ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Степанюк Г.П. (ВНУ имени Леси Украинки, Луцк),
Чичурин А.В. (БрГУ имени А.С. Пушкина, Брест)

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение с трижды непрерывно дифференцируемыми коэффициентами

$$\frac{d^4y}{dx^4}+p(x)\frac{d^3y}{dx^3}+q(x)\frac{d^2y}{dx^2}+r(x)\frac{dy}{dx}+s(x)y=0. \qquad (1)$$

Будем использовать метод, изложенный в работах [1–3]. Для чего введем замену

$$y=\xi y_1, \qquad (2)$$

где y_1 – частное решение уравнения (1), а функцiя ξ – общее решение уравнения Шварца

$$\frac{\xi'''}{\xi'}-\frac{3}{2}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2=i(x). \qquad (3)$$

Найдем производные функции y из равенства (2) до четвертого порядку включительно. Подставляя полученные функции в уравнение (1) и учитывая, что y_1 является решением уравнения (1), получим уравнение

$$\xi'(4y_1^{(3)}+3py_1''+2qy_1'+ry_1)+\xi''(6y_1''+3py_1'+qy_1)+$$
$$+\xi'''(4y_1'+py_1)+\xi^{(4)}y_1=0. \qquad (4)$$

Продифференцируем уравнение (4) трижды по y_1. Уравнение (4) и три полученных уравнения образуют систему четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными вида

$$\begin{cases} a_1y_1^{(3)}+a_2y_1''+a_3y_1'+a_4y_1=0,\\ b_1y_1^{(3)}+b_2y_1''+b_3y_1'+b_4y_1=0,\\ c_1y_1^{(3)}+c_2y_1''+c_3y_1'+c_4y_1=0,\\ d_1y_1^{(3)}+d_2y_1''+d_3y_1'+d_4y_1=0, \end{cases} \qquad (5)$$

где $a_i, b_i, c_i, d_i (i = \overline{1,4})$ - многочлены от p,q,r,s и их производных до третьего порядка включительно и производных функции ξ. Следуя работам [2,3], будем решать задачу отыскания условий интегрирования уравнения (1) для тех случаев, когда имеет место пропорциональность строк или столбцов главного определителя системы (5) с неизвестными y_1''', y_1'', y_1', y_1.

Пусть выполняется условие пропорциональности первой и четвертой строк главного определителя системы (5)

$$d_1 = k(x)a_1, d_2 = k(x)a_2, d_3 = k(x)a_3, d_4 = k(x)a_4. \tag{6}$$

Из первого уравнения системы (6) выразим функцію $k(x)$ и подставим ее в три других уравнения. В результате получим систему трех уравнений. Найдем одно из решений полученной системы. Пусть функция i удовлетворяет уравнению

$$40i + 3p^2 - 8q + 12p' = 0. \tag{7}$$

Тогда первое из трех полученных уравнений является линейным относительно функций ξ'' и ξ'. Приравняв нулю коэффициенты при этих функциях, получим два уравнения

$$4p'' - 8q' + 6pp' + 8r - 4pq + p^3 = 0, \tag{8}$$

$$160q'' = 9p^4 - 88p^2q + 144q^2 + 160pr - 1600s + 72p^2p' - 352qp' + 144p'^2 - 80pq' + 640r'. \tag{9}$$

Таким образом, полученные коэффициентные условия (7)-(9) обеспечивают выполнимость условий (6), что гарантирует существование нетривиального решения y_1 для системы (5). Тогда, если удается проинтегрировать уравнение (3), (7), мы найдем функцію ξ, которую затем умножим на функцию y_1. В результате получим общее решение уравнения (1), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (8), (9).

Пример. Пусть $p(x) = 0$, $q(x) = \lambda$, тогда, согласно уравнению (7), находим функцию $i(x) = \lambda / 5$. Из равенства (3) получаем

$$\xi = \frac{\sqrt{10}C_2}{\sqrt{\lambda}} tg\left(\frac{\sqrt{\lambda}(x + 10C_1)}{\sqrt{10}}\right) + C_3, \tag{10}$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные. Соотношения (8), (9) определяют вид оставшихся коэффициентов r и s:

$$r(x)=0,\ s(x)=\frac{9\lambda^2}{100}.$$

Таким образом, имеем уравнение

$$y^{(iv)}+\lambda y''+\frac{9\lambda^2}{100}y=0. \qquad (11)$$

Система (5) для определения частого решения y_1 сведется к уравнению

$$100\left(1+\cos\left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{5}}(x+10C_1)\right)\right)y_1'''+30\sqrt{10\lambda}\sin\left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{5}}(x+10C_1)\right)y_1''+$$

$$+10\lambda\left(13+\cos\left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{5}}(x+10C_1)\right)\right)y_1'+$$

$$+12\sqrt{10}\lambda^{3/2}\,tg\left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{5}}(x+10C_1)\right)y_1+3\sqrt{10}\lambda^{3/2}\sin\left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{5}}(x+10C_1)\right)=0. \qquad (12)$$

Частным решением уравнения (12) является, например, функция

$$y_1=\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{10}}+\sqrt{10\lambda}C_1)\right). \qquad (13)$$

Перемножая правые части равенств (10) и (13), получим решение уравнения (11)

$$y=C_3\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}(x+10C_1)}{\sqrt{10}}\right)+\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\lambda}}C_2\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}(x+10C_1)}{\sqrt{10}}\right). \qquad (14)$$

Чтобы получить еще два частных решения уравнения (12) введем замены

$$y_1=\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{10}}+\sqrt{10\lambda}C_1)\right)u,\ v=u'. \qquad (15)$$

В результате получим уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $5v''+2\lambda u = 0$. Интегрируя последнее уравнение, и учитывая замены (15), найдем еще два частных решения уравнения (12)

$$y_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2\lambda}}\cos\left(\frac{\sqrt{2\lambda}x}{\sqrt{5}}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{10}} + \sqrt{10\lambda}C_1)\right),$$

$$y_3 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2\lambda}}\sin\left(\frac{\sqrt{2\lambda}x}{\sqrt{5}}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{10}} + \sqrt{10\lambda}C_1)\right).$$

Общее решение уравнения (11) примет вид

$$y = (C_4 y_1 + C_5 y_2 + C_3 y_3)\left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\lambda}}tg\left(\frac{\sqrt{\lambda}(x+10C_1)}{\sqrt{10}}\right) + C_2\right).$$

Отметим, что пять произвольных постоянных $C_1 - C_5$, входящих в общее решение могут быть выражены через четыре произвольных постоянных.

Список литературы

1. Чичурин, А.В. Уравнение Шази и линейные уравнения класса Фукса: монография / А.В. Чичурин. – М.: Изд-во Российского ун-та дружбы народов, 2003. – 163 с.

2. Chichurin A., Lukashevich N. To the theory of the 4th order linear differential equations // Proceedings of the "Computer Algebra Systems in Teachinq and Research" Iternational Conference, Siedlce, Poland. 2007. – P. 47–51.

3. Chichurin A.V., Stepanyuk G.P., Algorithm for the Search of Conditions of Integration of the Fourth-Order Linear Differential Equations by Means of the Schwarz Derivative // Differential Equations, Dynamical Systems and Celestial Mechanics. dr inż. Leszek Gadomski, dr Mirosław Jakubiak, dr hab. Alexander N. Prokopenya (red.) Collegium Mazovia Innowacyjna Szkoła Wyższa, 2011. P. 20–27.