# НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ЖЕЛЕЗОБЕТОННОМ ЭЛЕМЕНТЕ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА ПРИ ПОВТОРНОЙ НАГРУЗКЕ

Н. А. Колесников
Строительный факультет, БПИ
г. Брест, Беларусь

В работе приводятся результаты определения напряжений в центрально катом железобетонном элементе при действии многократно повторной ступнчато изменяющейся нагрузки. Показано, что для области условно линейной лзучести бетона решение, полученное в [1], является частным случаем более щего закона нагружения, рассмотренного в статье.

Ключевые слова: нагрузка, ползучесть, железобетонный элемент, интеальное уравнение, свертка, напряжения.

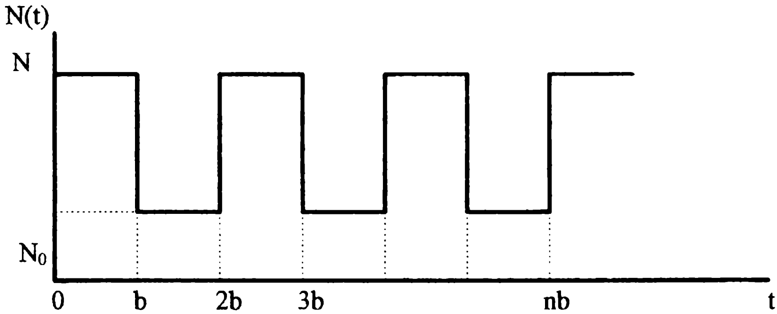
Рассмотрим центрально сжатый железобетонный элемент нагрузкой N(t), меняющейся во времени по графику:

Показанный график изменения нагрузки можно аппроксимировать функией вида:

$$N(t) = \sum_{(n)} [N \quad (N - N_0) U(nb)] \tag{1}$$

е функция U(nb) принимает значения [1]:

$$U(nb) = \begin{cases} 0 \text{ при } 2nb < t < (2nb+1)b; \\ 1 \text{ при } (2n+1)b < t < (2n+2)b; \; n = 0,1,2\ldots \end{cases}$$




Для случая загружения нагрузкой $N(t)=N=const$ задача определени пряжений в бетоне с $E(\tau) = E_0 = const$ центрально сжатого железобетон элемента с учетом ползучести сводится к решению следующего интеграл уравнения [2] :

$$\sigma_б(t) = \frac{N}{F_б(1+\mu m)} + \frac{\mu E_a}{(1+\mu m)} \int_{\tau_1}^{t} \sigma_б(\tau) \frac{\delta}{\delta\tau}\left[\frac{1}{E_0} + C(t-\tau)\right] d\tau$$

где $\sigma_б(t)$ - напряжения в бетоне с учетом ползучести ;

$F_б$ - площадь бетона ;

$E_0$ - модуль упругости бетон;

$E_a$ - модуль упругости арматуры ;

$\mu = \frac{F_a}{F_б}$ - процент армирования;

$F_a$ - площадь арматуры;

$m = \frac{E_a}{E_0}$ - модульное отношение;

$C(t-\tau) = C_0\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right]$ - мера ползучести бетона;

$C_0$ - предельное значение меры ползучести для данного бетона;

$\tau$, $t$ - соответственно момент загружения и текущий момент времени;

$\gamma$ - опытный параметр.

Для рассматриваемого случая загружения (1) будем иметь

$$\sigma_6(t) = \frac{N(t)}{F_6(1+\mu m)} + \frac{\mu E_a}{(1+\mu m)}\int_{\tau_1}^{t}\sigma_6(\tau)\frac{\delta}{\delta\tau}\left[\frac{1}{E_0} + C(t-\tau)\right]d\tau$$

и после упрощений

$$\sigma_6(t) = \frac{N(t)}{F_6(1+\mu m)} - \frac{\mu E_a C_0 \gamma}{(1+\mu m)}\int_{\tau_1}^{t}\sigma_6(t)e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau$$

Примем $\tau_1=0$ и обозначим $\frac{\mu E_a C_0 \gamma}{1+\mu m} = \lambda_0$, тогда

$$\sigma_6(t) = \frac{N(t)}{F_6(1+\mu m)} - \lambda_0\int_{\tau_1}^{t}\sigma_6(\tau)e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau \qquad (3)$$

Для решения линейного интегрального уравнения (3) воспользуемся преобзованием Лапласа [3]. Изображениями оригиналов будут :

$$F(s) \to \sigma_6(t); \qquad G(s) \to \frac{N(t)}{F_6(1+\mu m)};$$

$$F(s)K(s) \to \int_0^t \sigma_6(\tau)e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau,$$

е $s = x+jy$ - комплексная переменная.

Таким образом, в пространстве изображений уравнение (3) получит вид :

$$F(s) = G(s) - \lambda_0 F(s)K(s) \qquad (4)$$

Откуда изображение искомого оригинала будет равно :

$$F(s) = \frac{G(s)}{1+\lambda_0 K(s)} \qquad (5)$$

Найдем изображения $G(s)$ и $K(s)$ :

$$G(s) = \int_0^\infty \frac{N(t)e^{-st}}{F_6(1+\mu m)}dt = \frac{1}{F_6(1+\mu m)}\int_0^\infty e^{-st}\sum_{(n)}[N - (N-N_0)U(nb)]dt$$

и

$$G(s) = \frac{1}{F_6(1+\mu m)}\int_0^\infty e^{-st}\sum_0^n [N - (N-N_0)U(nb)]dt =$$

$$= \frac{1}{F_6(1+\mu m)}\left[\int_0^\infty e^{-st}dt - (N-N_0)\sum_0^n \int_{(2n+1)b}^{(2n+2)b} e^{-st}dt\right] =$$

$$= \frac{1}{F_6(1+\mu m)}\left[N\frac{1}{s} - (N-N_0)\frac{1}{s}\sum_0^n \left[e^{-(2n+1)bs}e^{-(2n+2)bs}\right]\right] =$$

$$\frac{1}{F_6(1+\mu m)}\left[N\frac{1}{s} - (N-N_0)\frac{1}{s}(e^{-bs} - e^{-2bs} + e^{-3bs} - e^{-4bs} + \ldots)\right] =$$

$$= \frac{1}{F_6(1+\mu m)}[N\frac{1}{s} + (N - N_0)\frac{1}{s}\sum_1^n (-1)^n e^{-nbs}] \quad (6)$$

Для свертки функций $\sigma_6(t)$ и $e^{-\gamma t}$

$$\int_0^t \sigma_6(\tau)e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau$$

на основании теоремы свертывания имеем

$$F(s)K(s) \to \int_0^t \sigma_6(\tau)e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau$$

где

$$K(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{-\gamma t}dt = \int e^{-(s+\gamma)t}dt = \frac{1}{s+\gamma} \quad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (5), получим:

$$F(s) = \left[\frac{N}{F_6(1+mm)} * \frac{1}{s} + \sum_1^n \frac{(-1)^n(N-N_0)}{F_6(1+mm)} * \frac{e^{-nbs}}{s}\right] * \frac{(s+\gamma)}{(s+\gamma+\lambda_0)}$$

Обозначим $\gamma+\lambda_0=\alpha$, тогда

$$F(s) = \frac{N}{F_6(1+\mu m)} * \frac{(s+\gamma)}{s(s+\alpha)} + \sum_1^n \frac{(-1)^n(N-N_0)}{F_6(1+\mu m)} * \frac{e^{-nbc}}{s} * \frac{(s+\gamma)}{(s+\alpha)}$$

Представим дробь $\frac{(s+\gamma)}{s(s+\alpha)}$ в виде суммы простейших дробей. Так как корнями многочлена $s(s+\alpha)$ будут числа $s_1=0$ и $s2=-\alpha$, то используя метод неопределенных коэффициентов, получим:

$$\frac{(s+\gamma)}{s(s+\alpha)} = \frac{d_1}{s-s_1} + \frac{d_2}{s-s_2} = \frac{d_1}{s} + \frac{d_1}{s+\alpha} = \frac{(d_1+d_2)s + d_1\cdot\alpha}{s(s+\alpha)}$$

Приравняв множители при одинаковых степенях s в числителях слева и справа, получим уравнения:

$d_1 + d_2 = 1$ и $d_1\cdot\alpha = \gamma$

из которых найдем

$$d_1 = \frac{\gamma}{\alpha}; d_2 = \frac{\alpha-\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda_0}{\alpha}$$

Следовательно $\frac{s+\gamma}{s(s+\alpha)} = \frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{1}{s} + \frac{\lambda_0}{\alpha}\cdot\frac{1}{(s+\alpha)}$. Тогда:

$$F(s) = \frac{N}{F_6(1+\mu m)}\left[\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{1}{s} + \frac{\lambda_0}{\alpha}\cdot\frac{1}{s+\alpha}\right] + \sum_1^n \frac{(-1)^n(N-N_0)}{F_6(1+\mu m)}\left[\frac{e^{-nbs}}{s}\cdot\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\lambda_0}{\alpha}\cdot\frac{e^{-nbs}}{s+\alpha}\right] \quad (8)$$

Используя таблицу соответствий [3], найдем оригинал полученного изображения. Так как:

$$\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{1}{s}+\frac{\lambda_0}{\alpha}\cdot\frac{1}{(s+\alpha)}\to\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\lambda_0}{\alpha}e^{-\alpha t},\ \text{а}$$

$$\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{e^{-nbs}}{s}+\frac{\lambda_0}{\alpha}\cdot\frac{e^{-nbs}}{(s+\alpha)}\to\frac{\gamma}{\alpha}U(nb)+\frac{\lambda_0}{\alpha}U(t-nb)$$

где $U(t-nb)=\begin{cases}0 \text{ при } 0<t<nb\\ e^{-\alpha(t-nb)} \text{ при } nb<t\end{cases}$

то

$$\sigma_\delta(t)=\frac{N}{F_\delta(1+\mu m)}\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\lambda_0}{\alpha}e^{-\alpha t}\right)+\sum_1^n\frac{(-1)^n(N-N_0)}{F_\delta(1+\mu m)}\frac{\gamma}{\alpha}U(nb)+$$

$$+\sum_1^n\frac{(-1)^n(N-N_0)}{F_\delta(1+\mu m)}\cdot\frac{\lambda_0}{\alpha}U(t-nb)$$

После упрощений получим:

$$\sigma_\delta(t)=\frac{\gamma N(t)}{\alpha F_\delta(1+\mu m)}+\frac{\lambda_0}{\alpha F_\delta(1+\mu m)}\sum\left[Ne^{-\alpha t}-(N-N_0)U(t-nb)\right] \tag{9}$$

Как следует из (9), при действии нагрузки $N(t) = N = const$ напряжения в бетоне будут равны:

$$\sigma_\delta(t)=\frac{N}{\alpha F_\delta(1+\mu m)}\left(\gamma+\lambda_0 e^{-\alpha t}\right) \tag{10}$$

откуда при $t\to 0$

$$\sigma_\delta=\frac{N}{\alpha F_\delta(1+\mu m)} \tag{11}$$

т.е. соответствуют упруго-мгновенным напряжениям в железобетонном элементе с процентом армирования $\mu$.

$$\text{При } t\to\infty\quad \sigma_\delta-\sigma_\delta(t)_{t\to\infty}=\frac{N}{\alpha F_\delta(1+\mu m)}\left(1-\frac{\gamma}{\alpha}\right) \tag{12}$$

Воспользоваться характеристиками меры ползучести, принятыми для железобетонной колонны в работе [1]:

$C_0=0.9\cdot10^{-5}$ (кг/см$^2$)$^{-1}$; $\gamma=0.026$ (сут)$^{-1}$;

$E_a=2\cdot10^6$ кг/см$^2$; $m=10$; $\mu=3$ %,

получим

$$\lambda_0 = \frac{\mu E_a C_0 \gamma}{1+\mu m} = \frac{0.03 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0.9 \cdot 10^5 \cdot 0.026}{1+0.03 \cdot 10} = 0.0108 (\text{сут})^{-1}$$

$$1-\frac{\gamma}{\alpha} = 1-\frac{\gamma}{\gamma+\lambda_0} = 1-\frac{0.026}{0.026+0.0108} = 0.294$$

Таким образом, величина уменьшения напряжений в бетоне в данном случае доходит до 30 %. В работе [1] получен результат, равный 35 %. Кажущееся противоречие объясняется тем, что в работе [1] колонна была загружена в возрасте бетона $\tau_1$ = 28 сут., в то время как решение (12) получено в предположении $\tau 1 \gg 28$ сут.

Литература


1. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеорпроектиздат, М., 1952.
2. Roberts G.E., Kaufman H. Nable of Laplace transforms, 1966.
3. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. "Наука", М., 1971.