

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ
по дисциплине
«Строительная механика»

Методические указания
для студентов специальности
1-74 05 01 «Мелиорация и водное хозяйство»
дневной формы получения образования
Ч. I. Статически определимые системы

Брест 2023

УДК 624.04
ББК 38.112я73

В методических указаниях представлены лабораторные работы по дисциплине «Строительная механика», в которых рассматриваются вопросы аналитического определения внутренних усилий в плоских статически определимых стержневых системах.

Каждая лабораторная работа начинается с краткого изложения теоретического материала по теме. Приведена таблица с исходными данными для выполнения лабораторной работы и исходные расчётные схемы стержневых систем. По каждой лабораторной работе приведен пример расчёта типовой задачи.

Методические указания предназначены для студентов специальности 1-74 05 01 «Мелиорация и водное хозяйство».

Составители: В. В. Молош, доцент кафедры, к. т. н, доцент
Н. В. Бочарова, ст. преподаватель кафедры прикладной механики
Р. И. Игнатьев, профессор кафедры, к. т. н, доцент

ОГЛАВЛЕНИЕ

Требования к оформлению работ.....	4
Основные сведения о расчёте сооружений	5
1 Статически определимые системы	5
2 Геометрический анализ расчётных схем сооружений.....	5
2.1 Степень свободы системы	6
2.2 Анализ геометрической структуры системы	7
3 Внутренние силы в плоских стержневых системах	9
1. Лабораторная работа № 1. Определение усилий в стержнях простой плоской фермы	15
1.1 Основные сведения о расчёте ферм.....	15
1.2 Исходные данные для выполнения работы	19
1.3 Контрольные вопросы по лабораторной работе.....	21
2. Лабораторная работа № 2. Расчёт статически определимой составной многопролётной балки	22
2.1 Основные сведения о расчёте составных балок	22
2.2 Пример расчёта составной многопролётной балки.....	23
2.3 Исходные данные для выполнения работы	26
2.4 Контрольные вопросы по лабораторной работе.....	26
3. Лабораторная работа № 3. Расчёт статически определимой составной рамы	29
3.1 Основные сведения о расчёте рам	29
3.2 Пример расчёт простой рамы.....	30
3.3 Расчёт трёхшарнирных рам	33
3.4 Примеры расчёта трехшарнирных рам.....	35
3.5 Расчёт составных рам	39
3.6 Пример расчёта составной рамы.....	40
3.7 Исходные данные для выполнения работы	42
3.8 Контрольные вопросы по лабораторной работе.....	43
4. Лабораторная работа № 4. Расчёт статически определимой трёхшарнирной арки.....	44
4.1 Основные сведения о расчёте трёхшарнирной арки.....	44
4.2 Пример расчёта трёхшарнирной арки	48
4.3 Исходные данные для выполнения работы	53
4.4 Контрольные вопросы по лабораторной работе.....	55
ЛИТЕРАТУРА	55

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РАБОТ

1. Исходные данные для решения задач выбираются из таблиц исходных данных в соответствии с полученным шифром.

2. Работы оформляются в соответствии со стандартом университета на листах бумаги размером 297 x 210 (формат А4). Тексты, чертежи, расчеты необходимо выполнять карандашом, тушью либо в компьютерном наборе (допускается комбинировать указанные способы оформления).

3. Перед решением каждой задачи необходимо вычертить заданную схему и указать на ней все размеры и нагрузки в буквенном обозначении и их численные значения с размерностями (например: $l_1 = 10,5 \text{ м}$, $P = 5 \text{ кН}$). Решение задачи должно сопровождаться краткими, последовательными пояснениями, четкими схемами со всеми обозначениями и размерами. На эпюрах должны быть проставлены значения всех характерных ординат. Все чертежи и эпюры должны быть обозначены.

4. Все чертежи должны быть выполнены со строгим соблюдением масштабов. Для каждой эпюры следует указывать масштаб ее ординат (например: в 1 см – 10 кН·м). Чертежи и надписи должны равномерно располагаться по всей площади листа.

5. Выражения для вычисления искомых величин целесообразно и удобнее записывать только в численном виде. Не следует приводить подробности арифметических расчетов. Записываются только арифметическое выражение и его результат.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О РАСЧЁТЕ СООРУЖЕНИЙ

1 Статически определимые системы

Статически определимыми называются системы, которые имеют необходимое и достаточное количество связей, чтобы быть геометрически неизменяемыми и все неизвестные реакции в этих связях могут быть определены только при помощи уравнений равновесия.

Статически определимые системы обладают следующими свойствами:

1. В них не возникают опорные реакции и внутренние усилия (M , Q , N) от теплового воздействия, смещения опор и неточности изготовления и сборки конструктивных элементов.

2. Реакции и внутренние усилия не зависят от формы и размеров поперечных сечений, от упругих свойств материала, из которого они изготовлены, т. е. от жёсткости элементов.

3. В статически определимых системах часто можно выделить основную геометрически неизменяемую часть, на которую опираются другие части системы, приобретающие при этом свою геометрическую неизменяемость. В таких системах нагрузка, приложенная к основной части, вызывает усилия только в элементах этой части.

4. Самоуравновешенная нагрузка, приложенная к локальной геометрически неизменяемой части статически определимой системы, вызывает усилия только в этой части, а во всех остальных частях системы усилия равны нулю.

2 Геометрический анализ расчётных схем сооружений

Инженерные сооружения представляют собой совокупность основных конструктивных элементов (*стержней, пластин, оболочек и массивных тел*), соединённых между собой в единое целое связями в узлах и опираются на основание (землю или другие несущие конструкции) посредством *опор*.

Под *расчётной схемой сооружения* следует понимать упрощённое идеализированное изображение сооружения, при использовании которого пренебрегают некоторыми свойствами, играющими в частном случае для требуемой точности расчёта второстепенную роль в работе сооружения.

Строительные сооружения должны быть неподвижными (статичными) и геометрически неизменяемыми. Наличие указанных характеристик проверяют посредством проведения кинематического анализа расчётной схемы сооружения.

Кинематический анализ сооружения – это исследование движения звеньев механизма (строительных конструкций и их элементов) без учёта сил, вызывающих это движение. При его выполнении определяют степень свободы системы и проводят анализ геометрической структуры системы (определяют является ли система геометрически изменяемой, неизменяемой, мгновенно изменяемой).

Геометрически неизменяемой называется система, которая может изменять форму только в результате деформации составляющих ее элементов.

Геометрически изменяемой называется система, которая может изменять форму без деформации составляющих ее элементов.

Мгновенно изменяемой называется система, в которой возможны бесконечно малые перемещения точек без деформации ее элементов (они чаще не пригодны для сооружений).

2.1 Степень свободы системы

Степенью свободы стержневой системы называется количество независимых геометрических параметров (координат, углов поворота), определяющих ее положение на плоскости или в пространстве.

Различного вида стержни независимо от их геометрической формы, а также неизменяемые системы, составленные из них, называют *дисками* (рисунок 1). Земля – это диск бесконечной протяженности (полуплоскость).

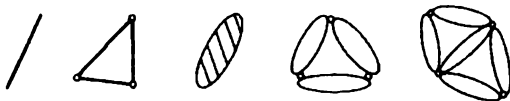


Рисунок 1 – Виды дисков

Диск на плоскости имеет три степени свободы (координаты x, y и угол поворота φ), в пространстве – шесть степеней свободы (три координаты и три угла поворота относительно осей x, y, z).

Всякое тело, отнимающее у другого тела одну степень свободы, называется *кинематической или простой связью*.

Цилиндрический простой шарнир – устройство, соединяющее два диска и эквивалентное двум кинематическим связям (рисунок 2, а-в).

Кратный (сложный) шарнир соединяет три и более дисков и эквивалентен $n-1$ простым шарнирам, где n – число соединяемых дисков (рисунок 2, г-е).

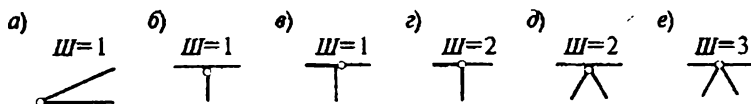


Рисунок 2 – Виды шарниров

Для определения числа степеней свободы системы могут быть использованы следующие формулы:

1. Для любых плоских стержневых систем

$$W = - (3K - \text{Ш}), \quad (1)$$

где K – число замкнутых контуров в системе; Ш – число простых (одиночных) шарниров в системе, включая шарниры между дисками (стержнями) и основанием (землей).

2. Для любых систем, кроме содержащих в себе жесткие замкнутые контуры,

$$W = 3D - 2\text{Ш} - C_0, \quad (2)$$

где D – число дисков в системе; Ш – число одиночных (простых) шарниров, соединяющих диски D ; C_0 – число кинематических опорных связей в системе.

3. Для ферм:

$$W = 2Y - C - C_0, \quad (3)$$

где Y – число шарнирных узлов в ферме; C – число стержней фермы; C_0 – число опорных связей.

Замкнутый контур – цепь, образованная последовательным соединением жестко либо шарнирно ряда дисков, одним из которых может выступать и земля (основание) (рисунок 3).

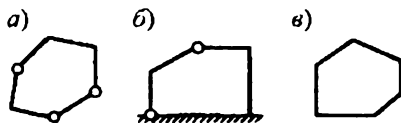


Рисунок 3 – Схемы к определению замкнутого контура

2.2 Анализ геометрической структуры системы

Его выполняют на основании признаков образования геометрически неизменяемых системах.

Плоскую систему следует считать геометрически неизменяемой (т.е. диском) если её геометрическая схема будет соответствовать ниже приведенным признакам.

1. Три диска соединены между собой последовательно тремя простыми шарнирами, не лежащими на одной прямой (рисунок 4, позиция 1).
2. Узел присоединен к диску двумя стержнями, оси которых не лежат на одной прямой (рисунок 4, позиция 2).
3. Два диска, соединенные между собой тремя стержнями, оси которых не пересекаются и не параллельны (рисунок 4, позиция 3).

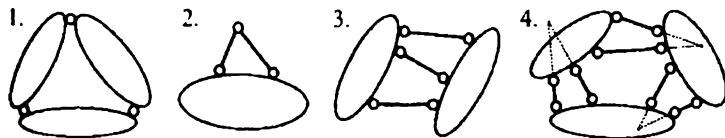


Рисунок 4 – Схемы к определению признаков неизменяемых систем

Точку C пересечения двух стержней, соединяющих два диска, называют центром мгновенного вращения этих дисков, который представляет собой фиктивный шарнир. В отличие от фактического шарнира фиктивный шарнир допускает лишь бесконечно малое взаимное вращение соединяющихся в нем дисков (рисунок 5а). Рассматриваемое соединение двух дисков может быть представлено в виде, показанном на рисунок 5б. Этот признак также может быть приведен к первому признаку (рисунок 5в).



Рисунок 5 – К определению фиктивного шарнира

4. Три диска соединены шестью стержнями, при этом каждые два диска соединены попарно двумя стержнями, точки пересечения осей которых не лежат на одной прямой (рисунок 4, позиция 4).

1.3 Признаки мгновенно изменяемых систем

Система будет мгновенно изменяемой если её геометрическая схема будет соответствовать ниже приведенным признакам.

1. Три диска последовательно соединены тремя шарнирами, лежащими на одной прямой (рисунок 6а).

2. Два диска соединены между собой тремя параллельными стержнями (рисунок 6б).

3. Два диска соединены тремя стержнями, оси которых пересекаются в одной точке (рисунок 6в).

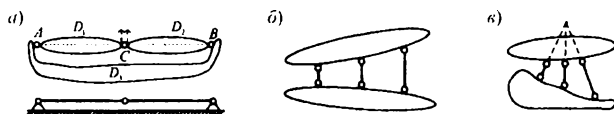


Рисунок 6 – Схемы к определению признаков мгновенно изменяемых систем

Пример

Рассмотрим систему, приведенную на рисунке 7а. Определим степень свободы системы по формулам:

$W = -(3K - III) = -(3 \cdot 4 - 12) = 0$; $W = 3D - 2III - C0 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 5 = 0$. Результаты, как видно, совпадают.

Процедура геометрического анализа структуры системы:

- диски D_2 , D_3 и D_4 соединены тремя шарнирами B , S , C , не лежащими на одной прямой, и соответственно образуют неизменяемую систему, то есть диск (первый признак неизменяемости) (рисунок 7в);
- шарнир C присоединен к диску земли двумя стержнями, не лежащими на одной прямой, образуя вместе с ней неизменяемую систему (второй признак неизменяемости) (рисунок 7с);
- диск D_1 , диск земли и диск BSC соединены тремя шарнирами A , B и C , не лежащими на одной прямой, образуя неизменяемую систему (первый признак неизменяемости) (рисунок 7г);

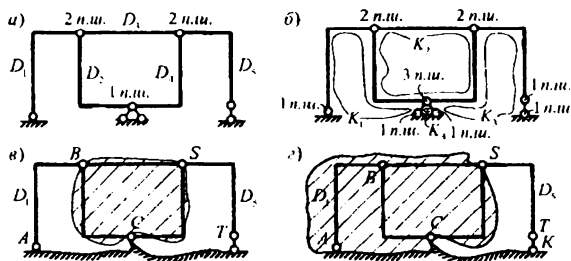


Рисунок 7 – Схема примера кинематического анализа

- последний диск (вместе с основанием), диск D_5 и опорный стержень TK (а это тоже диск) соединены между собой последовательно тремя шарнирами S , T и K , не лежащими на одной прямой, (рисунок 7г) и соответственно образуют в целом неизменяемую систему (первый признак неизменяемости).

Таким образом, делаем вывод, что рассматриваемая система статически определима и геометрически неизменяема.

3 Внутренние силы в плоских стержневых системах

Внутренние силы (или *внутренние усилия*) – силы, возникающие при взаимодействии отдельных элементов сооружения (материальных точек системы), вызванные действием внешних сил.

Для определения внутренних сил применяют *метод сечений*.

Метод основан на положении о том, что для неизменяемой системы, находящейся в равновесии, – в равновесии будет находиться и любая ее часть. Для определения внутренних сил мысленно рассекают систему на две части (рисунок 8а), и рассматривают равновесие любой из этих частей (рисунок 8б). Фактически внутренние силы распределены по всему сечению произвольно. В общем случае указанную систему внутренних сил можно привести к одной силе R (главный вектор) и одной паре M_0 (главный момент).

Главный вектор R имеет три составляющие силы: N – продольная (нормальная) сила, Q_x и Q_y – поперечные (перерезывающие) силы; *главный момент* M_0 имеет три составляющих момента: M_x и M_y – изгибающие моменты, M_z – крутящий момент (рисунок 8б).

В плоских системах *главный вектор* R имеет две составляющие силы: N – продольная сила, Q – поперечная сила; *главный момент* M_0 имеет одну составляющую: M – изгибающий момент.

В дальнейшем будут рассмотрены расчёты только плоских стержневых систем, поэтому рассмотрим более детально понятия внутренних сил.

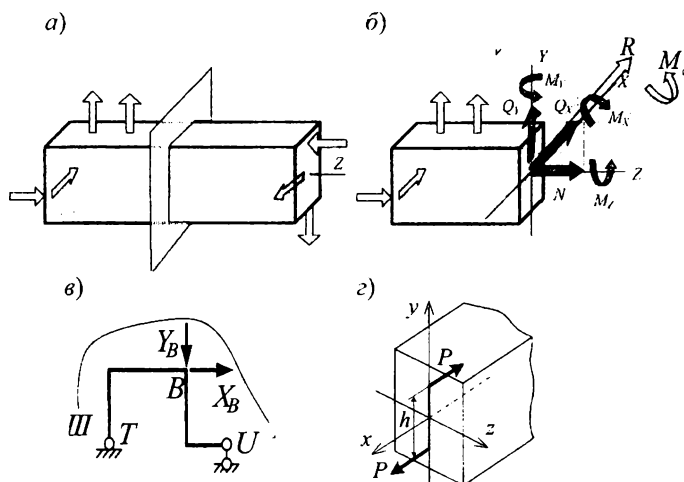


Рисунок 8 – Применение метода сечений в объёме (а, б) и на плоскости (в, г)

Изгибающий момент M - действует в плоскости сооружения (xy) относительно центральной оси поперечного сечения стержня, перпендикулярной к плоскости сооружения (относительно оси z на рисунок 8в). Изгибающий момент может быть также представлен парой сил – двумя равными по величине, направленными в разные стороны силами, линии действия которых параллельны. Минимальное расстояние (перпендикулярный отрезок) между линиями действия этих сил называется *плечом пары сил* (рисунок 8г). Величина момента определяется произведением модуля одной из сил на плечо пары

$$M = P \cdot h.$$

При таком представлении момента понятно, что проекция его на любую ось равна нулю, как сумма проекций равных по величине, противоположно направленных сил P , линии действия которых параллельны.

Поперечная сила Q - действует в плоскости поперечного сечения стержня перпендикулярно оси стержня (оси x) (в направлении центральной оси y , лежащей в плоскости сооружения).

Продольная сила N - действует перпендикулярно к плоскости сечения в направлении (вдоль) оси стержня (оси x) и приложена в центре сечения.

При определении внутренних сил в плоских стержневых системах (рисунок 9а), систему рассекают сечением x на две части, одну из которых отбрасывают. Действие отброшенной части на рассматриваемую часть заменяется силами, которые равны внутренним силам в сечении, а по отношению к рассматриваемой части являются по существу внешними силами (рисунок 9б). Для рассматриваемой части составляются уравнения равновесия, число которых будет равно трем, что равно степени свободы части системы и количеству неизвестных внутренних сил.

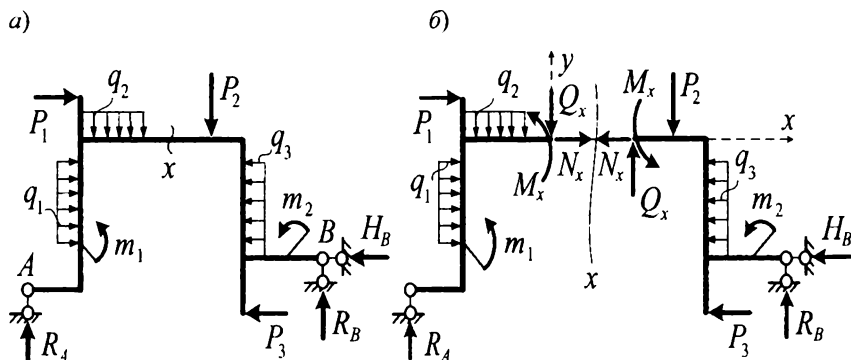


Рисунок 9 – Иллюстрация определения внутренних сил в плоских рамах

Из уравнений равновесия и определяют усилия в сечении системы (здесь параметр нагрузки P включает в себя и сосредоточенные силы P , и распределенные нагрузки q , и сосредоточенные моменты m):

$$\sum M_i^{n-pas} = 0; \quad -M_x + \sum M_i (P_i^{n-pas}) + \sum M_i (R_i^{n-pas}) = 0;$$

$$M_x = \sum M_i (P_i^{n-pas}) + \sum M_i (R_i^{n-pas});$$

аналогично из уравнений равновесия $\sum Y^{прав} = 0$; $\sum X^{прав} = 0$, получим

$$Q_i = \sum Y(P_i^{прав}) + \sum Y(R_k^{прав}); \quad N_i = \sum X(P_i^{прав}) + \sum X(R_k^{прав}).$$

Метод сечений, таким образом, позволяет сформулировать следующие **правила определения внутренних сил** в сечениях плоских стержневых систем:

❗ **Изгибающий момент** в сечении численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, включая опорные реакции, приложенных к части системы с одной стороны от сечения, взятых относительно центра сечения.

Отметим, что центр сечения в соответствии с понятием расчетной схемы сооружения лежит на оси стержня.

❗ **Поперечная сила** в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, включая опорные реакции, приложенных к части системы с одной стороны от сечения, на ось, перпендикулярную к оси стержня.

❗ **Продольная сила** в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, включая опорные реакции, приложенных к части системы с одной стороны от сечения, на ось стержня (в общем случае криволинейных стержней – на ось, касательную к оси стержня).

Напомним, что **проекция силы** на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между осью и линией действия силы (см. рисунок 10а):

$$P_z = P \cos \varphi.$$

Если сила параллельна оси, то ее проекция на эту ось равна самой силе (рисунок 10б), а если сила перпендикулярна оси, то её проекция на ось равна нулю (рисунок 10в).

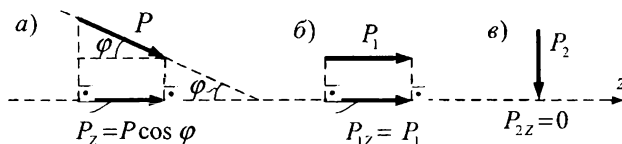


Рисунок 10 – Проекция сил на ось

Момент силы относительно некоторой точки равен произведению модуля силы на её плечо, взятое со знаком плюс или минус (рисунок 11а):

$$M_A(P) = P \cdot h_P.$$

Плечо силы относительно точки (h_P) определяется как длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на линию действия силы.

Согласно данным определениям легко вычисляются момент относительно любой точки и проекция на любую ось нагрузок, распределенных по любым зависимостям, если эти нагрузки привести к равнодействующим силам (R_q). Например, величина момента относительно точки А равномерно распределенной нагрузки q_1 на рисунок 11б, равнодействующая R_{q1} которой приложена в середине участка, на который действует нагрузка, будет равна

$$M_A(q_1) = R_{q1} h_{r1} = (q a) h_{r1},$$

а для нагрузки q_2 , изменяющейся на участке по треугольной зависимости (рисунок 11в), будет определяться выражением

$$M_A(q_2) = R_{q_2} h_{R_2} = \left(\frac{1}{2} q_2 b \right) h_{R_2}$$

Отметим, что момент относительно любой точки от действия сосредоточенного момента равен самому сосредоточенному моменту.

Для наглядного представления об изменении усилий в сечениях систем строят эпюры усилий.

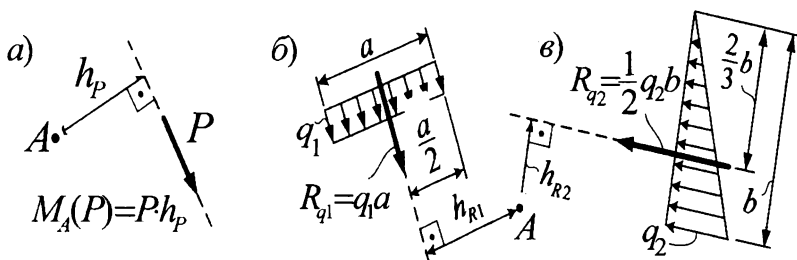


Рисунок 11 – Схемы к определению моментов сил и нагрузок относительно точки

Эпюрой усилия (M , Q , N и др.) называется график (диаграмма), отражающий зависимость изменения этого усилия по длинам всех элементов (стержней) системы от действия постоянной нагрузки.

Отметим некоторые правила, применяемые при построении эпюр усилий:

1. Ось (базу), на которой строится эпюра, всегда выбирают так, чтобы она была параллельна оси стержня или просто совпадала с ней.
2. Ординаты эпюр откладывают от базовой оси перпендикулярно к ней в определенном масштабе, одинаковом в пределах одной эпюры.
3. В характерных точках (сечениях), определяющих вид зависимостей изменения эпюр, проставляют значения ординат усилий, а в полях эпюр (в кружочках) ставят знаки ординат эпюр.
4. Штриховать эпюры принято линиями, перпендикулярными к базовой оси, учитывая, что каждая из линий штриховки – это ордината эпюры усилия.

Ⓢ Таким образом, каждая из ординат эпюры усилия представляет собой в определенном масштабе величину усилия, для которого построена эпюра, в поперечном сечении рамы, в котором эта ордината отложена.

При определении поперечных и продольных сил и построении их эпюр в строительной механике обычно принимают следующие правила знаков:

Поперечная сила в сечении, определенная по вышеуказанному правилу, **положительна**, если при приложении ее на бесконечно малом расстоянии от сечения со стороны рассматриваемой части она стремится повернуть эту часть относительно сечения по часовой стрелке, и **отрицательна**, если стремится повернуть эту часть относительно сечения против часовой стрелки – см. рисунок 12а.

Например, при рассмотрении отсеченной части на рисунке 12в поперечная сила в сечении K равна силе P и положительна.

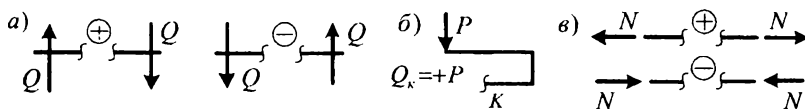


Рисунок 12 – Схемы, поясняющие правила знаков для внутренних сил

Продольная сила в сечении **положительна**, если она вызывает растяжение в стержне рамы (направлена от сечения), и **отрицательна**, если вызывает сжатие (направлена к сечению) – см. рисунок 12.

Отметим, что при построении эпюр Q и N ординаты поперечных и продольных сил могут откладываться с любой стороны от базовых осей (стержней). При этом следует руководствоваться наибольшей наглядностью эпюр, исключая, по возможности, наложение эпюр друг на друга, и, конечно, на одной эпюре и на участках, являющихся продолжением друг друга по прямой, целесообразно и предпочтительно ординаты одного знака откладывать с одной стороны.

Для изгибающих моментов специального правила знаков не устанавливают, а откладывают ординаты изгибающих моментов со стороны растянутых волокон. При определении величин изгибающих моментов знаки их можно принимать по собственному усмотрению. **В данных методических указаниях изгибающий момент принимается положительным, если он действует относительно сечения по часовой стрелке.** Растянутые волокна в сечении при этом определяются следующим образом. В той части системы, из равновесия которой в расчетном сечении определен изгибающий момент, выделяем бесконечно малый элемент стержня, прилегающий к рассматриваемому сечению (на схемах этот бесконечно малый элемент стержня для наглядности изображается в виде элемента конечной длины). Считая, что в расчетном сечении указанный элемент имеет защемление, прикладываем к нему вычисленный для этого сечения изгибающий момент. Анализируя изгиб рассматриваемого элемента системы (рамы), можно определить, с какой стороны стержня волокна будут растянуты, а с какой – сжаты.

Схема изгиба элемента системы, выделенного возле сечения 1–1 с правой стороны, показана на рисунке 13б. Из анализа этой схемы видно, что растянутыми в сечении 1–1 будут нижние волокна (здесь и далее на схемах изгиба элементов растянутые волокна будем обозначать, проводя со стороны растянутых волокон штриховые линии).

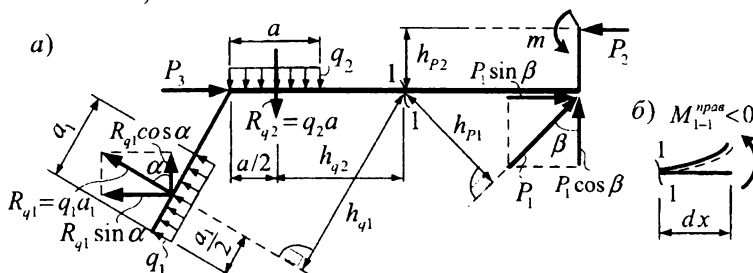


Рисунок 13 – Схема ломаного стержня с указанием нагрузок и необходимых параметров для определения внутренних сил

Отметим, что для систем, находящихся в равновесии, усилия в любом сечении, полученные при рассмотрении одной и другой частей относительно этого сечения, будут равны друг другу (значения изгибающих моментов при этом при использовании рассматриваемых правил знаков будут получаться с противоположными знаками – растянутые же волокна, определенные по ним, будут находиться с одной и той же стороны).

Например, для системы на рисунке 13а должны соблюдаться равенства:

$$M_{1-1}^{(лев)} = -M_{1-1}^{(прав)}; \quad Q_{1-1}^{(лев)} = Q_{1-1}^{(прав)}; \quad N_{1-1}^{(лев)} = N_{1-1}^{(прав)}.$$

Это обстоятельство следует использовать для проверки правильности вычисления усилий в сечениях систем.

Приведем вычисления усилий в сечении 1-1 (в общем виде) системы, представленной на рисунке 13а, которую будем считать равновесной, отдельно из рассмотрения левой и правой частей системы относительно сечения:

$$\begin{aligned} M_{1-1}^{(лев)} &= R_{q1} \cdot h_{q1} - R_{q2} \cdot h_{q2} + P_3 \cdot 0 = q_1 a_1 h_{q1} - q_2 a h_{q2}; \\ M_{1-1}^{(прав)} &= -P_1 \cdot h_{p1} - P_2 \cdot h_{p2} - m; \\ Q_{1-1}^{(лев)} &= R_{q1} \cdot \cos \alpha + P_3 \cdot \cos 90^0 - R_{q2} \cdot \cos 0^0 = q_1 a_1 \cos \alpha - q_2 a; \\ Q_{1-1}^{(прав)} &= -P_1 \cdot \cos \beta + P_2 \cdot \cos 90^0 = -P_1 \cos \beta; \\ N_{1-1}^{(лев)} &= R_{q1} \cdot \sin \alpha - P_3 \cdot \cos 0^0 - R_{q2} \cdot \cos 90^0 = q_1 a_1 \sin \alpha - P_3; \\ N_{1-1}^{(прав)} &= -P_2 + P_1 \sin \beta. \end{aligned}$$

Отметим, что для сосредоточенных сил и равнодействующих распределенных нагрузок, действующих наклонно по отношению к горизонтальной и вертикальной осям (P_1 и R_{q1} на рисунке 13а) изгибающие моменты удобнее вычислять с использованием проекций этих сил на горизонтальную и вертикальную оси, тем более, что затем эти проекции могут быть использованы и при определении поперечных и продольных сил (см. представленные выше расчеты).

1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ПРОСТОЙ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ

Цель выполнения работы: проверить кинематическое качество расчётной схемы и определить внутренние продольные силы во всех стержнях плоской фермы.

Порядок выполнения работы:

1. Выполнить кинематический анализ расчётной схемы фермы.
2. Определить опорные реакции.
3. Определить усилия во всех стержнях фермы способом вырезания узлов.
4. Определить усилия в стержнях указанной панели способами моментной точки и проекций.

1.1 Основные сведения о расчёте ферм

Ферма – геометрически неизменяемая стержневая система решетчатого типа, состоящая из стержней, соединенных в узлах жёстко или шарнирно.

Расчетная схема фермы – шарнирно-стержневая геометрически неизменяемая система, элементы которой при действии узловой нагрузки работают на центральное сжатие или растяжение (рисунок 1.1).

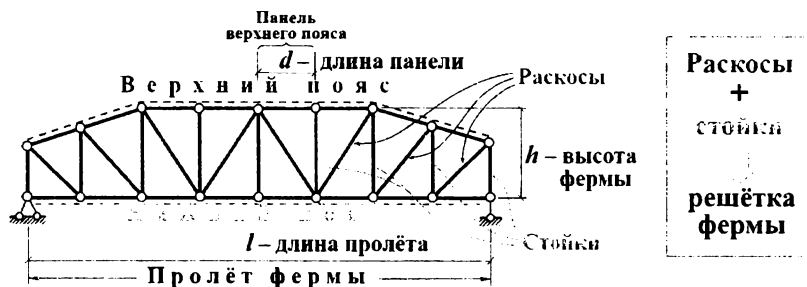


Рисунок 1.1 – Расчётная схема фермы

Расстояние между осями опор фермы (рисунок 1.1) называется *пролетом*; стержни, расположенные по внешнему контуру фермы, называются *поясными* и образуют *пояса*; стержни, соединяющие пояса, образуют *решетку фермы* и называются: вертикальные – *стойками*, наклонные – *раскосами*. Расстояние между соседними узлами любого пояса фермы (обычно измеряемое по горизонтали) называется *панелью*.

Фермы, образованные из шарнирного треугольника путем последовательного присоединения узлов (причем каждого с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой), называются *простыми*.

Существуют графические и аналитические методы определения усилий в стержнях ферм. Аналитически внутренние усилия в стержнях фермы определяют методом сечений. В зависимости от вида проведенного сечения можно выделить три основных способа аналитического определения усилий в стержнях

простых ферм: способ моментной точки, способ проекций и способ вырезания узлов. Помимо названных способов для более сложных ферм применяются и другие способы расчета ферм: способ замкнутого сечения, способ совместных сечений, способ замены стержней.

Расчет статически определимых ферм любым способом начинается с определения опорных реакций. Реакции в балочных фермах определяются так же, как и в балках или простых рамах (составляют три уравнения равновесия для всей фермы: $\sum M = 0$; $\sum P_{kx} = 0$; $\sum P_{ky} = 0$), а в распорных – как в трехшарнирных рамах (кроме трех уравнений составляют дополнительно уравнение равновесия моментов для левой или правой частей фермы относительно центрального шарнира: $\sum M_{с\text{лев}} = 0$ или $\sum M_{с\text{прав}} = 0$).

Способ моментной точки применяется в тех случаях, когда удастся расsection ферму сквозным сечением на две части так, чтобы оси стержней, попавших в сечение, кроме стержня, в котором необходимо определить усилие, пересекались в одной точке [моментной точке (точке Риттера)]; необходимое усилие определяют из равенства нулю суммы моментов всех сил, действующих по одну сторону от сечения, относительно моментной точки, при этом внутренние продольные силы в стержнях направляют от узлов в сторону растяжения (положительное направление).

Например, для определения продольной силы в стержне 2–3 консольно-балочной фермы, приведенной на рисунке 1.2а, разрежем ферму сквозным сечением I–I, отбросим правую часть, как содержащую большее количество сил, а ее действие на оставшуюся левую часть заменим неизвестными силами N_{2-3} , N_{A-3} , N_{A-6} , направленными от узлов (рисунок 1.2б).

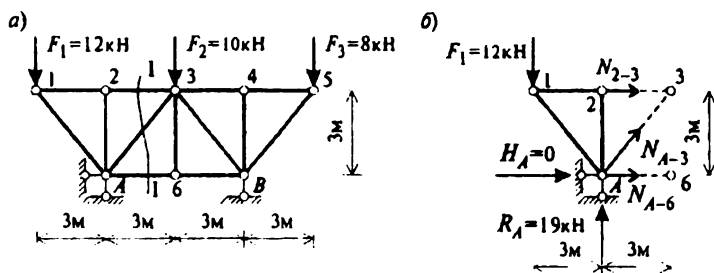


Рисунок 1.2 – Схема фермы к применению способа моментной точки

Моментная точка для определения усилия N_{2-3} находится на пересечении стержней $A-3$ и $A-6$, т.е. в узле A . Составим уравнение равновесия левой части в виде суммы моментов всех левых сил относительно моментной точки A .

$$\sum M_A^{\text{лев}} = 0; -F_1 \cdot 3 + N_{2-3} \cdot 3 = 0; N_{2-3} = F_1 = 12 \text{ кН}.$$

Знак «плюс» перед значением усилия N_{2-3} означает, что усилие в стержне 2–3 растягивающее.

Моментная точка для определения усилия N_{A-6} находится на пересечении стержней 2–3 и $A-3$, т.е. в узле 3. Составим уравнение равновесия левой части в виде суммы моментов всех левых сил относительно моментной точки 3:

$$\sum M_3^{лев} = 0; -F_1 \cdot 6 + R_A \cdot 3 - N_{A-6} \cdot 3 = 0; N_{A-6} = (-12 \cdot 6 + 19 \cdot 3) / 3 = -5$$

Знак «минус» у N_{A-6} означает, что усилие в стержне $A-6$ сжимающее.

Способ проекций заключается в том, чтобы рассечь ферму сквозным сечением на две части, пересекая минимальное количество стержней, из которых оси всех стержней, кроме одного, параллельны. Из уравнения равенства нулю проекций всех сил, взятых по одну сторону от сечения на ось, перпендикулярную к параллельным стержням, определяют усилие в непараллельном стержне.

Для определения продольной силы N_{A-3} , в распорной ферме проведем сечение I-I (рисунке 1.3а), отбросим правую часть (рисунке 1.3б) и запишем уравнение равновесия левой части:

$$\sum Y^{лев} = 0; V_A - F_1 + N_{A-3} \sin \alpha = 0; N_{A-3} = (9 - 11) / 0,6 = -3,333 \text{ кН}.$$

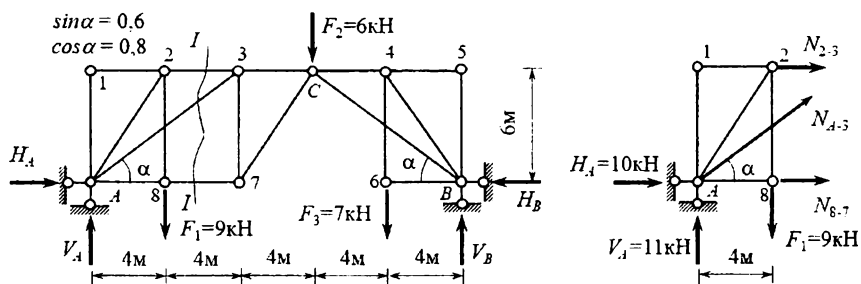


Рисунок 1.3 – Схема фермы к применению способа проекций

Способ вырезания узлов является частным случаем способа проекций и отличается от последнего только проведением сечений. Каждое из таких сечений последовательно отсекает от фермы по одному узлу, в котором соединяется не более двух стержней с неизвестными усилиями. Эти усилия определяют из сумм проекций всех сил, сходящихся в узле, на оси x и y или на оси, перпендикулярные к стержням, усилия в которые необходимо исключить из уравнения проекций.

Стержни, в которых при данной нагрузке усилия равны нулю, называют нулевыми.

Из способа вырезания узлов следуют **частные случаи их равновесия**:

1. Если в ненагруженном узле соединяются два стержня (рисунок 1.4а), то усилия в них равны нулю ($N_1 = 0; N_2 = 0$).

2. Если в ненагруженном узле соединяются три стержня и оси двух стержней лежат на одной прямой (рисунок 1.4б), то третий стержень в узле называется «одиночным» стержнем, а усилие в нем равно нулю ($N_3 = 0$). Усилия же в стержнях, направленных по одной прямой, равны между собой и противоположно направлены ($N_1 = N_2$).

3. Если в узел соединяется три стержня и оси двух стержней лежат на одной прямой, а вдоль третьего одиночного стержня действует сила P (рисунок 1.4в), то в этом случае $N_3 = P$, а усилия в стержнях, направленных по одной прямой равны между собой и противоположно направлены ($N_1 = N_2$).

4. Если в ненагруженном узле соединяются четыре стержня, оси которых направлены по двум прямым (рисунок 1.4а), то усилия в стержнях, направленных по одной прямой, равны между собой и противоположно направлены ($N_1 = N_2$ и $N_3 = N_4$).

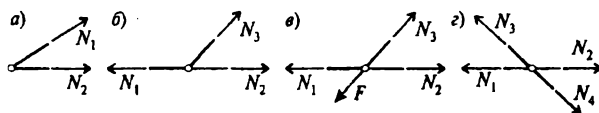


Рисунок 1.4 – Схемы частных случаев равновесия узлов

Для определения усилия в стержнях 1-2, 1-3, 2-3, 2-4 фермы, изображенной на рисунке 1.5а, используя метод вырезания узлов необходимо последовательно вырезать узлы 1 и 2.

Из равновесия узла 1 (рисунок 1.5б) найдем усилия S_{1-2} и S_{1-3} :

$$\sum Y = 0; \quad S_{1-3} \sin \alpha - P = 0; \quad S_{1-3} = \frac{P}{\sin \alpha};$$

$$\sum X = 0; \quad S_{1-2} + S_{1-3} \cos \alpha = 0; \quad S_{1-2} = -S_{1-3} \cos \alpha = -P \cot \alpha.$$

Угол α и его тригонометрические функции $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ находят из геометрических соображений.

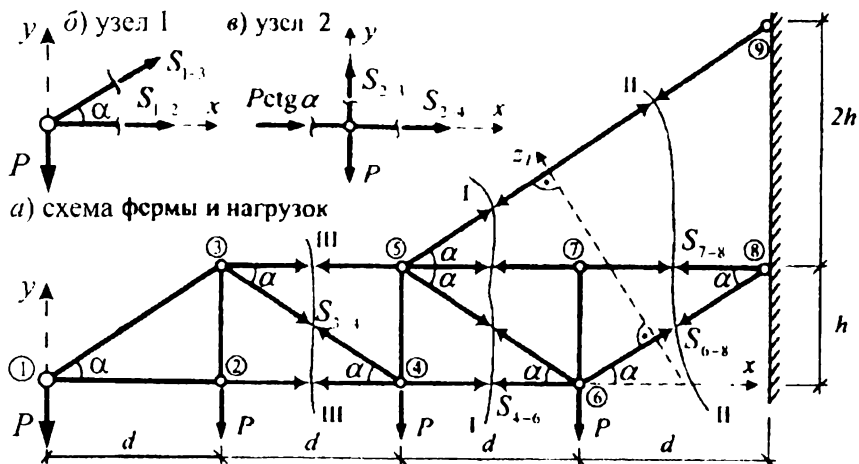


Рисунок 1.5 – Схема фермы к применению способа вырезания узлов

Из равновесия узла 2 (рисунок 1.5в) найдем усилия S_{2-3} и S_{2-4} . Так как усилие в стержне 1-2 уже известно $S_{1-2} = P \cot \alpha$, используя правила частных случаев равновесия узлов, получим $S_{2-4} = S_{1-2} = P \cot \alpha$ (как стержни, лежащие на одной прямой), а $S_{2-3} = P$.

1.2 Исходные данные для выполнения работы

Таблица 1.1 – Исходные данные для плоской фермы

Первая цифра шифра (схема фермы)	P , кН	Вторая цифра шифра	h , м	Третья цифра шифра	q , кН/м	Четвёртая цифра шифра	d , м	Номер панели (считая слева)
1	10	1	3,5	1	2,4	1	3,5	3
2	12	2	4,0	2	2,8	2	4,0	4
3	14	3	4,5	3	3,2	3	4,2	6
4	16	4	3,8	4	3,6	4	3,8	2
5	18	5	4,2	5	4,0	5	4,6	5
6	20	6	4,6	6	4,2	6	5,0	8
7	22	7	5,0	7	4,4	7	3,2	4
8	24	8	5,2	8	4,6	8	4,4	3
9	26	9	3,6	9	5,0	9	2,4	2
0	8	0	3,2	0	2,0	0	3,0	6

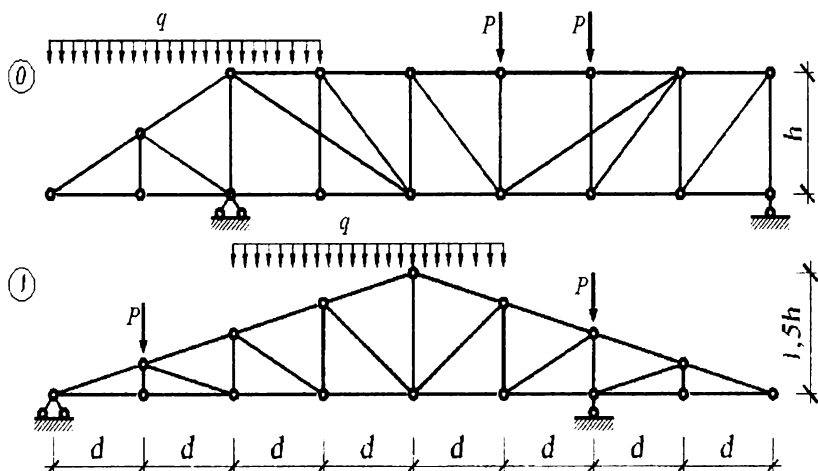


Рисунок 1.6 – Схемы ферм к выполнению расчётных работ

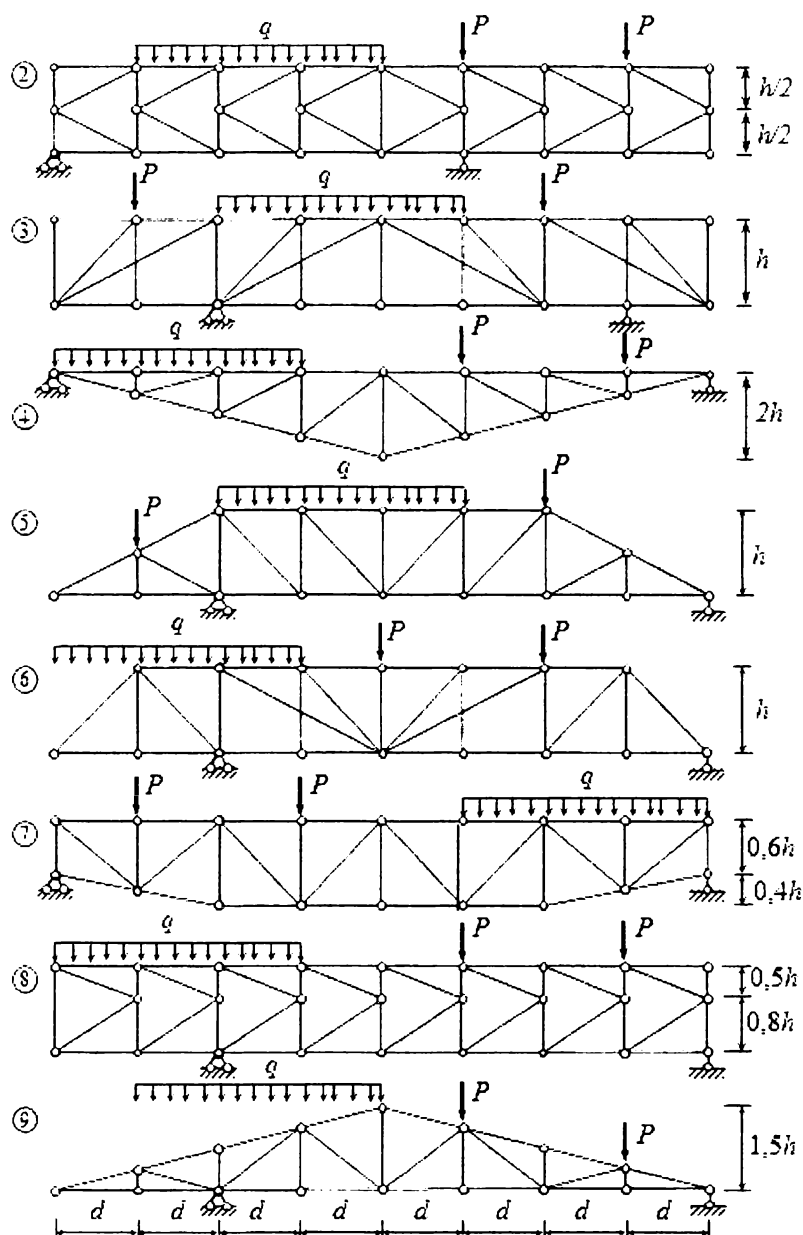


Рисунок 1.6 (продолжение) – Схемы ферм к выполнению расчётных работ

1.3 Контрольные вопросы по лабораторной работе

1. Что такое расчетная схема сооружения?
2. Классификация опор сооружений. Реакции опор.
3. Внутренние усилия, возникающие в элементах строительных конструкций.

Сущность метода сечений.

4. Что называется продольной силой, ее знаки?
5. Что такое эпюра внутреннего усилия?
6. Кинематический анализ сооружения и его общий порядок проведения.
7. Степень свободы системы и ее определение.
8. Признаки неизменяемости системы.
9. Признаки мгновенной изменяемости системы.
10. Понятие силы. Проекция силы на ось.
11. Понятие момента силы относительно некоторой точки на плоскости.
12. Определение опорных реакций в простых балках и ломаных стержнях.
13. Понятие фермы. Реальная ферма и ее расчетная схема. Перечислить способы определения усилий.
14. Понятие фермы. Классификация ферм по очертанию поясов, типу опирания и назначению.
15. Понятие фермы. Классификация ферм по типу решетки.
16. Понятие фермы. Способ вырезания узлов. Признаки нулевых стержней.
17. Понятие фермы. Способы моментной точки и проекций.

2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ СОСТАВНОЙ МНОГОПРОЛЁТНОЙ БАЛКИ

Цель выполнения работы: проверить кинематическое качество расчётной схемы балки, определить внутренние силы и построить их эпюры.

Порядок выполнения работы:

1. Выполнить кинематический анализ системы и составить поэтажную схему.
2. Рассматривая равновесие отдельных балок определить все реакции.
3. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.
4. Выполнить проверку согласования эпюр.

2.1 Основные сведения о расчёте составных балок

Статически определимые балки, применяемые в строительстве, можно разделить на простые балки и составные. К *простым балкам* относятся консольные – балки, закреплённые одним концом (рисунок 2.1а), и *однопролётные* – балки, имеющие две шарнирные опоры (рисунок 2.1б); среди последних выделяют *двухопорные с консолями и без консолей*.

К составным балкам относят *многопролётные шарнирные балки* – статически определимые неизменяемые системы, состоящие из нескольких простых балок, соединённых между собой шарнирами, не совпадающими с опорами (рисунок 2.1в).

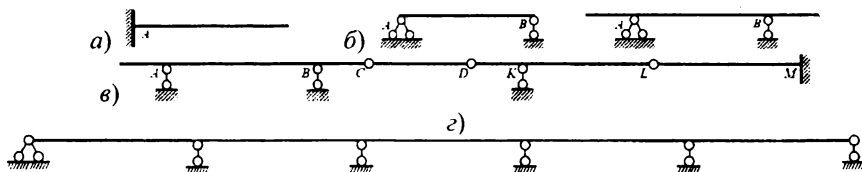


Рисунок 2.1 – Классификация статически определимых балок

Многопролётная шарнирная балка является более выгодной, чем несколько самостоятельных однопролётных балок, так как изгибающие моменты в ней меньше, чем в самостоятельных однопролётных балках, что приводит к экономии при проектировании.

Определение реакций и внутренних сил в многопролётных балках статическим методом приводит к громоздким аналитическим выражениям. При этом часто приходится решать системы уравнений, порядок которых тем больше, чем сложнее конструкция. Поэтому многопролётные системы разделяют на простые элементы – главные (основные) и второстепенные (дополнительные) – и рассчитывают каждый элемент отдельно.

Главными называют простые балки, которые после разрезания составной балки по шарнирам, соединяющим простые балки, останутся статически определимыми и геометрически неизменяемыми. Главные балки должны иметь три опорные связи. К ним относятся двухопорные балки и балки с защемлением.

Второстепенными называют простые балки, которые после указанного разрезания по шарнирам становятся изменяемыми. Эти балки опираются на рядом расположенные с помощью связей в шарнирах.

Графическое изображение схемы взаимодействия главных и второстепенных балок носит название *поэтажной схемы многопролётной шарнирной балки*.

При составлении поэтажной схемы второстепенные балки устанавливают сверху на главные, заменяя каждый из соединяющих балки шарниров шарнирно-неподвижной опорой (двумя связями). Для подвесной балки один из стержней является избыточной связью; он переносится в опору нижней балки, чтобы обеспечить собственную геометрическую неизменяемость последней. Примеры построения поэтажной схемы балки приведены на рисунке 2.2.

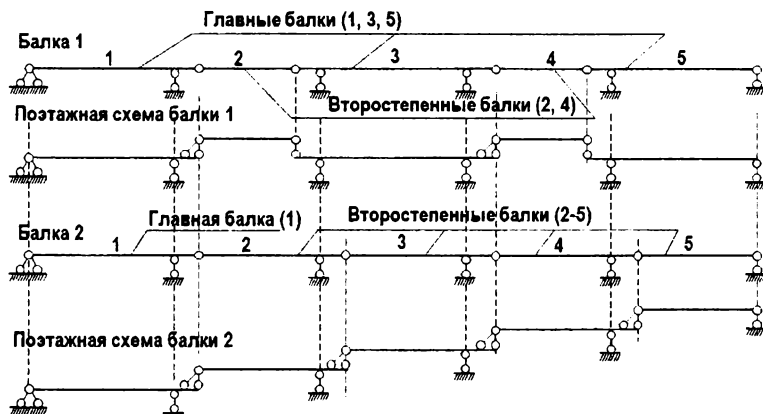


Рисунок 2.2 – Построение поэтажной схемы составной балки

Расчёт многопролётной составной балки выполняют, рассматривая простые балки отдельно, начиная с самых верхних на поэтажной схеме балок.

2.2 Пример расчёта составной многопролётной балки

Выполним расчет статически определимой многопролётной балки, представленной на рисунке 2.3.

Кинематический анализ системы: $W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0$.

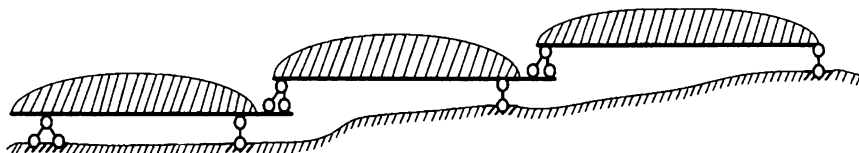


Рисунок 2.3 – Поэтажная схема балки

Система статически определима и неизменяема.

Определение опорных реакций и построение эпюр внутренних сил:

1) Расчет начинаем с балки *EF*, самой верхней на поэтажной схеме:

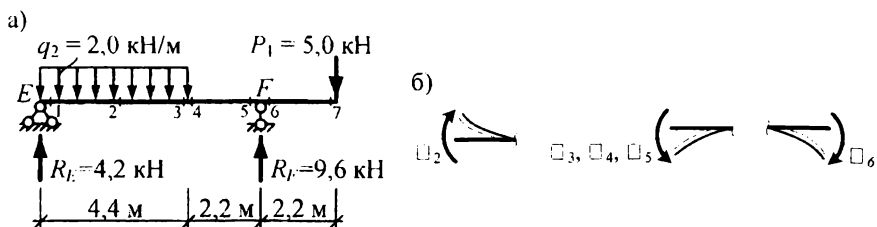


Рисунок 2.4 – Схема простой балки EF (а) и определение растянутых волокон (б)

$$\Sigma M_E = 0; -R_F \cdot 6,6 + 2,4 \cdot 4,2,2 + 5 \cdot 8,8 = 0; R_F = 9,6 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_F = 0; R_E \cdot 6,6 - 2,4 \cdot 4,4,4 + 5 \cdot 2,2 = 0; R_E = 4,2 \text{ кН}.$$

Проверка: $\Sigma Y = 0; 4,2 - 2,4 \cdot 4 + 9,6 - 5 = 0; 0 = 0.$

Расчет ординат эпюры M: $M_1^{лев} = 0; M_2^{лев} = 4,2 \cdot 2,2 - 2,2 \cdot 2,1,1 = 4,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$

$$M_3^{лев} = 4,2 \cdot 4,4 - 2,4 \cdot 4,2,2 = -0,88 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_4^{лев} = -0,88 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5^{лев} = 4,2 \cdot 6,6 - 2,4 \cdot 4,4,4 = -11 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_6^{лев} = 5 \cdot 2,2 = 11 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_7^{лев} = 5 \cdot 0 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определение растянутых волокон представлено на рисунке 2.4б

Расчет ординат эпюры Q:

$$Q_1^{лев} = 4,2 \text{ кН}; Q_2^{лев} = Q_4^{лев} = 4,2 - 2,4 \cdot 4 = -4,6 \text{ кН};$$

$$Q_5^{прав} = -9,6 + 5 = -4,6 \text{ кН}; Q_6^{прав} = Q_7^{прав} = 5 \text{ кН}.$$

Расчет экстремального значения изгибающего момента на участке 1–2:

$$x_1 = \frac{4,4 - x_1}{4,6} \Rightarrow x_1 = 2,1 \text{ м}; M_{\max} = 4,2 \cdot 2,1 - 2,2 \cdot 1,1 \cdot 1,05 = 4,41 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюры M и Q изображаем на общей схеме составной балки (рисунок 2.7).

2) Второй рассчитываем балку CDE:

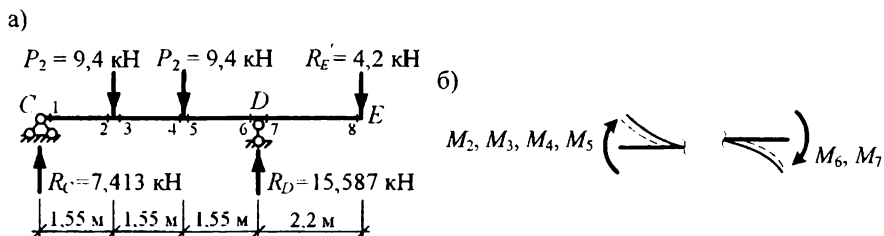


Рисунок 2.5 – Схема простой балки CE (а) и определение растянутых волокон (б)

$$\Sigma M_C = 0; 9,4 \cdot 1,55 + 9,4 \cdot 3,1 - R_D \cdot 4,65 + 4,2 \cdot 6,85 = 0; R_D = 15,587 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_D = 0; 4,65 R_C - 9,4 \cdot 3,1 - 9,4 \cdot 1,55 + 4,2 \cdot 2,2 = 0; R_C = 7,413 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_D = 0; 4,65 R_C - 9,4 \cdot 3,1 - 9,4 \cdot 1,55 + 4,2 \cdot 2,2 = 0; R_C = 7,413 \text{ кН}.$$

Проверка: $\Sigma Y = 0; 7,413 - 9,4 - 9,4 + 15,587 - 4,2 = 0; 0 = 0.$

Расчет ординат эпюры изгибающих моментов:

$$M_1^{лев} = 0; \quad M_2^{лев} = 7,413 \cdot 1,55 = 11,49 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3^{лев} = 11,49 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4^{лев} = 7,413 \cdot 3,1 - 9,4 \cdot 1,55 = 8,41 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5^{лев} = 8,41; \quad M_6^{прав} = -4,2 \cdot 2,2 = 9,24 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_7^{прав} = 9,24 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_8^{прав} = 0.$$

Определение растянутых волокон представлено на рисунке 2.5б.

Расчет ординат эпюры Q :

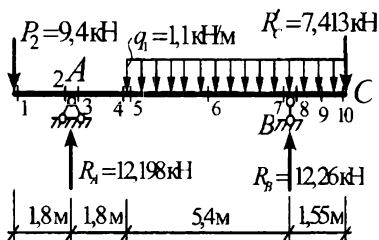
$$Q_1^{лев} = 7,413 \text{ кН}; \quad Q_2^{лев} = 7,413 \text{ кН}; \quad Q_3^{лев} = Q_4^{лев} = 7,413 - 9,4 = -1,987 \text{ кН};$$

$$Q_5^{прав} = Q_6^{прав} = -15,587 + 4,2 = -11,387 \text{ кН}; \quad Q_7^{прав} = Q_8^{прав} = 4,2 \text{ кН}.$$

Эпюры M и Q изображаем на общей схеме составной балки (рисунок 2.7).

3) Последней рассчитываем главную балку ABC :

а)



б)



Рисунок 2.6 – Схема простой балки AC (а) и определение растянутых волокон (б)

$$\Sigma M_A = 0; \quad -9,4 \cdot 1,8 + 1,1 \cdot 6,95 \cdot 5,275 - R_B \cdot 7,2 + 7,413 \cdot 8,75 = 0; \quad R_B = 12,26 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0; \quad -9,4 \cdot 9 + R_A \cdot 7,2 - 1,1 \cdot 6,95 \cdot 1,925 + 7,413 \cdot 1,55 = 0; \quad R_A = 12,198 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \Sigma Y = 0; \quad -9,4 + 12,198 - 1,1 \cdot 6,95 + 12,26 - 7,413 = 0; \quad 0 = 0.$$

Расчет ординат эпюры M :

$$M_1^{лев} = 0; \quad M_2^{лев} = -9,4 \cdot 1,8 = -16,92 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3^{лев} = M_2^{лев} = -16,92 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4^{лев} = M_5^{лев} = -9,4 \cdot 3,6 + 12,198 \cdot 1,8 = -11,884 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6^{лев} = -9,4 \cdot (3,6 + 2,7) + 12,198 \cdot (1,8 + 2,7) - 1,1 \cdot 2,7 \cdot 1,35 = -8,325 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_7^{прав} = M_8^{прав} = 7,413 \cdot 1,55 - 1,1 \cdot 1,55 \cdot 0,775 = 12,812 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_9^{прав} = 7,413 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,55 - (1,1 \cdot 0,775) \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,775 = 6,076 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{10}^{прав} = 0.$$

Определение растянутых волокон представлено на рисунке 2.6б

Расчет ординат эпюры поперечных сил Q :

$$Q_1^{лев} = Q_2^{лев} = -9,4 \text{ кН}; \quad Q_3^{лев} = -9,4 + 12,198 = 2,798 \text{ кН};$$

$$Q_4^{лев} = Q_5^{лев} = Q_3^{лев} = 2,798 \text{ кН}; \quad Q_7^{прав} = 7,413 + 1,1 \cdot 1,55 - 12,26 = -3,142 \text{ кН};$$

$$Q_8^{прав} = 7,413 + 1,1 \cdot 1,55 = 9,118 \text{ кН}; \quad Q_9^{прав} = 7,413 \text{ кН}.$$

Расчет экстремального значения изгибающих моментов на участке 5–7:

$$\frac{x_2}{2,798} = \frac{5,4 - x_2}{3,142} \Rightarrow x_2 = 2,544 \text{ м};$$

$$M_{\max} = -9,4 \cdot 6,144 + 12,198 \cdot 4,344 - 2,544 \cdot 1,1 \cdot 2,544/2 = -8,325 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюры M и Q в балке ABC и объединенные эпюры изгибающих моментов и поперечных сил представлены на рисунке 2.7.

2.3 Исходные данные для выполнения работы

Таблица 2.1 – Исходные данные

Первая цифра шифра	Номера схемы	P_1 кН	Вторая цифра шифра	Номер загрузки	l_1 м	P_2 кН	Третья цифра шифра	l_2 м	q_1 кН/м	Четвёртая цифра шифра	l_3 м	q_2 кН/м
1	0	5,0	1	0	6,0	10,0	1	6,2	1,1	1	7,6	1,3
2	1	5,2	2	1	6,8	8,5	2	6,6	1,2	2	10,8	1,0
3	2	6,5	3	2	7,6	9,5	3	7,0	2,8	3	7,2	1,4
4	3	6,0	4	3	6,4	9,0	4	7,4	2,2	4	10,4	1,6
5	4	6,4	5	4	8,0	7,0	5	8,6	2,5	5	9,2	1,8
6	5	5,8	6	5	9,2	9,8	6	9,0	1,9	6	10,0	2,1
7	6	6,8	7	6	9,6	10,5	7	8,2	2,6	7	8,0	2,3
8	7	7,5	8	7	8,8	11,0	8	9,4	1,7	8	8,8	2,0
9	8	5,4	9	8	7,2	9,4	9	9,8	2,4	9	6,8	2,7
0	9	8,0	0	9	8,4	8,8	0	7,8	1,5	0	8,4	2,9

2.4 Контрольные вопросы по лабораторной работе

1. Внутренние усилия, возникающие в элементах строительных конструкций. Сущность метода сечений.
2. Что называется изгибающим моментом в сечении сооружения, как он определяется, его знаки?
3. Что называется поперечной силой, как она определяется, ее знаки?
4. Что такое эпюра внутреннего усилия?
5. Кинематический анализ сооружения и его общий порядок проведения.
6. Степень свободы системы и ее определение.
7. Признаки неизменяемости системы.
8. Признаки мгновенной изменяемости системы.
9. Определение опорных реакций в простых балках и ломаных стержнях.
10. Порядок расчёта простых систем. Выбор силовых участков.
11. Классификация статически определимых балок с определениями балок.
12. Многопролетные разрезные балки. Позтажная схема. Главные и второстепенные простые балки в многопролётной составной балке.
13. Порядок расчета многопролетных балок на постоянную нагрузку.

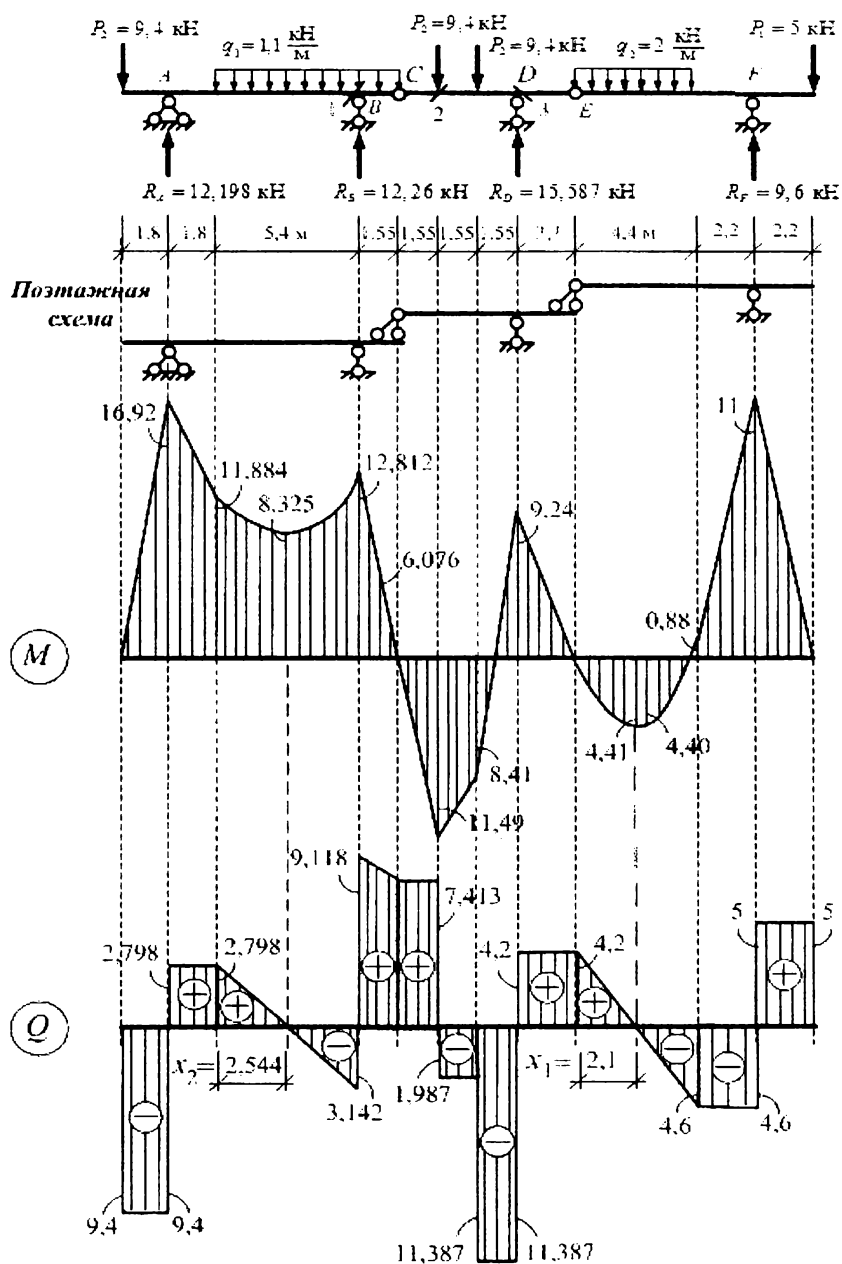


Рисунок 2.7 – Схема составной балки.
Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил

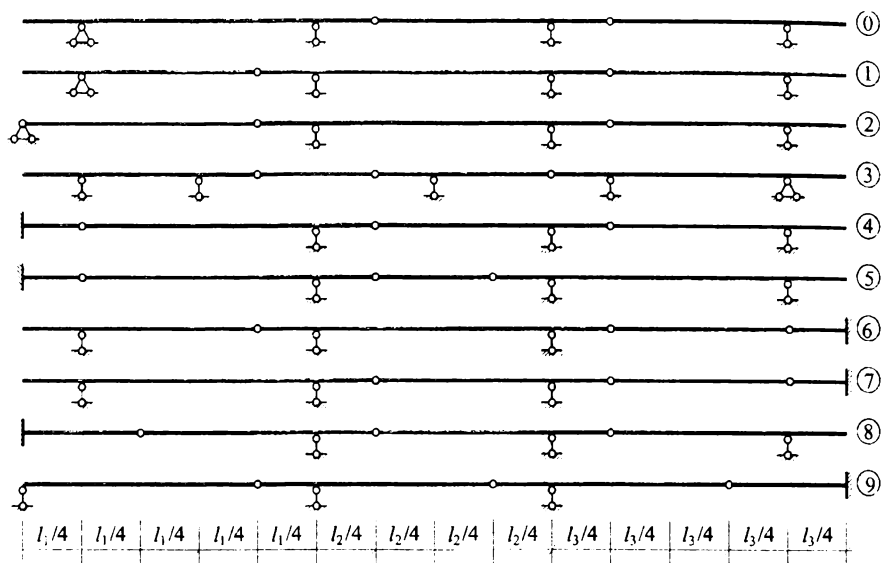


Рисунок 2.8 – Схемы балок

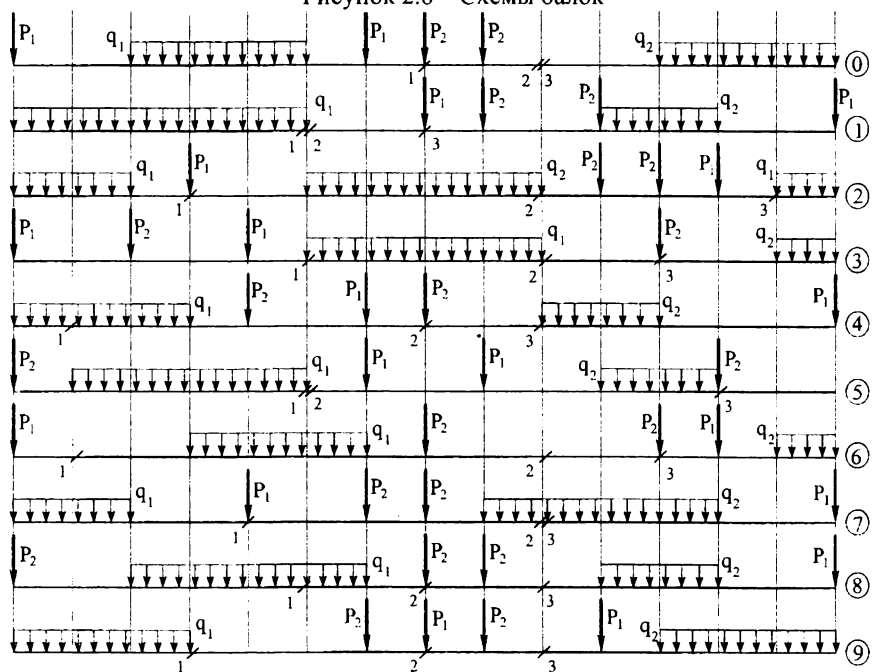


Рисунок 2.9 – Схемы загрузений

3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3. РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ СОСТАВНОЙ РАМЫ

Цель выполнения работы: проверить кинематическое качество расчётной схемы составной рамы, определить внутренние силы и построить их эпюры.

Порядок выполнения работы:

1. Выполнить кинематический анализ системы и составить поэтажную схему.
2. Рассматривая равновесие отдельных простых и трёхшарнирных рам, определить все реакции.
3. Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для каждой простой и трёхшарнирной рамы.
4. Выполнить проверку равновесия узлов составной рамы.

3.1 Основные сведения о расчёте рам

По структуре статически определимые рамы обычно разделяют на простые, трёхшарнирные и составные (рисунок 3.1).

Простой является однодисковая геометрически неизменяемая рама, имеющая с основанием (землей) три связи. Диск простой рамы представляет собой систему прямолинейных стержней, соединённых в узлах жёстко (рисунок 3.1а).

Трёхшарнирной называется геометрически неизменяемая система, состоящая из трёх дисков (одним из которых может быть земля), соединённых между собой последовательно тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой (рисунок 3.2).

Трёхшарнирные рамы могут быть внешне распорными (рисунок 3.2а) и воспринимающими распор (рамы с затяжкой, рисунок 3.2б).

Распор – горизонтальная реакция, которая возникает в опорах трёхшарнирных систем или в прямолинейных стержнях (затяжках), независимо от направления внешних нагрузок, включая их только вертикальное направление.

Затяжкой является, чаще всего, прямолинейный стержень, который соединён с дисками системы при помощи шарниров и работает при отсутствии на него нагрузки только на растяжение-сжатие.

Составными называют рамы, состоящие из нескольких трёхшарнирных и (или) простых рам (рисунок 3.1в).

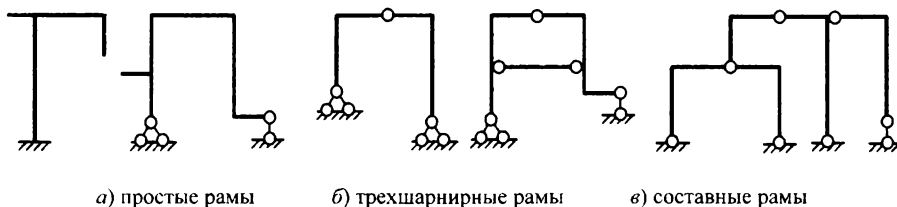
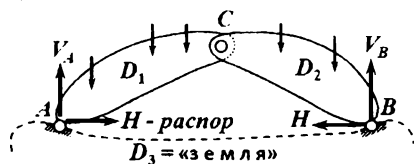


Рисунок 3.1 – Виды рам

а)



б)

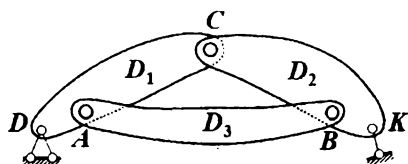


Рисунок 3.2 – Внешнераспорные (а) и воспринимающие распор (б) трёхшарнирные системы

Расчёт простых и трёхшарнирных рам следует выполнять на основании правил, изложенных в разделе 3 «Основные сведения о расчёте сооружений».

3.2 Пример расчёт простой рамы

Выполним расчет простой рамы, показанной на рисунке 3.3а.

С точки зрения кинематического анализа рама представляет собой один диск (ломано-разветвленный стержень), соединенный с основанием (с землей) тремя стержнями (шарнирно подвижными опорами), не параллельными друг другу и не пересекающимися в одной точке.

Определяем опорные реакции (рисунок 3.3б):

$$\Sigma M_K = 0; \quad (10 \cdot 3) \cdot 3,5 - 7 \cdot 8 + 39 - 7 \cdot 4 - R_D \cdot 10 = 0; \quad R_D = 6 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0; \quad R_A - 30 + 6 = 0; \quad R_A = 24 \text{ кН};$$

$$\Sigma X = 0; \quad R_B - 7 - 7 = 0; \quad R_B = 14 \text{ кН}.$$

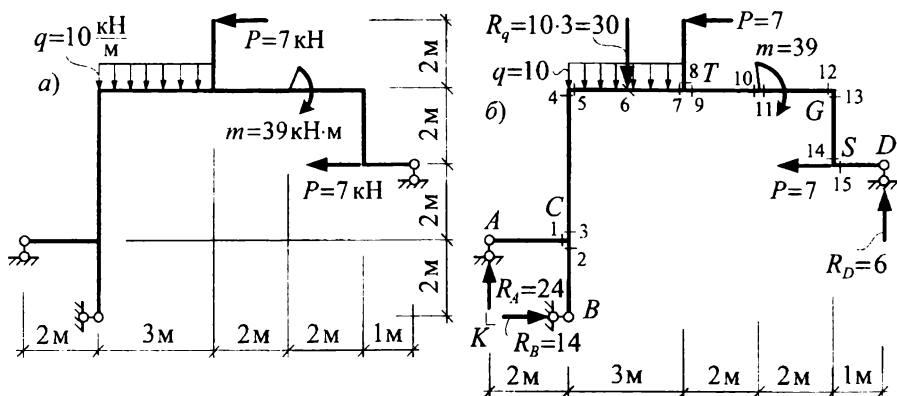


Рисунок 3.3 – Заданная схема рамы (а) и схема с указанием сечений (б)

Проверяем правильность вычисления опорных реакций:

$$\Sigma M_T = 0; \quad 24 \cdot 5 - 14 \cdot 6 - (10 \cdot 3) \cdot 1,5 - 7 \cdot 2 + 39 + 7 \cdot 2 - 6 \cdot 5 = 0; \quad 159 - 159 = 0.$$

Для построения эпюр M , Q и N рассматриваемую раму следует разбить на девять участков (рисунок 3.3б), на которых выделим 15 сечений, определяющих

вид эпюр усилий (на участках опущены сечения, в которых расчет усилий легко выполнить даже устно и в которых изгибающие моменты равны нулю – это сечения у шарниров и на конце консоли). При этом учитываем, что эпюра изгибающих моментов на участке с равномерно распределенной нагрузкой изменяется по параболической зависимости и для ее построения необходимо вычислить изгибающие моменты, по крайней мере, в трех сечениях – 5, 6, 7; на остальных участках рамы эпюра M будет изменяться по линейным зависимостям и для ее построения достаточно знать значения изгибающих моментов в двух крайних точках этих участков.

Вычисляем значений изгибающих моментов и определение растянутых волокон в расчетных сечениях (рисунок 3.3б):

$$\begin{aligned}
 M_1^{лев} &= 24 \cdot 2 = +48 \text{ кН} \cdot \text{м}; & M_2^{нижн} &= -14 \cdot 2 = -28 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_3^{нижн} &= 24 \cdot 2 - 14 \cdot 2 = +20 \text{ кН} \cdot \text{м}; & M_4^{нижн} &= 24 \cdot 2 - 14 \cdot 6 = -36 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_5^{нижн} &= 24 \cdot 2 - 14 \cdot 6 = -36 \text{ кН} \cdot \text{м}; & M_6^{нижн} &= 24 \cdot 3,5 - 14 \cdot 6 - (10 \cdot 1,5) \cdot 0,75 = -11,25 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_7^{нижн} &= 24 \cdot 5 - 14 \cdot 6 - (10 \cdot 3) \cdot 1,5 = -9 \text{ кН} \cdot \text{м}; & M_8^{верхн} &= -7 \cdot 2 = -14 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_9^{прав} &= +39 + 7 \cdot 2 - 6 \cdot 5 = +23 \text{ кН} \cdot \text{м}; & M_{10}^{прав} &= 39 + 7 \cdot 2 - 6 \cdot 3 = +35 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_{12}^{прав} &= 7 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}; & M_{13}^{нижн} &= 7 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_{14}^{нижн} &= 7 \cdot 0 - 6 \cdot 1 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м}; & M_{15}^{прав} &= -6 \cdot 1 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м};
 \end{aligned}$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов в рассматриваемой раме, построенная по результатам расчетов, представлена на рисунок 3.3а.

На участках, в пределах которых нет нагрузок, поперечные и продольные силы будут постоянны и для построения их эпюр на этих участках достаточно вычислить значения усилий в одном, произвольном для каждого участка сечении:

$$\begin{aligned}
 Q_1^{лев} &= 24 \text{ кН}; & Q_2^{нижн} &= -14 \text{ кН}; & Q_3^{нижн} &= Q_4^{нижн} = -14 \text{ кН}; \\
 Q_5^{лев} &= +24 \text{ кН}; & Q_7^{прав} &= Q_9 = Q_{10} = Q_{11} = Q_{12} = -6 \text{ кН}; \\
 Q_8^{прав} &= -7 \text{ кН}; & Q_{13}^{верхн} &= Q_{14} = +7 \text{ кН}; & Q_{15}^{прав} &= -6 \text{ кН}; \\
 N_1^{лев} &= 0; & N_2^{нижн} &= 0; & N_3^{нижн} &= N_4 = -14 \text{ кН}; & N_8^{верхн} &= 0; \\
 N_9^{прав} &= N_{10} = N_{11} = N_{12} = -7 \text{ кН}; & N_{11}^{верхн} &= N_{12} = -6 \text{ кН}; & N_{15}^{прав} &= 0.
 \end{aligned}$$

На участке действия равномерно распределенной нагрузки эпюра поперечных сил будет изменяться линейно и для ее построения необходимо вычислить орди-

наты поперечных сил в двух крайних на участке сечениях 5 и 7, а эпюры продольных сил будут постоянны и для нее достаточно вычислить значение продольной силы в одном произвольном сечении, например, в сечении 5:

$$Q_5^{лев} = +24 \text{ кН}; \quad Q_7^{лев} = +24 - (10 \cdot 3) = -6 \text{ кН}; \quad N_5^{лев} = N_7 = -14 \text{ кН}.$$

Эпюры Q и N изображены на рисунке 3.5.

На участке действия равномерно распределенной нагрузки на эпюру Q имеется сечение, в котором поперечная сила равна нулю. В этом сечении изгибающий момент будет иметь экстремальное (минимальное) значение:

$$M_{\min}^{лев} = 24 \cdot (2 + 2,4) - 14 \cdot 6 - (10 \cdot 2,4) \cdot 1,2 = -7,2 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

где положение сечения определяется из соотношения:

$$\frac{24}{x_{\max}} = \frac{6}{3 - x_{\max}}; \quad 24 \cdot (3 - x_{\max}) = 6 \cdot x_{\max}; \quad 30 \cdot x_{\max} = 72; \quad x_{\max} = 2,4 \text{ м}.$$

После построения окончательных эпюр усилий M , Q и N выполняется проверка равновесия узлов по изгибающим моментам (рисунок 3.4з) и по поперечным и продольным силам (см. ниже).

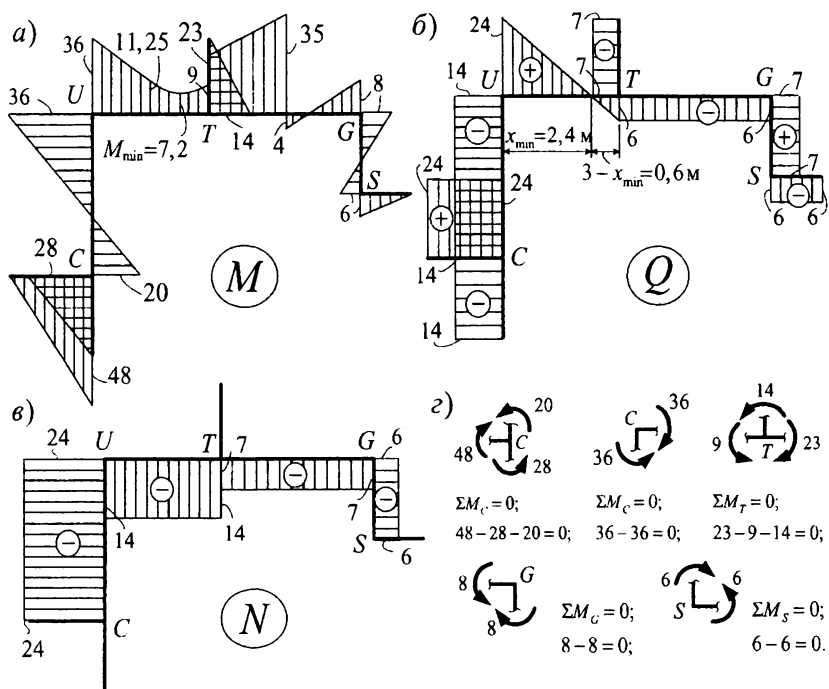
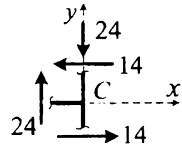


Рисунок 3.4 – Эпюры M , Q , N , проверки равновесия узлов

Проверка равновесия узлов по эпорам Q и N :

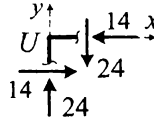
Узел C:

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0; & -27,6 \cdot 0,6 + 3,2 \cdot 0,8 + 14 &= 0; & -16,56 + 16,56 &= 0; \\ \Sigma Y &= 0; & -27,6 \cdot 0,8 - 3,2 \cdot 0,6 + 24 &= 0; & -24 + 24 &= 0;\end{aligned}$$



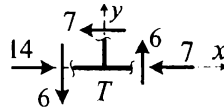
Узел U:

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0; & 14 - 14 &= 0; \\ \Sigma Y &= 0; & 24 - 24 &= 0;\end{aligned}$$



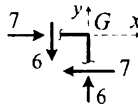
Узел T:

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0; & 14 - 7 - 7 &= 0; & 14 - 14 &= 0; \\ \Sigma Y &= 0; & -6 + 6 &= 0;\end{aligned}$$



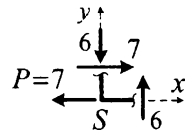
Узел G:

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0; & 7 - 7 &= 0; \\ \Sigma Y &= 0; & -6 + 6 &= 0;\end{aligned}$$



Узел S:

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0; & -7 + 7 &= 0; \\ \Sigma Y &= 0; & -6 + 6 &= 0.\end{aligned}$$



3.3 Расчёт трёхшарнирных рам

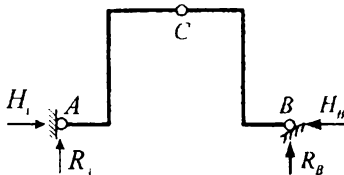
Особенностью расчёта трёхшарнирных рам является определение опорных реакций.

Все опорные реакции трехшарнирной системы могут быть определены из трех уравнений равновесия всех сил, действующих на систему (включая и опорные реакции), и четвертого уравнения, выражающего равенство нулю суммы моментов всех сил, действующих на левую или правую часть системы, относительно центрального шарнира, например, C , соединяющего диски системы.

$$\begin{cases} \sum M_i = 0; \\ \sum X_i = 0; \\ \sum Y_i = 0. \end{cases} \quad \sum M_C^{\text{лев}} = 0 \text{ или } \sum M_C^{\text{прав}} = 0.$$

Ниже рассмотрены возможные варианты определения внешних опорных реакций и внутренних сил в дополнительных связях (затяжках) для некоторых наиболее часто встречающихся видов трёхшарнирных рам (внешняя нагрузка на рамы может быть любой и на схемах рам не показывается):

1 Трёхшарнирная рама с опорами в одном уровне (рисунок 3.5)



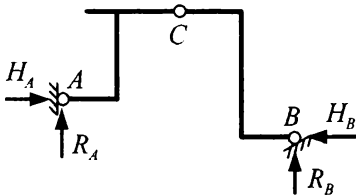
Возможный порядок расчета:

- 1) $\sum M_A = 0; R_B = \dots$
- 2) $\sum Y = 0; R_A = \dots$
- 3) $\sum M_C^{\text{лев}} = 0; H_A = \dots$
- 4) $\sum X = 0; H_B = \dots$

Рисунок 3.5 – Схема трёхшарнирной рамы с опорами в одном уровне Проверка $\sum M_C = 0$.

2. Трёхшарнирная рама с опорами в разных уровнях (рисунок 3.6).

Особенность этой рамы в том, что для нее нельзя составить ни одного уравнения равновесия, в которое входило бы только одно неизвестное, и значит, для определения опорных реакций здесь не обойтись без решения системы уравнений:



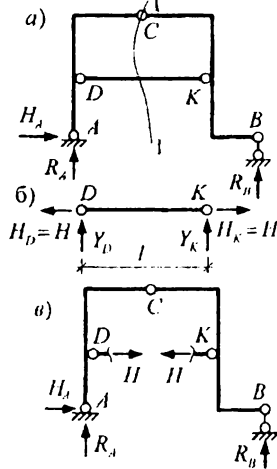
Возможный порядок расчета:

- 1) $\sum M_A = 0; (R_B, H_B) \Rightarrow R_B, H_B$
- 2) $\sum M_C^m = 0; (R_B, H_B) \Rightarrow R_B, H_B$
- 3) $\sum X = 0; H_A = \dots$
- 4) $\sum Y = 0; R_B = \dots$

Проверка $\sum M_C = 0$.

Рисунок 3.6 – Схема трёхшарнирной рамы с опорами в разных уровнях

3. Трёхшарнирная рама с затяжкой



Особенностью трёхшарнирной рамы с затяжкой является то, что в ее структуре имеется замкнутый контур (CDK), который не позволяет в сечениях этой части определить внутренние силы. Для их определения необходимо разрезать этот контур, что в раме с затяжкой может быть сделано путем разрезания (вырезания) затяжки.

В раме, изображенной на рисунке 3.7а, стержень DK (затяжку) будем считать *ненагруженным*. Вырежем и рассмотрим его равновесие (рисунок 3.7б):

- 1) $\sum M_D = 0; Y_K \cdot l = 0; Y_K = 0;$
- 2) $\sum M_K = 0; Y_D \cdot l = 0; Y_D = 0;$
- 3) $\sum X = 0; H_D - H_K = 0; H_D = H_K = H.$

Получаем, что в стержне DK возникает только продольная сила, которую обозначим

Рисунок 3.7 – Схема трёхшарнирной рамы с затяжкой

H , и он работает только на растяжение-сжатие, являясь затяжкой.

Тогда для рамы с ненагруженной затяжкой можно принять следующий порядок расчета:

1) определяем внешние опорные реакции (рисунок 3.7, а) из уравнений

- 1) $\sum M_A = 0; R_B = \dots;$
- 2) $\sum Y = 0; R_A = \dots;$
- 3) $\sum X = 0; H_A = \dots$

Проверка $\sum M_B = 0$.

2) проводим сечение через шарнир C и затяжку DK (рисунок 3.7а); рама принимает вид, показанный на рисунке 3.7в; для определения усилия H в затяжке рассмотрим равновесие одной из полурам:

$$\sum M_C^{прав} = 0; H = \dots$$

3) для проверки используем уравнение равновесия левой части:

$$\sum M_C^{лев} = 0.$$

3.4 Примеры расчёта трехшарнирных рам

Рассмотрим расчет рамы, представленной на рисунке 3.8а.

Определим вначале опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; \quad 10 \cdot 4 - 10 - 20 \cdot 4 - 10 + R_D \cdot 10 = 0; \quad R_D = 6 \text{ кН};$$

$$\sum M_C^{прав} = 0; \quad 20 \cdot 2 + 6 \cdot 7 - 10 - R_B \cdot 6 = 0; \quad R_B = 12 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad 10 \cdot 4 - 10 - 20 \cdot 4 - 10 + R_A \cdot 10 = 0; \quad R_A = 6 \text{ кН};$$

$$\sum M_C^{лев} = 0; \quad 6 \cdot 3 - 10 \cdot 2 - 10 + H_A \cdot 6 = 0; \quad H_A = 2 \text{ кН};$$

$$\text{Проверка: } \sum X = 0; \quad -2 + 10 - 20 + 12 = 0; \quad 22 - 22 = 0; \quad \sum Y = 0; \quad -6 + 6 = 0.$$

Для построения эпюр M , Q и N рассматриваемую раму разобьем на восемь участков (рисунок 3.8б). Учтем, что на участке действия равномерно распределенной нагрузки эпюра изгибающих моментов будет изменяться по параболической зависимости и для ее построения необходимо вычислить изгибающие моменты, по крайней мере, в трех сечениях – в сечениях 9, 10, 11. На остальных участках эпюра M будет изменяться по линейной зависимости и для ее построения достаточно знать значения изгибающих моментов в крайних точках этих участков, то есть в сечениях 1, 2, 3, 4, 8 и 12, 13, 14 (здесь опущены сечения, в которых расчет усилий легко выполняется даже устно и в которых изгибающие моменты явно равны нулю, например, сечения у шарниров).

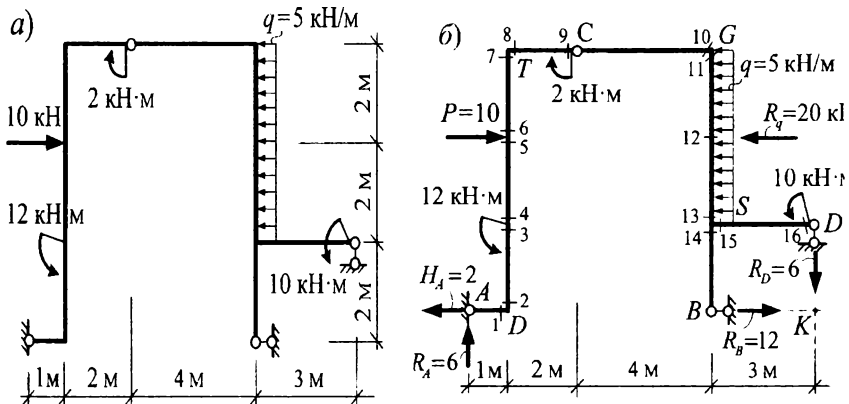


Рисунок 3.8 – Заданная схема рамы (а) и схема с указанием сечений (б)

Вычисление усилий в расчетных сечениях (с определение растянутых волокон):

$$\begin{aligned}
 M_1^{лев} &= 6 \cdot 1 = +6 \text{ кН} \cdot \text{м}; & M_2^{нижн} &= 6 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = +6 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_3^{нижн} &= M_4 = 6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = +10 \text{ кН} \cdot \text{м}; & M_{4,5,6}^{нижн} &= 6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 10 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_5^{нижн} &= M_6^{нижн} = 6 \cdot 1 + 2 \cdot 4 - 12 = +2 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_7^{нижн} &= M_8^{лев} = 6 \cdot 1 + 2 \cdot 6 - 12 - 10 \cdot 2 = -14 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_9^{лев} &= 6 \cdot 3 + 2 \cdot 6 - 12 - 10 \cdot 2 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_{10}^{лев} &= 6 \cdot 7 + 2 \cdot 6 - 10 \cdot 2 - 12 + 2 = +24 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_{11}^{нижн} &= (5 \cdot 4) \cdot 2 - 10 + 6 \cdot 3 - 12 \cdot 6 = -24 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_{12}^{прав} &= (5 \cdot 2) \cdot 1 - 10 + 6 \cdot 3 - 12 \cdot 4 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_{13}^{нижн} &= -10 + 6 \cdot 3 - 12 \cdot 2 = -16 \text{ кН} \cdot \text{м}; & M_{14}^{нижн} &= -12 \cdot 2 = -24 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\
 M_{15}^{прав} &= -10 + 6 \cdot 3 = +8 \text{ кН} \cdot \text{м}; & M_{16}^{прав} &= -10 + 6 \cdot 0 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м};
 \end{aligned}$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов представлена на рисунке 3.9а. Аналогично подходим и к построению эпюр поперечных и продольных сил.

На участке действия равномерно распределенной нагрузки 9–11 поперечная сила будет изменяться линейно и для ее построения на этом участке необходимо вычислить значения поперечной силы в двух сечениях – 9 и 11 (рисунки 3.9б, 3.10а), а продольная сила на этом участке будет постоянной (рисунок 3.10б):

$$Q_{11}^{нижн} = + (5 \cdot 4) - 12 = +8 \text{ кН}; \quad Q_{13}^{нижн} = -12 \text{ кН}; \quad N_{11}^{нижн} = N_{13}^{нижн} = +8 \text{ кН}.$$

На остальных участках поперечные и продольные силы будут постоянны и для построения их эпюр на этих участках достаточно вычислить значения Q и N в одном из сечений участков:

$$\begin{aligned}
 Q_1^{лев} &= +6 \text{ кН}; & Q_2^{нижн} &= Q_3 = Q_4 = Q_5 = +2 \text{ кН}; & Q_6^{нижн} &= Q_7 = +2 - 10 = -8 \text{ кН}; \\
 Q_8^{лев} &= Q_9 = Q_{10} = +6 \text{ кН}; & Q_{14}^{нижн} &= -12 \text{ кН}; & Q_{15}^{прав} &= Q_{16} = +6 \text{ кН}; \\
 N_1^{лев} &= 0; & N_2^{нижн} &= N_3 = N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = -6 \text{ кН}; \\
 N_8^{лев} &= N_9 = N_{10} = +2 - 10 = -8 \text{ кН}; & N_{14}^{нижн} &= 0; & N_{15}^{прав} &= 0.
 \end{aligned}$$

Построенные по полученным данным эпюры Q и N изображены на рисунке 3.10.

На участке действия равномерно распределенной нагрузки на эпюре Q имеется особое сечение, в котором поперечная сила равна нулю. В этом сечении изгибающий момент будет иметь максимальное значение на участке.

Положение этого сечения найдем из соотношения (рисунок 3.10а):

$$\frac{8}{4 - x_{\max}} = \frac{12}{x_{\max}}; \quad 8 \cdot x_{\max} = 12 \cdot (4 - x_{\max}); \quad 20 \cdot x_{\max} = 48; \quad x_{\max} = 2,4 \text{ м}.$$

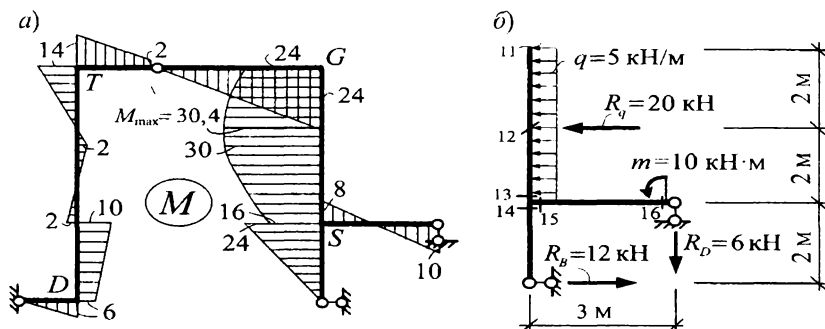


Рисунок 3.9 – Эпюры изгибающих моментов

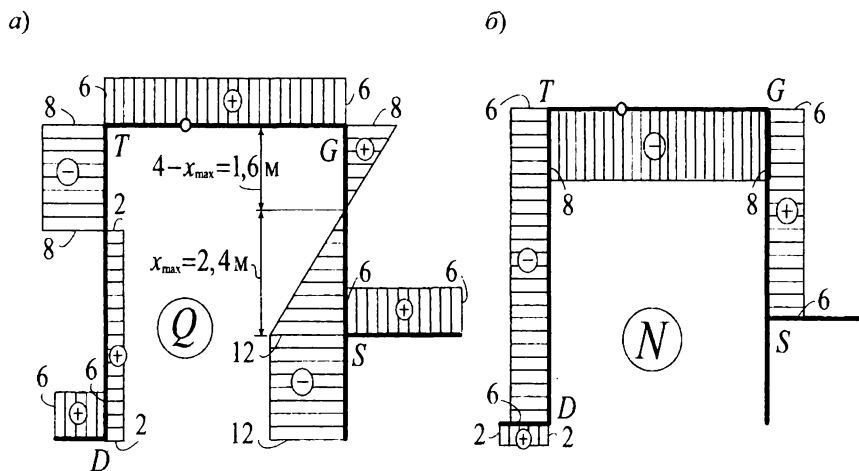


Рисунок 3.10 – Эпюры поперечных и продольных сил

Тогда величина максимального изгибающего момента на участке равна $M_{\max}^{\text{прав}} = (5 \cdot 1,5) \cdot 0,75 - 10 + 6 \cdot (3 + 1,125) - 12 \cdot (2 + 1,5) = -21,625 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

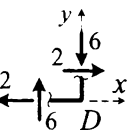
Проверки равновесия узлов для окончательных эпюр M , Q и N :

а) на эпюре M :

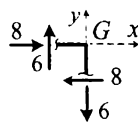
$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{c} 6 \\ \curvearrowright \\ 6 \end{array} & \begin{array}{c} T \\ \curvearrowright \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} 24 \\ \curvearrowleft \\ 24 \end{array} & \begin{array}{c} 16 \\ \curvearrowright \\ 24 \end{array} \\
 \Sigma M_D = 0; & \Sigma M_T = 0; & \Sigma M_G = 0; & \Sigma M_S = 0; \\
 6 - 6 = 0; & 2 - 2 = 0; & 6 - 6 = 0; & 16 + 8 - 24 = 0;
 \end{array}$$

б) по эпюрам Q и N :

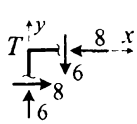
Узел D:

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0; & -2 + 2 &= 0; \\ \Sigma Y &= 0; & 6 - 6 &= 0;\end{aligned}$$


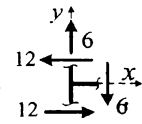
Узел G:

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0; & 8 - 8 &= 0; \\ \Sigma Y &= 0; & 6 - 6 &= 0;\end{aligned}$$


Узел T:

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0; & 8 - 8 &= 0; \\ \Sigma Y &= 0; & 6 - 6 &= 0;\end{aligned}$$


Узел S:

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0; & 12 - 12 &= 0; \\ \Sigma Y &= 0; & 6 - 6 &= 0.\end{aligned}$$


Пример расчета рамы с ненагруженной затяжкой (рисунок 3.11)

Внешние опорные реакции определяем из уравнений равновесия всей рамы:

$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= 0; & -5 - 5 + 8,5 \cdot 2 + 12 \cdot (2,5 + 1,5) - 16 \cdot 2 + 9,5 \cdot 2 - R_B \cdot 7 &= 0; & R_B &= 6 \text{ кН}; \\ \Sigma X &= 0; & H_A + 8,5 - 16 - 9,5 &= 0; & H_A &= 17,0 \text{ кН}; \\ \Sigma Y &= 0; & R_A - 12 + 6 &= 0; & R_A &= 6 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Для определения усилия в затяжке проводим сечение $I-I$ через шарнир C и затяжку и рассматриваем равновесие одной из частей рамы, например, правой:

$$\Sigma M_C^{прав} = 0; \quad 12 \cdot 1,5 + 16 \cdot 2 + 9,5 \cdot 6 - 6 \cdot 4,5 - H \cdot 4 = 0; \quad H = 20 \text{ кН}.$$

Проверка: $\Sigma M_C^{лев} = 0; \quad 6 \cdot 2,5 + (20 - 17) \cdot 4 - 8,5 \cdot 2 - 5 - 5 = 0; \quad 27 - 27 = 0.$

Покажем вычисление усилий в ряде сечений рамы (рисунок 3.12):

$$M_1^{лев} = +(20 - 17) \cdot 4 - 8,5 \cdot 2 = -5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_1^{лев} = +20 - 17 - 8,5 = -5,5 \text{ кН};$$

$$M_2^{лев} = +(20 - 17) \cdot 4 + 6 \cdot 2,5 - 8,5 \cdot 2 - 5 - 5 = +5 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad Q_2^{лев} = +6 \text{ кН};$$

$$M_4^{прав} = (4 \cdot 2,5) \cdot 1,25 - 20 \cdot 2 + 9,5 \cdot 4 - 6 \cdot (1,5 + 1,5) = -7,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5^{прав} = +9,5 \cdot 2 - 20 \cdot 0 - 6 \cdot 1,5 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_3^{прав} = +(4 \cdot 5) - 20 \sin \alpha + 9,5 \sin \alpha - 6 \cos \alpha = 8 \text{ кН};$$

$$Q_5^{прав} = -20 \sin \alpha + 9,5 \sin \alpha - 6 \cos \alpha = -12 \text{ кН};$$

$$N_3^{прав} = N_5^{прав} = 20 \cos \alpha - 9,5 \cos \alpha - 6 \sin \alpha = 1,5 \text{ кН}.$$

По результатам расчетов строим эпюры M , Q и N (рисунок 3.13). Там же представлена проверка равновесия узла D по поперечным и продольным силам.

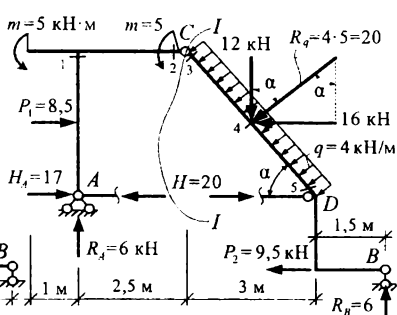


Рисунок 3.11 – Схема рамы

Рисунок 3.12 – Схема к определению опорных реакций

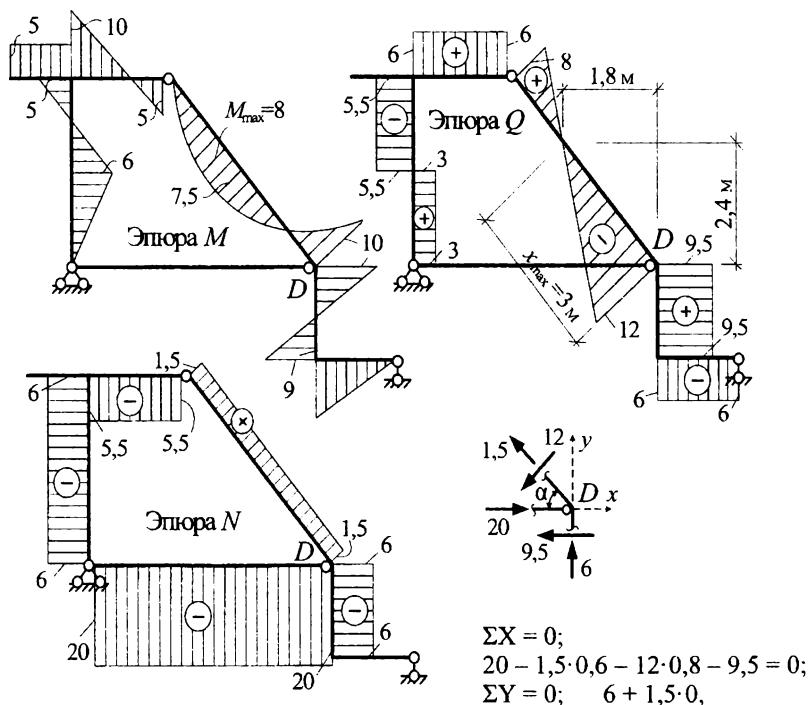


Рисунок 3.13 – Эпюры M , Q , N

3.5 Расчёт составных рам

При расчете такие рамы аналогично, как и многопролетные балки, целесообразно разделять (по шарнирам) на отдельные трехшарнирные и (или) простые рамы, одни из которых (*второстепенные*) будут опираться на другие (*главные*).

Расчёт следует начинать с самой верхней второстепенной рамы. При расчёте нижних рам опорные реакции, полученные при расчёте верхних рам, направляют в противоположную сторону и прикладывают к нижней раме в узле, где соединяются рассматриваемые рамы. Эпюры усилий, полученные при расчёте отдельно простых или трёхшарнирных рам, отображают, как правило, на полной схеме составной рамы.

Представленная на рисунок 3.14а, составная рама состоит из трех рам: *TB* – главная простая рама; *ACB* – второстепенная трёхшарнирная рама, опирающаяся на главную раму *TB* и основание; *CDESR* – второстепенная трёхшарнирная рама, опирающаяся на второстепенную раму *ACB* и основание.

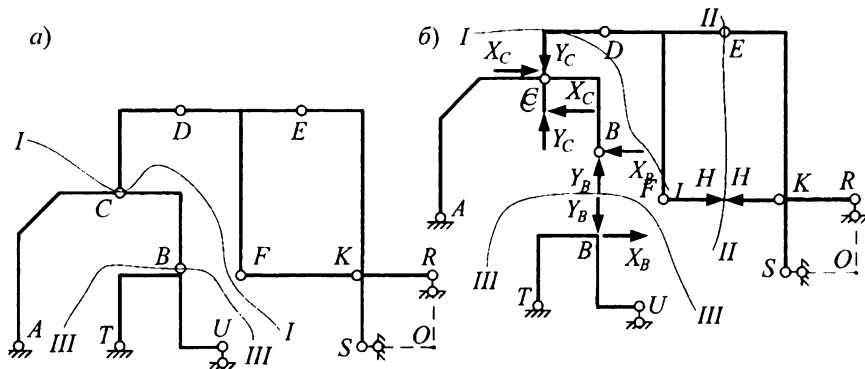


Рисунок 3.14 – Схема составной рамы

3.6 Пример расчёта составной рамы

Рама, представленная на рисунке 3.15, может быть разделена на трёхшарнирную раму *DCT* и два простых консольных стержня *AD* и *BT* (рисунок 3.15), при этом по структуре трёхшарнирная рама *DCT* опирается на стержни *AD* и *BT*.

Найденные усилия в шарнирах *D* и *T* передаем в обратных направлениях на консольные стержни *AD* и *BT* (рисунок 3.15). После этого вычисление усилий в сечениях трёхшарнирной рамы *DCT* и консольных стержней *AD* и *BT* не представляет никакой сложности.

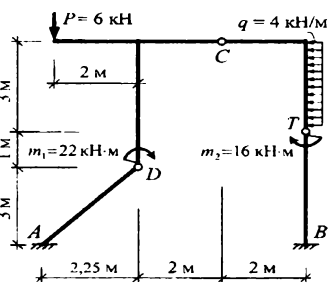


Рисунок 3.15 – Схема составной рамы

В первую очередь выполняют расчёт трёхшарнирной рамы *DCT*. Для определения реактивных усилий в шарнирах *D* и *T* необходимо решать систему уравнений:

$$\begin{cases} 1) \sum M_D = 0; & + 22 - 6 \cdot 2 - (4 \cdot 3) \cdot 2,5 + X_T + 4 \cdot Y_T = 0; \\ 2) \sum M_C = 0; & + (4 \cdot 3) \cdot 1,5 - 3 \cdot X_T + 2 \cdot Y_T = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_T = 8 \text{ кН}; \\ Y_T = 3 \text{ кН}; \end{cases}$$

3) $\Sigma X = 0$; $+X_D + 8 - 4 \cdot 3 = 0$; $X_D = 4$ кН; 4) $\Sigma Y = 0$; $Y_D - 6 - 3 = 0$; $Y_D = 9$.

Проверка: $\Sigma M_C^{лев} = 0$; $+22 + 9 \cdot 2 - 6 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = 0$; $40 - 40 = 0$.

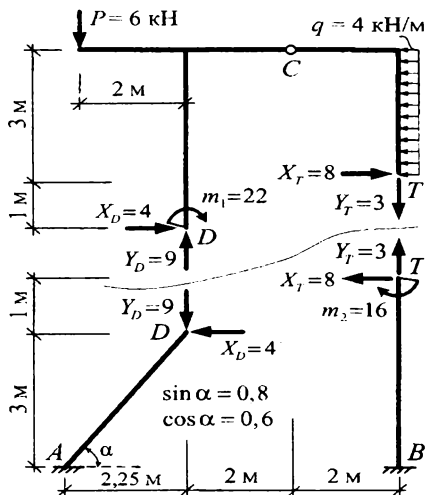


Рисунок 3.16 – Схема рамы

Окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в рассматриваемой раме представлены на рисунках 3.17–3.19.

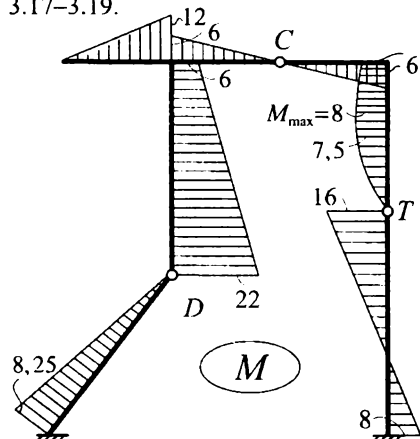


Рисунок 3.17 – Эпюра M

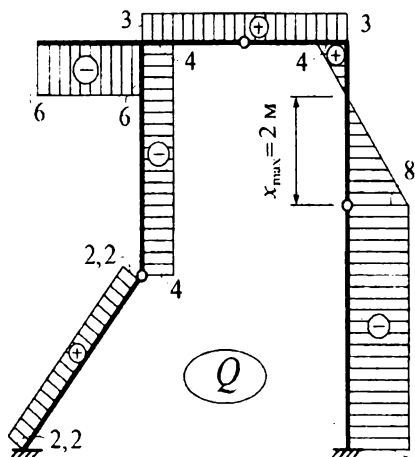


Рисунок 3.18 – Эпюра Q

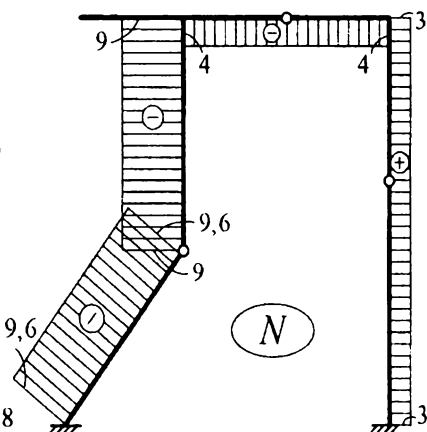


Рисунок 3.19 – Эпюра N

3.7 Исходные данные для выполнения работы

Таблица 3.1 – Исходные данные

Номер строки	Номер схемы	a (м)	b (м)	h_1 (м)	h_2 (м)	P (кН)	q (кН/м)
0	0	2,4	2,1	3,5	2,0	8,0	2,0
1	1	2,6	2,7	3,4	1,8	9,0	2,2
2	2	3,0	3,1	3,1	2,3	10,0	2,4
3	3	3,2	3,2	2,6	1,7	11,0	2,6
4	4	3,4	2,8	2,7	2,2	8,5	2,8
5	5	3,6	2,6	2,5	2,5	9,5	3,0
6	6	3,8	2,9	2,2	2,4	10,5	3,2
7	7	4,0	3,4	2,4	2,6	11,5	3,4
8	8	4,2	3,0	3,3	2,8	12,5	3,6
9	9	4,4	2,3	3,1	3,0	14,0	3,8
Шифр							

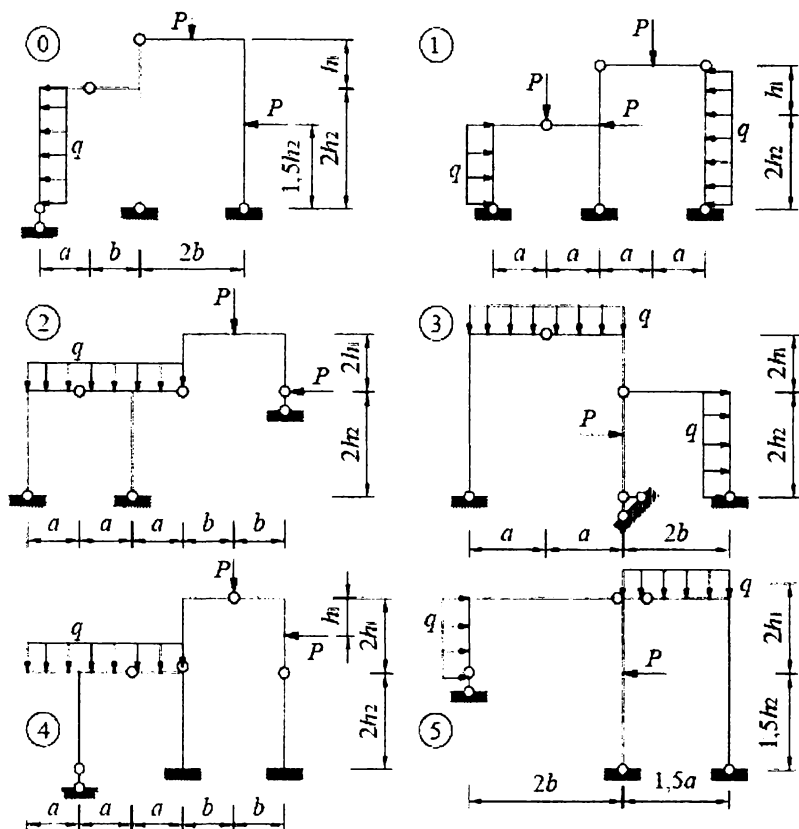


Рисунок 3.20 – Схемы рам

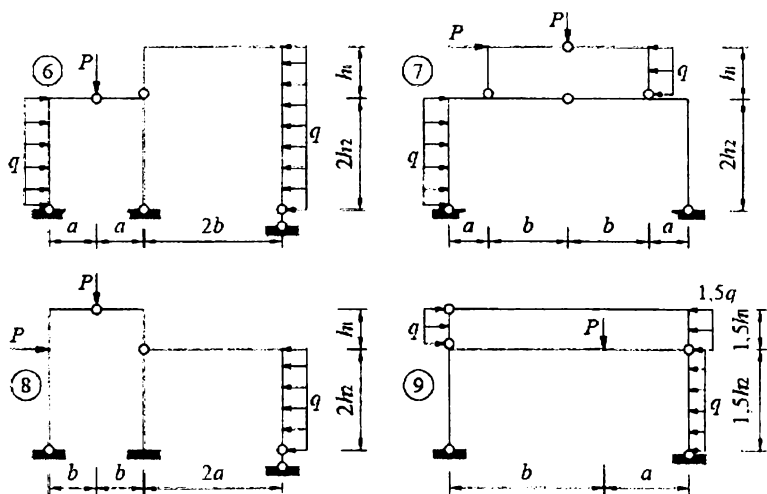


Рисунок 3.20 (продолжение) – Схемы рам

3.8 Контрольные вопросы по лабораторной работе

1. Классификация статически определимых рам в зависимости от структуры. Какие рамы называются простыми.
2. Какие системы называются трёхшарнирными.
3. Что называется распором? Виды трёхшарнирных рам с точки зрения восприятия распора. Какой элемент называется затяжкой?
4. Какие рамы называются составными?
5. Порядок расчёта простых рам.
6. Особенности расчёта трёхшарнирных рам.
7. Определение опорных реакций в трёхшарнирной раме с опорами в одном уровне.
8. Определение опорных реакций в трёхшарнирной раме с опорами в разных уровнях.
9. Определение опорных реакций в трёхшарнирной раме с незагруженной затяжкой.
10. Определение опорных реакций в трёхшарнирной раме с загруженной затяжкой.
11. Расчет составных рам.

4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4. РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ ТРЁХШАРНИРНОЙ АРКИ

Цель выполнения работы: проверить кинематическое качество расчётной схемы трёхшарнирной арки, определить внутренние силы и построить их эпюры.

Порядок выполнения работы:

1. Выполнить кинематический анализ системы.
2. Определить опорные реакции.
3. Построить балочные эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, рассматривая простую двухопорную балку, нагруженную нагрузкой, действующей на трёхшарнирную арку. Пролёт двухопорной балки следует принять равными пролётам трёхшарнирной арки.
4. Выполнить расчёт всех необходимых параметров и внутренних сил в трёхшарнирной арке и построить для неё эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.
5. Выполнить проверку согласования эпюр.

4.1 Основные сведения о расчёте трёхшарнирной арки

Аркой называются сжато-изогнутая стержневая конструкция с криволинейным очертанием оси стержня, выпуклостью направленного навстречу действующей нагрузке. Арки являются распорными системами.

Расчётная схема трёхшарнирной арки

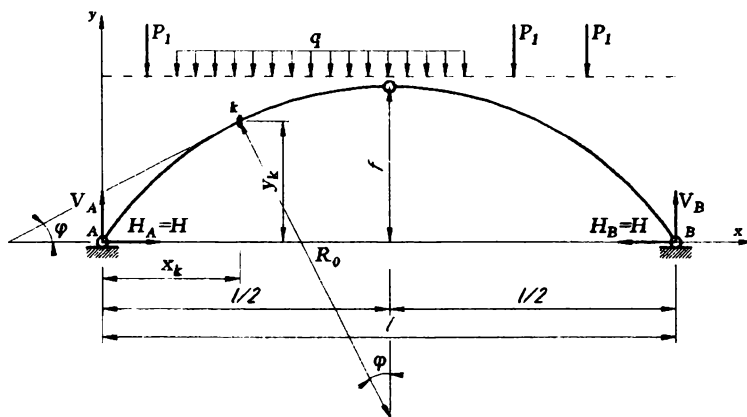


Рисунок 4.1 – Расчётная схема арки

Где l – пролёт арки – горизонтальное расстояние в свету между центрами опор; f – стрела подъема оси арки – расстояние от самой верхней точки арки до прямой, соединяющей центры опорных шарниров; R_0 – радиус кривизны арки;

φ – угол наклона касательной к оси арки относительно горизонтали; x_k, y_k – координаты произвольного сечения k арки; H – распор.

Аналитический расчёт трёхшарнирной статически определимой арки

1 Определение опорных реакций

При определении четырёх составляющих опорных реакций V_A, H_A, V_B, H_B , как для любой трёхшарнирной системы необходимо использовать три основных уравнения статического равновесия:

$$\begin{cases} \sum M_i = 0; \\ \sum X_i = 0; \\ \sum Y_j = 0. \end{cases}$$

и четвертое дополнительное уравнение: равенство нулю алгебраической суммы моментов сил, действующих на левую или правую половину арки относительно центрального шарнира C , т. е.

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0 \text{ или } \sum M_C^{\text{прав}} = 0.$$

Для арки, приведенной на рисунке 4.1, уравнения равновесия будут иметь следующий вид:

$$\sum M_A = 0; \quad P_1 \cdot x_{P_1} + q \cdot l_q \cdot x_q + P_2 \cdot x_{P_2} + P_3 \cdot x_{P_3} - V_B \cdot l = 0;$$

$$V_B = \frac{P_1 \cdot x_{P_1} + q \cdot l_q \cdot x_q + P_2 \cdot x_{P_2} + P_3 \cdot x_{P_3}}{l};$$

$$\sum X = 0; \quad H_A - H_B = 0; \quad H_A = H_B = H;$$

$$\sum Y = 0; \quad V_A - P_1 - q \cdot l_q - P_2 - P_3 + V_B = 0;$$

$$V_A = P_1 + q \cdot l_q + P_2 + P_3 - V_B;$$

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0; \quad \left[V_A \cdot \frac{l}{2} - P_1 \cdot \left(\frac{l}{2} - x_{P_1} \right) + q \cdot l_{qC} \cdot \left(\frac{l}{2} - x_{qC} \right) \right] - H \cdot f = 0;$$

$$\text{или } \sum M_C^{\text{лев}} = 0; \quad M_C^0 - H \cdot f = 0; \Rightarrow H = \frac{M_C^0}{f},$$

где $x_{P_1}, x_q, x_{P_2}, x_{P_3}$ – расстояние от точки A (начало координат) до линий действия соответственно силы P_1 , равнодействующей распределённой нагрузки q , силы P_2 и силы P_3 ; M_C^0 – балочный изгибающий момент относительно шарнира C ; f – стрела подъёма арки.

2 Выбор сечений

Очертание оси арки является криволинейным. Поэтому величина внутренних усилий в её поперечных сечениях изменяется по длине арки непропорционально. В результате эпюры внутренних усилий будут нелинейными. Для удовлетворяющей точности отображения законов изменения внутренних усилий выбирают не менее 10–12 сечений, как правило, с равным шагом, часть которых должна попадать в точки приложения внешних сосредоточенных сил, начало и конец распределённых нагрузок.

3 Определение внутренних усилий в арке при произвольной нагрузке

Рассмотрим арку, нагруженную системой сил, расположенных на её поверхности произвольно (рисунок 4.1). При аналитическом определении внутренних сил в k -м сечении арки используют метод сечений.

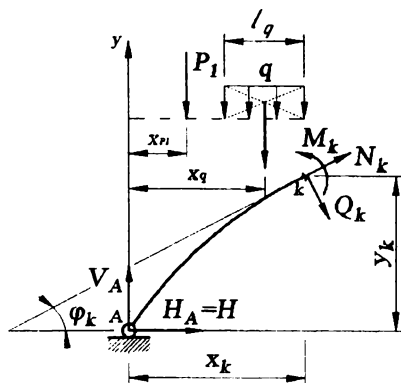


Рисунок 4.2 – Иллюстрация к определению внутренних усилий в трёхшарнирной арке

$$M_k = [V_A x_k - P_1 (x_k - x_{P_1}) - q \cdot l_q (x_k - x_q)] - H \cdot y_k; \quad (4.1)$$

$$Q_k = [V_A - P_1 - q \cdot l_q] \cdot \cos \varphi_k - H \cdot \sin \varphi_k; \quad (4.2)$$

$$N_k = -[V_A - P_1 - q \cdot l_q] \cdot \sin \varphi_k - H \cdot \cos \varphi_k. \quad (4.3)$$

Выражения в квадратных скобках в уравнении (4.1) представляет изгибающий момент M_k^0 , а выражение в квадратных скобках в уравнениях (4.2) и (4.3) представляют поперечную силу Q_k^0 , которые полученные в сечении k от действия только вертикальной внешней нагрузки и вертикальных опорных реакций (их называют балочным моментом, балочной поперечной силой, т. к. они могут быть получены из рассмотрения простой двухопорной балки, нагруженной указанной вертикальной нагрузкой).

Тогда уравнения (4.1), (4.2) и (4.3) могут быть переписаны в следующем виде:

$$M_k = M_k^0 - H y_k; \quad (4.4)$$

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k; \quad (4.5)$$

$$N_k = -Q_k^0 \sin \varphi_k - H \cos \varphi_k, \quad (4.6)$$

где H – распор арки; y_k , $\sin \varphi_k$, $\cos \varphi_k$ – ордината, синус и косинус угла наклона касательной к оси арки по отношению к горизонтальной оси (либо угол между нормалью к оси арки и вертикальной осью) для k -го сечения арки.

Определив указанным способом значения M , Q и N для всех выбранных сечений, можно построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил. Эпюры внутренних сил в трёхшарнирных арках имеют аналогичные правила согласования, как и для систем с прямолинейными элементами (рам, балок), но все являются нелинейными.

В зависимости от очертания оси арки геометрические характеристики трех-шарнирных арок могут быть определены по следующим зависимостям:

а) для круговых арок (в таблице исходных данных обозначены буквой **О** – окружность):

$$R = \frac{4f^2 + l^2}{8f}; y = R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2 - R + f; \quad (4.7)$$

$$\sin \varphi = \frac{l - 2x}{2R}; \cos \varphi = \frac{y + R - f}{R} = 1 - \sin^2 \varphi; \quad (2) \quad (4.8)$$

б) для параболических арок (в таблице исходных данных обозначены буквой **П**):

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x); \operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{4f}{l^2} (l - 2x); \quad (4.9)$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}; \sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \varphi; \quad (4.10)$$

в) для синусоидальных арок (в таблице исходных данных обозначены буквами **СИН**):

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}; \operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{\pi f}{l} \cos \frac{\pi x}{l}; \quad (4.11)$$

$$\sin \varphi \text{ и } \cos \varphi \rightarrow \text{см. (4.10);}$$

г) для эллиптических арок (в таблице исходных данных обозначены буквой **Э**):

$$y = k \left[a^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2 \right] - ka + f; \operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{k \left(\frac{l}{2} - x\right)}{a^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2}; \quad (4.12)$$

$$\text{где } a = \frac{f}{2k} + \frac{kl^2}{8f}; k = \frac{4f}{l}; \sin \varphi \text{ и } \cos \varphi \rightarrow \text{см (4.10);}$$

д) для гиперболических арок (в таблице исходных данных обозначены буквой **Г**):

$$y = f + a - \sqrt{\frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{k^2} + a^2}; \operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)}{k^2 \sqrt{\frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{k^2} + a^2}}; \quad (4.13)$$

$$\text{где } a = \frac{l^2}{8k^2 f} - \frac{f}{2}; k = \frac{l}{\pi f}; \sin \varphi \text{ и } \cos \varphi \rightarrow \text{см. (4.10).}$$

4.2 Пример расчёта трёхшарнирной арки

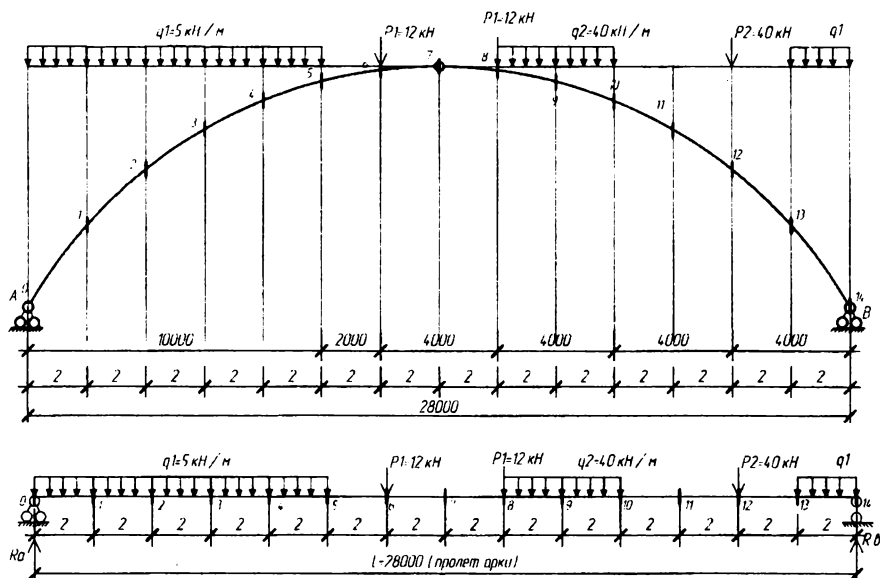


Рисунок 4.3 – Расчетная схема арки и схема балки, для определения M_i^0 и Q_i^0

Определим опорные реакции арки, используя уравнения равновесия:

$$\Sigma M_B = 0; \quad R_a \cdot L - q_1 \cdot 10 \cdot 23 - P_1 \cdot 16 - P_1 \cdot 12 - q_2 \cdot 4 \cdot 10 - P_2 \cdot 4 + q_1 \cdot 2 \cdot 1 = 0;$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad q_1 \cdot 2 \cdot 27 - P_1 \cdot 16 - P_1 \cdot 12 - q_2 \cdot 4 \cdot 18 - P_2 \cdot 24 + q_1 \cdot 10 \cdot 5 - R_b \cdot L = 0;$$

$$R_a = \frac{q_1 \cdot 10 \cdot 23 + P_1 \cdot 16 + P_1 \cdot 12 + q_2 \cdot 4 \cdot 10 + P_2 \cdot 4 + q_1 \cdot 2 \cdot 1}{L} = 116,286 \text{ кН};$$

$$R_b = \frac{q_1 \cdot 2 \cdot 27 + P_1 \cdot 16 + P_1 \cdot 12 + q_2 \cdot 4 \cdot 18 + P_2 \cdot 24 + q_1 \cdot 10 \cdot 5}{L} = 167,714 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_C^{\text{лев}} = 0; \quad R_a \cdot 14 - q_1 \cdot 10 \cdot 9 - P_1 \cdot 2 - H_a \cdot f = 0;$$

$$H_a = \frac{R_a \cdot 14 - q_1 \cdot 10 \cdot 9 - P_1 \cdot 2}{f} = 144,25 \text{ кН};$$

Проверка:

$$\Sigma M_C^{\text{прав}} = 0; \quad H_b \cdot f - R_b \cdot 14 + q_1 \cdot 2 \cdot 13 + P_2 \cdot 10 + q_2 \cdot 4 \cdot 4 + P_1 \cdot 2 = 0;$$

Так как арка нагружена только вертикальной внешней нагрузкой, горизонтальные реакции опор будут равны $H = H_a = H_b$.

Для более точного отображения эпюр внутренних усилий сечения будем принимать с шагом $\Delta x = L/n = 28/14 = 2$ м и получим 14 расчетных сечений (0, 1, 2, ..., 14).

Абсцисса x_k для каждого (k -го) сечения определяется выражением

$$x_k = \Delta x \cdot k.$$

Ординаты y_k , синусы и косинусы углов наклона касательных ($\sin\varphi_k, \cos\varphi_k$) для сечений могут быть найдены, используя геометрические зависимости (4.7)–(4.13), в примере рассматривается круговая арка. Величины внутренних усилий M, Q, N в сечениях арки следует определять по выражениям (4.4)–(4.6). Расчёт геометрических характеристик заданной круговой арки приведен в таблице 4.1, расчёт величин балочных моментов и балочных поперечных сил в сечениях – в таблице 4.2, расчёт величин окончательных изгибающих моментов, поперечных и продольных сил – в таблице 4.3.

Таблица 4.1 – Геометрические характеристики круговой арки

Сечение 0, $x = 0$: $y_0 = \sqrt{16,25^2 - \left(\frac{28}{2} - 0\right)^2} - 8,25 = 0$	$\sin \varphi = \frac{28 - 2 \cdot 0}{2 \cdot 16,25} = 0,862$	$\cos \varphi = \sqrt{1 - 0,862^2} = 0,508$
Сечение 1, $x = 2$: $y_1 = \sqrt{16,25^2 - \left(\frac{28}{2} - 2\right)^2} - 8,25 = 2,707\text{ м}$	$\sin \varphi = \frac{28 - 2 \cdot 2}{2 \cdot 16,25} = 0,738$	$\cos \varphi = \sqrt{1 - 0,738^2} = 0,674$
Сечение 2, $x = 4$: $y_2 = \sqrt{16,25^2 - \left(\frac{28}{2} - 4\right)^2} - 8,25 = 4,559\text{ м}$	$\sin \varphi = \frac{28 - 2 \cdot 4}{2 \cdot 16,25} = 0,615$	$\cos \varphi = \sqrt{1 - 0,615^2} = 0,788$
Сечение 3, $x = 6$: $y_3 = \sqrt{16,25^2 - \left(\frac{28}{2} - 6\right)^2} - 8,25 = 5,894\text{ м}$	$\sin \varphi = \frac{28 - 2 \cdot 6}{2 \cdot 16,25} = 0,492$	$\cos \varphi = \sqrt{1 - 0,492^2} = 0,87$
Сечение 4, $x = 8$: $y_4 = \sqrt{16,25^2 - \left(\frac{28}{2} - 8\right)^2} - 8,25 = 6,852\text{ м}$	$\sin \varphi = \frac{28 - 2 \cdot 8}{2 \cdot 16,25} = 0,369$	$\cos \varphi = \sqrt{1 - 0,369^2} = 0,929$
Сечение 5, $x = 10$: $y_5 = \sqrt{16,25^2 - \left(\frac{28}{2} - 10\right)^2} - 8,25 = 7,5\text{ м}$	$\sin \varphi = \frac{28 - 2 \cdot 10}{2 \cdot 16,25} = 0,246$	$\cos \varphi = \sqrt{1 - 0,246^2} = 0,969$
Сечение 6, $x = 12$: $y_6 = \sqrt{16,25^2 - \left(\frac{28}{2} - 12\right)^2} - 8,25 = 7,876\text{ м}$	$\sin \varphi = \frac{28 - 2 \cdot 12}{2 \cdot 16,25} = 0,123$	$\cos \varphi = \sqrt{1 - 0,123^2} = 0,992$
Сечение 7, $x = 14$: $y_7 = \sqrt{16,25^2 - \left(\frac{28}{2} - 14\right)^2} - 8,25 = 8\text{ м}$	$\sin \varphi = \frac{28 - 2 \cdot 14}{2 \cdot 16,25} = 0$	$\cos \varphi = \sqrt{1 - 0^2} = 1$
Сечение 8, $x = 16$: $y_8 = \sqrt{16,25^2 - \left(\frac{28}{2} - 16\right)^2} - 8,25 = 7,876\text{ м}$	$\sin \varphi = \frac{28 - 2 \cdot 16}{2 \cdot 16,25} = -0,123$	$\cos \varphi = \sqrt{1 - 0,123^2} = 0,992$
Сечение 9, $x = 18$: $y_9 = \sqrt{16,25^2 - \left(\frac{28}{2} - 18\right)^2} - 8,25 = 7,5\text{ м}$	$\sin \varphi = \frac{28 - 2 \cdot 18}{2 \cdot 16,25} = -0,246$	$\cos \varphi = \sqrt{1 - 0,246^2} = 0,969$

Продолжение таблицы 4.1

Сечение 10, $x = 20$: $y_{10} = \sqrt{16,25^2 - \left(\frac{28}{2} - 20\right)^2} - 8,25 = 6,852 м$	$\sin \varphi = \frac{28 - 2 \cdot 20}{2 \cdot 16,25} = -0,369$	$\cos \varphi = \sqrt{1 - 0,369^2} = 0,929$
Сечение 11, $x = 22$: $y_{11} = \sqrt{16,25^2 - \left(\frac{28}{2} - 22\right)^2} - 8,25 = 5,894 м$	$\sin \varphi = \frac{28 - 2 \cdot 22}{2 \cdot 16,25} = -0,492$	$\cos \varphi = \sqrt{1 - 0,492^2} = 0,87$
Сечение 12, $x = 24$: $y_{12} = \sqrt{16,25^2 - \left(\frac{28}{2} - 24\right)^2} - 8,25 = 4,559 м$	$\sin \varphi = \frac{28 - 2 \cdot 24}{2 \cdot 16,25} = -0,615$	$\cos \varphi = \sqrt{1 - 0,615^2} = 0,788$
Сечение 13, $x = 26$: $y_{13} = \sqrt{16,25^2 - \left(\frac{28}{2} - 26\right)^2} - 8,25 = 2,707 м$	$\sin \varphi = \frac{28 - 2 \cdot 26}{2 \cdot 16,25} = -0,738$	$\cos \varphi = \sqrt{1 - 0,738^2} = 0,674$
Сечение 14, $x = 28$: $y_{14} = \sqrt{16,25^2 - \left(\frac{28}{2} - 28\right)^2} - 8,25 = 0$	$\sin \varphi = \frac{28 - 2 \cdot 28}{2 \cdot 16,25} = -0,862$	$\cos \varphi = \sqrt{1 - 0,862^2} = 0,508$

Таблица 4.2 – Расчёт значений балочных изгибающих моментов и поперечных сил

Сечение 1–7 слева до шарнира	
Сечение 0, $x = 0$: $M_{O_0} = 0$;	$Q_{O_0} = R_a = 116,286 кН$;
Сечение 1, $x = 2$: $M_{O_1} = R_a \cdot 2 - q_1 \cdot 2 \cdot 1 = 222,571 кН \cdot м$;	$Q_{O_1} = R_a - q_1 \cdot 2 = 106,286 кН$;
Сечение 2, $x = 4$: $M_{O_2} = R_a \cdot 4 - q_1 \cdot 4 \cdot 2 = 425,143 кН \cdot м$;	$Q_{O_2} = R_a - q_1 \cdot 4 = 96,286 кН$;
Сечение 3, $x = 6$: $M_{O_3} = R_a \cdot 6 - q_1 \cdot 6 \cdot 3 = 607,714 кН \cdot м$;	$Q_{O_3} = R_a - q_1 \cdot 6 = 86,286 кН$;
Сечение 4, $x = 8$: $M_{O_4} = R_a \cdot 8 - q_1 \cdot 8 \cdot 4 = 770,286 кН \cdot м$;	$Q_{O_4} = R_a - q_1 \cdot 8 = 76,286 кН$;
Сечение 5, $x = 10$: $M_{O_5} = R_a \cdot 10 - q_1 \cdot 10 \cdot 5 = 912,857 кН \cdot м$;	$Q_{O_5} = R_a - q_1 \cdot 10 = 66,286 кН$;
Сечение 6, $x = 12$: $M_{O_6} = R_a \cdot 12 - q_1 \cdot 10 \cdot 7 = 1045 кН \cdot м$;	$Q_{O_6} = R_a - q_1 \cdot 10 - P_1 = 54,286 кН$;
Сечение 7, $x = 14$: $M_{O_7} = R_a \cdot 14 - q_1 \cdot 10 \cdot 9 - P_1 \cdot 2 = 1154 кН \cdot м$;	$Q_{O_7} = R_a - q_1 \cdot 10 - P_1 = 54,286 кН$;
Сечение 14–7 справа до шарнира	
Сечение 14, $x = 28$: $M_{O_{14}} = 0$;	$Q_{O_{14}} = -R_b = -167,714 кН$;
Сечение 13, $x = 26$: $M_{O_{13}} = R_b \cdot 2 - q_1 \cdot 2 \cdot 1 = 325,429 кН \cdot м$;	$Q_{O_{13}} = -R_b + q_1 \cdot 2 = -157,714 кН$;

Продолжение таблицы 4.2

Сечение 12, $x = 24$: $Mo_{12} = R_b \cdot 4 - q_1 \cdot 2 \cdot 3 = 640,857 \text{ кН} \cdot \text{м};$	$Qo_{12} = -R_b + q_1 \cdot 2 = -157,714 \text{ кН};$
Сечение 11, $x = 22$: $Mo_{11} = R_b \cdot 6 - q_1 \cdot 2 \cdot 5 - P_2 \cdot 2 = 876,286 \text{ кН} \cdot \text{м};$	$Qo_{12} = -R_b + q_1 \cdot 2 + P_2 = -117,714 \text{ кН};$
Сечение 10, $x = 20$: $Mo_{10} = R_b \cdot 8 - q_1 \cdot 2 \cdot 7 - P_2 \cdot 4 = 1112 \text{ кН} \cdot \text{м};$	$Qo_{10} = -R_b + q_1 \cdot 2 + P_2 = -117,714 \text{ кН};$
Сечение 9, $x = 18$: $Mo_9 = R_b \cdot 10 - q_1 \cdot 2 \cdot 9 - P_2 \cdot 6 - q_2 \cdot 2 \cdot 1 = 1267 \text{ кН} \cdot \text{м};$	$Qo_9 = -R_b + q_1 \cdot 2 + P_2 - q_2 \cdot 2 = -37,714 \text{ кН};$
Сечение 8, $x = 16$: $Mo_8 = R_b \cdot 12 - q_1 \cdot 2 \cdot 11 - P_2 \cdot 8 - q_2 \cdot 4 \cdot 2 = 1263 \text{ кН} \cdot \text{м};$	$Qo_8 = -R_b + q_1 \cdot 2 + P_2 - q_2 \cdot 4 = 42,286 \text{ кН};$
Сечение 7, $x = 14$: $Mo_7 = R_b \cdot 14 - q_1 \cdot 2 \cdot 13 - P_2 \cdot 10 - q_2 \cdot 4 \cdot 4 = 1154 \text{ кН} \cdot \text{м};$	$Qo_9 = -R_b + q_1 \cdot 2 + P_2 - q_2 \cdot 4 = 54,286 \text{ кН};$

Таблица 4.3 – Расчёт значений окончательных изгибающих моментов

№ сеч.	Координата x	Расчёт изгибающего момента по формуле $M_i = Mo_i - H \cdot y_i$
0	0	$M_0 = 0 - 144,25 \cdot 0 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$
1	2	$M_1 = 222,571 - 144,25 \cdot 2,707 = -167,957 \text{ кН} \cdot \text{м}$
2	4	$M_2 = 425,143 - 144,25 \cdot 4,559 = -232,448 \text{ кН} \cdot \text{м}$
3	6	$M_3 = 607,714 - 144,25 \cdot 5,894 = -242,545 \text{ кН} \cdot \text{м}$
4	8	$M_4 = 770,286 - 144,25 \cdot 6,852 = -218,078 \text{ кН} \cdot \text{м}$
5	10	$M_5 = 912,857 - 144,25 \cdot 7,5 = -169,018 \text{ кН} \cdot \text{м}$
6	12	$M_6 = 1045 - 144,25 \cdot 7,876 = -90,75 \text{ кН} \cdot \text{м}$
7	14	$M_7 = 1154 - 144,25 \cdot 8 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$
8	16	$M_8 = 1263 - 144,25 \cdot 7,876 = 126,393 \text{ кН} \cdot \text{м}$
9	18	$M_9 = 1267 - 144,25 \cdot 7,5 = 185,268 \text{ кН} \cdot \text{м}$
10	20	$M_{10} = 1112 - 144,25 \cdot 6,852 = 123,351 \text{ кН} \cdot \text{м}$
11	22	$M_{11} = 876,286 - 144,25 \cdot 5,894 = 26,026 \text{ кН} \cdot \text{м}$
12	24	$M_{12} = 640,857 - 144,25 \cdot 4,559 = -16,734 \text{ кН} \cdot \text{м}$
13	26	$M_{13} = 325,429 - 144,25 \cdot 2,707 = -65,1 \text{ кН} \cdot \text{м}$
14	28	$M_{14} = 0 - 144,25 \cdot 0 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Таблица 4.4 – Расчёт значений окончательных поперечных сил

№ сеч.	Координата x	Расчёт поперечной силы по формуле $Q_i = Qo_i \cos \varphi_i - H \sin \varphi_i$
0	0	$Q_0 = 116,286 \cdot 0,508 - 144,25 \cdot 0,862 = -65,24 \text{ кН}$
1	2	$Q_1 = 106,286 \cdot 0,674 - 144,25 \cdot 0,738 = -34,855 \text{ кН}$
2	4	$Q_2 = 96,286 \cdot 0,788 - 144,25 \cdot 0,615 = -12,874 \text{ кН}$

Продолжение таблицы 4.4

3	6	$Q_3 = 86,286 \cdot 0,87 - 144,25 \cdot 0,492 = 4,09 \text{ кН}$
4	8	$Q_4 = 76,286 \cdot 0,929 - 144,25 \cdot 0,369 = 17,634 \text{ кН}$
5	10	$Q_5 = 66,286 \cdot 0,969 - 144,25 \cdot 0,246 = 28,738 \text{ кН}$
6	12	$Q_6 = 66,286 \cdot 0,992 - 144,25 \cdot 0,123 = 48,215 \text{ кН}$
6i	12	$Q_{6i} = 54,286 \cdot 0,992 - 144,25 \cdot 0,123 = 36,119 \text{ кН}$
7	14	$Q_7 = 54,286 \cdot 1 - 144,25 \cdot 0 = 54,286 \text{ кН}$
8	16	$Q_8 = 54,286 \cdot 0,992 - 144,25 \cdot (-0,123) = 71,49 \text{ кН}$
8i	16	$Q_{8i} = 42,286 \cdot 0,992 - 144,25 \cdot (-0,123) = 59,718 \text{ кН}$
9	18	$Q_9 = (-37,714) \cdot 0,969 - 144,25 \cdot (-0,246) = -1,046 \text{ кН}$
10	20	$Q_{10} = (-117,714) \cdot 0,929 - 144,25 \cdot (-0,369) = -56,135 \text{ кН}$
11	22	$Q_{11} = (-117,714) \cdot 0,87 - 144,25 \cdot (-0,492) = -31,446 \text{ кН}$
12	24	$Q_{12} = (-117,714) \cdot 0,788 - 144,25 \cdot (-0,615) = -4,04 \text{ кН}$
12i	24	$Q_{12i} = (-157,714) \cdot 0,788 - 144,25 \cdot (-0,615) = -35,545 \text{ кН}$
13	26	$Q_{13} = (-157,714) \cdot 0,674 - 144,25 \cdot (-0,738) = 0,177 \text{ кН}$
14	28	$Q_{14} = (-157,714) \cdot 0,674 - 144,25 \cdot (-0,738) = 39,13 \text{ кН}$

Таблица 4.5 – Расчёт значений окончательных продольных сил

№ сеч.	Координата x	Расчёт продольной силы по формуле $N_i = -(Q_{0i} \sin \varphi_i + H \cos \varphi_i)$
0	0	$N_0 = -(116,286 \cdot 0,862 + 144,25 \cdot 0,508) = -173,419 \text{ кН}$
1	2	$N_1 = -(106,286 \cdot 0,738 + 144,25 \cdot 0,674) = -175,755 \text{ кН}$
2	4	$N_2 = -(96,286 \cdot 0,615 + 144,25 \cdot 0,788) = -172,954 \text{ кН}$
3	6	$N_3 = -(86,286 \cdot 0,492 + 144,25 \cdot 0,87) = -168,037 \text{ кН}$
4	8	$N_4 = -(76,286 \cdot 0,369 + 144,25 \cdot 0,929) = -162,224 \text{ кН}$
5	10	$N_5 = -(66,286 \cdot 0,246 + 144,25 \cdot 0,969) = -156,128 \text{ кН}$
6	12	$N_6 = -(54,286 \cdot 0,123 + 144,25 \cdot 0,992) = -149,835 \text{ кН}$
7	14	$N_7 = -(54,286 \cdot 0 + 144,25 \cdot 1) = -144,25 \text{ кН}$
8	16	$N_8 = -(42,286 \cdot (-0,123) + 144,25 \cdot 0,992) = -137,949 \text{ кН}$
9	18	$N_9 = -((-37,714) \cdot (-0,246) + 144,25 \cdot 0,969) = -149,095 \text{ кН}$
10	20	$N_{10} = -((-117,714) \cdot (-0,369) + 144,25 \cdot 0,929) = -177,521 \text{ кН}$
11	22	$N_{11} = -((-117,714) \cdot (-0,492) + 144,25 \cdot 0,87) = -183,51 \text{ кН}$
12	24	$N_{12} = -((-157,714) \cdot (-0,615) + 144,25 \cdot 0,788) = -210,757 \text{ кН}$
13	26	$N_{13} = -((-157,714) \cdot (-0,738) + 144,25 \cdot 0,674) = -213,733 \text{ кН}$
14	28	$N_{14} = -((-167,714) \cdot (-0,862) + 144,25 \cdot 0,508) = -217,727 \text{ кН}$

Выполним построение эпюр M , Q , N по полученным значениям (см. рисунок 4.4), установим выполнения общих закономерностей изменения эпюр внутренних сил M , Q и N .

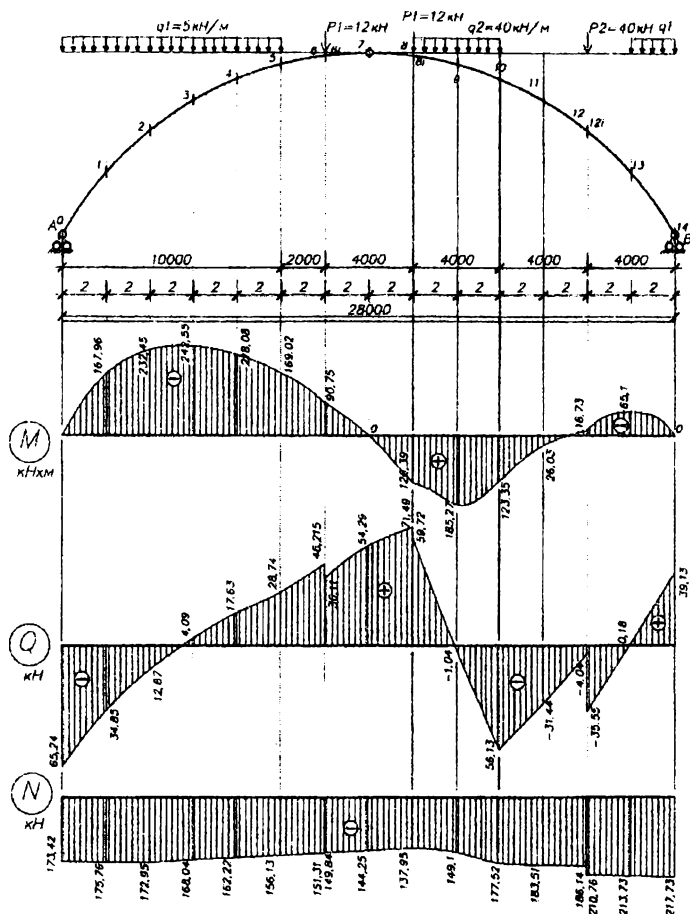


Рисунок 4.4 – Окончательные эпюры внутренних сил в трёхшарнирной арке

4.3 Исходные данные для выполнения работы

Таблица 4.6 – Исходные данные

Номер строки	№ загрузки	Очертание оси	f , м	P_1 , кН	P_2 , кН	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м
1	1	П	8	13	30	2	15
2	2	О	6	16	33	3	18
3	3	СИН	5	19	36	4	21
4	4	Г	7	22	39	5	24
5	5	П	4	25	42	6	27

Продолжение таблицы 4.6

6	6	О	9	28	45	7	30
7	7	СИН	8	31	48	8	33
8	8	Г	6	34	51	9	36
9	9	П	5	37	54	10	39
10	10	О	7	40	57	11	42
11	1	СИН	4	43	60	12	45
12	2	Г	9	15	48	7	54
13	3	П	8	15	42	7	48
14	4	О	6	18	44	9	52
15	5	СИН	5	21	46	11	48
16	6	Г	7	15	47	8	35
17	7	П	4	19	50	10	25
18	8	О	9	23	53	12	30
19	9	СИН	8	27	56	14	35
20	10	Г	6	31	59	16	40
21	1	П	5	35	62	18	45
22	2	О	7	39	65	20	50
23	3	СИН	4	43	68	22	55
24	4	Г	9	47	71	24	60
25	5	П	8	51	74	26	65
26	6	О	6	55	77	28	50
27	7	СИН	5	13	34	2	15
28	8	Г	7	16	54	8	19
29	9	П	4	19	33	6	11
30	10	О	9	22	48	15	14

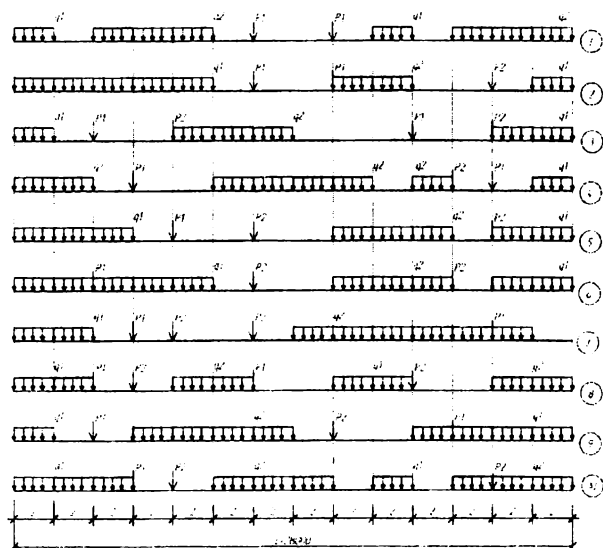


Рисунок 4.5 – Схемы загрузений арки

4.4 Контрольные вопросы по лабораторной работе

1. Какие системы называются трёхшарнирными?
2. Какая система называется аркой?
3. Изобразите расчётную схему трёхшарнирной арки и расшифруйте все её геометрические параметры.
4. Какие уравнения необходимо составить для определения опорных реакций в трёхшарнирной арке?
5. Какое очертание принимают окончательные эпюры внутренних сил в трёхшарнирной арке и какое оптимальное количество сечений необходимо принимать при её ручном расчёте?
6. Запишите уравнения для определения окончательных внутренних сил в некотором произвольном сечении k трёхшарнирной арки и опишите входящие в них величины.
7. Какие виды очертания оси арок применяются при возведении арочных конструкций? Запишите функцию $y = f(x)$ для параболического, кругового и синусоидального очертания оси арки.

ЛИТЕРАТУРА,

рекомендуемая для расширенного изучения материала

1. Игнатюк, В. И. Строительная механика: пособие / В. И. Игнатюк, И. С. Сыровкашко. – Брест, 2015. – 152 с.
2. Борисевич, А. А. Строительная механика: учебное пособие / А. А. Борисевич, Е. М. Сидорович, В. И. Игнатюк. – Минск : БНТУ, 2007. – 821 с.
3. Яровая, А. В. Строительная механика. Статика стержневых систем : уч. пособие / А. В. Яровая ; Белорус. гос. ун-т транспорта. – Гомель : БелГУТ, 2013. – 447 с.
4. Строительная механика / Под ред. А. В. Даркова. – М. : Высшая школа, 1976. – 600 с.
5. Анохин Н. Н. Строительная механика в примерах и задачах. – М. : Изд-во АСВ, 1999. (Ч. I. Статически определимые системы) – 335 с.
6. Расчет трехшарнирных арок: методич. указания по дисциплине «Строительная механика» для студ. строит. спец-тей дневной и заочной форм обучения / В. И. Игнатюк, С. В. Загуляев, В. В. Молош; БрГТУ. – Брест, 2007. – 32 с.

Учебное издание

Составители:

*Молош Виктор Викторович
Игнатюк Валерий Иванович
Бочарова Наталья Владимировна*

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ по дисциплине «Строительная механика»

Методические указания
для студентов специальности
1-74 05 01 «Мелиорация и водное хозяйство»
дневной формы получения образования
Ч. 1. Статически определимые системы

Ответственный за выпуск: Игнатюк В. И.
Редактор: Митлошук М. А.
Компьютерная вёрстка: Вашкевич Ю. А.
Корректор: Дударук С. А.

Подписано в печать 16.06.2023 г. Формат 60х84 1/16. Бумага «Performer».
Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 3,255. Уч. изд. л. 3, 5. Заказ № 592. Тираж 20 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный
технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/235 от 24.03.2014 г.