РАСЧЁТ ПЛИТ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С НАГРУЗКАМИ В СРЕДИННОЙ ПЛОСКОСТИ

Босаков В.С.,
Строительный факультет, БГПА
г.Минск, Беларусь
Пойта П.С., Тарасевич А.Н.
Строительный факультет, БПИ
г.Брест, Беларусь

Плиты на грунтовом основании, широко используются в качестве жестких покрытий дорог, аэродромов, полов зданий, днищ шлюзов и резервуаров. Расчет конструкций на упругом основании представляет собой сложную задачу. Перед специалистами возникает ряд проблем по выбору методов расчета и расчетной модели основания.

Первым предположением была прямолинейная зависимость между осадками грунта и приложенной нагрузкой. Недостатком этой модели является то, что осадка возникает только там, где приложена нагрузка. Такая модель дает равномерное распределение реактивных давлений по подошве фундамента, что не соответствует действительной работе грунта. Несмотря на эти недостатки, расчеты по ней ведутся и в настоящее время. Хорошее совпадение теоретических расчетов с экспериментальными данными можно получить при слабых грунтах.

Г.Э.Проктором и К.Виктардом была предложена модель упругого изотропного полупространства. Это позволило применить в расчётах решения теории упругости. С применением этой модели появилась возможность рассчитывать осадки за пределами приложения нагрузки, а также учитывать влияние соседних нагрузок.

Модель предложенная в 1933 г. К.Маргерром также обладает распределительной способностью и называется моделью упругого слоя или слоя конечной толщины. С помощью этой модели можно описывать и Винклеровское основание и упругое полупространство, однако если грунт не подстилается довольно жестким слоем, определение мощности сжимаемого слоя затруднительно.

Единый подход к линейным моделям основан на применении функции влияния основания. Впервые исследования задач изгиба конструкций на упругом основании на основе общей модели линейно-деформируемого основания с математическим описанием ее с помощью ядра основания произвел

Б.Г.Корнеев [1]. Он рассмотрел плиты, которые лежат на линейно-деформируемом упругом основании, для которого между давлением на основание и перемещением поверхности основания существует следующая зависимость:

$$W(x,y)=\iint\limits_F P(\xi,\eta)K(x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta \qquad (1)$$

где, W - осадка поверхности грунта;

Р - внешняя нагрузка;

к - ядро уравнения, т.е. прогиб в точке (х,у) вызванный единичной сосредоточенной силой приложенной в точке (ξ,η);

$$k(x-\xi,y-\eta)=\frac{1-\upsilon^2}{\pi E}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \qquad (2)$$

Несмотря на большую общность такая модель линейно-деформируемого основания не охватывает, например, упругое анизотропное полупространство. Кроме того в случае действия на основание движущейся единичной силы функция влияния не будет выражаться в виде (3). Чтобы охватить случаи, подобные названным, для компонент матрицы - ядра основания Г.Я. Попов [2] принял такое выражение:

$$k_{jk}(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}H_{jk}(\xi,\eta)\cdot e^{-i\xi x-i\eta y}\cdot d\xi\cdot d\eta;\quad (j,k)=1,2,3. \qquad (3)$$

Принимая различные выражения функции $H_{jk}(\xi,\eta)$ можно получать все вышеперечисленные модели.

В теории расчета конструкций на грунтовом основании основное место занимают балки и плиты.

По размерам в плане они подразделяются на бесконечные, полубесконечные, четвертьбесконечные.

Расчет плит на грунтовом основании представляет более сложную задачу по сравнению с расчетом балок, так как для описания деформируемого состояния плиты используется бигармоническое уравнение изгиба срединной поверхности плиты:

$$D\left[\frac{\delta^4 W}{\delta x^4}+2\cdot\frac{\delta^4 W}{\delta x^2\delta y^2}+\frac{\delta^4 W}{\delta y^4}\right]+N_x\frac{\delta^2 W}{\delta x^2}+N_y\frac{\delta^2 W}{\delta x^2}=q(x,y)-p(x,y) \qquad (4)$$

где: D- цилиндрическая жесткость плиты;

W - прогиб плиты;

N_x, N_y - погонные нагрузки приложенные в срединной плоскости плиты;

q - внешняя нагрузка перпендикулярная срединной поверхности;

p - реактивное давление грунта;

Данное уравнение решается совместно с уравнением определяющим зависимость между осадками и реактивным давлениями, при заданных граничных условиях. При расчете конструкций на Винклеровском основании решаются системы дифференциальных уравнений в обыкновенных или частных производных.

При расчете плит лежащих на упругом полупространстве задача еще более усложняется так как дифференциальное уравнение заменяется интегро-дифференциальным. При решении данных уравнений применяются различные приближённые методы, многие авторы применяют методы расчета удобные для реализации на ЭВМ. Л.П.Винокуров и др. применили к расчету плиты на упругом полупространстве метод конечных разностей. К числу дискретных методов расчета, помимо метода конечных разностей, относятся вариационно-разностный и метод конечных элементов.

Точные аналитические решения большинства задач расчета конструкций на деформируемом основании важны как эталон для оценки пригодности приближенных расчётов [3,4,5,6,7].

Задачи ещё более усложняются где в расчет включаются нагрузки действующие в срединной плоскости. Этой проблеме посвящено очень мало работ. Для полосы расположенной на слое конечной толщины имеется решение в работе А.Г.Ишковой [8]. Плиты на комбинированном основании рассмотрены в работе Б.Г.Корнева [1].

Нагружение продольными силами в срединной поверхности соответствует конструкциям выполненным из самонапряженного железобетона. При выполнении монолитной плиты из напрягающего бетона твердофазовое расширение последнего в условиях ограничения свободы деформаций приводит к деформированию арматуры [9]. В результате плита получает предварительное обжатие в двух направлениях. Таким образом помимо системы традиционных сил, воздействующих на конструкцию необходимо учесть сжимающие усилия от самонапряжения, действующие в срединной плоскости плиты (при условии симметричного положения ограничивающей арматуры). Величина сил обжатия, приложенных к конструкции определяется на основании методики [10]. Вопросом, подлежащим анализу остается влияние дополнительных сил от само пряжения на работу конструкции под нагрузкой.

Рассмотрим свободнолежащую на упругом полупространстве плиту груженную единичной сосредоточенной силой. Решив эту задачу мы буд знать функцию влияния для данной плиты. Имеем дифференциальное урав ние изгиба срединной плоскости (4). Уравнение выражающее равенство про бов плиты и осадок основания с ядром для упругого полупространства за шется в виде:

$$W(x,y)=\frac{1-\nu^2}{\pi\cdot E}\cdot\int_0^a\int_0^b\frac{P(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$$

Граничные условия на гранях при x=0 и x=a

$$M_x=-D(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2})=0;\qquad Q_x=-D(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 W}{\partial y^2\partial x}+(1-\mu)\frac{\partial^3 W}{\partial y^2\partial x})=0;$$

На гранях при y=0 и y=b

$$M_y=-D(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2})=0;\qquad Q_y=-D(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y}+(1-\mu)\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y})=0;$$

Наиболее универсальным, хотя и одним из самых простых, способов р шения дифференциальных уравнений при заданных граничных условиях яв ется метод, основанный на замене производных, входящих как в дифферен альное уравнение, так и в граничные условия, соответствующими конечны разностями, что позволяет составить систему алгебраических уравнений.

Разностное уравнение изгиба срединной поверхности плиты при квадратной ячейке сетки принимает вид

$$\frac{D}{\lambda^4}(20\cdot W_{i,k}-8\cdot(W_{i-1,k}+W_{i,k-1}+W_{i+1,k}+W_{i,k+1})+2\cdot(W_{i-1,k-1}+W_{i-1,k+1}+W_{i+1,k-1}+W_{i+1,k+1})-$$
$$-(W_{i-2,k}+W_{i,k-2}+W_{i,k+2}+W_{i+2,k}))=q_{i,k}-P_{i,r}$$

Разностные уравнения граничных условий принимает вид

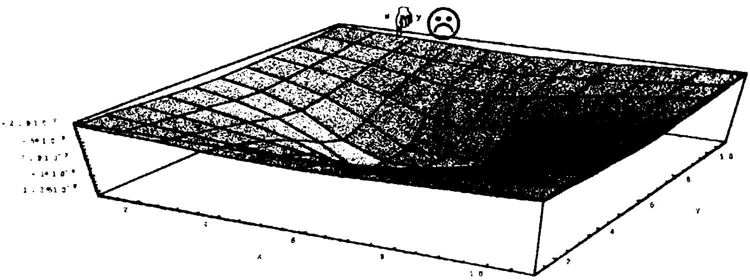
$$M_{i,k}=-\frac{D}{\lambda^2}(W_{i-1,k}-2\cdot W_{i,k}+W_{i+1,k}+\nu\cdot(W_{i,k-1}-2\cdot W_{i,k}+W_{i,k+1}))=0;$$

$$Q_{i,k}=-\frac{D}{2\cdot\lambda^3}(-W_{i-2,k}+2\cdot W_{i-1,k}-2\cdot W_{i+1,k}+W_{i+2,k}+(2-\nu)\cdot(-W_{i-1,k-1}+2\cdot W_{i-1,k}-$$
$$-W_{i-1,k+1}+W_{i+1,k-1}-2\cdot W_{i+1,k}+W_{i+1,k+1}))=0$$

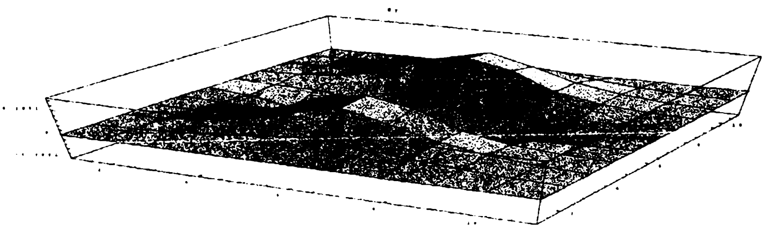
Для анализа влияния продольных сил на напряжённо-деформирован состояние плиты была составлена программа расчёта с помощью приклад пакета "Mathematica".

Результаты расчетов показывают, что учет сил действующих в срединной плоскости (сил возникающих в плитах выполненных из самонапряженного бетона) уменьшает прогибы плиты, снижает максимальные значения изгибающих моментов при постоянной жесткости плиты.

Форма поверхности плиты при действии сосредоточенной нагрузки в центре.



Эпюра изгибающих моментов относительно оси "X"



Литература

1. Коренев Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. Госстройиздат, М.; 1954 г.
2. Попов Г.Я. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании. -ПММ, т.25, вып.2, 1961 г.
3. Жемочкин Б.Н., Синицын А.П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. -М, Стройиздат, 1984.
4. Woinowsky-Kriger S. Ьber die Biegung dьnner rechteckigen Platten dьrch Kreislasten. Ingenienr Archiv, v.3, 1932.
5. Westergaard H.M. Stress concentration in plates loaded over small areas. Trans. ASCE, v.108, 1943.
6. Шехтер О.Я. К расчету фундаментных плит на упругом слое грунта конечной мощности. Сборник НИИ № 11 “Основания и фундаменты”, 1948.

7. Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И. Расчет конструкций на упругом основании. -М., Стройиздат, 1984.
8. Ишкова А.Г. Об изгибе изотропных и ортотропных пластинок на упругом основании Изв. ВУЗов "Строительство и архитектура", вып.XVII, 1969.
9. Михайлов В.В., Литвер С,С, Расширяющийся и напрягающий цементы и самонапряженные конструкции. М.: Стройиздат, 1976.
10. Пособие по проектированию самонапряженных конструкций к СНиП 2.03.01-84. М.: Стройиздат, 1986.