УДК 517.946

**А.И. Басик, Е.В. Грицук, Т.В. Копайцева**
**Беларусь, Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина**

# ЗАДАЧА ТИПА НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

**Постановка задачи.** Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ограниченная область, границей которой является гладкая кривая Ляпунова $\partial\Omega$. Задача отыскания решения

$$u(x_1, x_2) = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2)) \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$$

равномерно эллиптической системы двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$\sum_{j,k=1}^{2} A_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{2} A_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + A(x)u = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющего на границе краевым условиям

$$p_k \langle l_1; \operatorname{grad} u_1 \rangle + q_k \langle l_2; \operatorname{grad} u_2 \rangle = f_k, \quad k = 1, 2, \tag{2}$$

называется задачей типа наклонной производной. Здесь $A_{jk}(x)$, $A_j(x)$ и $A(x)$ – достаточно гладкие квадратные вещественные матрицы-функции второго порядка; $p_k, q_k, f_k : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ – заданные функции класса $C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$; $l_1, l_2$ – некасательные к $\partial\Omega$ векторные поля; $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ – стандартное скалярное произведение на плоскости; $C^{n,\alpha}(\Omega)$ – множество всех непрерывно дифференцируемых в области $\Omega$ функций до порядка $n$ включительно, частные производные порядка $n$ которых непрерывны по Гельдеру с показателем $\alpha$ в этой области.

Для произвольной эллиптической системы (1) краевая задача типа наклонной производной вообще говоря не является нетеровой. Например, в случае $l_1 = l_2$ задача не будет нетеровой [1], если в качестве системы (1) рассматривается известная система А.В. Бицадзе [2].

В работе [3, с. 74] доказывается, что если (1) является системой ортогонального типа и векторы $l_1$ и $l_2$ не коллинеарны в каждой точке границы $\partial\Omega$, то задача (1)–(2) при $p_1 = q_2 = 1$ и $p_2 = q_1 = 0$ является нетеровой независимо от того, какой компоненте гомотопической связности принадлежит система (1).

В настоящей работе приводится пример эллиптической системы двух дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка на плоскости не ортогонального типа, для которой краевая задача типа наклонной производной не является нетеровой.

**Пример нерегуляризуемой задачи типа наклонной производной.** В области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + 2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 x_2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - 2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 x_2} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0, \\[2ex] -\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + 2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 x_2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + 2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 x_2} - 2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Характеристическая матрица этой системы имеет вид

$$\mathfrak{A}(\xi) = \begin{pmatrix} 2\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 & \xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 - \xi_2^2 \\ -\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 & 2\xi_1\xi_2 - \xi_2^2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

и т.к. $\det \mathfrak{A}(\xi) = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2$, то (3) является эллиптической в $\Omega$. Отметим также, что система (3) обладает тем свойством, что каждая компонента $u_k$ $(k = 1, 2)$ ее дважды непрерывно дифференцируемого решения в области $\Omega$ удовлетворяет уравнению $\Delta^2 u = 0$, т.е. является в $\Omega$ бигармонической функцией.

Из результатов работы [4] следует, что (3) гомотопна системе Бицадзе. Проведем гомотопию в явном виде. Для этого рассмотрим семейство систем, характеристические матрицы которых имеют вид

$$\mathfrak{A}_t(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 - \xi_2^2 + t(\xi_1^2 + \xi_2^2) & \xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 - \xi_2^2 \\ -\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 & \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 - \xi_2^2 - t(\xi_1^2 + \xi_2^2) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Т.к.

$$\det \mathfrak{A}_t(\xi) = (\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 - \xi_2^2)^2 - t^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 - 2\xi_2\xi_2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 \geq$$
$$\geq (\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 - \xi_2^2)^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 - 2\xi_2\xi_2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2,$$

то при каждом $t \in [0; 1]$ система с характеристической матрицей (5) является эллиптической и $\mathfrak{A}_1(\xi) = \mathfrak{A}(\xi)$,

$$\mathfrak{A}_0(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 - \xi_2^2 & \xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 - \xi_2^2 \\ -\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 & \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 - \xi_2^2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Далее, гомотопия

$$\mathfrak{B}_t(\xi) = (\sqrt{2})^t \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi t}{4} & \sin\frac{\pi t}{4} \\ -\sin\frac{\pi t}{4} & \cos\frac{\pi t}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^2 - \xi_2^2 & -2\xi_1\xi_2 \\ 2\xi_1\xi_2 & \xi_1^2 - \xi_2^2 \end{pmatrix},$$

$$(\det \mathfrak{B}_t(\xi) = 2^t(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2)$$

приводит матрицу (6) ($\mathfrak{B}_1(\xi) = \mathfrak{A}_0(\xi)$) к матрице

$$\mathfrak{B}_0(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1^2 - \xi_2^2 & -2\xi_1\xi_2 \\ 2\xi_1\xi_2 & \xi_1^2 - \xi_2^2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Таким образом доказано, что система (3) гомотопна системе с характеристической матрицей (7), т.е. системе А.В. Бицадзе [2].

Рассмотрим задачу отыскания решения системы (3), удовлетворяющего граничным условиям

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial l}\right|_{\partial\Omega} = f_1, \quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = f_2. \tag{8}$$

Здесь $\nu$ – единичное поле внутренних нормалей на $\partial\Omega$; $l$ – единичное поле на $\partial\Omega$, составляющее с нормалью $\nu$ угол 45° в каждой точке $\partial\Omega$; $f_1, f_2 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ – заданные непрерывные по Гельдеру функции.

**Теорема.** *Задача* (3), (8) *не является нетеровой.*

Для доказательства достаточно показать невыполненность условия Я.Б. Лопатинского, обеспечивающего нетеровость краевой задачи как в классических пространствах, так и в широком классе гильбертовых пространств [5]. Это условие известно как условие регуляризуемости краевой задачи и представляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора. Для задачи (1), (2) условие регуляризуемости состоит в том, что в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом единичном векторе $\tau$, касательном к $\partial\Omega$ в точке $y$, ранг матрицы Я.Б. Лопатинского

$$L(y,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \mathfrak{B}(y, \lambda\nu + \tau)\mathfrak{A}^{-1}(y, \lambda\nu + \tau)(E, \lambda E)d\lambda, \tag{9}$$

является максимальным. Здесь $\mathfrak{A}(y,\xi)$ – характеристическая матрица системы (1); $\mathfrak{B}$ – символ старшей части граничного оператора (2); $E$ – единичная матрица размерности $2 \times 2$; $\nu$ – внутренняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке $y$; $\Gamma$ – простой замкнутый контур, лежащий в верхней $\lambda$-полуплоскости и охватывающий находящиеся там $\lambda$-корни уравнения $\det \mathfrak{A}(y, \lambda\nu + \tau) = 0$.

Покажем, что ранг матрицы Лопатинского (9) задачи (3), (8) не является максимальным в той точке границы $\partial\Omega$, в которой нормаль параллельна оси $Ox_2$. В этой точке матрица (9) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dfrac{-2-i+i\gamma}{2} & \dfrac{1-i}{2} & \dfrac{3i+2+\gamma(-i-2)}{2} & \dfrac{2i+2+\gamma(1-i)}{2} \\ \dfrac{1-i}{2} & \dfrac{i}{2} & \dfrac{2+2i}{2} & \dfrac{i-2}{2} \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

где $\gamma = \frac{\langle l,\tau\rangle}{\langle l,\nu\rangle}$. Выберем касательный вектор $\tau$ так, чтобы $(\tau\,\hat{,}\,l) = 45^\circ$, тогда матрица (10) примет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & \dfrac{1-i}{2} & -2i & \dfrac{3+i}{2} \\ \dfrac{1-i}{2} & \dfrac{i}{2} & 1+i & \dfrac{i-2}{2} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что все миноры второго порядка этой матрицы равны нулю. Таким образом, задача (3), (8) нерегуляризуема.

Теорема доказана.

## Список использованной литературы

1. Жадан, М. И. Задача типа наклонной производной для эллиптических систем второго порядка / М. И. Жадан, А. Т. Усс // Докл. АН БССР. – 1983. – Т. XXVII, № 6. – С. 489–491.

2. Бицадзе, А. В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными / А. В. Бицадзе // Успехи мат. наук. – 1948. – Т. 3, вып. 6. – С. 211–212.

3. Жадан, М. И. Гомотопическая классификация и регуляризуемость некоторых классов эллиптических систем и краевых задач: дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / М. И. Жадан ; Ин–т математики АН БССР. – Минск, 1983. – 111 л.

4. Боярский, Б. В. О первой краевой задаче для систем уравнений эллиптического типа второго порядка на плоскости / Б. В. Боярский // Bull. del'Acad. Pol. des Sciences. Ser. des Sciences Math., Astron. et Phys. – 1959. – Vol. 7, № 9. – P. 565–570.

5. Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.