

## ДЕФОРМИРОВАНИЕ ДВУХШАРНИРНЫХ КРУГОВЫХ АРОК, НАГРУЖЕННЫХ ВЕРТИКАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ, РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Рассматриваются двухшарнирные арки кругового очертания постоянной жесткости пролетом  $l$ , нагруженные статическими вертикальными распределенными по параболической зависимости нагрузками (рисунок 1).

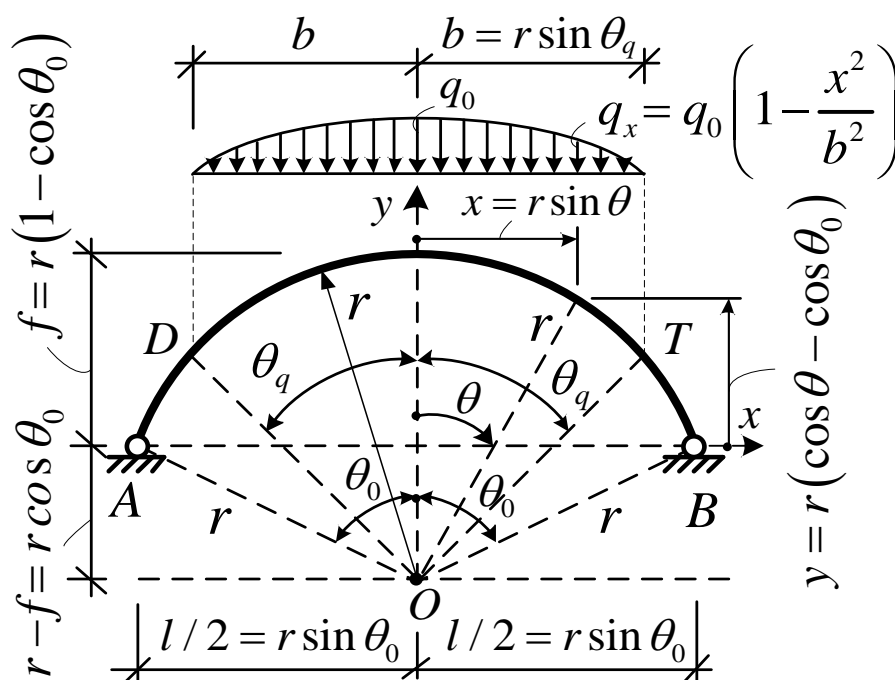


Рисунок 1 – Расчетная схема арки

Деформированный вид любой системы определяется перемещениями ее сечений. Для определения перемещений воспользуемся формулой Мора [1]

$$\Delta_{iP} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ} + \sum \int \eta \frac{\bar{Q}_i Q_P ds}{GA} + \sum \int \frac{\bar{N}_i N_P ds}{EA}, \quad (1)$$

где  $M_P$ ,  $Q_P$ ,  $N_P$  – изгибающие моменты, поперечные и продольные силы в системе от действия внешней нагрузки, от которой определяется перемещение (зависимости для этих усилий получены в работах [2, 3]);

$\bar{M}_i$ ,  $\bar{Q}_i$ ,  $\bar{N}_i$  – изгибающие моменты, поперечные и продольные силы в системе от действия единичной силы, приложенной в точке, для которой определяется перемещение, в направлении искомого перемещения ( $i$ -ом);

$EJ$ ,  $GA$ ,  $EA$  – жесткости соответственно при изгибе, сдвиге и продольном растяжении-сжатии;

$\eta$  – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений при изгибе.

Подставив в (1) зависимости изменения усилий от внешних нагрузок [2, 3] и единичных усилий  $\bar{M}_i$ ,  $\bar{Q}_i$ ,  $\bar{N}_i$  (получены ниже) и выполнив интегрирование, получим искомое грузовое перемещение. При этом единичные усилия можно находить в статически определимой системе.

Учитывая, что направление полных перемещений неизвестно, определяются отдельно вертикальное и горизонтальное перемещения, зная которые несложно вычислить величину и направление полного перемещения.

Для определения вертикальных перемещений сечений при использовании формулы Мора приложим к точке на оси сечения вертикальную единичную силу (рисунок 10), от ее действия найдем опорные реакции и зависимости изменения внутренних сил, которые затем подставим в формулу Мора (31) и, выполнив вычисление интегралов Мора, сможем получить величины искомых перемещений.

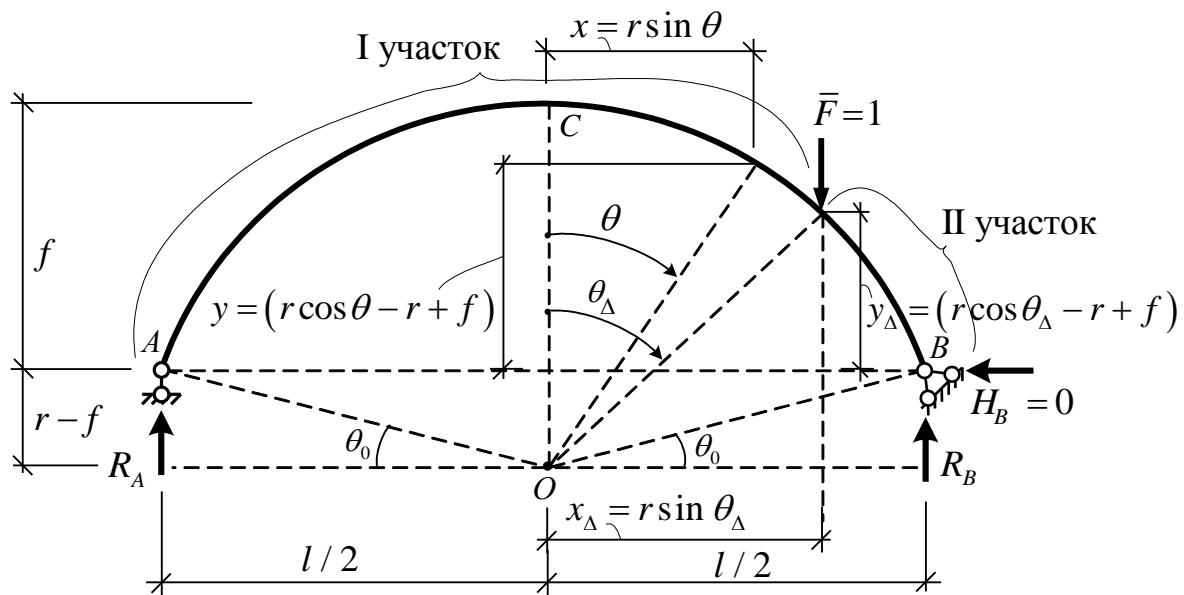


Рисунок 2 – Приложение единичной силы для определения вертикальных перемещений

Опорные реакции найдем из уравнений равновесия арки

$$\sum M_B = 0; \quad -1 \cdot \left( \frac{l}{2} - x_\Delta \right) + R_A l = 0; \quad R_A = \frac{1}{2} - \frac{x_\Delta}{l} = \frac{1}{2} - \frac{r}{l} \sin \theta_\Delta.$$

$$\sum y = 0; \quad 1 - R_A - R_B = 0; \quad R_B = \frac{1}{2} + \frac{x_\Delta}{l} = \frac{1}{2} + \frac{r}{l} \sin \theta_\Delta.$$

Внутренние силы в сечениях арки определяются выражениями:

а) на участке от опоры А до точки приложения силы (участок I) (рисунок 2)

$$\bar{M}_{\Delta\theta(I)} = R_A \left( \frac{l}{2} + x \right) = \frac{l}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{r}{l} \sin \theta_\Delta \right) + r \left( \frac{1}{2} - \frac{r}{l} \sin \theta_\Delta \right) \sin \theta; \quad (2)$$

$$\bar{Q}_{\Delta\theta(I)} = R_A \cos \theta = \left( \frac{1}{2} - \frac{r}{l} \sin \theta_\Delta \right) \cos \theta; \quad (3)$$

$$\bar{N}_{\Delta\theta(I)} = -R_A \sin \theta = - \left( \frac{1}{2} - \frac{r}{l} \sin \theta_\Delta \right) \sin \theta; \quad (4)$$

а) на участке от точки приложения силы до опоры  $B$  (участок II) (рисунок 2)

$$\bar{M}_{\Delta\epsilon(\text{II})} = \bar{M}_{\Delta\epsilon(\text{I})} - 1 \cdot (x - x_{\Delta}) = \frac{l}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{3r}{l} \sin \theta_{\Delta} \right) + r \left( \frac{3}{2} - \frac{r}{l} \sin \theta_{\Delta} \right) \sin \theta; \quad (5)$$

$$\bar{Q}_{\Delta\epsilon(\text{II})} = \bar{Q}_{\Delta\epsilon(\text{I})} - 1 \cdot \cos \theta = - \left( \frac{1}{2} + \frac{r}{l} \sin \theta_{\Delta} \right) \cos \theta; \quad (6)$$

$$\bar{N}_{\Delta\epsilon(\text{II})} = -R_A \sin \theta + 1 \cdot \sin \theta = \left( \frac{1}{2} + \frac{r}{l} \sin \theta_{\Delta} \right) \sin \theta. \quad (7)$$

Теперь вертикальное перемещение любого сечения арки в соответствии с полученными зависимостями можно определить по выражению (1), выполняя интегрирование по участкам одновременной непрерывности эпюр и суммирование по всем этим участкам. Например, для точек участка от опоры  $A$  до начала действия нагрузки будем иметь выражение

$$\Delta_q^{\text{верт}} = \frac{1}{EJ} \left( \int_{-\theta_0}^{-\theta_{\Delta}} M_{q(1)} \bar{M}_{\Delta\epsilon(\text{I})} dx + \int_{-\theta_{\Delta}}^{-\theta_q} M_{q(1)} \bar{M}_{\Delta\epsilon(\text{II})} dx + \int_{-\theta_q}^{\theta_q} M_{q(2)} \bar{M}_{\Delta\epsilon(\text{II})} dx + \int_{\theta_q}^{\theta_0} M_{q(3)} \bar{M}_{\Delta\epsilon(\text{II})} dx \right) +$$

$$+ \frac{\eta}{GA} \left[ \int_{-\theta_0}^{-\theta_{\Delta}} Q_{q(1)} \bar{Q}_{\Delta\epsilon(\text{I})} dx + \int_{-\theta_{\Delta}}^{-\theta_q} Q_{q(1)} \bar{Q}_{\Delta\epsilon(\text{II})} dx + \int_{-\theta_q}^{\theta_q} Q_{q(2)} \bar{Q}_{\Delta\epsilon(\text{II})} dx + \int_{\theta_q}^{\theta_0} Q_{q(3)} \bar{Q}_{\Delta\epsilon(\text{II})} dx \right] +$$

$$+ \frac{1}{EA} \left[ \int_{-\theta_0}^{-\theta_{\Delta}} N_{q(1)} \bar{N}_{\Delta\epsilon(\text{I})} dx + \int_{-\theta_{\Delta}}^{-\theta_q} N_{q(1)} \bar{N}_{\Delta\epsilon(\text{II})} dx + \int_{-\theta_q}^{\theta_q} N_{q(2)} \bar{N}_{\Delta\epsilon(\text{II})} dx + \int_{\theta_q}^{\theta_0} N_{q(3)} \bar{N}_{\Delta\epsilon(\text{II})} dx \right]. \quad (8)$$

Горизонтальные перемещения сечений определяются аналогично, при этом к сечениям прикладывается горизонтальная единичная сила.

На основе полученных зависимостей выполним расчет перемещений сечений арки, рассмотренной в работе [3] (рисунок 3), имеющей прямоугольное поперечное сечение ( $\eta = 1,2$ ) и постоянную жесткость, характеризующуюся величинами:  $EJ = 1000 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ ;  $GA = 15000 \text{ кН}$ ;  $EA = 40000 \text{ кН}$ .

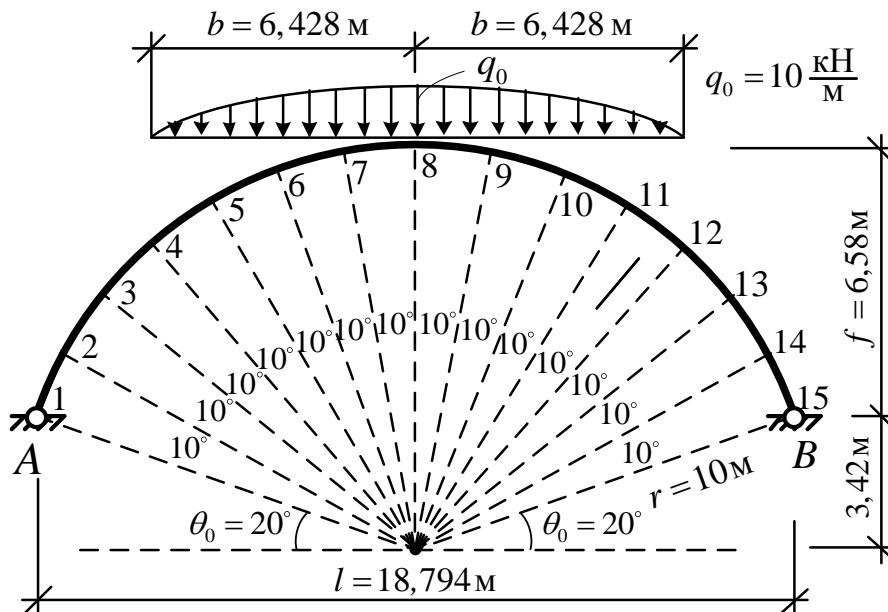


Рисунок 3 – Расчетная схема арки

Расчет выполнен в системе компьютерной алгебры «Mathcad». Результаты расчета представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Перемещения узловых точек арки, м

№ узла	1	2	3	4	5	6	7
Перемещение:							
по горизонтали	0	-0,1563	-0,2297	-0,2067	-0,1254	-0,04458	-0,00385
по вертикали	0	-0,0402	0,1186	0,0920	-0,0284	-0,2068	-0,3663
полное	0	0,1614	0,2585	0,2263	0,1286	0,2116	0,3663

№ узла	8	9	10	11	12	13	14	15
Перемещение:								
по горизонтали	0	-0,00385	-0,04458	-0,1254	-0,2067	-0,2297	-0,1563	0
по вертикали	-0,4302	-0,3663	-0,2068	-0,0284	0,0920	0,1186	-0,0402	0
полное	-0,4302	0,3663	0,2116	0,1286	0,2263	0,2585	0,1614	0

На основании полученных результатов представим в выбранном масштабе деформированный вид оси арки:

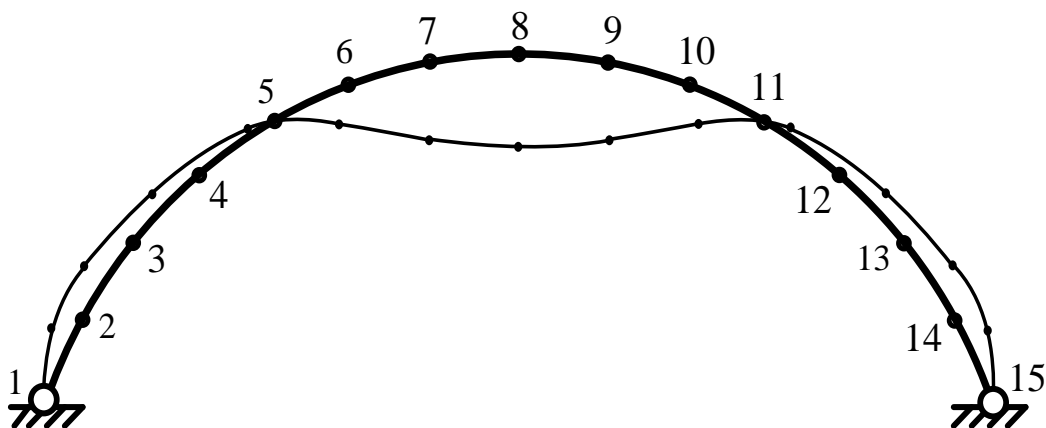


Рисунок 4 – Деформированный вид арки (в масштабе перемещений 7:1)

В выражение для перемещений (1) входит три слагаемых, учитывающих соответственно действие трех видов возникающих в системе внутренних сил  $M$ ,  $Q$  и  $N$  и соответственно возникающих от этих усилий изгибных, сдвиговых и продольных деформаций. Вычисляя эти слагаемые отдельно, можно выявить влияние изгибных, сдвиговых и продольных деформаций на величины перемещений в системе.

#### Список цитированных источников

1. Дарков, А. В. Строительная механика : учебник / А. В. Дарков. – М. : Высшая школа, 1976. – 600 с.
2. Никитина, А. А. Расчет двухшарнирной круговой арки, нагруженной распределенной по параболической зависимости нагрузкой, методом сил / А. А. Никитина // Сб. конкурс. науч. работ студ. и магистр. / Брест. гос. техн. ун-т : в 2 ч. – Брест : БрГТУ, 2024. – Ч. 1.
3. Никитина, А. А. Внутренние силы в двухшарнирных круговых арках при действии вертикальной нагрузки, распределенной по параболической зависимости / А. А. Никитина // Сб. конкурс. науч. работ студ. и магистр. / Брест. гос. техн. ун-т : в 2 ч. – Брест : БрГТУ, 2024. – Ч. 1.