Л. П. МАХНИСТ, Т. И. КАРИМОВА, Е. А. ЗЕНЕВИЧ, Н.В. ФОМИНА
БрГТУ (г. Брест, Беларусь)

МОМЕНТЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В работе рассматриваются моменты геометрического распределения – распределения дискретной случайной величины X, принимающей целые неотрицательные значения $k = 0, 1, 2, \ldots$ с вероятностями $P(X = k) = pq^k$, где $0 < p < 1$ – параметр геометрического распределения ($q = 1 - p$) (например, в [1]).

Получены формулы для вычисления начальных и центральных моментов распределения и установлена их взаимосвязь с некоторыми целочисленными последовательностями.

Так как для начальных факториальных моментов n-ого порядка $a_{[n]}$ (например, в [1]) геометрического распределения выполняется $a_{[n]} = n!\dfrac{q^n}{p^n}$, и, учитывая, что начальные моменты n-ого порядка a_n случайной величины связаны с ее начальными факториальными моментами соотношением $a_n = \sum\limits_{m=1}^{n} S_m^{(n)} a_{[m]}$ (например, в [2]), где коэффициенты $S_m^{(n)}$ – числа Стирлинга второго рода, получим

$$a_n = \sum_{m=1}^{n} a_m^{(n)} \frac{q^m}{p^m}, \qquad (1)$$

где коэффициенты $a_m^{(n)} = S_m^{(n)} m!$ (последовательность A019538 в OEIS (англ. On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, Энциклопедия целочисленных последовательностей)) могут быть получены с помощью рекуррентной формулы $a_m^{(n)} = m\left(a_{m-1}^{(n-1)} + a_m^{(n-1)}\right)$, полагая $a_m^{(n)} = 0$, если $m < 1$ или $m > n$.

Некоторые значения $a_m^{(n)} = S_m^{(n)} m!$ внесем в таблицу:

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	2				
3	1	6	6			
4	1	14	36	24		
5	1	30	150	240	120	
6	1	62	540	1560	1800	720

Следовательно, $a_1 = \frac{q}{p}$, $a_2 = 2\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$, $a_3 = 6\frac{q^3}{p^3} + 6\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$,

$a_4 = 24\frac{q^4}{p^4} + 36\frac{q^3}{p^3} + 14\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$, $a_5 = 120\frac{q^5}{p^5} + 240\frac{q^4}{p^4} + 150\frac{q^3}{p^3} + 30\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$,

$a_6 = 720\frac{q^6}{p^6} + 1800\frac{q^5}{p^5} + 1560\frac{q^4}{p^4} + 540\frac{q^3}{p^3} + 62\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$.

Существует и другое представление начальных моментов n-ого порядка геометрического распределения: $a_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m} a_{m+1}^{(n+1)}}{p^m}$, где коэффициенты $a_m^{(n)}$ (последовательность A028246 в OEIS) могут быть получены с помощью рекуррентной формулы $a_m^{(n)} = (m-1)a_{m-1}^{(n-1)} + m a_m^{(n-1)}$, полагая $a_m^{(n)} = 0$, если $m < 1$ или $m > n$.

Некоторые значения $a_m^{(n)}$ внесем в таблицу:

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	…
1	1							
2	1	1						
3	1	3	2					
4	1	7	12	6				
5	1	15	50	60	24			
6	1	31	180	390	360	120		
7	1	63	602	2100	3360	2520	720	

Так, например, $a_1 = \frac{1}{p} - 1$, $a_2 = \frac{2}{p^2} - \frac{3}{p} + 1$, $a_3 = \frac{6}{p^3} - \frac{12}{p^2} + \frac{7}{p} - 1$,

$a_4 = \frac{24}{p^4} - \frac{60}{p^3} + \frac{50}{p^2} - \frac{15}{p} + 1$, $a_5 = \frac{120}{p^5} - \frac{360}{p^4} + \frac{390}{p^3} - \frac{180}{p^2} + \frac{31}{p} - 1$,

$a_6 = \frac{720}{p^6} - \frac{2520}{p^5} + \frac{3360}{p^4} - \frac{2100}{p^3} + \frac{602}{p^2} - \frac{63}{p} + 1$.

Можно установить взаимозависимость между этими двумя представлениями начальных моментов. Заметим также, что для начальных моментов n-ого порядка геометрического распределения выполняется

$$a_n = \frac{1}{p^n} \sum_{m=0}^{n-1} E(n,m) q^{m+1}, \qquad (2)$$

где коэффициенты $E(n,m)$ – числа Эйлера первого рода (последовательность A008292 в OEIS), которые могут быть получены с помощью рекуррентной формулы

$$E(n,m) = (n-m)E(n-1,m-1) + (m+1)E(n-1,m),$$

полагая $E(n,m) = 0$, если $m < 0$ или $m > n-1$.

Для центральных моментов n-ого порядка m_n геометрического распределения выполняется $m_n = \frac{1}{p^n}\sum_{m=1}^{n-1} m_m^{(n)} q^m$ (соотношение вида, аналогичного виду соотношения (2)), где коэффициенты $m_m^{(n)}$ (последовательность A046739 в OEIS) могут быть получены с помощью рекуррентной формулы $m_m^{(n)} = (n-1)m_{m-1}^{(n-2)} + (n-m)m_{m-1}^{(n-1)} + m m_m^{(n-1)}$, полагая $m_m^{(n)} = 0$, если $m < 1$ или $m > n-1$.

Так как центральные моменты n-ого порядка случайной величины связаны с ее начальными моментами соотношением $m_n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m a_{n-m} a_1^m$ (например, в [1]), и, учитывая (1), получим $m_n = \sum_{m=1}^{n} m_m^{(n)} \frac{q^m}{p^m}$ (соотношение вида, аналогичного виду соотношения (1)), где коэффициенты $m_m^{(n)}$ определяются соотношением

$$m_m^{(n)} = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j C_n^j S_{m-j}^{(n-j)} (m-j)!. \tag{3}$$

Некоторые значения $m_m^{(n)}$, определяемые (3) внесем в таблицу:

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	3	2			
4	1	10	18	9		
5	1	25	90	110	44	
6	1	56	375	850	795	265

Следовательно, $m_2 = \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$, $m_3 = 2\frac{q^3}{p^3} + 3\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$,

$m_4 = 9\frac{q^4}{p^4} + 18\frac{q^3}{p^3} + 10\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$, $m_5 = 44\frac{q^5}{p^5} + 110\frac{q^4}{p^4} + 90\frac{q^3}{p^3} + 25\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$,

$m_6 = 265\frac{q^6}{p^6} + 795\frac{q^5}{p^5} + 850\frac{q^4}{p^4} + 375\frac{q^3}{p^3} + 56\frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$.

Заметим, что последняя целочисленная последовательность отсутствует в OEIS, как и последовательность $m_m^{(n)}$, определяющая представление центральных моментов в виде $m_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{n-m} m_m^{(n)}}{p^m}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корн, Г.А. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г.А. Корн, Т.М. Корн. – М.: Наука, 1978. – 832 с.

2. Махнист, Л.П. О моментах геометрического распределения / Л.П. Махнист, Т.И. Каримова, Е.А. Зеневич, Н.В. Фомина // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии: сб. материалов региональной науч.-практ. конф., Брест, 18–19 окт. 2012 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина; под общ. ред. О.В. Матысика. – Брест, 2012. – С. 108–110.