m_1 a_1\cdot\delta s_1 - m_2 i_2^2\cdot\frac{a_1}{r_2}\cdot\frac{\delta s_1}{r_2} - \frac{m_3 R_3^2}{2}\frac{R_2}{R_3}\frac{a_1}{r_2}\cdot\frac{R_2}{R_3}\frac{\delta s_1}{r_2} -\\
-\frac{m_4 r_4^2}{2}\cdot\frac{a_1}{r_4}\cdot\frac{\delta s_1}{r_4} - m_3\cdot\frac{a_1}{r_2}\cdot R_2\cdot\frac{\delta s_1}{r_2}\cdot R_2 =\\
= \left(-m_1 - m_2\frac{i_2^2}{r_2^2} - \frac{m_3}{2}\frac{R_2^2}{r_2^2} - \frac{m_4}{2} - m_3\frac{R_2^2}{r_2^2}\right)a_1\cdot\delta s_1 =\\
= \left(-3m - m\frac{i_2^2}{r_2^2} - m\cdot\frac{3}{2}\frac{R_2^2}{r_2^2} - \frac{2m}{2}\right)a_1\cdot\delta s_1 = \left(-3 - \frac{i_2^2}{r_2^2} - \frac{3}{2}\frac{R_2^2}{r_2^2} - 1\right)ma_1\cdot\delta s_1.
\end{gathered}$$

Составляем уравнение (2.8):

$$mg\cdot\left(3-\frac{R_2}{r_2}\cdot\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\delta\cdot\frac{R_2}{r_2\cdot R_3}\right)\cdot\delta s_1+\left(-4-\frac{i_2^2}{r_2^2}-\frac{3}{2}\frac{R_2^2}{r_2^2}\right)ma_1\cdot\delta s_1=0.$$

Разделив на $\delta s\neq 0$, получим:

$$g\cdot\left(3-\frac{R_2}{r_2}\cdot\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\delta\cdot\frac{R_2}{r_2\cdot R_3}\right)+\left(-4-\frac{i_2^2}{r_2^2}-\frac{3}{2}\frac{R_2^2}{r_2^2}\right)a_1=0,\text{ откуда:}$$

$$a_1=\frac{g\cdot\left(3-\frac{R_2}{r_2}\cdot\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\delta\cdot\frac{R_2}{r_2\cdot R_3}\right)}{4+\frac{i_2^2}{r_2^2}+\frac{3}{2}\frac{R_2^2}{r_2^2}}.$$

Подставляем числовые значения:

$$a_1=\frac{g\cdot\left(3-\frac{0,3}{0,15}\cdot\sin 60^0-\cos 60^0\cdot 0,005\cdot\frac{0,3}{0,15\cdot 0,3}\right)}{4+\frac{0,2^2}{0,15^2}+\frac{3}{2}\frac{0,3^2}{0,15^2}}=\frac{g\cdot 2,825}{11,78}=0,24g=2,35\ \frac{м}{с^2}.$$

Для определения натяжения в ветви нити, связывающей груз 1 и блок 4, мысленно разрежем нить и заменим ее действие на груз 1 силой $\overline{T_1}$ (рисунок 2.4).

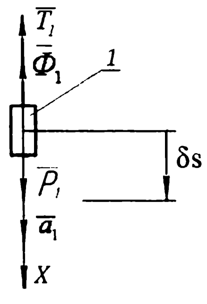


Рисунок 2.4 – Расчетная схема груза 1

Показав силу инерции $\overline{\Phi}_1$ груза и сообщив грузу возможное перемещение, составим общее уравнение динамики:

$$P_1\cdot\delta s-\Phi_1\cdot\delta s-T_1\cdot\delta s=0. \qquad (2.14)$$

Разделив на $\delta s_1\neq 0$, получим:

$T_1=P_1+\Phi_1=m_1g+m_1a_1=3mg+3m\cdot 0,24g=3,72mg$.

2.4. Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается сущность принципа Даламбера для материальной точки и механической системы?

2. Какому условию удовлетворяет в любой момент времени геометрическая сумма главных моментов внешних задаваемых сил, реакций связей и сил инерции точек несвободной механической системы?

3. Чему равен модуль и какое направление имеет главный вектор сил инерции механической системы?

4. К чему приводятся силы инерции точек твердого тела (механической системы) при его поступательном движении?

5. К чему приводятся силы инерции точек твердого тела (механической системы) при его вращении вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс тела?

6. К чему приводятся силы инерции при вращательном движении тела вокруг оси, не проходящей через центр масс?

7. К чему приводятся силы инерции точек твердого тела (механической системы) при его плоском движении?

8. Какие принципы используются при получении общего уравнения динамики?

9. Как формулируется принцип Даламбера – Лагранжа?

10. Как записывается общее уравнение динамики?

ЛИТЕРАТУРА

1. Никитин, Н. Н. Курс теоретической механики / Н. Н. Никитин. – 5-е изд. – М. : Высшая школа, 1990. – 607 с.

2. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики. Учебник для втузов / С. М. Тарг. – 12 изд., стереотип. – М.: Высшая школа, 2002. – 416 с.

3. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики. Учебное пособие для технических вузов / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – 8-е изд., стереотип. – СПб. : Лань, 2001. – 764 с.

4. Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. В 2-х т. – М. : Наука, 1975.

5. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учебное пособие для втузов / А.А. Яблонский [и др.] ; Под ред. А. А. Яблонского. – 16-е изд. стер. – М. : ИнтегралПресс, 2007. – 382 с.

6. Задания и методические указания к выполнению расчетно-графических работ по теоретической механике раздел «Кинематика» для студентов механических специальностей ; сост.: А. И. Веремейчик, В. М. Хвисевич, Б. Г. Холодарь. – Брест: БрГТУ, 2009. – 22 с.

7. Акимов, В. А. Теоретическая механика. Кинематика. Практикум : учеб. пособие / В. А. Акимов, О. Н. Скляр, А. А. Федута. – Минск : Новое знание, 2010. – 452 с.

8. Добронравов, В. В. Курс теоретической механики: учебник / В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин. – М.: Высш. шк., 1983. – 430 с.

8. Теоретическая механика. Динамика : практикум : учеб. пособие : в 2 ч. / под общ. ред. А.В Чигарева, Н.И. Горбача. – Минск ; М. : Новое знание : ЦУПЛ, 2010. – Ч. 2 : Динамика материальной системы. Аналитическая механика. – 863 с.

Учебное издание

Составители:
Веремейчик Андрей Иванович
Хвисевич Виталий Михайлович

Задания и методические указания
к выполнению расчетно-графических работ по теоретической механике (кинематика и динамика)

для студентов специальности
1 – 36 09 01 Машины и аппараты пищевых производств

Текст печатается в авторской редакции, орфографии и пунктуации

Ответственный за выпуск: Хвисевич В. М.
Редактор: Митлошук М. А.
Компьютерная вёрстка: Соколюк А. П.

Подписано в печать 25.10.2023 г. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Бумага «Performer».
Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 1,4. Уч. изд. л. 1,5. Заказ № 1178. Тираж 19 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/235 от 24.03.2014 г.