

Брестский политехнический институт

**Трусъ А. М.**

*Конспект лекций по курсу*

**«СОПРОТИВЛЕНИЕ  
МАТЕРИАЛОВ»**

Брест 1997

УДК 539.3

В конспекте лекций по курсу “Сопротивления материалов” кратко и систематизировано, в соответствии с программой для строительных специальностей изложены основные положения курса.

Из него исключены разделы, которые дублируются в строительной механике, теории упругости и других расчетно-проектировочных дисциплинах, а также все примеры (для краткости). Особое внимание уделено новейшим представлениям об устойчивости и ее потере.

Конспект предназначен в качестве учебного пособия для студентов строительных специальностей дневной и заочной формы обучения.

Автор выражает благодарность студентам Ракецкому Е.Е., Леванову В.В. и другим, записавшим конспект лекций.

Автор: Трус Александр Михайлович,  
член корреспондент Белорусской инженерно-  
технологической академии, профессор к.т.н.

Рецензенты: Курский политехнический институт,  
кафедра сопротивления материалов,  
зав. каф., проф.,  
к.т.н. Лабугин А.А.,  
Ленинградская лесотехническая академия,  
профессор, д.т.н. Постоев В.С.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	стр.
1. Введение	7
2. Основные положения курса	8
3. Виды расчетов в сопромате	8
4. Гипотезы и допущения, используемые в сопротивлении материалов	10
5. Понятия долговечности, надежности и экономичности	11
6. Внутренние силы	11
7. Определение внутренних сил	11
8. Дифференциальные зависимости между внешними и внутренними силами	12
9. Напряжения	14
10. Определение внутренних силовых факторов через нормальные и касательные напряжения	15
11. Условия жесткости при простых деформациях	15
12. Напряженные состояния	17
13. Анализ линейного напряженного состояния	17
14. Плоское напряженное состояние	19
15. Определение главных напряжений и главных площадок, если заданы произвольные площадки и напряжения	20
16. Обобщенный закон Гука для различных напряженных состояний	20
17. Теории прочности (гипотезы прочности)	21
18. Расчеты брусьев на прочность и жесткость при растяжении сжатии	23
19. Расчет брусьев на прочность и жесткость, нагруженных сосредоточенными силами	23
20. Учет собственного веса	24
21. Расчет ступенчатого бруса на прочность и жесткость	24
22. Стержни равного сопротивления при растяжении — сжатии	26
23. Расчет статически неопределимых стержневых систем при растяжении — сжатии	26
24. Температурные статически неопределимые задачи	28
25. Монтажные статически неопределимые задачи	28
26. Расчет усилий железобетонных стержней	29
27. Определение работы (потенциальной энергии) деформации	29
28. Расчеты на прочность и жесткость при сдвиге	30
29. Определение допускаемого напряжения при сдвиге	31

30. Взаимосвязь напряжений и деформаций при чистом сдвиге	31
31. Условия прочности и жесткости при сдвиге	31
32. Изгиб	32
33. Определение нормальных напряжений при чистом изгибе	34
34. Определение положения нейтрального слоя при изгибе	34
35. Выражение нормального напряжения и кривизны балки через изгибающий момент	35
36. Определение касательных напряжений при поперечном изгибе (формула Журавского)	36
37. Построение эпюр касательных напряжений (точное)	37
38. Соотношение между $\sigma_{max}$ и $\tau_{max}$ в балках	37
39. Рациональное сечение балок	37
40. Рациональные балки по длине	38
41. Подбор сечений балок при плоскопоперечном изгибе	39
42. Полная проверка прочности балок при плоскопоперечном изгибе	39
43. Определение потенциальной упругой энергии (работа деформаций) балок	41
44. Траектории главных напряжений при изгибе балок	41
45. Упруго-пластический изгиб балки (определение разрушающих нагрузок)	43
46. Перемещения в балках (общие понятия)	43
47. Составление дифференциального уравнения изогнутой оси балки	44
48. Метод определения прогибов и углов поворота балок путем непосредственного интегрирования дифференциального уравнения	45
49. Определение прогибов и углов поворота методом начальных параметров (вывод универсального уравнения упругой линии балки)	45
50. Определение перемещений при изгибе балок графоаналитическим методом (метод фиктивных нагрузок)	47
51. Определение перемещений по методу Мора и правилу Верещагина (энергетический метод)	48
52. Статически неопределимая балка. Общие понятия	49
53. Раскрытие статически неопределимой балки на двух опорах	50
54. Неразрезные, статически неопределимые балки (многопролетные балки)	51
55. Балки, лежащие на упругом основании	51

56. Сложное сопротивление (общие понятия)	52
57. Косой изгиб	52
58. Определение нормальных напряжений при косом изгибе	53
59. Определение положения нейтрального слоя при косом изгибе	54
60. Правила учета знаков	55
61. Определение прогибов при косом изгибе	55
62. Внецентренное растяжение — сжатие	56
63. Определение нормальных напряжений при внецентренном растяжении — сжатии	57
64. Определение положения нейтральной линии (нейтрального слоя, нейтральной оси)	57
65. Свойства нейтральной линии	58
66. Условия прочности при внецентренном растяжении, сжатии. Подбор сечений	59
67. Определение грузоподъемности	59
68. Построение эпюр напряжений при внецентренном растяжении, сжатии	60
69. Ядро сечения	61
70. Совместное действие изгиба и кручения	61
71. Построение эпюр внутренних силовых факторов при изгибе с кручением	62
72. Определение напряжений при совместном изгибе и кручении круглых стержней	62
73. Устойчивость и ее потеря (общие сведения)	64
74. Энергетическая сущность устойчивости и ее потери	65
75. Определение критической силы при сжатии стержня. Формула Эйлера	66
76. Применение формулы Эйлера при различном закреплении сжатых стержней	67
77. Применимость формулы Эйлера	67
78. Практические расчеты стержней на устойчивость	68
79. Понятие о продольно-поперечном изгибе	69
80. Расчет кривых брусьев (общие понятия)	70
81. Определение внутренних силовых факторов в кривых брусьях	70
82. Динамическое действие нагрузок (общие сведения)	71
83. Расчет сил инерции грузоподъемных устройств	71
84. Расчет на удар	72
85. Понятие о расчете стержней при динамических нагрузках	74

<b>85. Понятие о расчёте стержней при динамических нагрузках.</b>	<b>74</b>
<b>86. Расчёты на прочность при напряжениях переменных во времени (при циклических нагрузках).</b>	<b>74</b>
<b>87. Виды циклических нагрузок.</b>	<b>75</b>
<b>88. Кривая Велера (диаграмма поведения материала при циклических нагрузках).</b>	<b>76</b>
<b>89. Расчёты при циклических нагрузках.</b>	<b>76</b>
<b>90. Вопросы индивидуального и лабораторно-практического изучения.</b>	<b>77</b>
<b>91. Кручение круглых сечений.</b>	<b>77</b>
<b>92. Физико-механические характеристики материалов.</b>	<b>79</b>
<b>93. Геометрические характеристики сечений.</b>	<b>82</b>
<b>94. Заключение.</b>	<b>85</b>

# ВВЕДЕНИЕ

*Сопротивление материалов* — это научная дисциплина, изучающая физико-механические свойства материалов, а также методы расчета деталей (элементов) машин, механизмов, зданий и сооружений на прочность, жесткость и устойчивость под действием статических, динамических и циклических нагрузок.

Эта наука сложилась на протяжении последних двух веков и представляет собой основу современного научно-технического прогресса. Она базируется на математике, физике, механике, материаловедении и широко использует опытные данные.

Считается, начало развитию сопротивления материалов положил в своих работах Галилео Галилей (1564-1642). Огромный вклад внесли такие широко известные физики и математики, как Ф.Мариотт (1620-1684), Я.Бернулли (1654-1705), Р.Гук (1635-1703), Л.Эйлер (1707-1783), Ш.О.Кулон (1736-1806), Т.Юнг (1773-1829) и многие другие.

Огромный вклад в эту науку внесли и продолжают вносить наши соотечественники.

Сопротивление материалов является базовой инженерной дисциплиной, без знания которой невозможно осуществлять проектные, проверочные и другие расчеты конструкций в инженерной практике.

## ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ КУРСА СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Сопротивление материалов — научная дисциплина, изучающая механические свойства материалов, методы их определения, и разрабатывает расчеты конструктивных элементов из условий прочности, жесткости и устойчивости.

Любое сооружение — машина, механизм — состоит из совокупности деталей, которые в дальнейшем называются конструктивными элементами. Все конструктивные элементы в общем могут быть подразделены на следующие: брусья, пластины, массивы, оболочки и т.д.

Брус — конструктивный элемент, у которого один размер велик по сравнению с двумя другими.



Рис. 1

Брусья делятся на: балки, стержни, стойки (колонны).

Балка — брус ориентированный в пространстве горизонтально.

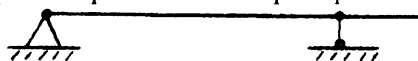


Рис. 2

Стержень — брус ориентированный в пространстве произвольно.



Рис. 3

Стойки (колонны) — брус ориентированный в пространстве вертикально.

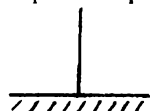


Рис. 4

На чертежах все разновидности брусьев в сопротивлении материалов изображают не в натуральном виде, а в виде расчетных схем (рис. 2, 3, 4).

Пластина — конструктивный элемент, один размер которого мал по сравнению с другими (оконное стекло, стенка, доска, перекрытие).

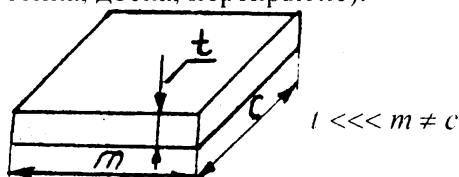


Рис. 5

Массив — конструктивный элемент, у которого все три размера одного порядка (фундаментные блоки, молоток, кувалда, наковальня и др.).

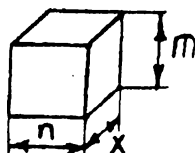


Рис. 6

Оболочка — изогнутая в пространстве пластина.

## ВИДЫ РАСЧЕТОВ В СОПРОМАТЕ

Принципы всех расчетов сводятся к сопоставлению 2-х величин — расчетной и допускаемой.

Расчеты подразделяются на три разновидности:

- ◆ прочность
- ◆ жесткость
- ◆ устойчивость



Прочность — это способность конструктивных элементов сопротивляться внешним силам (нагрузкам), не разрушаясь.

$$F \leq [F]$$

$F$  — расчетная внутренняя сила меньше либо равна  $[F]$  допускаемой внутренней силе. Первая определяется теоретически, а вторая практически.

$$[F] = \frac{F_{раз}}{k},$$

где  $F_{раз}$  — разрушающая сила;

$k$  — коэффициент запаса (безопасности),  $k > 1$ .

Внешние силы по характеру приложения могут быть сосредоточенными и распределенными. Например:

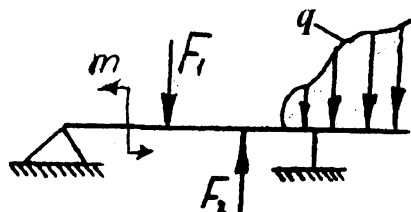


Рис. 7

К внешним силам относят: полезные нагрузки, собственный вес, временные нагрузки, случайные нагрузки (ветровые, снеговые, сейсмические).

По характеру действия силы делят:

- ◆ статические
- ◆ динамические.

Статические силы во времени не изменяются, или изменяются, но медленно.

Динамические силы изменяются быстро с ускорениями. В сопротивлении материалов силы делят на внешние (заданные) известные и внутренние, которые рассчитывают или определяют опытным путем.

Жесткость — способность конструктивных элементов сопротивляться деформациям (перемещениям) линейным

$$\Delta L_p \leq [\Delta L] \text{ мм, см}$$

и угловым

$$\varphi_p \leq [\varphi] \text{ '' , ' , }^\circ$$

где  $\Delta L_p, \varphi_p$  — расчетные изменения, определяемые теоретически;

$[\Delta L], [\varphi]$  — допускаемые (безопасные) перемещения, определяются экспериментально.

Деформации подразделяют на упругие и пластические (остаточные).

Упругая деформация — исчезает при прекращении действия сил на материал или конструктивный элемент. В определенных пределах внешнего нагружения все без исключения твердые тела обладают почти идеальной упругостью.

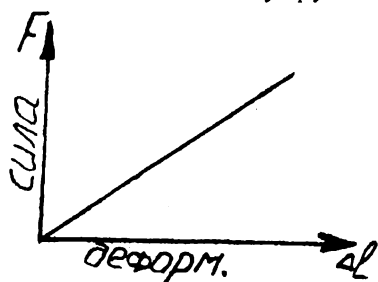


Рис. 8

Впервые эту закономерность установил Р.Гук в 1678 году.

Эта закономерность лежит в основе современной теории упругости, сопротивления материалов, строительной механики, механики и т.д. Гук свое открытие сформулировал кратко: **«Какова сила, такова деформация».**

Лишь спустя много времени эта закономерность была отражена математически, составив вместе со вторым законом Ньютона основу современной механики.

$$F = -kx; \quad F = ma;$$

$$-kx = ma; \quad m\ddot{x} + kx = 0$$

Остаточные деформации (пластические) — после прекращения действия внешних сил не исчезают. По этим деформациям судят о хрупких и пластических свойствах материалов.

Материалы, которые разрушаются без видимых пластических деформаций, — хрупкие.

Материалы, которые разрушаются при наличии пластических деформаций, — пластические.

Все деформации в сопротивлении материалов подразделяют на простые и сложные.

К простым деформациям относятся: растяжение, сжатие, чистый сдвиг, кручение, чистый изгиб.

Чистый сдвиг и чистый изгиб подразумевают, что при этих деформациях отсутствуют другие сопутствующие деформации. Под сложной деформацией понимают деформацию твердых тел, которая состоит из 2-х или более простых деформаций.

Устойчивость конструктивных элементов — это способность их сохранять заданную эксплуатационную форму деформации (сохранение заданной эксплуатационной формы равновесия.)

В общем виде условие устойчивости конструктивных элементов записывается следующим образом:

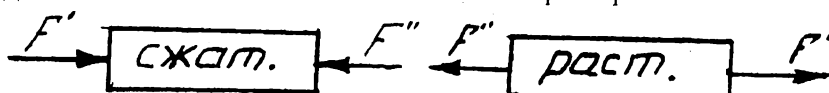
$$F_{расч} \leq [F]_y$$

$$[F]_y = \frac{F_{к.р.}}{k_y}$$

## **ГИПОТЕЗЫ И ДОПУЩЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ**

В сопротивлении материалов для описания закономерностей, сил и деформаций используется ряд гипотез и упрощений.

1. Гипотеза сплошности — все без исключения материалы считаются безчастичными, т.е. сплошными.
2. Гипотеза об однородности считает, что независимо от части материала (целого тела или его части) их механические свойства одинаковы. В действительности масштаб изменяет свойства.
3. Гипотеза изотропности полагает, что материал в любом направлении имеет одинаковые свойства.
4. Гипотеза малых деформаций считает, что деформации малы по сравнению с размером тела, что позволяет ими пренебрегать при решении отдельных задач.
5. Гипотеза о независимости действия сил (суперпозиции) полагает, что суммарное действие системы сил равно сумме действий каждой силы в отдельности.
6. Гипотеза о запрете замены системы сил эквивалентной — заданную систему сил не всегда можно заменить эквивалентной. Например:



Эти гипотезы дают приблизительные решения задач, но они позволяют их решать и обеспечивать совпадение результатов расчета с результатами опыта.

## ПОНЯТИЯ ДОЛГОВЕЧНОСТИ, НАДЕЖНОСТИ И ЭКОНОМИЧНОСТИ

**Долговечность** конструкции — это время ее эксплуатации с учетом всех текущих и капитальных ремонтов.

**Надежность** — это время безотказной эксплуатации конструкции до первого выхода из строя (поломки, отказа)

**Экономичность** — это максимальная прочность, жесткость и устойчивость конструкции при минимальной материалоемкости и стоимости ее производства и эксплуатации.

## ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ Общие понятия

**Внутренние силы** — это силы сопротивления материала или конструкции внешним силам.

Внешние силы считаются заданными. К внешним силам относятся: полезные нагрузки, собственный вес, случайные нагрузки, реакции связи, силы инерции, магнитные силы и т.д.

Внутренние силы определяются теоретическим расчетом по заданным внешним или экспериментально.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ СИЛ

Для расчета внутренних сил полагают, что конструктивные элементы абсолютно твердые. Это позволяет использовать уравнения равновесия статики (такой подход называется **принципом отвердевания**) Чтобы определить внутреннюю силу, тело мысленно рассекают плоскостью и в полученном сечении прикладывают внутренние силы (неизвестные), сохраняя равновесие обеих частей (рис.9, 10).

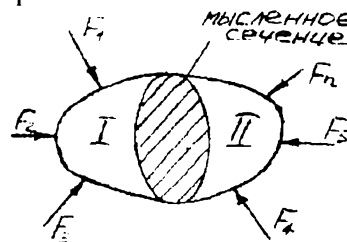


Рис. 9

$F_1, F_2, \dots, F_n$  — внешние силы

Чтобы найти неизвестные силы, их нужно разложить по осям координат и воспользоваться уравнением равновесия, как показано на рис.10, выразить все составляющие.

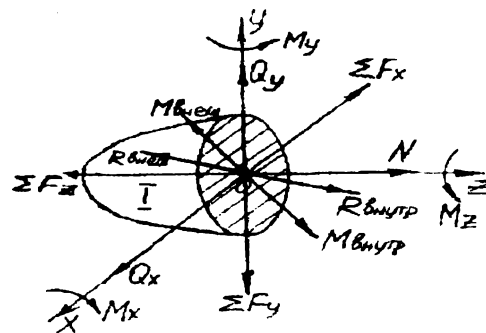
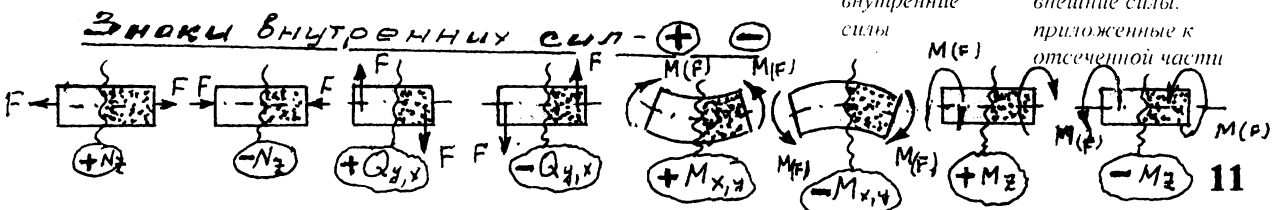


Рис. 10

$$\left. \begin{aligned} N_z &= \sum F_z \\ Q_y &= \sum F_y \\ Q_x &= \sum F_x \\ M_z &= \sum m_{(Fz)} \\ M_y &= \sum m_{(Fy)} \\ M_x &= \sum m_{(Fx)} \end{aligned} \right\} \text{отсев. части}$$

↑ внутренние силы  
↑ внешние силы, приложенные к отсеваемой части



## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ВНЕШНИМИ И ВНУТРЕННИМИ СИЛАМИ

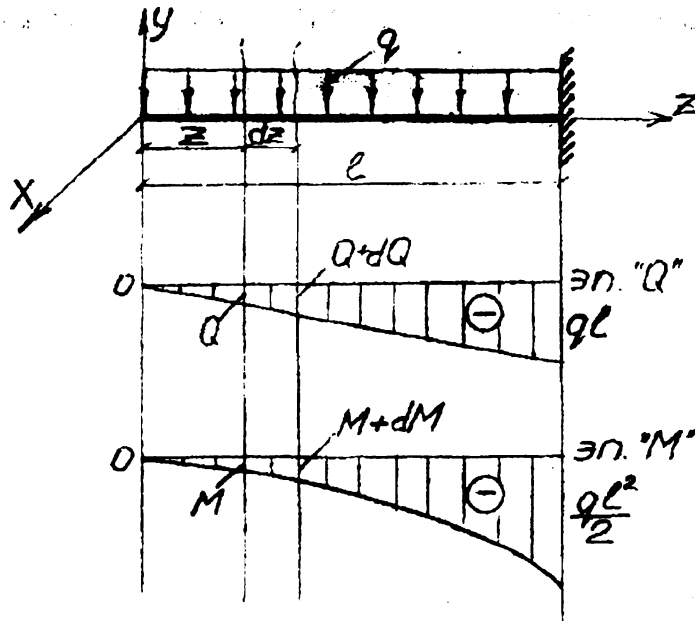


Рис. 11а

$$Q_x = 0; \quad Q_y = -Zq;$$

Если  $Z = 0; \quad Q_y = 0$

$$Z = \frac{l}{2}; \quad Q_y = q \cdot \frac{l}{2}$$

$$Z = l; \quad Q_y = q \cdot l$$

Если  $Z = 0; \quad M_x = 0$

$$Z = \frac{l}{2}; \quad M_x = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

$$Z = l; \quad M_x = \frac{q \cdot l^2}{2}$$

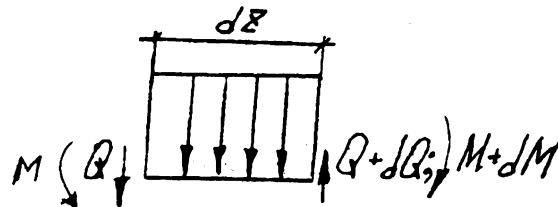


Рис. 11б

Рассматриваем перерезывающие силы. Проектируем на ось  $OY$ ; рис. 11б

$$\sum y = 0; \quad Q - qdZ + Q + dQ = 0$$

$$q = \frac{dQ}{dZ} = \operatorname{tg} \alpha$$

Рассматриваем моменты внешних и внутренних сил относительно произв. точки  $O$ .

$$\sum m_0 = 0; \quad M - q \frac{dZ^2}{2} - (M + dM) + (Q + dQ)dZ = 0$$

←—————→  
малые величины, пренебрегаем

Окончательно получим:

$$Q = \frac{dM}{dZ} = \operatorname{tg} \beta$$

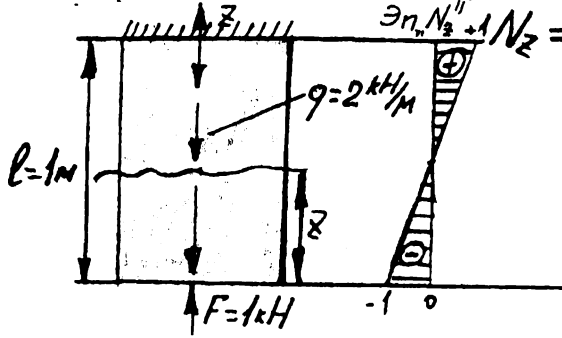
$$q = \frac{dQ}{dZ} = \operatorname{tg} \alpha; \quad Q = \frac{dM}{dZ} = \operatorname{tg} \beta$$

$$q = Q' = M''$$

Внутренние силы можно определять и представлять аналитически (численно), графически ( в виде эпюр), таблично. Наиболее удобным представлением внутренних сил является графическое представление. Для построения эпюр (графиков) определ. значение внутренних сил. . . в характерных точках . . . сечения и откладывая на соотв. коорд. осях.

Примеры:

1. растяжение — сжатие стержня.



$$N_z = -F + qZ$$

$$Z = 0 \quad N_z = -F + qZ = -1$$

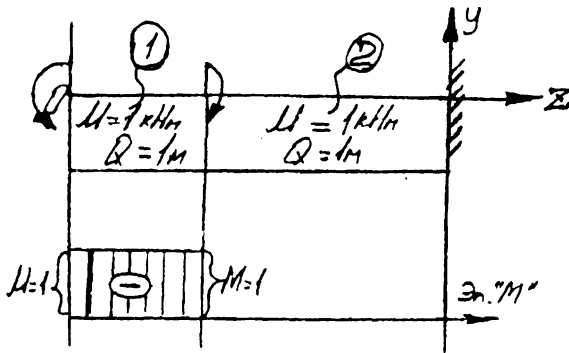
$$Z = \frac{1}{2} \quad N_z = -F + q \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$Z = 1 \quad N_z = -F + q \cdot 1 = 1$$

Рис. 12

**Эпюр** (график) в соответствии с масштабными изменениями внутренних сил.

2. чистый изгиб (деформация, при которой действуют только изгиб. моменты). Другие внутренние силы равны нулю (отсутствуют).



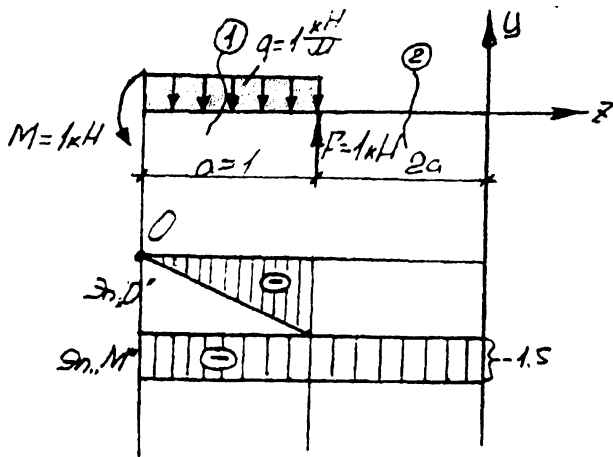
$$M_x = \sum M_x$$

$$M_x = -M$$

$$M_x = -\overset{2}{M} + \overset{1}{M} = 0$$

Рис. 13

3. изгиб + сдвиг (плоский поперечный изгиб)



$$Q_1 = -qZ$$

$$M_1(x) = -m - qZ \cdot \frac{Z}{2}$$

$$Z = 0 \quad Q_1 = 0 \quad M_1 = -m = -1$$

$$Z = Q = 1 \quad Q_1 = -1 \quad M_1 = -1 - 1 \cdot \frac{1}{2} = -1,5$$

$$Q_2 = q \cdot a + F$$

$$M_2 = -M - q \cdot a \cdot \left( \frac{a}{2} + Z_2 \right) + FZ_2$$

$$Z_2 = 0 \quad Q_2 = 1 \cdot 1 - 1 = 0 = \text{const}$$

$$M_2 = -1 - 1 \cdot 1 \cdot \left( \frac{1}{2} + 0 \right) = -1,5$$

$$Z_2 = 2a$$

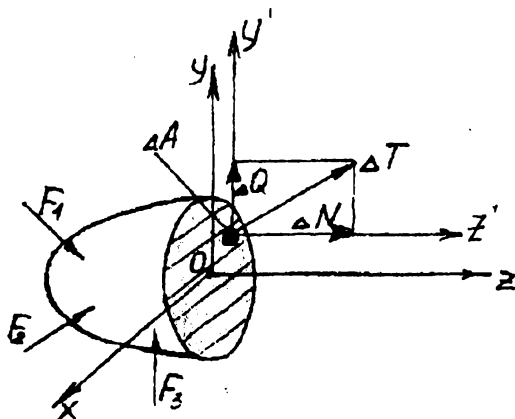
$$M_2 = -M - qa \left( \frac{a}{2} + 2a \right) + F \cdot 2a = 1,5$$

Рис. 14

## НАПРЯЖЕНИЕ

От внешних сил, которыми нагружены конструктивные элементы, мы перешли к внутренним силам:  $N_z, Q_y, Q_x, M_z, M_y, M_x$ , а теперь перейдем к рассмотрению интенсивности этих внутренних сил по сечению, т. е. напряжению.

Под **напряжением** понимают интенсивность распределения внутренней силы по сечению.



$$\rho_{cp} = \frac{\Delta T}{\Delta A} \quad \begin{array}{l} \text{среднее} \\ \text{напряжение} \end{array}$$

$$\rho_{ист} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} = \frac{dT}{dA} \quad \begin{array}{l} \text{ист.} \\ \text{напр.} \end{array}$$

где  $\rho_{cp}$  — среднее напряжение

$\rho_{ист}$  — истинное напряжение

Рис. 15

Пользоваться средним или истинным напряжением неудобно, т.к. нужны <sup>сечение</sup> направление и модуль. Поэтому истинное и среднее напряжение преобразуют в нормальное и касательное относительно площади <sup>поперечного</sup> сечения, разложив их по соответствующим направлениям (см. рис. 15).

$$\sigma_{ист} = \frac{dN}{dA}; \quad \tau_{ист} = \frac{dQ}{dA}$$

$$dN = \sigma dA \quad dQ = \tau dA$$

$$N = \sigma A \quad Q = \tau A$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A}$$

$$\tau = \frac{Q}{A}$$

где  $\sigma_{ист}$  — нормальное напряжение, размерность

$$\frac{\text{сила}}{\text{площадь}} \left( \frac{H}{M^2} \right), \text{ (Па), (МПа) и т.д.}$$

$\tau_{ист}$  — касательное напряжение, размерность такая же как у  $\sigma$ ;

$N$  — нормальная составляющая силы;

$Q$  — касательная составляющая силы;

$A$  — площадь сечения.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ЧЕРЕЗ НОРМАЛЬНЫЕ И КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

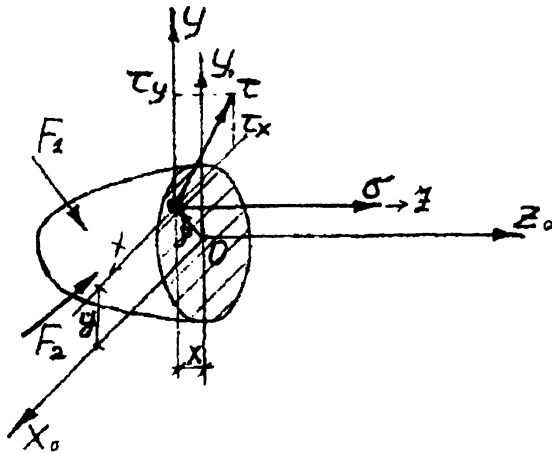


Рис. 16

Выразим внутренние силы по элементарной площадке  $dA$ .

$$\begin{aligned} dN_z &= \sigma dA & N_z &= \int_A \sigma dA \\ dQ_y &= \tau_y dA & Q_y &= \int_A \tau_y dA \\ dQ_x &= \tau_x dA & Q_x &= \int_A \tau_x dA \\ dM_x &= y dA \sigma & M_x &= \int_A y \sigma dA \\ dM_y &= x dA \sigma & M_y &= \int_A x \sigma dA \\ dM_z &= \tau dA \rho & M_z &= \int_A \tau \rho dA \end{aligned}$$

Представим, что  $\sigma = const$  и  $\tau = const$ , тогда:

$$\underbrace{N_z = \sigma A}_{\text{Растяжение-сжатие}}; \underbrace{Q_y = \tau_y A; Q_x = \tau_x A}_{\text{сдвиг}}; \underbrace{yM_x = \sigma S_x y; xM_y = \sigma S_y x}_{\text{изгиб}}; \underbrace{M_z = \tau \int_A \rho dA}_{\text{кручение}}$$

Растяжение-сжатие

сдвиг

изгиб

кручение

Если учесть, что допускаемые нормальные  $\sigma$  и касательные  $\tau$  напряжения определяются по предельным (опасным) напряжениям с учетом коэффициента безопасности  $K > 1$ , то для всех перечисленных выше простых деформаций можно записать соответствующие условия прочности. Опасными напряжениями для пластичных материалов является предел текучести  $\sigma_{оп} = \sigma_y$ ;  $\tau_{оп} = \tau_y$ , а для хрупких материалов:  $\sigma_{оп} = \sigma_{max} = \sigma_u$ ;  $\tau_{оп} = \tau_{max} = \tau_u$ .

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{оп}}{K}$$

$$[\tau] = \frac{\tau_{оп}}{K}$$

Следовательно условия прочности для простых деформаций выразятся:

1. растяжение — сжатие:  $\sigma_{max} = \frac{N_{zmax}}{A} \leq [\sigma]$

2. сдвиг:  $\tau_{max} = \frac{Q_{max}}{A} \leq [\tau]$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{S} \cdot \frac{y}{y} = \frac{M_{max}}{J} \cdot y; S \cdot y = J$$

3. изгиб:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}(x)}{I(x)} \cdot y \leq [\sigma]; \sigma_{max} = \frac{M_{max}(y)}{J(y)} \cdot x \leq [\sigma]$$

4. кручение:

$$\tau_{max} = \frac{M_{zmax}}{\rho \int_A dA} \rho = \frac{M_{zmax}}{I_\rho} \rho \leq [\tau]$$

С помощью условий прочности можно:

1. проверять прочность конструктивных элементов при различных деформациях;
2. определять их грузоподъемность (несущую способность);
3. подбирать сечения, а также решать другие инженерные задачи.

### УСЛОВИЯ ЖЕСТКОСТИ ПРИ ПРОСТЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Для получения условий жесткости при различных простых деформациях достаточно напряжения в условиях прочности выразить через деформации.

**Например:**

1. при растяжении-сжатии:

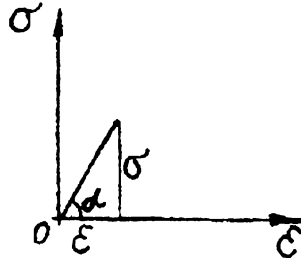


Рис. 17

Условие жесткости при растяжении и сжатии:

$$\Delta l_{max} = \frac{N_{z max} l_0}{EA_0} \leq [\Delta l]$$

где  $\Delta l_{max}$  — абсолютное максимальное удлинение (укорочение);

$[\Delta l]$  — допускаемое абсолютное удлинение;

$l_0$  — начальная длина;

$E$  — модуль Юнга;

$A_0$  — начальная площадь сечения.

2. при сдвиге:

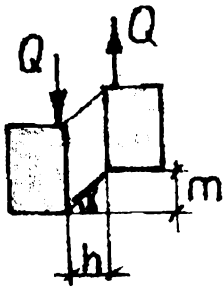


Рис. 19

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma \approx \frac{m}{h}$$

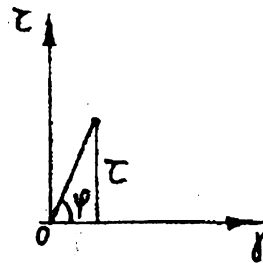


Рис. 18

$$\frac{\tau}{\gamma} = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{const}$$

$$\frac{\tau}{\gamma} = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{const} = G$$

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max}}{A_0} \leq [\tau]$$

$$\tau_{max} = \gamma G$$

$$G \gamma_{max} = \frac{Q_{max}}{A_0} = G[\gamma]$$

$$G \frac{m_{max}}{h} = \frac{Q_{max}}{A_0} = G \frac{[m]}{h}$$

Условие жесткости при сдвиге:

$$m_{max} = \frac{Q_{max} h}{A_0 G} \leq [m]$$

где  $m_{max}$  — абсолютный максимальный сдвиг;

$[m]$  — допустимый абсолютный сдвиг;

$Q_{max}$  — перерезывающая сила;

$h$  — высота;

$A_0$  — площадь поперечного сечения;

$G$  — модуль упругости при сдвиге



## НАПРЯЖЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ.

В сопротивлении материалов, теории упругости, теории пластичности напряженные состояния рассматриваются в произвольной точке конструктивного элемента независимо от характера приложения внешних сил. При этом, чтобы в точке показать напряжения  $\sigma$  и  $\tau$ , ее нужно изобразить в виде кубика со всеми признаками безразмерной точки.

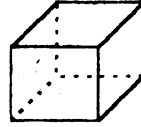
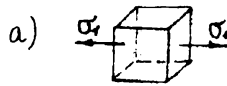
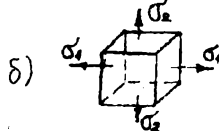


Рис. 20

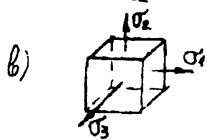
Грани кубика в любом конструктивном элементе с самыми разнообразными нагрузками можно развернуть (ориентировать) таким образом, что на этих гранях касательные напряжения будут равны нулю, а нормальные будут экстремальными:  $\tau = 0$ ,  $\sigma = e\chi z$ . Площадки, на которых касательные напряжения равны нулю, называются **главными площадками**. Экстремальные нормальные напряжения, действующие по главным площадкам, называются **главными напряжениями**. По количеству главных напряжений, действующих в точке, различают три вида напряженных состояний:



а) линейное



б) плоское



в) объемное  
 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

Рис. 21 а, б, в

### АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

(определение напряжений по наклонным площадкам (сечениям))

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0; \quad \sigma_1 \neq 0$$

$$\sigma_3 = 0; \quad \sigma_1 \neq 0; \quad \sigma_2 \neq 0$$

$$\sigma_3 \neq 0; \quad \sigma_2 \neq 0; \quad \sigma_1 \neq 0$$

линейное напряженное состояние

плоское напряженное состояние

объемное напряженное состояние

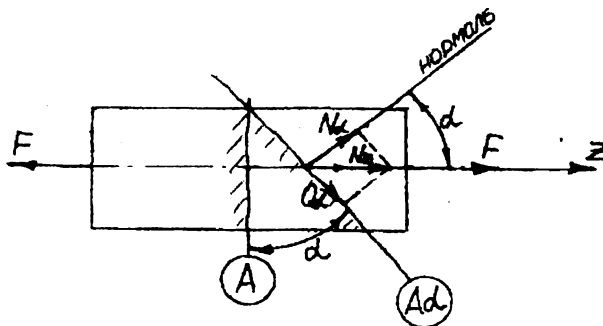


Рис. 22

$$\frac{A}{A_\alpha} = \cos \alpha; \quad A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}$$

$$\frac{N_\alpha}{N_z} = \cos \alpha; \quad N_\alpha = N_z \cos \alpha = F \cos \alpha$$

$$Q_\alpha = N_z \sin \alpha = F \sin \alpha$$

$$\sigma = \frac{N_z}{A} = \frac{F}{A}$$

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{A_\alpha} = \frac{F \cos \alpha}{\frac{A}{\cos \alpha}} = \frac{F}{A} \cos^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{Q_\alpha}{A_\alpha} = \frac{F \sin \alpha}{\frac{A}{\cos \alpha}} = \frac{F}{A} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sigma_l = \frac{F}{A};$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_l \cdot \cos^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = \sigma_l \cdot \frac{l}{2} \sin 2\alpha = \frac{\sigma_l}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

где  $\left. \begin{matrix} \sigma_\alpha \\ \tau_\alpha \end{matrix} \right\}$  — напряжения по наклонной плоскости;

$\sigma_l$  — главное напряжение;

$\alpha$  — угол наклона площадки  $A_\alpha$  (главная площадка  $A$ ).

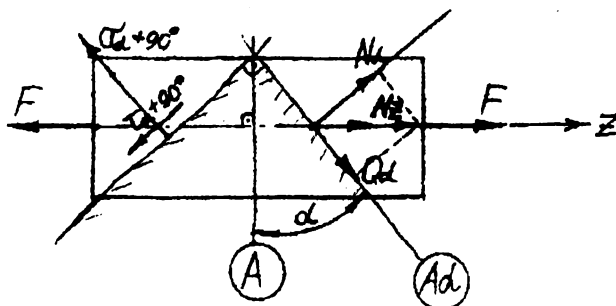
Разрушение хрупкого материала при растяжении происходит только от растягивающего напряжения (главного)  $\sigma_l$  путем отрыва.

Хрупкие материалы при сжатии и пластические при растяжении разрушаются от максимальных касательных напряжений, которые определяются по формуле:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_l}{2}$$

при  $\alpha = 45^\circ$ , т.е.  $\sin 2\alpha = 1$

Рассмотрим нормальные и касательные напряжения по взаимно-перпендикулярной площадке  $A_{\alpha+90^\circ}$ .



$$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_\beta = \sigma \cos^2(\alpha + 90^\circ) = \sigma \sin^2 \alpha$$

$$\tau_{\alpha+90^\circ} = \tau_\beta = \frac{\tau}{2} \sin(2\alpha + 180^\circ) = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$$

Рис. 23

#### Выводы из полученных формул:

1) Касательные напряжения по взаимно-перпендикулярным площадкам всегда по величине одинаковы и противоположны по знаку. Это свойство касательных напряжений называется **законом парности касательных напряжений**.

2) Сумма нормальных напряжений по взаимно-перпендикулярным площадкам всегда равна главному напряжению:

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_l \cos^2 \alpha + \sigma_l \sin^2 \alpha = \sigma_l (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \sigma_l$$

3) Полученные выражения для  $\sigma_\alpha$ ,  $\tau_\alpha$ ,  $\sigma_{\alpha+90^\circ}$ ,  $\tau_{\alpha+90^\circ}$  представляют собой уравнения окружности в параметрическом виде, следовательно любые напряжения в точке могут быть представлены графически окружностью в координатах  $\sigma$ ,  $\tau$ , как показано на рис.24 (Круг Мора).

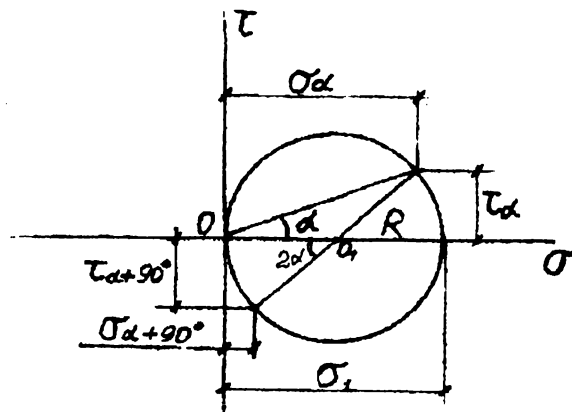


Рис. 24

## ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

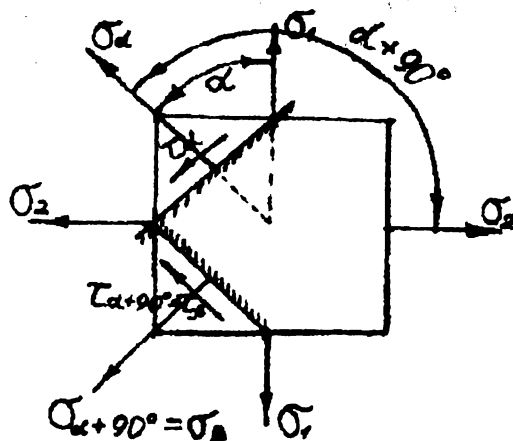


Рис. 25

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{\alpha(\sigma_1)} + \sigma_{\alpha(\sigma_2)} = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2 (90^\circ + \alpha) = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \tau_{\alpha(\sigma_1)} + \tau_{\alpha(\sigma_2)} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha + \frac{\sigma_2}{2} \sin(2\alpha + 90^\circ) = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

$$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_{\beta} = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha$$

$$\tau_{\alpha+90^\circ} = \tau_{\beta} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

### Выводы:

- 1) При плоском напряженном состоянии подтверждаются все три вывода, полученные для линейного напряженного состояния.
- 2) Сумма нормального напряжения по взаимно-перпендикулярным площадкам равна главному напряжению (сумме);

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_1 + \sigma_2$$

- 3) Графически напряжения по наклонным площадкам изменяются по закону окружности в координатах  $\sigma$  и  $\tau$ :

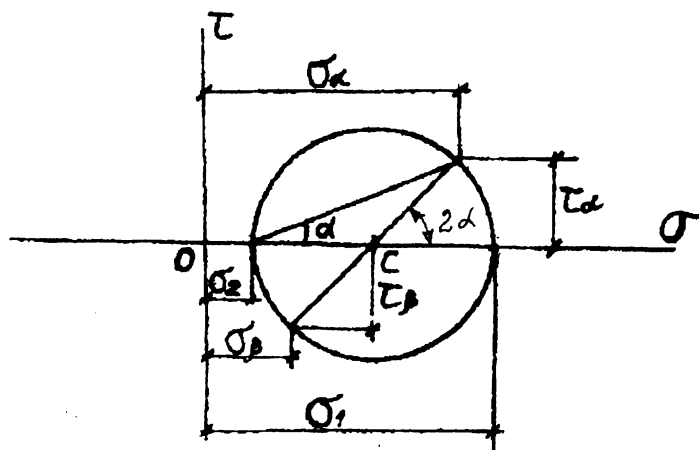


Рис. 26

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ПОЛОЖЕНИЯ ГЛАВНЫХ ПЛОЩАДОК, ЕСЛИ ЗАДАНЫ ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ПЛОЩАДКИ И НАПРЯЖЕНИЯ (обратная задача)

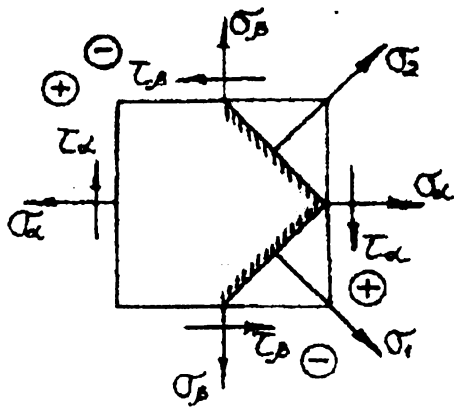


Рис. 27

Для определения главных напряжений и главных площадок, если заданы произвольные напряжения  $\sigma_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$  и  $\tau_\alpha$ ,  $\tau_\beta$  пользуются кругом Моора.

Предположим, что  $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$ . Тогда круг Моора можно построить следующим образом:

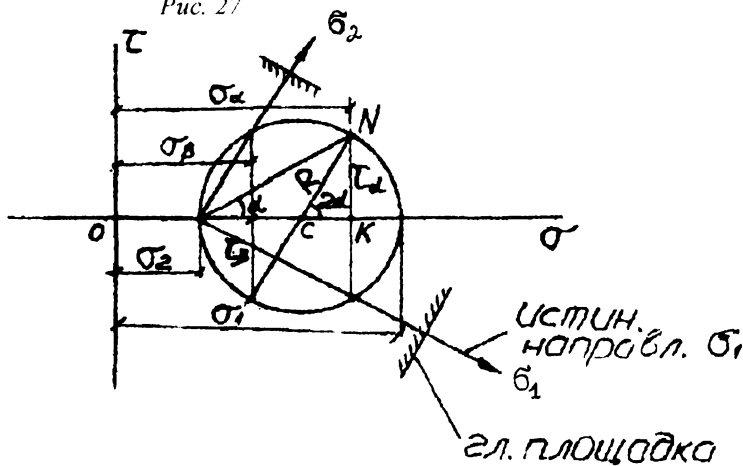


Рис. 28

$$|\tau_\alpha| = |\tau_\beta|$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \overline{OC} \pm R = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} \pm \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2}$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 + (\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2}$$

Определим положение главных площадок аналитически:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\overline{NK}}{\overline{KC}} = \frac{\tau}{\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}} = \frac{2\tau}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}$$

(знак «-» вводится в формулу для того, чтобы соблюдались правила тригонометрии при графическом отсчете угла)

## ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ

При оценке прочности конструктивных элементов часто необходимо иметь зависимости между деформациями и напряжениями не только при линейном, но и при объемном и плоском напряженном состоянии.

Рассмотрим общий случай объемного напряженного состояния.

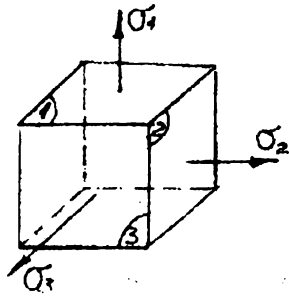


Рис. 29

Определим деформации в точке от напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Они вызывают деформации  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ . Согласно гипотезе о независимости действия (суперпозиции) относительные удлинения выразятся:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1(\sigma_1)} + \varepsilon_{1(\sigma_2)} + \varepsilon_{1(\sigma_3)}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{2(\sigma_1)} + \varepsilon_{2(\sigma_2)} + \varepsilon_{2(\sigma_3)}$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{3(\sigma_1)} + \varepsilon_{3(\sigma_2)} + \varepsilon_{3(\sigma_3)}$$

$$\sigma = \varepsilon E; \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E}; \quad \mu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}; \quad \varepsilon_1 = \mu \varepsilon \quad 0 \leq \mu \leq 0,5$$

где  $\varepsilon_1$  — относительное сужение

$\varepsilon$  — относительное удлинение

Подставим значения:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1 = \varepsilon_{1(\sigma_1)} + \varepsilon_{1(\sigma_2)} + \varepsilon_{1(\sigma_3)} = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

Аналогично:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

Для плоского напряженного состояния:

$$\sigma_3 = 0; \quad \sigma_1 \neq 0; \quad \sigma_2 \neq 0$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \sigma_2); \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu \sigma_1); \quad \varepsilon_3 = -\frac{\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

Для линейного напряженного состояния:

$$\sigma_3 = 0; \quad \sigma_1 \neq 0; \quad \sigma_2 = 0$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_2 = -\frac{\mu \sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_3 = -\frac{\mu \sigma_1}{E}$$

### ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ (ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ)

Для сравнения линейного, плоского, и объемного напряженных состояний при записи условий прочности используют теории прочности, которые имеют большие неточности, но за неимением других методов оценки прочности, широко используются в инженерной практике. Все теории прочности сводятся к следующему: два тела, выполненные из одного и того же материала, считаются равнопрочными, независимо от напряженного состояния (линейного, плоского, объемного), если у них:

1) по 1-ой теории прочности — наибольшие нормальные напряжения равны.

$$\sigma_{1D} = \sigma_{max} \leq [\sigma], \text{ где } \sigma_{1D} \text{ — эквивалентное напряжение}$$

$\sigma_{max}$  — расчетное максимальное напряжение

$[\sigma]$  — допускаемое напряжение

2) по 2-ой теории прочности — максимальные и относительные удлинения равны.

$$\varepsilon_{1D} = \varepsilon_{max} \leq [\varepsilon]$$

Произведем подстановку:

$$\varepsilon_{1D} = \frac{\sigma_{1D}}{E}; \quad [\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}$$

$$\sigma_{1D} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$$

3) по 3-ей теории прочности — наибольшие касательные напряжения равны.

$$\tau_{IIIЭ} = \tau_{max} \leq [\tau]$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \text{ м.к. } \sin 2\alpha = 1$$

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}; \tau_{IIIЭ} = \frac{\sigma_{IIIЭ}}{2}; \sigma_{IIIЭ} = \sigma_1 - \sigma_2 \leq [\sigma]$$

4) по 4-ой теории прочности (энергетической) максимальная потенциальная энергия изменения формы тела будет одинаковой.

$$U_{IVЭ} = U_{max} \leq [U]$$

Энергией изменения объема пренебрегаем, учитываем только энергию изменения объема, при  $\mu = 0,5$

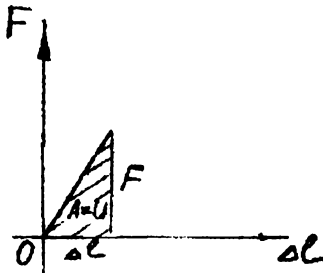


Рис. 30

$A = U = \frac{F \cdot \Delta l}{2}$  — общая работа деформации (или полная потенциальная энергия)

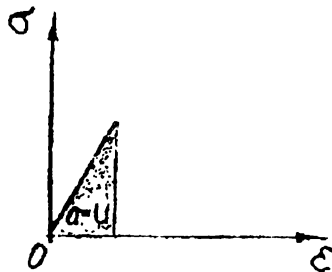


Рис. 31

Удельная работа, потенциальная энергия деформации

$$a = \alpha = \frac{\sigma \varepsilon}{2}; \sigma = \varepsilon E; \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$a = \alpha = \frac{\sigma^2}{2E}$$

$$U_{IVЭ} = \frac{\sigma_{IVЭ}^2}{2E};$$

$$[U] = \frac{[\sigma]^2}{2E};$$

$U_{max}$  — при объемном и плоском напряженном состоянии вычислим, используя гипотезу о независимости действия (суперпозиции). Эта гипотеза гласит, что суммарное действие системы сил равно сумме действия составляющих.

$$\begin{aligned} U_{max} &= U_{(\sigma_1)} + U_{(\sigma_2)} + U_{(\sigma_3)} = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2} = \\ &= \frac{\sigma_1}{2} \cdot \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \frac{\sigma_2}{2} \cdot \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] + \frac{\sigma_3}{2} \cdot \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \\ &= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)] \end{aligned}$$

При изменении формы тела, когда объем не изменяется,  $\mu = 0,5$

$$\frac{\sigma_{IVЭ}^2}{2E} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)] \leq \frac{[\sigma]^2}{2E}$$

или для объемного напряженного состояния:

$$\sigma_{IVЭ} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_3} \leq [\sigma]$$

Для плоского напряженного состояния ( $\sigma_3 = 0$ ):

$$\sigma_{IVЭ} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \leq [\sigma]$$

Для линейного напряженного состояния ( $\sigma_3 = 0, \sigma_2 = 0$ ):

$$\sigma_{IVЭ} = \sqrt{\sigma_1^2} = \sigma_1 \leq [\sigma]$$

Рассмотренные теории прочности дают приблизительные согласования опыта и расчета. Наиболее точной из этих теорий является 4-ая теория прочности, которая дает хорошие согласования. 3-я теория дает хорошие согласования расчета и опыта для пластических материалов, в частности для всех стальных конструкций. 1-ой и 2-ой теорией практически не пользуются.

### РАСЧЕТЫ БРУСЬЕВ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ.

При растяжении-сжатии (осевом) внутренняя сила  $N_z$  определяется:

$$N_z = \sum y \text{ отсеч. частч.}$$

при этом:  $Q_y = Q_x = M_x = M_y = M_z = 0$ .

Условие прочности запишется:

$$\sigma = \frac{N_z}{A} \leq [\sigma]$$

При расчетах из условия прочности кроме проверки на прочность можно определять площадь поперечного сечения бруса  $A$ , грузоподъемность (несущую способность)  $N_z$ :

$$A \geq \frac{N_z}{[\sigma]}; N_z \leq A[\sigma]$$

Условие жесткости:

$$\Delta l = \frac{Fl_0}{EA_0} \leq [\Delta l]$$

где  $A_0$  — начальная площадь поперечного сечения;

$\Delta l$  — абсолютное удлинение;

$l_0$  — начальная длина;

$E$  — модуль Юнга.

Из условия жесткости можно вычислить:

$$A_0 \geq \frac{Fl_0}{E[\Delta l]}; N_z \leq \frac{\Delta l EA_0}{l_0}; l_0 = \frac{\Delta l EA_0}{F} \text{ и другие параметры.}$$

### РАСЧЕТ БРУСЬЕВ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ, ЗАГРУЖЕННЫХ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ.

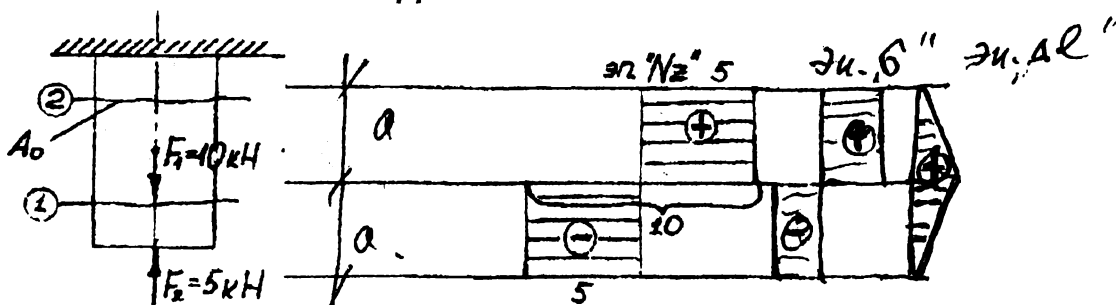
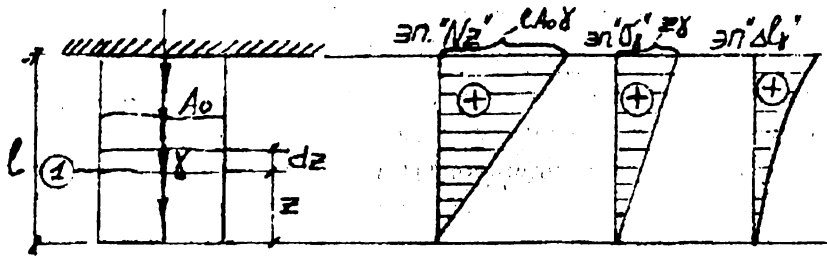


Рис. 32 а, б

$$N_{z1} = -F_2 = -5; N_{z2} = -F_2 + F_1 = 5$$

$$\sigma = \frac{N_z}{A_0}; \Delta l = \frac{N_z l}{EA_0}$$

Учет собственного веса бруса:



$$N_z = Z \cdot A_0 \cdot \gamma$$

Рис. 33

$$\sigma_y = \frac{Z \cdot A_0 \gamma}{A_0} = Z \cdot \gamma = q_{\gamma} \Rightarrow \text{интенсивность нагрузки}$$

$$\Delta(dZ) = \frac{Z A_0 \gamma \cdot dZ}{E \cdot A_0}$$

$$\Delta l_{\gamma} = \int_0^l \frac{Z \cdot \gamma \cdot dZ}{E} = \frac{\gamma}{E} \cdot \frac{Z^2}{2}$$

$$\Delta l_{\gamma} = \frac{\gamma l^2}{2E} \leq [\Delta l]$$

### РАСЧЕТ СТУПЕНЧАТОГО БРУСА НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

Для расчета ступенчатых стержней на прочность и жесткость используют условие прочности:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma]$$

и условие жесткости:

$$\Delta l_{max} = \frac{F l_0}{E A_0} \leq [\Delta l]$$

где  $\delta$  — расчетное максимальное перемещение свободного конца стержня.

$$\delta = \sum \Delta l_i \leq [\delta],$$

где  $\sum \Delta l$  — суммарное абсолютное удлинение.

$$\sum \Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \dots + \Delta l_n,$$

Необходимо иметь в виду, что при расчетах ступенчатых стержней нужно использовать гипотезу суперпозиции (независимости действия сил).

Пример: задан стержень из 3-х ступеней.

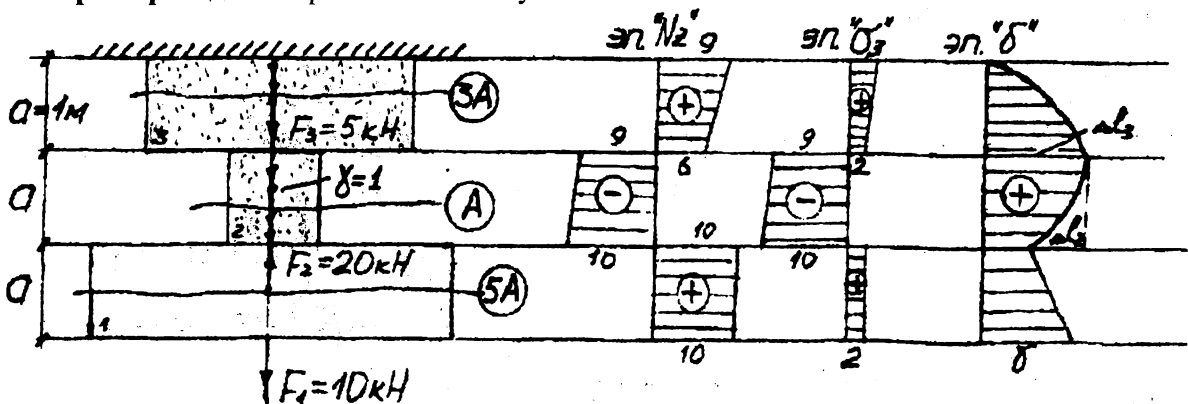


Рис. 34

Требуется проверить заданный стержень на прочность и жесткость.



**Решение:** для проверки стержня на прочность необходимо, как видно из условия прочности, найти  $\sigma_{max}$ . Определяем внутренние силы:

$$N_z = \sum Z_0 \text{ отсек. части}$$

$$N_{z_1} = F_1 = 10$$

$$N_{z_2} = F_1 - F_2 + Z_2 \cdot \gamma \cdot A = 10 - 20 + Z_2 \cdot 1 \cdot 1$$

$$Z_2 = 0 \quad N_{z_2} = -10$$

$$Z_2 = a \quad N_{z_2} = -9$$

$$N_{z_3} = F_1 - F_2 + a \cdot \gamma \cdot A + Z_3 \cdot \gamma \cdot 3a + F_3$$

$$Z_3 = 0 \quad N_{z_3} = 6$$

$$Z_3 = a \quad N_{z_3} = 9$$

Определяем нормальные направления:

$$\sigma_1 = \frac{N_{z_1}}{5A} = \frac{10}{2} = 2$$

$$\sigma_2 = \frac{N_{z_2}}{A} = -10;$$

$$-9;$$

$$\sigma_3 = \frac{N_{z_3}}{3A} = 2;$$

3.

Для оценки стержня на жесткость необходимо определить перемещение свободного конца, учитывая, что перемещение в заделке всегда равно нулю.

В данном примере перемещение  $\delta$  выразится:

$$\delta = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$$

$$\Delta l_1 = \frac{F_1 \cdot a}{E \cdot 5A}$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_{2(F_1)} - \Delta l_{2(F_2)} + \Delta l_{2(\gamma_2)} = \frac{F_1 \cdot a}{E \cdot A} - \frac{F_2 \cdot a}{E \cdot A} + \frac{\gamma \cdot a^2}{2E}$$

$$\Delta l_3 = \Delta l_{3(F_1)} - \Delta l_{3(F_2)} + \Delta l_{3(\gamma_2)} + \Delta l_{3(F_3)} + \Delta l_{3(\gamma_1)} = \frac{F_1 \cdot a}{E \cdot 3A} - \frac{F_2 \cdot a}{E \cdot 3A} + \frac{\gamma \cdot a^2}{2E} + \frac{F_3 \cdot a}{E \cdot 3A} + \frac{\gamma \cdot a^2}{2E}$$

## СТЕРЖНИ РАВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)

Стержнем равного сопротивления называют такой стержень, у которого рабочие напряжения во всех точках объема одинаковы:  $\sigma_{\text{раб}} = \text{const}$ .

Подобные стержни при достижении предела прочности разрывают все свои межатомные связи. Следовательно, стержень равного сопротивления является идеализированным. Практически изготовить такой стержень невозможно.

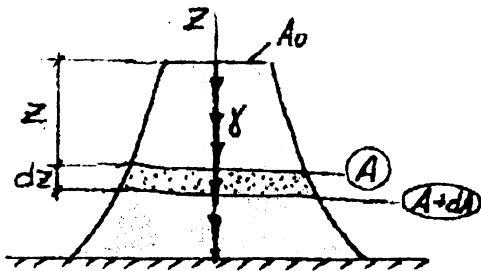


Рис. 35

Приращение веса на участке  $dZ$  к приращению площади  $dA$  должно сохранить  $\sigma_{\text{раб}}$  неизменным и равным  $[\sigma]$

$$\frac{A \cdot dZ \cdot \gamma}{dA} = [\sigma]$$

$$dZ = \frac{\gamma}{[\sigma]} \frac{dA}{A}$$

$$e_n A + C = \frac{\gamma}{[\sigma]} \cdot Z$$

$$Z = 0; C = -e_n A_0; e_n - e_n A_0 = \frac{\gamma}{[\sigma]} \cdot Z$$

$$\frac{A}{A_0} = e^{\frac{\gamma}{[\sigma]} Z}$$

$$A = A_0 \cdot e^{\frac{\gamma}{[\sigma]} Z}$$

где  $A$  — произвольная площадь поперечного сечения стержня равного сопротивления;

$A_0$  — начальная площадь;

$e = 2,7$ ;

$\gamma$  — собственный вес;

$[\sigma]$  — допускаемое напряжение;

$Z$  — расстояние от сечения  $A$  до  $A_0$ .

Если площади поперечных сечений изменяются по этой формуле, то при разрушении такой стержень должен разрывать все межатомные связи. Учитывая, что подобный стержень равного сопротивления изготовить невозможно, то их выполняют ступенчатыми, добиваясь экономии материала при максимальной несущей способности.

## РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ-НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)

К статически-определимым относятся задачи, в которых реакции связей определяются с помощью уравнений равновесия.

К статически-неопределимым относятся задачи, в которых число неизвестных реакций связей превышает число возможных уравнений равновесия.

Превышение числа неизвестных реакций над числом возможных уравнений равновесия называется степенью статической неопределимости.

Подобные реакции связей с точки зрения статики называются «лишними». Эти «лишние» реакции связей легко определяются методами сопромата, с помощью планов деформаций и уравнений деформаций.

**Порядок решения статически-неопределимых задач при растяжении (сжатии):**

- 1) Для заданной задачи составляют все возможные уравнения равновесия (статики) и определяют степень статической неопределимости («лишние» связи).

$$\sum x = 0; \quad \sum y = 0; \quad \sum z = 0; \quad \sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0;$$

- 2) Рассматривают геометрическую сторону задачи (деформацию). Составляют план и уравнения деформаций.
- 3) Деформации с помощью закона Гука выражают через силы и определяют «лишние» реакции связи.
- 4) Решая совместно уравнения равновесия с уравнениями деформаций, определяют все неизвестные реакции связи.
- 5) Расчет на прочность и жесткость подобных задач после выполнения 4-х предыдущих пунктов производится также, как и статически-определимых задач.

**Пример 1:**

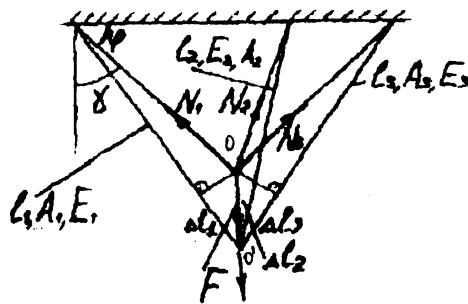


Рис. 36

$$\left. \begin{array}{l} 1) \sum x = 0 \\ 2) \sum y = 0 \\ 3) \sum m = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} N_1 - ? \\ N_2 - ? \\ N_3 - ? \end{array}$$

1-ая степень статической неопределимости

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \cos \alpha; \quad \frac{\Delta l_3}{\Delta l_2} = \cos \beta;$$

$\alpha$  и  $\beta$  — остались неизменными по теории деформации

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \text{ — закон Гука}$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2}; \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E_3 \cdot A_3}$$

- 1)  $\sum z = 0; \quad -F + N_1 \cdot \cos \gamma + N_2 \cdot \cos(\alpha - \gamma) + N_3 \cdot \cos(\alpha - \gamma + \beta) = 0$
- 2)  $\sum x = 0; \quad -N_1 \cdot \sin \gamma + N_2 \cdot \cos(180^\circ - \varphi - \alpha) + N_3 \cdot \cos(180^\circ - \varphi - \alpha - \beta) = 0$
- 3)  $\frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} \cdot \frac{E_2 \cdot A_2}{N_2 \cdot l_2} = \cos \alpha$

**Пример 2:**

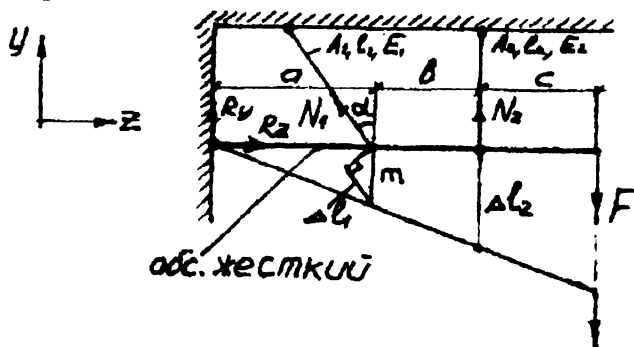


Рис. 37

$$\left. \begin{array}{l} 1) \sum y = 0 \\ 2) \sum z = 0 \\ 3) \sum m = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} R_y - ? \\ R_z - ? \\ N_1 - ? \\ N_2 - ? \end{array}$$

$$4) \frac{m}{a} = \frac{\Delta l_2}{a+b}$$

$$\frac{\Delta l_1}{m} = \cos \alpha$$

$$m = \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha}$$

$$\frac{\Delta l_1}{\alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\Delta l_2}{a+b}$$

$$4) \frac{N_1 \cdot l_1}{A_1 \cdot E_1} = \frac{N_2 \cdot l_2}{A_2 \cdot E_2} \quad 3) \sum m_0 = 0 = N_1 \cdot \cos \alpha + a + N_2(a+b) - F(a+b+c)$$

Из 3) и 4) находим  $N_1$  и  $N_2$ .

### ТЕМПЕРАТУРНЫЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ

К температурным статически неопределимым задачам относится большое количество строительных конструкций, работающих в условиях колебания температуры окружающей среды.

Например, балки и стойки зданий, сооружений, рельсы, эстакады, мосты и т.д.

Примеры:

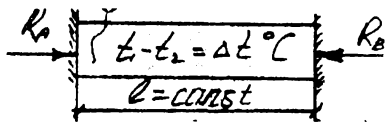


Рис. 38

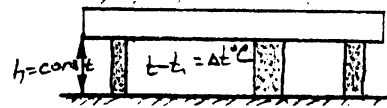


Рис. 39

$$\Delta l_{(R_p)} = \Delta l_{(\Delta t)}$$

$$\frac{R_b l}{EA} = \alpha l \Delta t$$

$$R_b = R_a = \alpha \Delta t EA$$

$$\sigma_{расз} = \frac{\alpha \Delta t EA}{A} = \alpha \Delta t E \leq [\sigma]$$

где  $\alpha$  — коэффициент температурного расширения

### МОНТАЖНЫЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ

К ним относится широкий класс задач, связанный с неточностью изготовления конструктивных элементов, которые при монтаже не собираются.

Примеры:

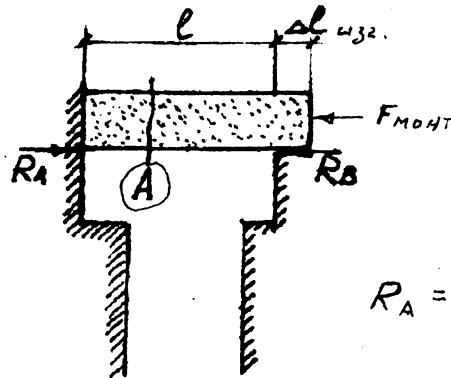


Рис. 40

$$R_A = R_B$$

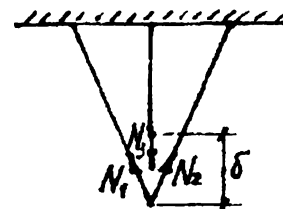


Рис. 41

$$\Delta l_{\text{монтажн}} = \Delta l_{\text{изг.}}$$

$$\frac{F_{\text{монт}} l}{EA} = \Delta l_{\text{изг.}}; \quad F_{\text{монт}} = \frac{\Delta l_{\text{изг.}} EA}{l}$$

аналогично

## РАСЧЕТ УСИЛИЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ СТЕРЖНЕЙ.

Учитывая, что бетон хорошо работает на сжатие, но очень плохо работает на растяжение, то, чтобы устранить этот недостаток, бетонные конструкции обычно армируют стальными стержнями. При этом возникает задача, какую часть растягивающей нагрузки берет на себя бетон, а какую — арматура?

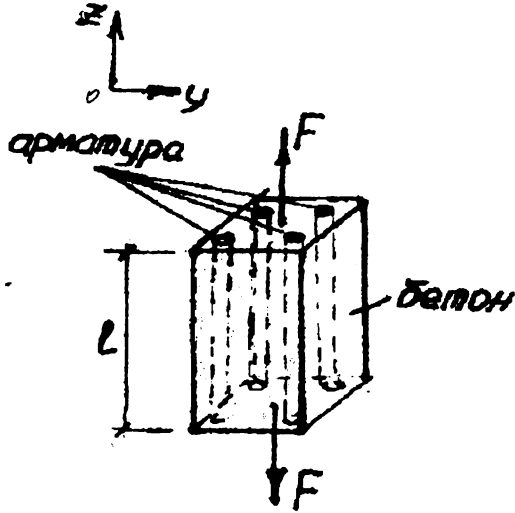


Рис. 42

$$N_a = m\sigma_a \cdot A_a; \quad N_\sigma = \sigma_\sigma \cdot A_\sigma; \quad \sigma_\sigma = m\sigma_a$$

$$F_{\delta_{ер}} + F_{ар.ст.} = F$$

$$\sum Z = 0$$

$$\frac{F_\sigma \cdot l}{E_\sigma \cdot A_\sigma} = \frac{F_a \cdot l}{E_a \cdot A_a}$$

$$\frac{\sigma_\sigma}{E_\sigma} = \frac{\sigma_a}{E_a}; \quad \frac{\sigma_\sigma}{\sigma_a} = \frac{E_\sigma}{E_a} = const = m$$

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАБОТЫ (ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ) ДЕФОРМАЦИИ

Работа (потенциальная энергия) деформации является главным атрибутом изменения материальных тел, причем эти изменения могут быть обратимыми и необратимыми. Обратимые изменения материальных объектов характеризуют их стабильность, а необратимые — их преобразование в новое качественное состояние.

Машинная диаграмма

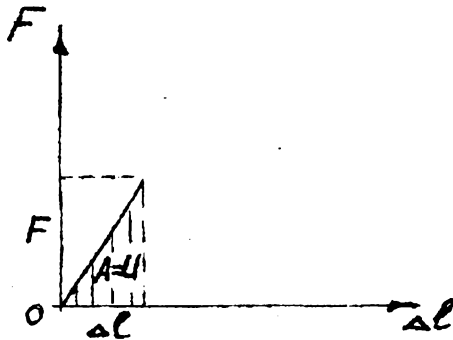


Рис. 43

$$A = U = \frac{F \cdot \Delta l}{2}$$

Удельная работа деформации:  $a = \frac{U}{V}$ ,

где  $V$  — объем тела.

Условная диаграмма напряжений.

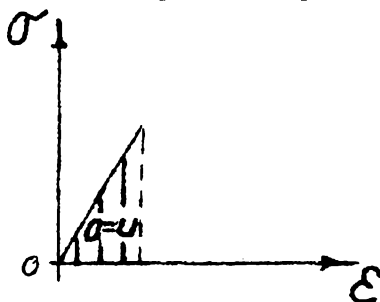


Рис. 44

$$\sigma = \epsilon E; \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$a = u = \frac{\sigma \epsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}$$

$$A = U = a \cdot V = u \cdot V = \frac{\sigma^2}{2E} \cdot V$$

## РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ СДВИГЕ

Ранее были установлены формулы для определения внутренних сил при сдвиге.

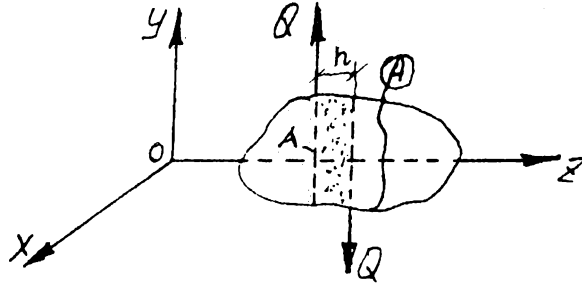


Рис. 45

$$Q_y = \sum y \text{ отсез. части}$$

$$Q_x = \sum x \text{ —————}$$

$$\tau = \frac{Q}{A} \quad (\text{Па, кПа, МПа, кг / см}^2)$$

Если отложить сдвигающую силу  $Q$  и деформацию при сдвиге на координатах  $Q$  и  $m$ , то машинная диаграмма при сдвиге для пластического материала будет выглядеть точно так же, как при растяжении-сжатии.

Машинная диаграмма:

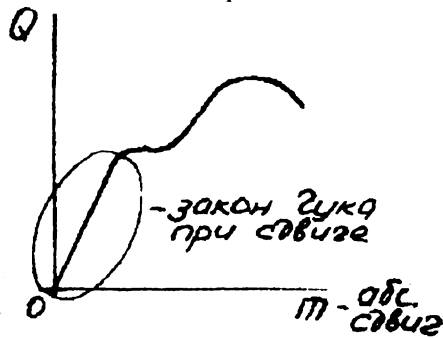


Рис. 46

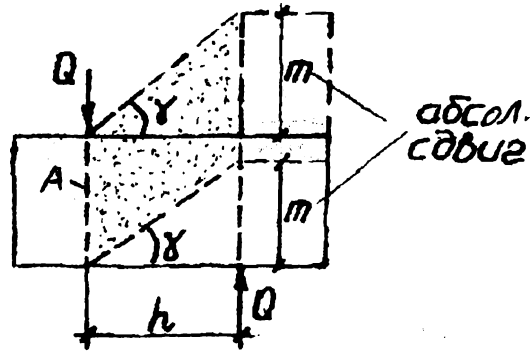


Рис. 47

$$\frac{m}{h} = \text{tg} \alpha \approx \gamma, \text{ где } \gamma \text{ — относительный сдвиг}$$

Среднее касательное напряжение при сдвиге  $\tau$  определится

$$\tau = \frac{Q}{A}$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения.

Условная диаграмма напряжений:

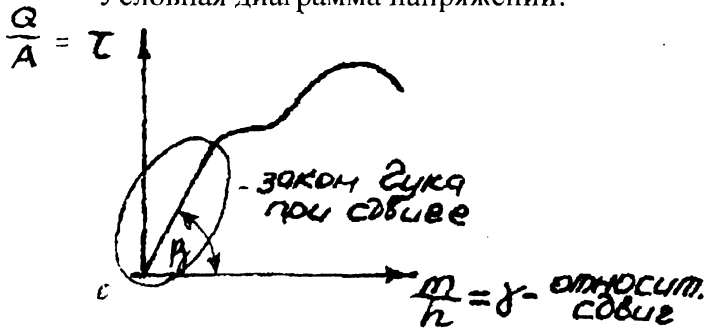


Рис. 48

$$\text{tg} \beta = \frac{\tau}{\gamma} = \text{const} = G \text{ — модуль упругости при сдвиге.}$$

$$\tau = \gamma G$$

$$\sigma = \varepsilon \cdot E$$

$$\frac{Q}{A} = \frac{m}{h} G$$

$$m = \frac{Q \cdot h}{G \cdot A}$$

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}$$

где  $G \cdot A$  — жесткость при сдвиге;

$E \cdot A$  — жесткость при растяжении-сжатии.

При чистом сдвиге  $\sigma = 0$ ;  $\tau \neq 0$

Следовательно, если в точке имеет место чистый сдвиг, то круг Мо ра будет выглядеть следующим образом:

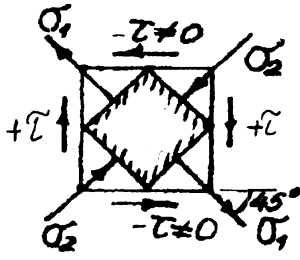


Рис. 49

$$|\sigma_1| = |\sigma_2| = |\tau| = const = R$$

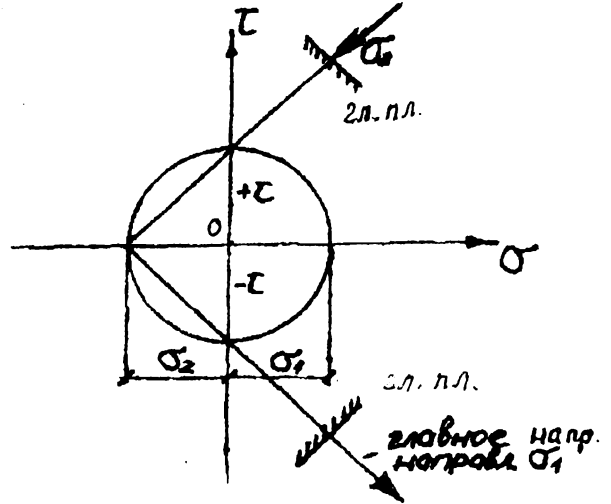


Рис.50

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПУСКАЕМОГО НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ СДВИГЕ

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2} \sin 2\alpha, \quad \sin 2\alpha = 1$$

$$[\tau] \cong 0,5[\sigma]$$

### ВЗАИМОСВЯЗЬ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ЧИСТОМ СДВИГЕ

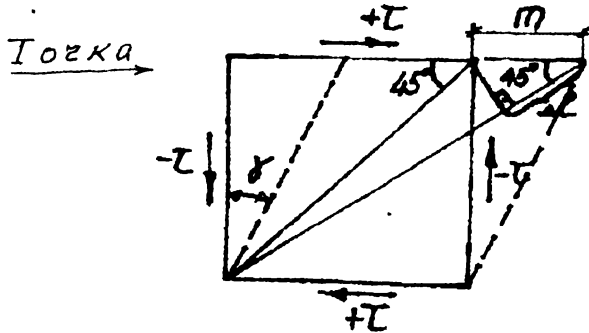


Рис.51

$$\frac{\Delta l}{m} = \cos 45^\circ$$

$$\frac{m}{h} = \gamma; \quad \frac{\Delta l}{h\gamma} = \cos 45^\circ$$

$$h = l \cos 45^\circ$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \gamma \cos^2 45^\circ$$

$$\varepsilon = 0,5\gamma$$

$$\varepsilon = \frac{l}{E_1} (\sigma_1 - \mu\sigma_2) \quad \text{— при плоском напряженном состоянии} \quad |\sigma_1| = |\sigma_2| = |\tau|$$

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2} (1 + \mu); \quad \frac{l}{2} \gamma = \frac{\tau}{E} (1 + \mu)$$

$$\tau = \gamma \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Следовательно:  $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$

$$\tau = \gamma G$$

Закон Гука при сдвиге

Все формулы чистого сдвига применимы при расчетах на поперечный сдвиг, который сопровождается дополнительным изгибом.

### УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ И УСЛОВИЕ ЖЕСТКОСТИ ПРИ СДВИГЕ

$$\tau_p = \frac{Q_{max}}{A_0} \leq [\tau]$$

$$\tau_p = \gamma_{max} G \leq [\tau]$$

где  $\tau_p$  — расчетное напряжение;

$Q_{max}$  — максимальная поперечная сила;

$\gamma_{max}$  — максимальный относительный сдвиг.

$$[\tau] \approx 0,5[\sigma]$$

$$m_p = \frac{Q \cdot h}{G \cdot A_0} \leq [m]$$

$$\gamma_p = \frac{\tau_{max}}{G} \leq [\gamma]$$

С помощью приведенных условий прочности и жесткости проверяются прочность и жесткость конструктивных элементов. Если расчетные величины больше допусковых, то элемент не пригоден для эксплуатации.

С помощью этих условий можно рассчитывать сечение стержней.

$$A_0 \geq \frac{Q_{max}}{[\tau]}$$

$$A_0 \geq \frac{Q_{max} \cdot h}{G \cdot [m]}$$

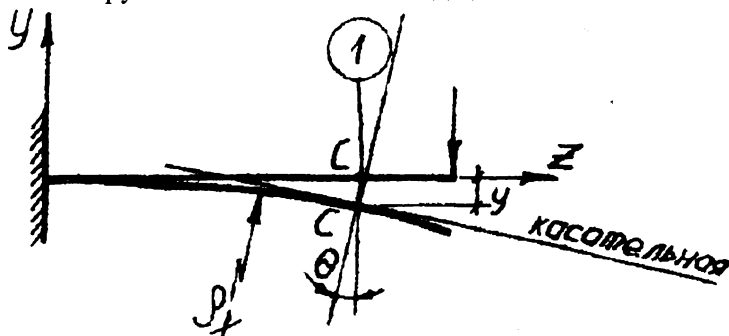
С помощью условий прочности и жесткости можно также определять несущую способность (грузоподъемность) конструктивных элементов.

$$Q_{max} \leq A_0 [\tau]$$

$$Q_{max} \leq \frac{[m] \cdot G \cdot A_0}{h}$$

### ИЗГИБ

Изгиб условно считается простой деформацией, при которой балки, стержни и другие конструктивные элементы под действием внешних нагрузок искривляют свою ось.



$\rho_x$  — радиус

① — сечение

C — центр тяжести сечения

Рис. 52

При изгибе любое произвольное сечение конструктивного элемента, как видно из приведенной ниже схемы, получают линейное перемещение  $y$  и угловое перемещение  $\Theta$ .

$$\text{tg} \Theta = \frac{dy}{dz} \approx \Theta, \quad \Theta = y'$$

Из предыдущего материала для изгиба нами получены следующие расчетные зависимости для определения внутренних изгибающих моментов  $M$ .

$$M = \sum m - \text{сумма моментов внешних сил отсеченной части.}$$

### Правило знаков

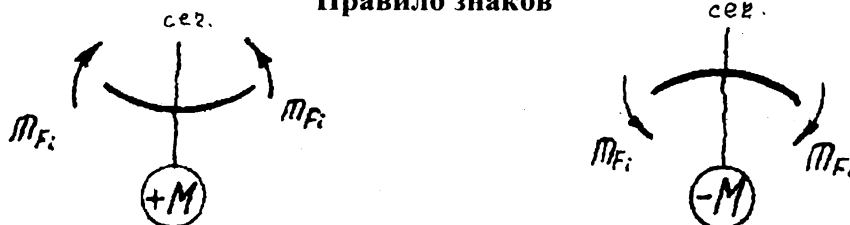


Рис. 53



Для внутренних перерезывающих сил  $Q$ :

$$Q = \sum Y \text{ — сумма проекций сил отсеченной части.}$$

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{dQ}{dZ} = \operatorname{tg} \alpha \\ Q &= \frac{dM}{dZ} = \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \right\} \text{ — связь между внутренними} \\ \text{и внешними силами.}$$

$$\sigma = \frac{M}{J} Y$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x} = [\sigma] \text{ — Условие прочности при изгибе}$$

$$\text{где } W_x = \frac{J_x}{Y_{\max}}$$

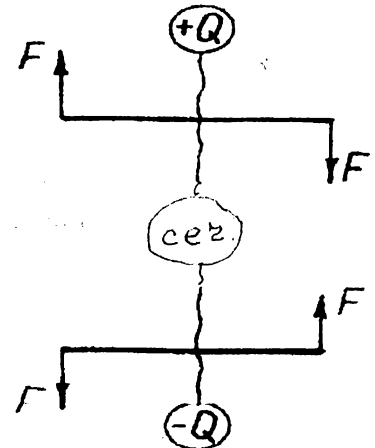
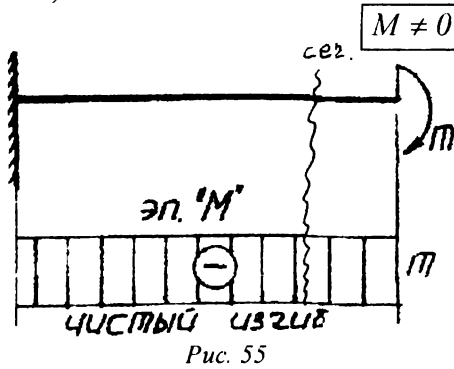


Рис. 54

Изгиб конструктивных элементов бывает:

- а) чистым;
- б) плоскопоперечным;
- в) косым.



Если на балку действует только изгибающий момент, а перерезывающие силы отсутствуют.

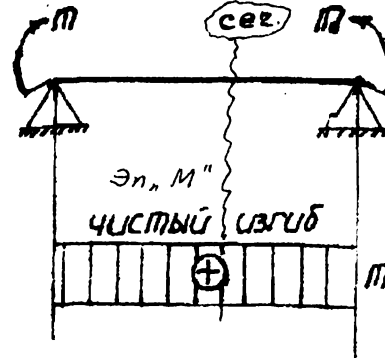
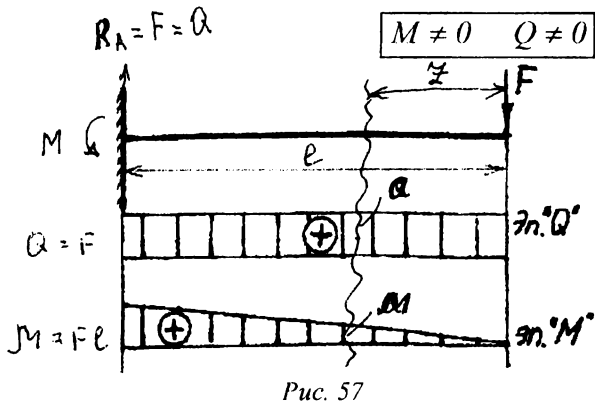
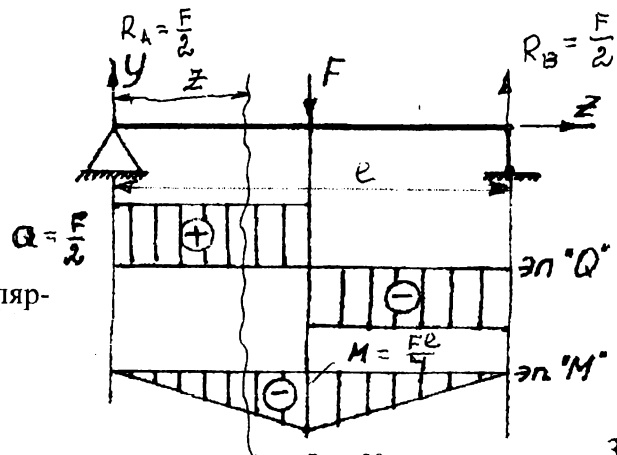


Рис. 56



При условии что сила  $F$  перпендикулярна на оси  $Z$  и лежит в плоскости  $Y$ .

При условии что сила  $F$  совпадает с плоскостью оси  $Y$  и перпендикулярна оси  $Z$ .



Косой изгиб бывает чистый и поперечный подобно выше сказанному, но отличается от них тем, что внешние силы лежат в плоскости, не совпадающей с осью  $Y$ .

Схематически косой изгиб можно показать так:

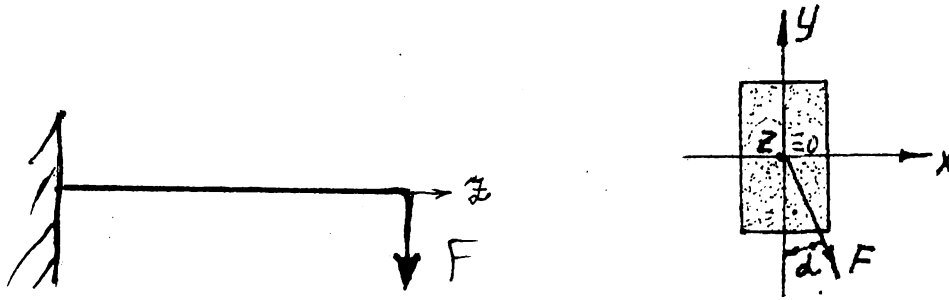


Рис. 59

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

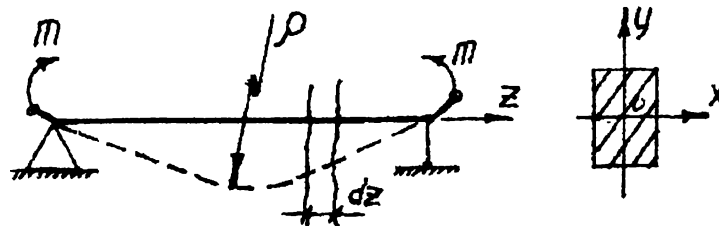


Рис. 60

Для вывода формул нормальных напряжений выделим в балке, испытывающей чистый изгиб элементарный участок  $dZ$ . Изобразим его в увеличенном виде (см. рис.61).

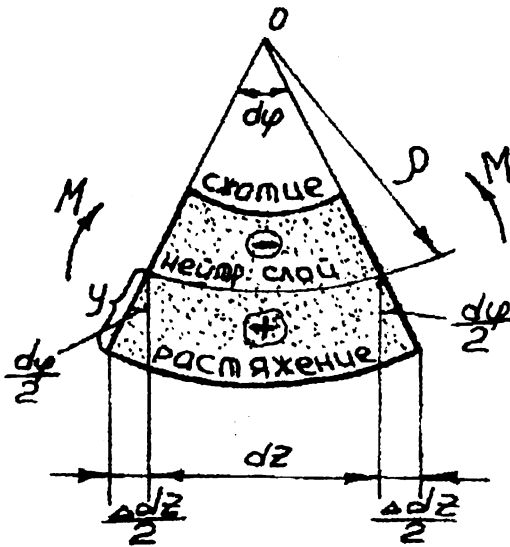


Рис. 61

$$\sigma = \pm \epsilon E$$

$$E - \text{const}$$

$\epsilon$  — относительное увеличение или укорочение

$$\epsilon = \frac{\Delta dZ}{dZ} = \frac{d\phi y}{d\phi \rho} \Rightarrow \sigma = \pm \frac{y}{\rho} E \quad (*)$$

Полученная формула позволяет определить нормальное напряжение в любой точке сечения балки в зависимости от координаты  $Y$ , если известен модуль упругости и кривизна балки в случае чистого изгиба.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО СЛОЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Нормальное напряжение на нейтральном слое равно нулю.

$$\sigma_{н.с.} = 0$$

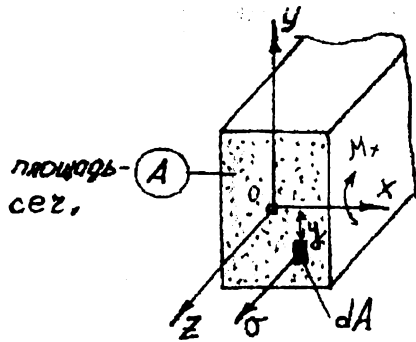


Рис. 62

Статический момент площади равен нулю в случае, когда ось  $Y$  и  $X$  проходят **через** центр тяжести.

$$\sum Z = 0 = N_z$$

$$dN_z = \sigma dA$$

$$N_z = \int_A \sigma dA = \int_A \frac{y}{\rho} E dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0;$$

$$E \neq 0, \rho \neq 0 \Rightarrow \int_A y dA = S_x$$

$$S_x = 0$$

### ВЫРАЖЕНИЕ НОРМАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ И КРИВИЗНЫ БАЛКИ ЧЕРЕЗ ИЗГИБАЮЩИЙ МОМЕНТ

Можем записать из известной формулы (\*)  $\frac{l}{\rho} = \frac{\sigma}{yE}$  (1)

Возьмем сечение балки:

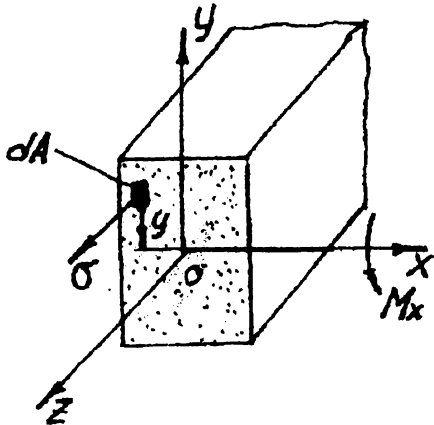


Рис. 63

По площадке  $dA$  будет действовать элементарный изгибающий момент.

$dM = \sigma dA y$  проинтегрируем

$$M = \int_A \sigma dA y = \int_A \frac{yE}{\rho} = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E J_x}{\rho} = J_x$$

Выразим кривизну балки через изгибающий момент:  $\frac{l}{\rho} = \frac{M}{E J_x}$  (2),

где  $M$  — изгибающий момент;

$E J_x$  — жесткость балки при изгибе.

Приравняем (1) и (2):  $\frac{\sigma}{yE} = \frac{M}{E J_x} \Rightarrow \sigma = \frac{M}{J_x} y$

Полученные формулы можно применить как для чистого, так и для поперечного и косоугольного изгиба, они универсальны. Полученные формулы позволяют записать условие прочности для изгиба балок по нормальным напряжениям.

$$\sigma = \frac{M}{J_x} y \leq [\sigma] \quad \sigma = \frac{M}{W_x} \leq [\sigma] \quad W_x = \frac{J_x}{y_{max}}$$

Условие прочности позволяет проверить прочность балок при плоском поперечном изгибе, подобрать сечение, определить несущую способность.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ (ФОРМУЛА ЖУРАВСКОГО)

$\sigma = f(M)$  нормальное напряжение

$\tau = f(Q)$  касательные напряжения — функция перерезывающей силы.

$C$  — центр тяжести отсеченной части.

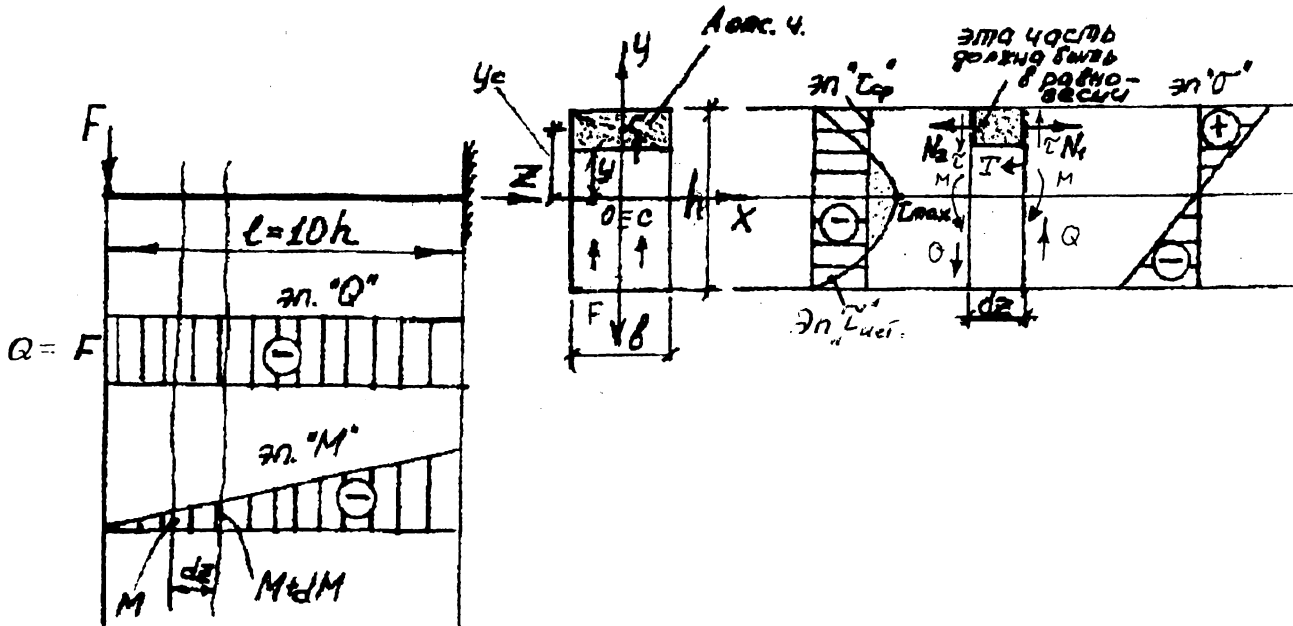


Рис. 64

$$\tau_{cp} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{bh} \text{ среднее напряжение.}$$

Рассмотрим равновесие малого элемента  $dZ$

$$\sum Z = -N_2 + N_1 - T = 0$$

$$T = bdZ\tau$$

$$N_1 = \int_{A_{отс}} \sigma dA = \int_{A_{отс}} \frac{M + dM}{J} y dA$$

$$N_2 = \int_{A_{отс}} \sigma dA = \int_{A_{отс}} \frac{M}{J} y dA - \int_{A_{отс}} \frac{M}{J} y dA + \int_{A_{отс}} \frac{M}{J} y dA + \int_{A_{отс}} \frac{dM}{J} y dA - bdZ\tau = 0$$

$$\tau = \frac{dM}{dZ} \cdot \frac{\int_{A_{отс}} y dA}{Jb} = \frac{QS_{отс}}{Jb}$$

Формула Журавского:  $\tau = \frac{QS_{отс}}{J_x b}$

$Q$  — перерезающая сила

$S_{отс}$  — статический момент отсч. площади линейно которой ищется касательное напряжение

$J_x$  — главный момент инерции относительно оси X

$b$  — ширина балки

## ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ (ТОЧНОЕ).

Точная эпюра касательных напряжений строится по формуле Журавского. Построим ее для ранее взятого прямоугольного напряжения (см. рис. 64).

$$S_{omc} = A_{omc} y_c = \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot b \cdot \left(\frac{h}{2} + y\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{b}{2} \cdot \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]$$

$$A_{omc} = \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot b$$

$$y_c = \left(\frac{h}{2} + y\right) \cdot \frac{1}{2}$$

Если  $y = 0$ , то  $\tau = \max$

$$y = \frac{h}{2}; \quad \tau = 0$$

Определим величину максимального касательного напряжения:

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{2} \cdot \frac{h^2 b}{12 \cdot 4b}; \quad \tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{bh} = \frac{3}{2} \tau_{cp} \quad \boxed{\tau_{\max} = 1,5 \tau_{cp}} \text{ — для прямоугольного сечения по средним напряжениям.}$$

## СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ $\sigma_{\max}$ И $\tau_{\max}$ В БАЛКАХ

Рассмотрим балку, длина которой  $l$  равна  $10h$  (высот):

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{60 \cdot \frac{Q}{bh}}{1,5 \cdot \frac{Q}{bh}} = 40$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{Fl}{bh^2} = \frac{F \cdot 10h}{bh^2}$$

$\boxed{\sigma_{\max} = 40 \tau_{\max}}$  т.к.  $\sigma_{\max} > \tau_{\max}$ , то  $\tau_{\max}$  можно отбрасывать, как малую величину в длинных балках.

## РАЦИОНАЛЬНОЕ СЕЧЕНИЕ БАЛОК

Рациональной балкой по сечению является такая балка, которая при минимальной площади сечения  $A$  способна выдерживать максимальные нормальные и касательные напряжения.

Рациональное сечение балки должно соответствовать сумме эпюр  $\sigma$  и  $\tau$  для данного сечения, как показано на рисунке 65.

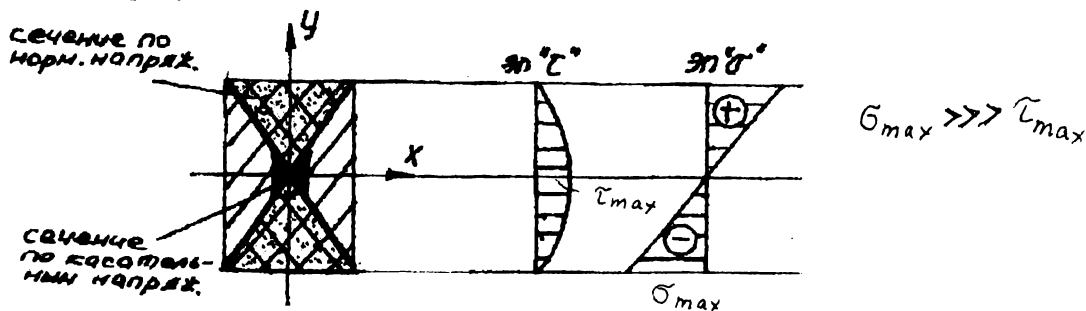
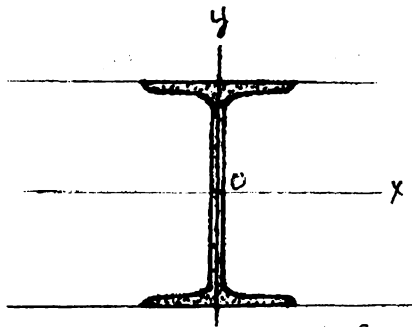


Рис. 65



Но такие сечения сложны и делают их попроще для удобства производства.  
 Двутавровая балка является рациональной или близко к рациональной  
 $[\sigma_p] = [\sigma_{сж}]$  - для одинаково работающих на растяжение и сжатие материалов.

Рис. 66

Когда бетон, чугун, камень, стекло и др. материалы — сжатую полочку делают узкой или не делают вообще (см. рис. 67).

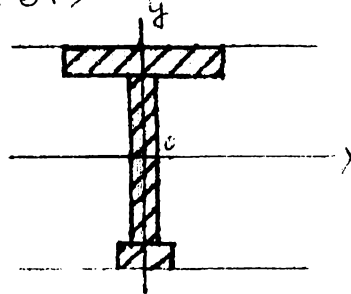


Рис. 67

### РАЦИОНАЛЬНЫЕ БАЛКИ ПО ДЛИНЕ.

Рассмотрим балку прямоугольного сечения и преобразуем ее в рациональную по длине и сечению.

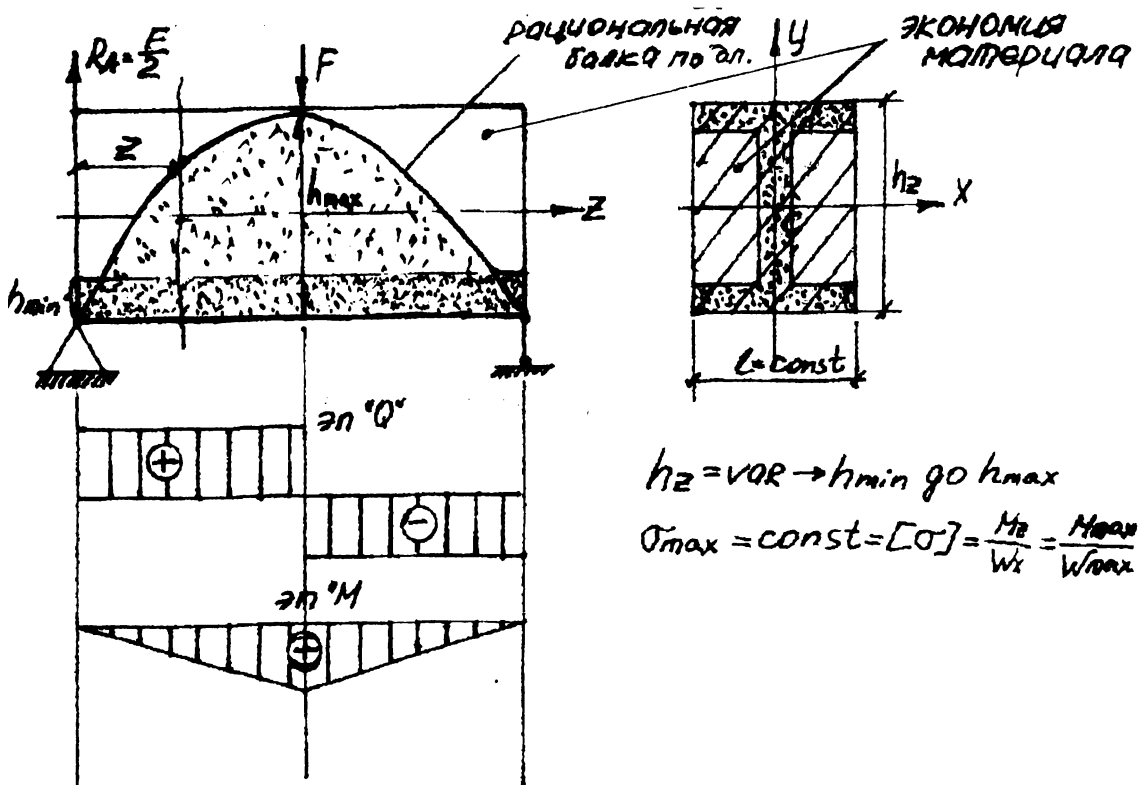


Рис. 68

$$\frac{\frac{F \cdot Z}{6}}{bh_z^2} = \frac{\frac{F \cdot l}{6}}{bh^2} \Rightarrow h_z = h_{max} \sqrt{\frac{2Z}{l}}$$

$Z = 0; h_z = 0$

$$\text{Если } Z = \frac{l}{4}, \text{ то } h_z = h_{max} \sqrt{\frac{2l}{4l}} = h_{max} \sqrt{\frac{l}{2}}$$

$$\tau = \frac{Q}{bh_{min}} \leq [\tau]; \quad h_{min} = \frac{Q}{b[\tau]}$$

### ПОДБОР СЕЧЕНИЙ БАЛОК ПРИ ПЛОСКОПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ.

При инженерном проектировании часто решают задачи определения поперечных сечений и длины пролетов балок.

Определение сечений балок, в принципе, можно производить исходя из условий прочности по нормальным и касательным напряжениям.

$$\sigma = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

$$\tau = \frac{Q_{max} \cdot S_{отс}}{J \cdot b} \leq [\tau]$$

При известных  $[\sigma]$  и  $M_{max}$  (берется из эюр "М")  $W_x$  находится очень просто:

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}$$

При этом  $W_x$  прямоугольного сечения можно определить:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{M_{max}}{[\sigma]}; \quad \frac{h}{b} = 1, 2, 3, \dots \text{ — задается из конструктивных соображений}$$

Например,  $h = 2b$

$$b \cdot |2b|^2 = \frac{6 M_{max}}{[\sigma]}; \quad b = \sqrt[3]{\frac{6 M_{max}}{4[\sigma]}}$$

$W_x$  для круглого сечения:

$$W_x = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{M_{max}}{[\sigma]}; \quad r = \sqrt[3]{\frac{4 M_{max}}{\pi[\sigma]}}$$

Сечения сложных профилей (двутавры, тавры, швеллеры, уголки и др.) подбираются путем вычисления  $W_x$  и последующим подбором сечений по таблицам.

Следует иметь в виду, что подбор сечения по касательным напряжениям не целесообразен еще и потому, что в длинных балках  $\tau$  всегда очень мало по сравнению с  $\sigma_{max}$

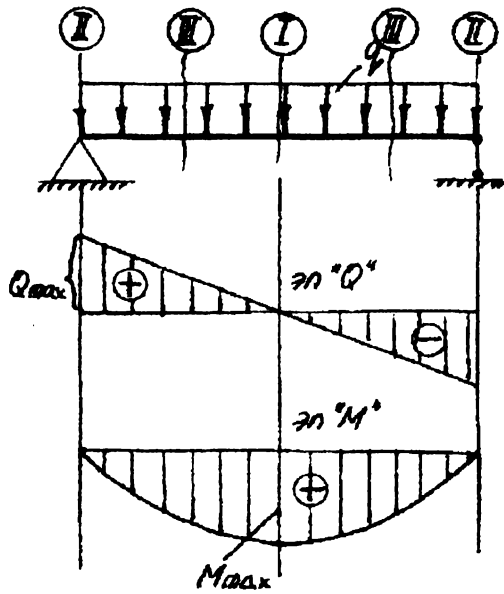
### ПОЛНАЯ ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ БАЛОК ПРИ ПЛОСКОПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ.

Рассмотрим этот вопрос на общем примере.

Проверка по максимальным нормальным и касательным напряжениям

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_{отс. max}}{J_{max} b} \leq [\tau]$$



сечен.

$$I \left\{ \begin{aligned} \sigma_{max1} &= \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma] \\ \tau_1 &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$II \left\{ \begin{aligned} \sigma_{II} &= \frac{M}{W} = 0 \\ \tau_{II} &= \frac{Q_{max} \cdot S_{omc}}{Jb} = max \end{aligned} \right.$$

Проверка по главным напряжениям.

$$III \left\{ \begin{aligned} Q_{\text{большое}} \sigma_1, \sigma_2 &= \frac{\sigma_d + \sigma_R}{2} \pm \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\sigma_d - \sigma_R}{2}\right)^2} \\ &\leftarrow M_{\text{большое}} \end{aligned} \right.$$

Рис. 69

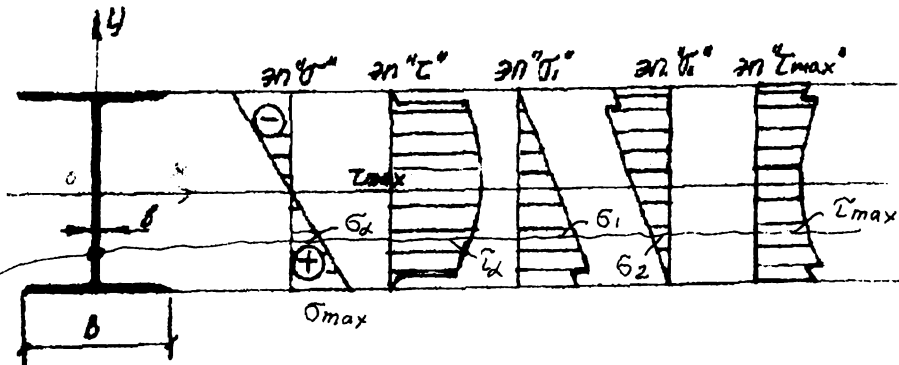
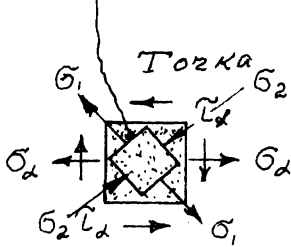


Рис. 70



$$\sigma_1 \left\{ \begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{\sigma_d}{2} \pm \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\sigma_d}{2}\right)^2} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_d &= \frac{M}{J} Y \\ \tau &= \frac{Q \cdot S_{omc}}{Jb} \end{aligned} \right.$$

$$H.C. = |\sigma_1| = |\sigma_2| = |\tau_{max}| = \frac{Q \cdot S_{omc}}{Jb}$$

$$\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha = l\tau_{max}$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = l\tau_{max}$$

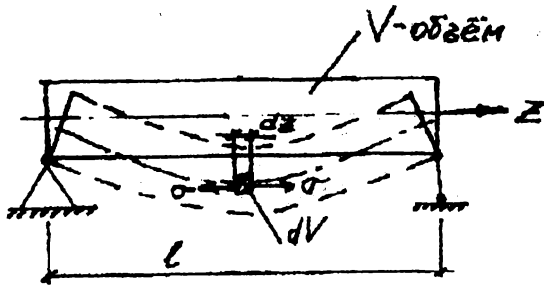
Балки прямоугольного и круглого сечения достаточно проверить на прочность по max нормальным и касательным напряжениям.

Балку двутаврового, трубчатого, таврового сечения кроме проверки по  $\sigma_{max}$ ,  $\tau_{max}$ , необходимо на переходах от одной ширины к другой ширине производить проверку по главным напряжениям (теориям прочности).

При этом, если max  $M$  и  $Q$  лежат не в одном сечении, то в этом случае сечение для проверки прочности выбирается примерно там, где  $M$  и  $Q$  достаточно велики.



## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ УПРУГОЙ ЭНЕРГИИ (РАБОТЫ ДЕФОРМАЦИИ) БАЛОК.



$A$  — (работа изгиба балки) =  $U$  (потенциальная упругая энергия)

$$dU = dA = dU_{(\sigma)} + dU_{(\tau)}$$

Рис. 71

$$U_{(\sigma)} = \frac{\sigma^2}{2E}; \quad U_{(\tau)} = \frac{\tau^2}{2G}$$

$$\sigma = \frac{M}{J} Y; \quad \tau = \frac{Q \cdot S_{omc}}{Jb}$$

$$dU = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau^2}{2G};$$

$$dU = \frac{M^2 \cdot Y^2}{2J^2 \cdot E} dV + \frac{Q^2 \cdot S_{omc}^2}{J^2 \cdot b^2} \cdot \frac{1}{2G} dV;$$

$$U = \iint_{eA} \frac{M^2}{J^2} \cdot \frac{1}{2E} Y^2 dZ dA + \iint_{eA} \frac{Q^2 \cdot S^2}{J^2 \cdot b^2} \cdot \frac{1}{2G} dZ dA =$$

$$= \frac{1}{2EJ} \int_e M^2 dZ + \frac{K}{2GA} \int_e Q^2 dZ$$

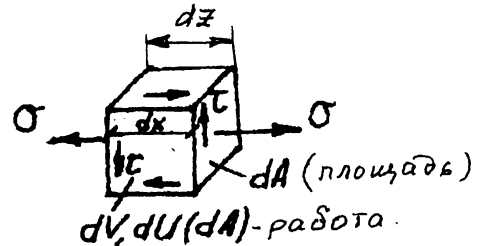


Рис. 72

$$dV = dA \cdot dz - \text{объем элем.}$$

(обозначим  $K = \int_A \frac{S_{omc}^2 \cdot A}{J^2 \cdot b^2} dA$ )

$$U = \frac{1}{2EJ} \int_c M^2 dZ + \frac{K}{2GA} \int_c Q^2 dZ$$

Выражает полную потенциальную энергию упругой деформации балки.

$EJ$  - жесткость при изгибе

$GA$  - жесткость при сдвиге

$M$  - изгибающий момент

$Q$  - перерезывающая сила

В длинных балках  $Q$  и  $M$  соотносятся между собой  $Q \lll M$ , тогда второе слагаемое можно не учитывать в силу его малости.

$$U = \frac{1}{2EJ} \int_c M^2 dZ$$

### ТРАЕКТОРИИ ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ БАЛОК.

Под траекторией главных напряжений подразумевают линию в объеме балки, касательная к которой всегда совпадает с направлением главного напряжения.

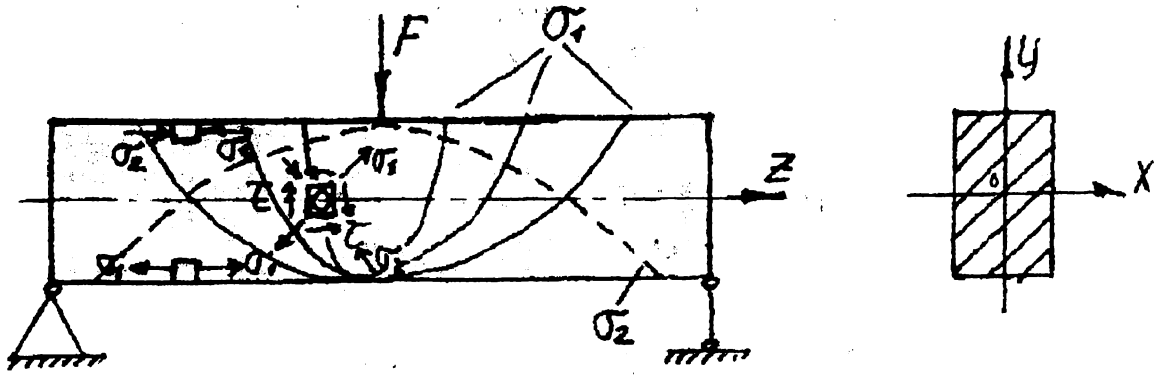


Рис. 73

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} \pm \sqrt{4\tau^2 + \left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2}$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_\alpha}{2} \pm \sqrt{4\tau + \left(\frac{\sigma_\alpha}{2}\right)^2}$$

$\sigma_1, \sigma_2$  — главные напряжения при изгибе

$$\sigma_\beta = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta} \quad \boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_\alpha}}$$

Железобетонные балки хорошо сопротивляются сжимающим напряжениям и плохо растягивающим. Трещины в них (разрушение) возникают от  $\sigma_1$  (главное растягивающее напряжение). Для предотвращения возникновения трещин в балках из бетонных хрупких материалов используют упрочняющую арматуру, по траекториям главных растягивающих направлений.

Идеальная постановка арматуры по траекториям сложна и ее упрощают, как показано на рис. 74

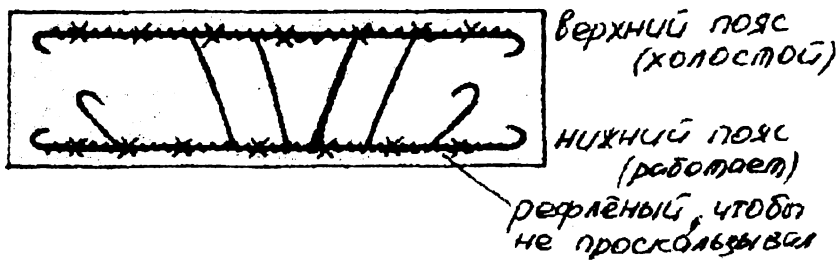


Рис. 74

## УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ БАЛКИ (ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗРУШАЮЩИХ НАГРУЗОК).

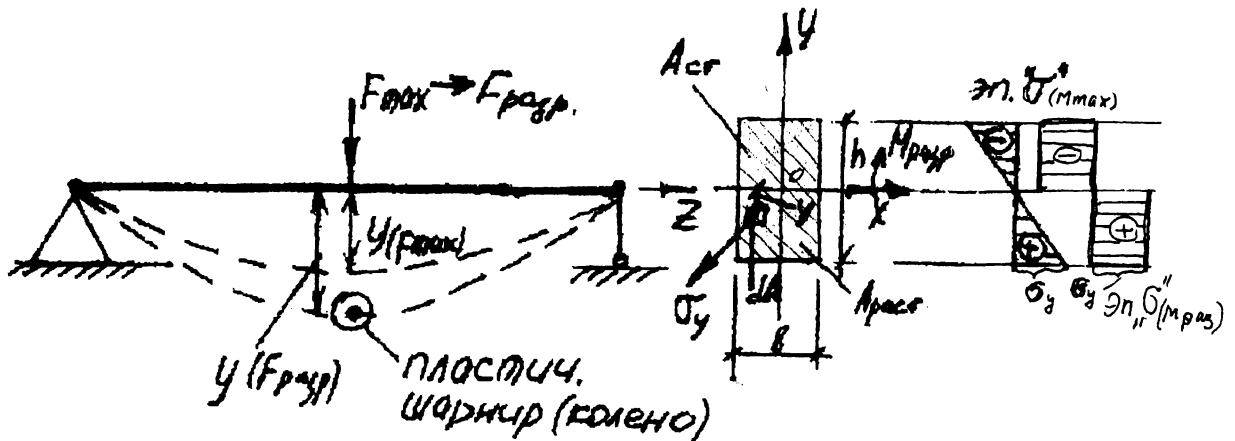


Рис. 75

Разрушение балки из пластичного материала (из мягкой стали) произойдет когда появится остаточная деформация, т.е. материал достигнет предела текучести.

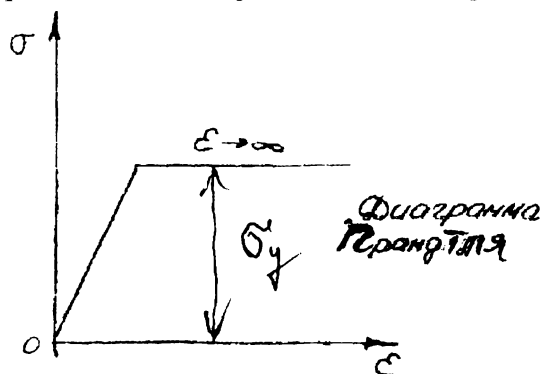


Рис. 76

$$M_{раз} = \int_{A_{раст}} \sigma_y \cdot Y \cdot dA + \int_{A_{сж}} \sigma_y \cdot Y \cdot dA = \sigma_y \left( \int_{A_{раст}} Y dA + \int_{A_{сж}} Y dA \right) = \sigma_y (S_{раст} + S_{сж}) = \sigma_y W_{раз}$$

$$W_{раз} = W_{ни} = S_{раст} + S_{сж} = \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} + \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{4}$$

$$M_{раз} = W_{раз} \cdot \sigma_y = \frac{F_{раз} \cdot l}{4}$$

$$M_{max} = W_x \cdot \sigma_y = \frac{F_{max} \cdot l}{4}$$

$$\frac{M_{раз}}{M_{max}} = \frac{W_{раз} \cdot \sigma_y}{W_x \cdot \sigma_y} = \frac{bh^2/4}{4bh^2/4} = 1,5$$

$$M_{раз} = 1,5 M_{max}$$

$$F_{раз} = 1,5 F_{max}$$

### ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В БАЛКАХ.

(общие понятия)

Перемещения в балках могут быть линейными и угловыми. Они определяются для оценки жесткости.

По линейным перемещениям:

$$y_{раз} \leq [y]_{допус} = \frac{l}{300 \div 400}$$

По угловым перемещениям:  $\Theta_{расч} \leq [\Theta]$

$\left. \begin{aligned} y_{расч} &\leq [y] \\ \Theta_{расч} &\leq [\Theta] \end{aligned} \right\}$  Допускаемые перемещения.

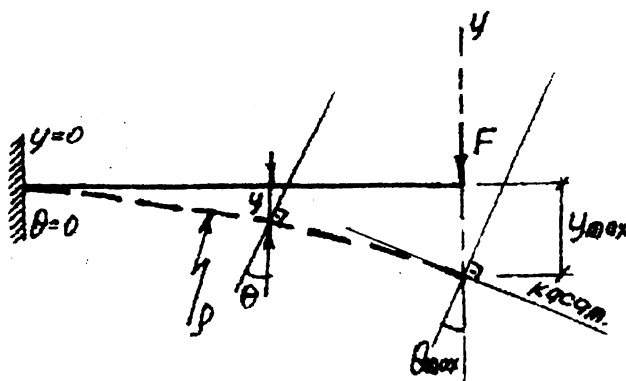


Рис. 77

$$\frac{l}{\rho} = \frac{M}{EJ}$$

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{dy}{dz} \quad \Theta = y'$$

### СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗОГНУТОЙ ОСИ БАЛКИ (ИЗОГНУТОЙ ОСИ = УПРУГОЙ ЛИНИИ).

Из сопротивления материалов известно  $\frac{l}{\rho} = \frac{M}{EJ}$

Из высшей математики известно, что кривизна любой кривой выражается:

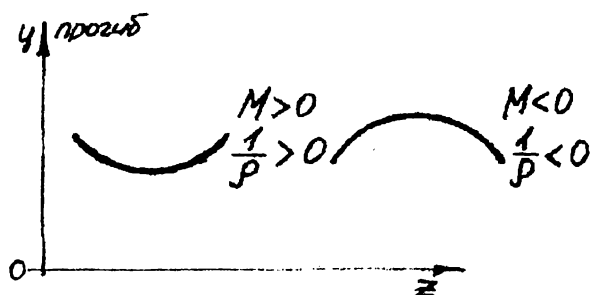
$$\frac{l}{\rho} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Учитывая равенство левых частей приравняем правые:

$$\frac{M}{EJ} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Полученная формула есть полное дифференциальное уравнение упругой линии балки (универсальное). Решение его представляет большие практические трудности. Для его упрощения знаменатель можно считать  $\approx 1$  из-за малой величины  $y'$  по сравнению с единицей.

$\frac{M}{EJ} = y''; \quad y'' EJ = M$  приближенное дифференциальное уравнение упругой линии



$$y'' EJ = M$$

Рис. 78 а

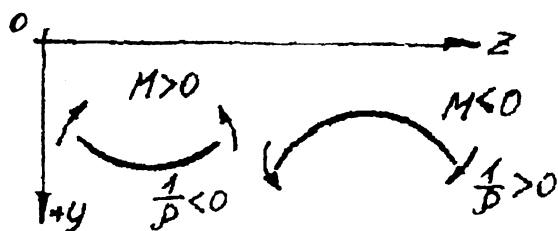


Рис. 78 б

## МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОГИБОВ И УГЛОВ ПОВОРОТА БАЛОК ПУТЕМ НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ.

$$y'' EJ = -M$$

Интегрирование дифференциального уравнения:

$$y' EJ = \Theta EJ = - \int M dz + C$$

$$y EJ = \int dz \int M dz + C_z + D$$

$C, D$  -- постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

Пример:

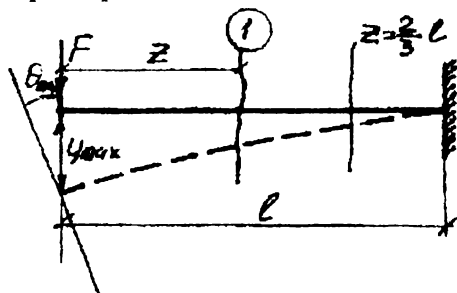


Рис. 79

$$\left. \begin{aligned} MZ &= -FZ \\ y'' EJ &= FZ \\ y' EJ &= F \frac{Z^2}{2} + C \\ y EJ &= F \frac{Z^3}{6} + C_z + D \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Z=l; \Theta=0; y=0 \\ 0 \cdot EJ &= \frac{Fl^3}{2} + C \\ C &= \frac{Fl^2}{2} \end{aligned}$$

$$\Theta EJ = F \frac{l^3}{6} - F \frac{l^2}{2} \cdot l + D$$

$$D = \frac{Fl^3}{2} - \frac{Fl^3}{6} = \frac{Fl^3}{3}$$

$$\Theta EJ = F \frac{Z^2}{2} - F \frac{l^2}{2}; \quad \Theta_{max} = \frac{Fl^2}{2EJ}$$

$$y EJ = F \frac{Z^3}{6} - F \frac{l^2}{2} Z + F \frac{l^3}{3}$$

$$y_{max} = \frac{Fl^3}{3EJ}$$

Метод непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений удобен для простых балок, когда количество силовых участков мало (1-2).

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОГИБОВ И УГЛОВ ПОВОРОТА МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ (ВЫВОД УНИВЕРСАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ УПРУГОЙ ЛИНИИ БАЛКИ).

Если дифференциальное уравнение упругой линии балки  $y'' EJ = -M$  интегрировать с соблюдением следующих формальностей:

- 1) начало координат выбирать на левом конце балки;
- 2) выражение в скобках интегрировать без раскрытия скобок;
- 3) сосредоточенные моменты умножать на плечо в нулевой степени;

4) распределенную нагрузку, не доходящую до правого конца балки, продлевать до конца и ликвидировать противоположными, то количество постоянных интегрирования для балок любой сложности можно свести до двух:  $y_0$  и  $\Theta_0$ .

Рассмотрим пример (рис.80):

[1]  $M_1 = 0$   
 $y_1' EJ = \Theta_1 EJ = C_1$   
 $y_1 EJ = C_1 Z_1 + D_1$

[2]  $M_2 = -m(Z_2 - a)^0$   
 $y_2'' EJ = m(Z_2 - a)^0$   
 $y_2' EJ = \Theta_2 EJ = m(Z_2 - a) + C_2$   
 $y_2 EJ = \frac{m(Z_2 - a)^2}{2} + C_2 Z_2 + D_2$

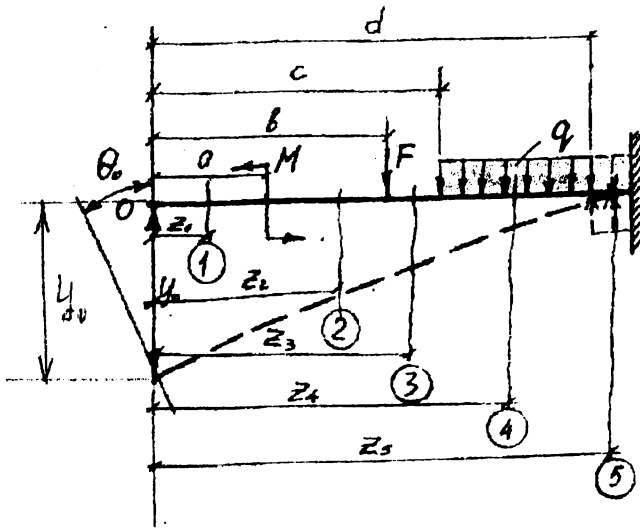


Рис. 80

[3]  $M_3 = -m(Z_3 - a)^0 - F(Z_3 - b)$   
 $y_3'' EJ = m(Z_3 - a)^0 + F(Z_3 - b)$   
 $y_3' EJ = \Theta_3 EJ = m(Z_3 - a) + F \frac{(Z_3 - b)^2}{2} + C_3$   
 $y_3 EJ = \frac{m(Z_3 - a)^2}{2} + F \frac{(Z_3 - b)^3}{6} + C_3 Z_3 + D_3$

[4]  $M_4 = -m(Z_4 - a)^0 - F(Z_4 - b) - q \frac{(Z_4 - c)^2}{2}$   
 $y_4'' EJ = m(Z_4 - a)^0 + F(Z_4 - b) + q \frac{(Z_4 - c)^2}{2}$   
 $y_4' EJ = \Theta_4 EJ = m(Z_4 - a) + F \frac{(Z_4 - b)^2}{2} + q \frac{(Z_4 - c)^3}{6} + C_4$   
 $y_4 EJ = \frac{m(Z_4 - a)^2}{2} + F \frac{(Z_4 - b)^3}{6} + q \frac{(Z_4 - c)^4}{24} + C_4 Z_4 + D_4$

На пятом участке вычисления производятся аналогично.

На границах участков

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_2 & C_1 &= C_2 & D_1 &= D_2 \\ Z_2 &= Z_3 & C_2 &= C_3 & D_2 &= D_3 \\ Z_3 &= Z_4 & C_3 &= C_4 & D_3 &= D_4 \\ Z_4 &= Z_5 & C_4 &= C_5 & D_4 &= D_5 \\ Z_5 &= Z_1 & C_5 &= C_1 & D_5 &= D_1 \\ C_1 &= C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = \dots = C_1 = \Theta_0 EJ \\ D_1 &= D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = \dots = D_1 = y_0 EJ \\ Z_1 &= 0 ; & D_1 &= y_0 EJ \\ & & C_1 &= \Theta_0 EJ \end{aligned}$$

Запишем универсальные уравнения упругой линии балки.

$$\Theta_{(z)} = \frac{1}{EJ} \left[ \Theta_0 EJ + m \frac{Z}{1!} + F \frac{Z^2}{2!} + q \frac{Z^3}{3!} + \dots \right]$$

$$y_{(z)} = \frac{1}{EJ} \left[ y_0 EJ + \Theta_0 EJ \frac{Z}{1!} + m \frac{Z^2}{2!} + F \frac{Z^3}{3!} + q \frac{Z^4}{4!} + \dots \right]$$

где  $\Theta_z, y_z$  - угол поворота и прогиб в сечении  $Z$ ;  
 $EJ$  - жесткость при изгибе ;  
 $\Theta_0, y_0$  - начальные параметры или по другому ;  
 $y_0$  - прогиб в начале координат ;  
 $\Theta_0$  - угол поворота в начале координат ;  
 $m, F, q$  - внешние нагрузки ;  
 $Z$  - расстояние от соответствующего силового фактора, до сечения, где определяется прогиб или угол поворота.

Например,

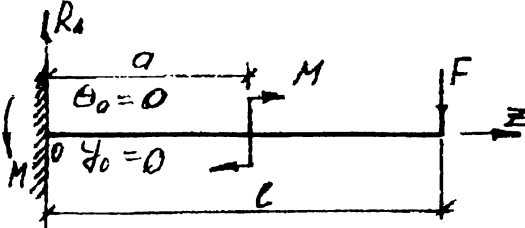


Рис. 81

$$\Theta_{max} = \left[ m_a \frac{l}{1!} - R_A \frac{l^2}{2!} - m \frac{(l-a)}{1!} \right] \frac{1}{EJ}$$

$$y_{max} = \left[ m_a \frac{l^2}{2!} - R_A \frac{l^3}{3!} - m \frac{(l-a)^2}{2!} \right] \frac{1}{EJ}$$

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ БАЛОК ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ (МЕТОД ФИКТИВНЫХ НАГРУЗОК).

Продифференцируем несколько раз прогиб (стрелу прогиба):

$yEJ$  — прогиб

$y' EJ = \Theta EJ$  — угол поворота

$y'' EJ = -M$  — изгибающий момент

$y''' EJ = -M' = -Q$

$y^{IV} EJ = -M'' = -Q' = -q$

$$\frac{dM}{dZ} = \text{tg}\alpha = 0$$

$$\frac{dQ}{dZ} = q$$

Аналогия Мора позволяет прогиб в любом сечении записать

$$y_z = \frac{1}{EJ} (\overline{M}) \quad \text{и} \quad Q_z = \frac{1}{EJ} (\overline{Q}),$$

$\overline{M}$  — фиктивный изгибающий момент

$\overline{Q}$  — фиктивная перерезывающая сила

Эти величины находят следующим образом. Для определения фиктивного изгибающего момента  $\overline{M}$  и фиктивной перерезывающей силы  $\overline{Q}$  в произвольном сечении балки необходимо:

1. Построить эпюр момента  $\overline{M}$  для заданной балки ;
2. Принять эпюр момента за интенсивность фиктивной распределенной нагрузки, которую следует приложить к фиктивной балке, заменив ею действительную балку ;
3. Фиктивной балке определить фиктивные реакции в фиктивных заделках ;
4. Вычисляем в произвольном сечении фиктивной балки  $\overline{M}$  и  $\overline{Q}$  и по формулам вычисляем прогиб и угол поворота.

Например:

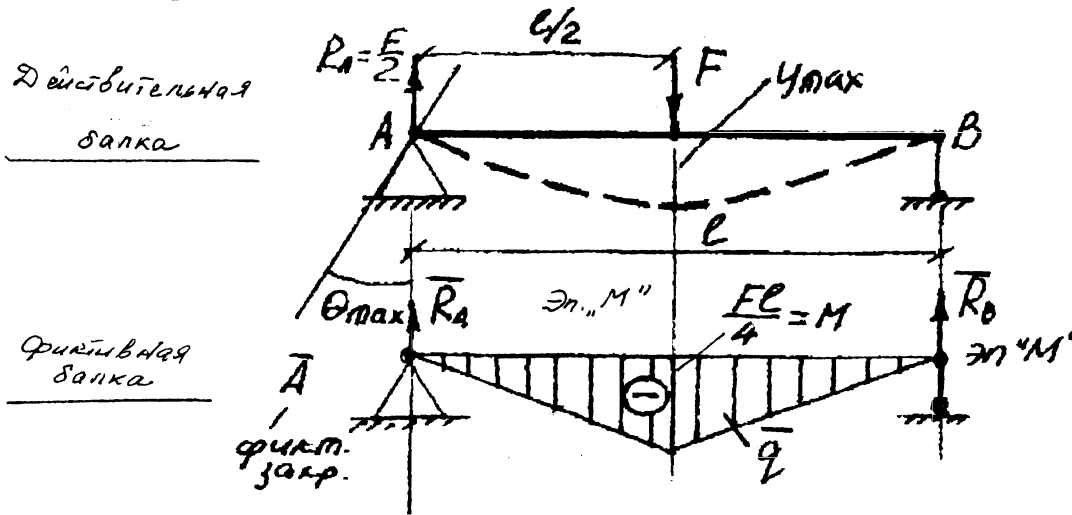


Рис. 82

$$\bar{R}_A = \bar{R}_B = \frac{Fl}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{Fl^2}{16} = \bar{Q}_{A(B)}$$

$$\Theta_{max} = \frac{Fl^2}{16EJ} \text{ рад}$$

$$u_{max} = \frac{1}{EJ} \left[ -\bar{R}_A \cdot \frac{l}{2} + \bar{A} \cdot \frac{l}{6} \right] = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{Fl^2 l}{16 \cdot 2} + \frac{Fl^2 l}{16 \cdot 6} \right] = -\frac{Fl^3}{48EJ}$$

Порядок выбора фиктивных балок следующий: действительная балка заменяется фиктивной, как показано на рис. 83

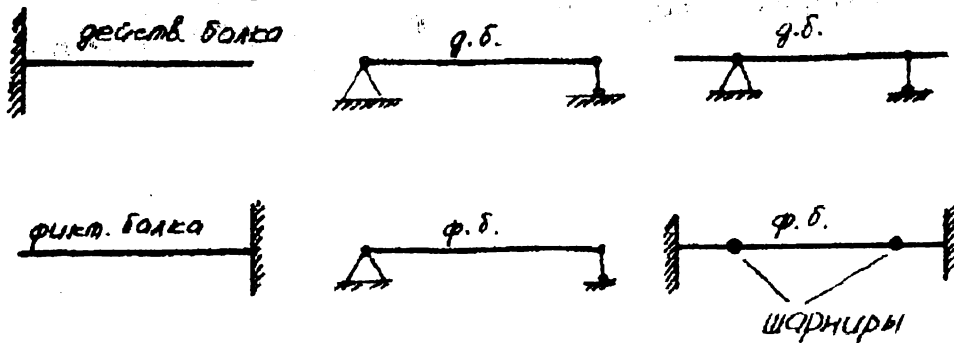


Рис. 83

Метод фиктивных нагрузок удобно применять в случае простых балок. Для балок сложного нагружения он неудобен.

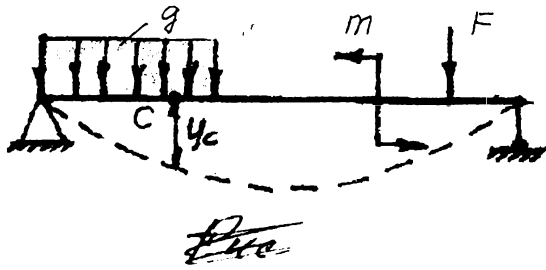
### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПО МЕТОДУ МОРА И ПРАВИЛУ ВЕРЕЩАГИНА (ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД).

Один из самых эффективных. Этот метод основан на том принципе, что не всегда нужно знать упругую линию балки. Часто достаточно определить прогиб в одном конкретном сечении. В этом случае удобно использовать энергетический метод.

Требуется определить  $u_C$ .

Рисуем точно такую же балку. Показываем точку С. В этой точке прикладываем силу, которую обозначают единицей. Называется эта сила единичной. Точке С сообщают прогиб такой же, как от всех приложенных внешних сил.





Из физики:  $A(\text{работа}) = U(\text{энергия}) = 1 \cdot y_c$

С другой стороны  $A = U = \frac{1}{2EJ} \int_0^l M^2 dz$ ;

$$y_c = \frac{1}{2EJ} \int_0^l M^2 dz \quad \text{— Интеграл Моора.}$$

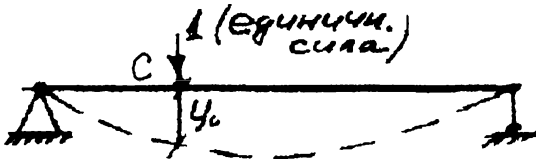


Рис. 84

Как просто решать этот интеграл? Он сводится к правилу Верещагина.

$$\int_0^l M^2 dz = A_{эм} \cdot y_{ц.т.э.с.}$$

$A_{эм}$  — площадь эпюры моментов (см. рис. 856).

$y_{ц.т.э.с.}$  — координата центра тяжести эпюры моментов единичной силы (см. рис. 85)

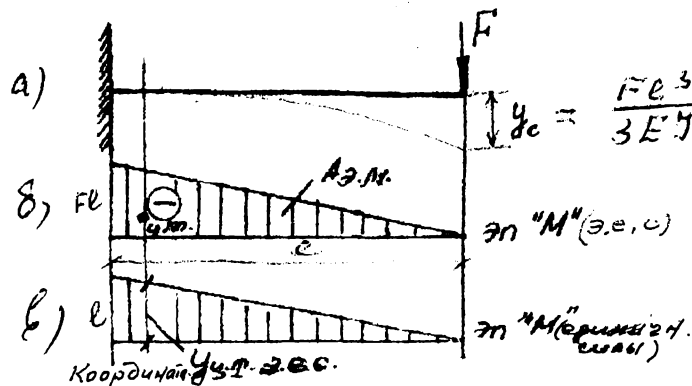


Рис. 85

### СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМАЯ БАЛКА.

Общие понятия.

Статически неопределимой балкой считается такая балка, у которой количество неизвестных реакций связи превышает количество возможных уравнений статики.

Реакции, превышающие число уравнений статики называют "лишними".

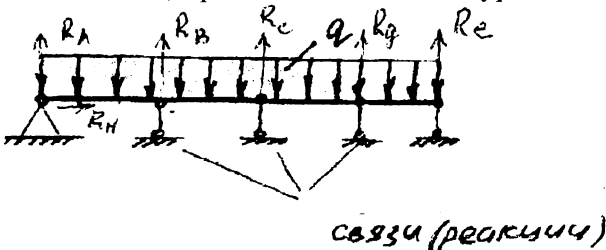


Рис. 86

Промежуточные опоры уменьшают прогиб, но делают балку статически неопределимой.

Статическая неопределимость балок раскрывается так же, как и статическая неопределимость стержневых систем. Так, например, нужно соблюдать следующий порядок решения статически неопределимых балок:

1. Составляем возможные уравнения равновесия статики;
2. Определяем количество реакций лишних связей (степень статической неопределимости),

3. Выбираем основную систему (план деформаций).
4. Составляем уравнение совместности деформаций.
5. Уравнение совместности деформаций выражают через силы и определяют неизвестные реакции связи.
6. Определив „лишние“ реакции связи подставляют в уравнение равновесия и находят <sup>оставшиеся</sup> неизвестные реакции связи.

### РАСКРЫТИЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ НА 2-Х ОПОРАХ.

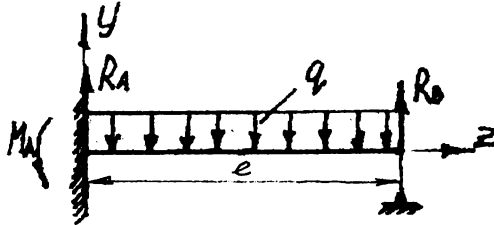


Рис. 87

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \sum y = 0 \\
 2) \quad & \sum Z = 0; \quad 0 = 0 \\
 3) \quad & \sum m = 0 \\
 & \hline
 & M_A - ? \quad R_A - ? \quad R_B - ?
 \end{aligned}$$

Задача один раз статически неопределима.

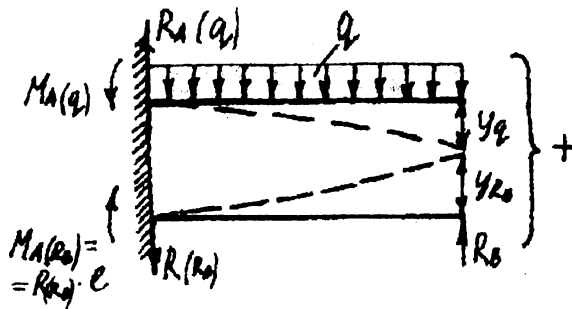


Рис. 88

$Y_d = Y_{RB}$  — уравнение совместной деформации

Отбросим правую опору и заменим ее реакцией. Прогибы от внешних сил и реакций будут одинаковы по величине, но противоположны по знаку.

$$Y_{(q)} = f(q)$$

$$Y_{(RB)} = -f(R_B)$$

$$Y = \frac{1}{EJ} \left[ Y_0 EJ + \Theta_0 EJZ + m \frac{Z^2}{2!} + F \frac{Z^3}{3!} + m \frac{Z^4}{4!} + \dots \right]; \text{ Метод начальных параметров.}$$

$$Y_{(q)} = \frac{1}{EJ} \left( M_{A(q)} \frac{l^2}{2!} - R_{A(q)} \frac{l^3}{3!} + q \frac{l^4}{4!} \right),$$

$$Y_{(RB)} = \frac{1}{EJ} \left( -R_{(RB)} \cdot l \frac{l^2}{2!} + R_{(RB)} \frac{l^3}{3!} \right),$$

$$M_{A(q)} \frac{l^2}{2!} - R_{A(q)} \frac{l^3}{3!} + q \frac{l^4}{4!} = -R_{(RB)} \cdot l \frac{l^2}{2!} + R_{(RB)} \frac{l^3}{3!}$$

Отсюда выразим  $R_{(RB)} = R_B$ .

$$\sum Y = R_A - ql + R_B = 0,$$

Вспользуемся

$$\sum m_A = M_A - q \frac{l^2}{2} + R_B \cdot l = 0$$

Можно решить по другому — отбросить левую заделку, а не опору.

## НЕРАЗРЕЗНЫЕ, СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ (МНОГОПРОЛЕТНЫЕ БАЛКИ).

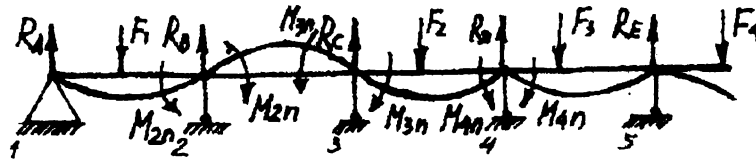


Рис. 90

Под действием сил многопролетная балка будет иметь **плавную** упругую линию, как показано на рис. 90

$$\sum y = 0$$

$$\sum M = 0$$

---


$$R_A - ?, R_B - ?, R_C - ?, R_D - ?, R_E - ? \dots$$

Третья степень статической неопределенности.

Порядок решения следующий:

1. Составляют уравнения равновесия.

2. Разрезают балку на опорах (мысленно) и применяют ранее записанные пункты.

В связи с плавностью упругой линии углы  $\Theta$  справа и слева от опоры относительно сечения должны быть всегда одинаковыми.

$$\Theta_{2л} = \Theta_{2п}; \quad \Theta_{3л} = \Theta_{3п}; \quad \Theta_{4л} = \Theta_{4п} \dots \quad \Theta_{nл} = \Theta_{nп} \quad \text{углы}$$

$$\Theta_{2л} = f(M_{2л}); \quad \Theta_{2п} = f(M_{2п}); \quad \Theta_{3л} = f(M_{3л}) \dots \quad \text{моменты}$$

т.к. левые и правые части равны, то

$$f(M_{2л}) = f(M_{2п}); \quad f(M_{3л}) = f(M_{3п})$$

Это позволяет составить необходимое количество уравнений для разрешения статической неопределенности.

### БАЛКИ, ЛЕЖАЩИЕ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ.

(Общие понятия)

К балкам лежащим на упругом основании относятся: фундаменты зданий и сооружений, лежащих на скальных или грунтовых основаниях, *плотины, шпалы и т.д.*

Балки лежащие на упругом основании относятся к статически неопределимым балкам, т.к. с помощью уравнений равновесия невозможно определить интенсивность давления основания на балку или балки на основание, как показано на рис. 91

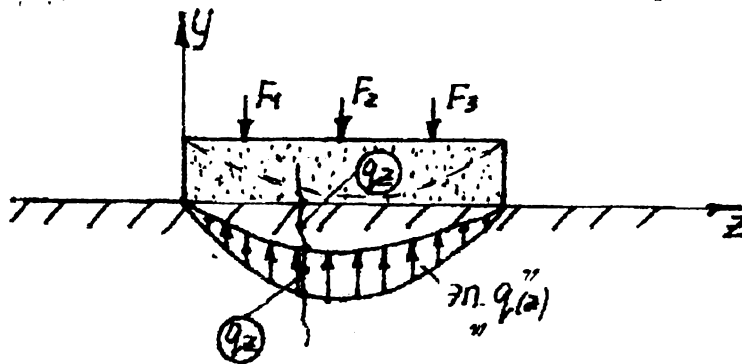


Рис. 91

$$\sum y = 0 \quad F_1 + F_2 + F_3 - R_{осн} = 0$$

$$\sum m = 0 \quad R_{осн} = F_1 + F_2 + F_3$$

---


$$R_{осн} - ? \quad q_z \text{ — определить нельзя.}$$

В 1801г. Фусс Н.И. (русский ученый) и немецкий инженер Винклер предложили решение:

$$q_z = y_z \cdot K \text{ — Винклеровская гипотеза}$$

$K$  - коэффициент постели (табличная величина).

Воспользуемся дифференциальным уравнением изогнутой оси балки.

$$y'' EJ = -M;$$

$$y''' EJ = -Q;$$

$$y^{IV} EJ = -q \text{ (интенсивность распределения нагрузки).}$$

$$y^{IV} EJ = -yK \text{ — дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, лежащей на упругом основании.}$$

Преобразуем его:

$$y^{IV} + \frac{K}{EJ} y = 0; \quad \frac{K}{EJ} = \beta^4$$

$$y^{IV} + \beta^4 y = 0 \text{ Интеграл этого дифуравнения.}$$

$$y_z = e^{\beta z} (A \sin \beta z + B \cos \beta z) + e^{-\beta z} (C \sin \beta z + D \cos \beta z);$$

$y_z$  - прогиб в произвольном сечении балки, лежащей на упругом основании

$e$  - число  $e$

$\beta$  - постоянная

$K$  - коэффициент постели

$Z$  - координата, в которой определяется прогиб.

$A, B, C, D$  - постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Определив  $y_z$  в любом сечении можно определить интенсивность давления балки на основание, а следовательно рассчитать ее на прочность и жесткость.

### **СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ.**

(общие сведения)

Под сложным сопротивлением понимают такую деформацию конструктивных элементов, которая вызывается несколькими простыми деформациями: изгибом, сжатием, сдвигом, растяжением, кручением и т.д.

Другими словами, возможно множество сочетаний простых деформаций при сложных деформациях. Все задачи расчета на прочность и жесткость в подобных конструктивных элементах производятся по одной методике:

1. Силы вызывающие сложные деформации (сложное сопротивление) раскладываются на составляющие, которые вызывают простые деформации;
2. От составляющих сил находят напряжения в нужных сечениях или точках конструктивного элемента, и чтобы получить результирующие напряжения их суммируют.

В сопротивлении материалов рассматриваются следующие виды сложного сопротивления: косой изгиб, внецентренное растяжение и сжатие, изгиб с кручением и др.

### **КОСОЙ ИЗГИБ.**

Косым изгибом называется такая деформация, когда изгибающие моменты бруса не совпадают с силовой плоскостью, проходящей через главные оси инерции  $X, Y$ .

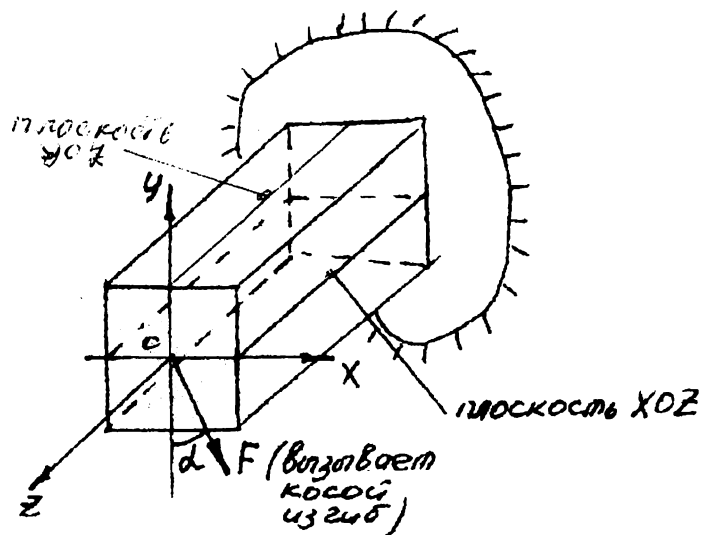


Рис. 92

Перемычки, которые лежат под углом

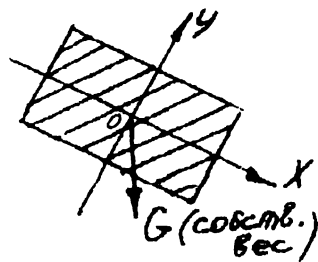


Рис. 93

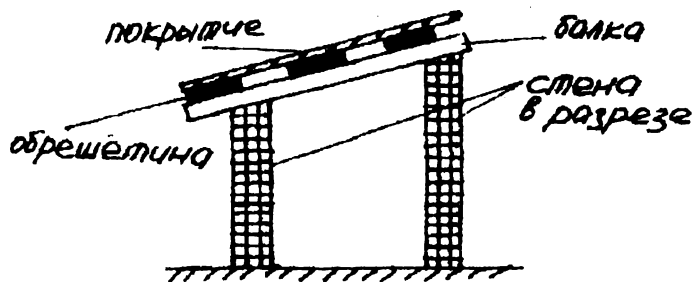


Рис. 94

Обрешетка работает на косоу изгиб

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ.

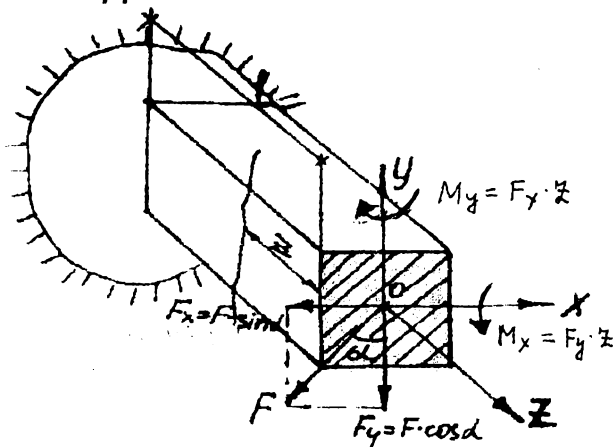


Рис. 95

Пусть балка будет нагружена — F сила вызывает косоу изгиб, т.к. она не совпадает ни с осью Y, ни с осью X в сечении.

Спроектируем F на ось X и Y — получим два простых плоскопоперечных изгиба.

Если возьмем сечение по оси Z, то в нем будут действовать 2 момента от силы  $F_y$  и силы  $F_x$ , как показано на рис.96.

Тогда нормальное напряжение выразится:

$$\sigma = \pm \sigma_{(My)} \pm \sigma_{(Mx)} = \pm \frac{M_y}{J_y} x \pm \frac{M_x}{J_x} y$$

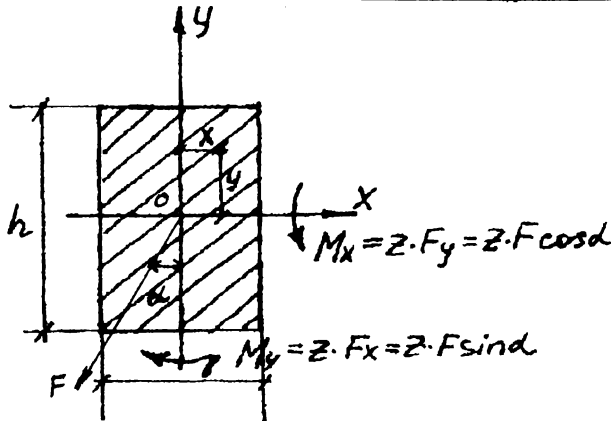


Рис. 96

$M_x, M_y$  - составные изгибающие моменты,

$J_x, J_y$  - главные моменты инерции сечения;

$x, y$  - координаты точек, в которых определяется напряжение.

Преобразуем формулу:  $\sigma_{max} = \pm \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_x}{W_x}$  подставив  $x_{max}$  и  $y_{max}$ .

Полученная формула позволяет написать условие прочности для косоуго изгиба:

$$\sigma_{max} = \pm \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]$$

Полученное условие прочности позволяет:

1. Проверять прочность балок при косом изгибе  
 $\sigma_{max} < [\sigma]$  — балка удовлетворяет условиям прочности  
 $\sigma_{max} > [\sigma]$  — балка не удовлетворяет условиям прочности
2. Можно подобрать сечение балки

Задавшись  $\frac{h}{b} = K$

$$\text{или } K = \frac{W_x}{W_y}; \quad \sigma = \frac{l}{W_x} (M_y K + M_x) \leq [\sigma]$$

$$W_x \geq \frac{M_y K + M_x}{[\sigma]}$$

3. Можно определить грузоподъемность балки

$$\frac{Z \cdot F \sin \alpha}{W_y} + \frac{Z \cdot F \cos \alpha}{W_x} \leq [\sigma], \quad Z = l$$

$$F \leq \frac{[\sigma]}{l \cdot \left( \frac{\sin \alpha}{W_y} + \frac{\cos \alpha}{W_x} \right)}$$

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО СЛОЯ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ.

Нейтральным слоем или нейтральной линией называется такой слой в объеме, или такая линия в сечении, где напряжение  $\sigma = 0$ .

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = 0; \quad \frac{x}{y} = \operatorname{tg} \beta = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_y}{J_x} = \frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{Z \cdot F \sin \alpha}{Z \cdot F \cos \alpha}$$

$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{J_x}{J_y}$  - Формула определяет положение нейтрального слоя при косом изгибе.

$\beta$  - угол наклона нейтральной линии в сечении,

$\alpha$  - угол, под которым действуют силы, вызывающие косою изгиб.

$J_x, J_y$  - главные моменты инерции.

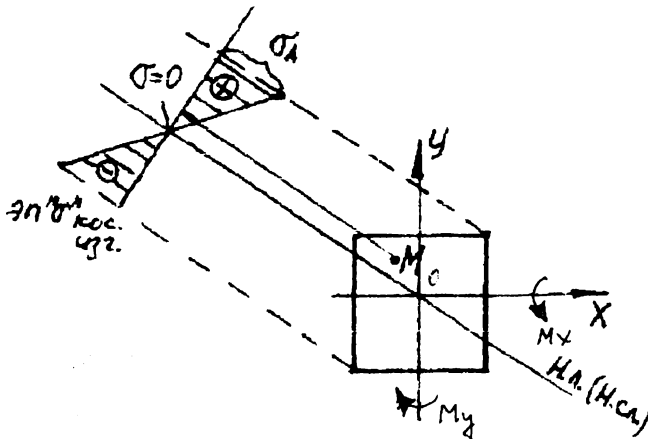


Рис. 97

Нейтральная линия при косом изгибе делит сечение балки на сжатую и растянутую зоны.

Нейтральная линия позволяет строить эпюру нормальных напряжений

По эпюре  $\sigma$  можно найти  $\sigma$  в любой точке сечения при косом изгибе (точка M рис. 97).

### ПРАВИЛА УЧЕТА ЗНАКОВ.

Знаки напряжений следует учитывать по деформациям. Например, см. рис. 98.

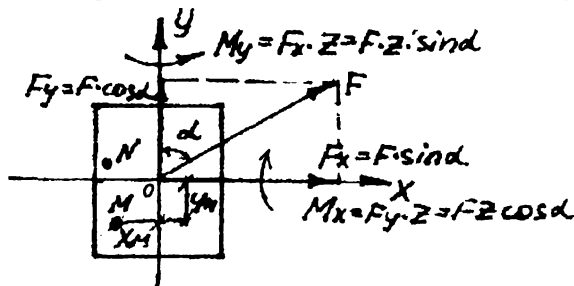


Рис. 98

$$\sigma_M = \frac{M_x}{J_x} y_M + \frac{M_y}{J_y} x_M$$

$$\sigma_N = -\frac{M_x}{J_x} y_N + \frac{M_y}{J_y} x_N$$

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОГИБОВ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ.

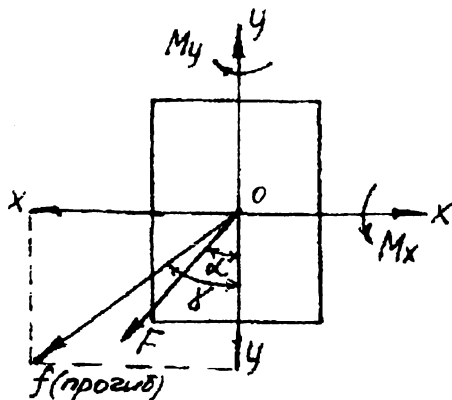


Рис. 99

При определении прогиба при косом изгибе ранее известными методами определяются прогибы по оси X и оси Y и геометрически складываются (см. рис. 99).

$$f = \sqrt{x^2 + y^2}$$

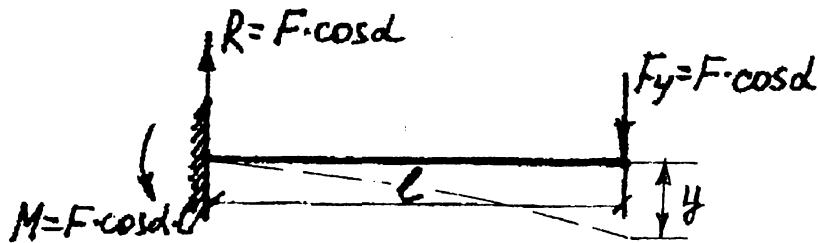


Рис. 100

Следовательно, прогиб  $y$  будет равен:  $y = -\frac{F \cos \alpha \cdot l^3}{6EJ} + \frac{F \cos \alpha \cdot l \cdot l^2}{2EJ} = \frac{Fl^3 \cos \alpha}{3EJ_x}$ ,

соответственно:  $x = \frac{Fl^3 \sin \alpha}{3EJ_y}$

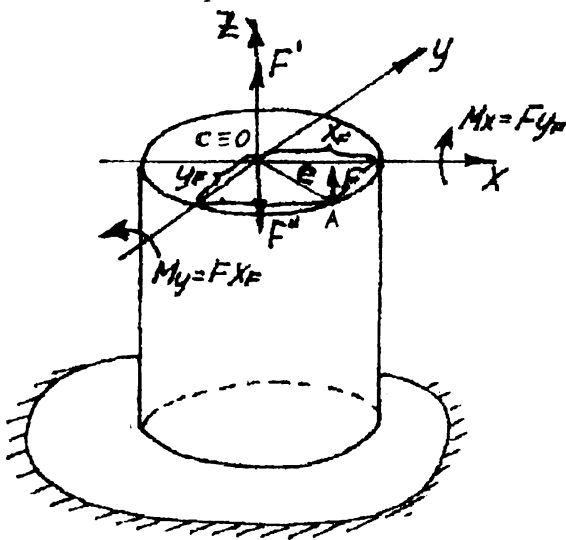
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{x}{y} = \frac{\frac{Fl^3 \sin \alpha}{3EJ_y}}{\frac{Fl^3 \cos \alpha}{3EJ_x}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{J_x}{J_y} = \operatorname{tg} \alpha \frac{J_x}{J_y}$$

Доказали, что в общем случае, когда  $J_x = J_y \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \gamma$ , тогда силовая плоскость и нейтральная линия будут перпендикулярны.

Если  $J_x \neq J_y; \operatorname{tg} \alpha \neq \operatorname{tg} \gamma \Rightarrow$  силовая плоскость и нейтральная линия не будут перпендикулярны.

### ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ, СЖАТИЕ.

**Общие сведения:** под **внецентренным растяжением** или **сжатием** понимают такую деформацию, когда растягивающая или сжимающая сила приложена со смещением относительно центра тяжести. Величина смещения силы относительно центра тяжести называется эксцентриситетом и обозначается  $e$ .



В практике строительства приложить нагрузку к колоннам, стойкам, опорам в центре тяжести практически невозможно.

Для расчета внецентренно нагруженных конструктивных элементов используют гипотезу о независимости действия сил, предварительно разложив внецентренную нагрузку на составляющие, вызывающие простые деформации.

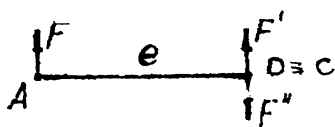


Рис. 101

Параллельный перенос силы  $F$  в тог. с

$F'$  - растягивающая или сжимающая сила, центральная или осевая.

Пара сил  $F'' - F = F''l - Fl = Fx_F + Fy_F = M$  ← чистый косой изгиб

← чистые изгибы



$Q$  косоугольного изгиба = 0

Выше изложенное показывает, что при внецентренном растяжении или сжатии возникает три простых деформации:

1. 2 чистых изгиба

$$M_x = Fy_F, \quad M_y = Fx_F$$


2. Центральное осевое растяжение (или сжатие)

$$|F'| = |F|$$

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ВНЕЦЕНТРОМ РАСТЯЖЕНИИ, СЖАТИИ.

В соответствии с составляющими внутренних сил

$$\sigma_{в.р.с.} = \pm \sigma_{(F)} \pm \sigma_{(M_x)} \pm \sigma_{(M_y)} = \pm \frac{F}{A} \pm \frac{M_x}{J_x} y \pm \frac{M_y}{J_y} x$$



« + » — растяжение,  
« - » — сжатие.

формула для любых расчетов при растяжении, сжатии.

$F$  - внецентренная нагрузка,

$A$  - площадь поперечного сечения,

$J_x, J_y$  - главные моменты инерции,

$M_x, M_y$  - изгибающие моменты относительно соответствующих осей,

$y, x$  - координаты точек сечения, в которых определяется напряжение.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ (НЕЙТРАЛЬНОГО СЛОЯ, НЕЙТРАЛЬНОЙ ОСИ).

Нейтральная линия (нейтральный слой, нейтральная ось) - это линия, на которой нормальное напряжение равно 0:  $\sigma = 0$

$$\sigma = \pm \frac{F}{A} \pm \frac{M_x}{J_x} y \pm \frac{M_y}{J_y} x = 0;$$

$$\pm \frac{F}{A} \pm \frac{Fy_F}{J_x} y \pm \frac{Fx_F}{J_y} x = 0;$$

$$-\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{Y_F \cdot Y}{\frac{J_x}{A}} + \frac{X_F \cdot X}{\frac{J_y}{A}} \right) = 0$$

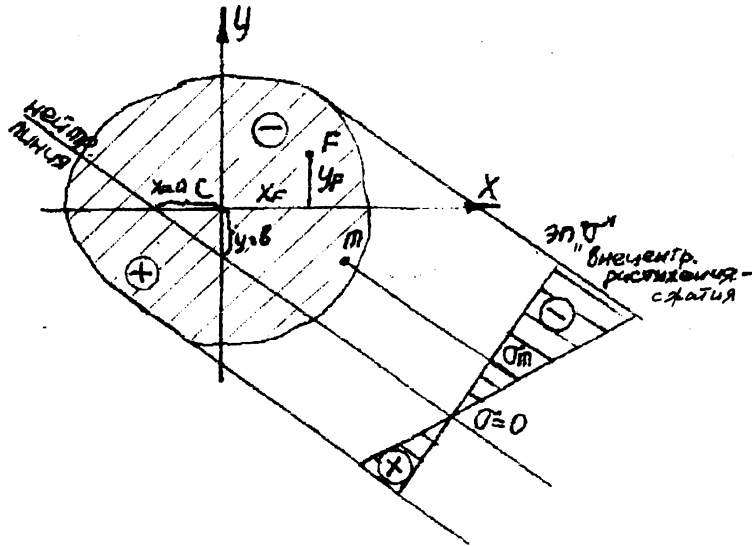
$$\frac{J_x}{A} = i_x^2, \quad \frac{J_y}{A} = i_y^2$$

$i_x^2, i_y^2$  — радиусы инерции.

Уравнение нейтральной линии в отрезках

$$1 + \frac{Y_F \cdot Y}{i_x^2} + \frac{X_F \cdot X}{i_y^2} = 0$$

сечение в.с. колонны



Нейтральная линия делит сечение на две зоны: растяжения "+" и сжатие "-". Выбираем точку  $m$ , находим и откладываем  $\sigma$  и строим эпюру.

- 1)  $y = 0$ ;  $x = ?$   $\sigma = 0$
- 2)  $x = 0$ ;  $y = ?$   $\sigma = 0$

Рис. 102

$$[1] \quad \frac{X_F \cdot X}{i_y^2} = -1$$

$$x = a = -\frac{i_y^2}{X_F}$$

$$[2] \quad \frac{Y_F \cdot Y}{i_y^2} = -1$$

$$y = b = -\frac{i_y^2}{Y_F}$$

Определение отрезков, отсекаемых нейтральной линией на координатных осях.

**СВОЙСТВА НЕЙТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ.**

1. Нейтральная линия всегда делит сечение на сжатую и растянутую зону (если она пересекает сечение).
2. Положение нейтральной линии не зависит от величины внецентренной нагрузки.
3. Нейтральная линия отсекает на координатных осях отрезки  $a$  и  $b$ , обратно пропорциональные координатам приложения сил.  
Отсюда следует: если сила приближается к центру тяжести, то нейтральная линия будет удаляться и наоборот.
4. Если точка приложения силы перемещается по прямой, пересекающейся с координатными осями, то нейтральная линия будет поворачиваться вокруг некоторой точки и наоборот.

$$F \leq \frac{[\sigma]}{I + \frac{y_F \cdot y_{max}}{J_X} + \frac{x_F \cdot x_{max}}{J_Y}}$$

$$F \leq \frac{[\sigma]}{A + \frac{y_F}{W_X} + \frac{x_F}{W_Y}}$$

$$F \leq A \frac{[\sigma]}{I + \frac{y_F \cdot y_{max}}{i_X^2} + \frac{x_F \cdot x_{max}}{i_Y^2}}$$

### ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ВНЕЦЕНТЕННОМ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ.

Знаки напряжений учитываются по деформациям и указываются на эпюрах, как показано на рис.104

Отрезки отсекаемые нейтральной линией напряжения вычисляются по соответствующим формулам и откладываются на соответствующих эпюрах, как показано на рис.104

$$\begin{cases} Y\sigma_0 = -\frac{i_X^2}{Y_F} \\ X\sigma_0 = -\frac{i_Y^2}{X_F} \end{cases}$$

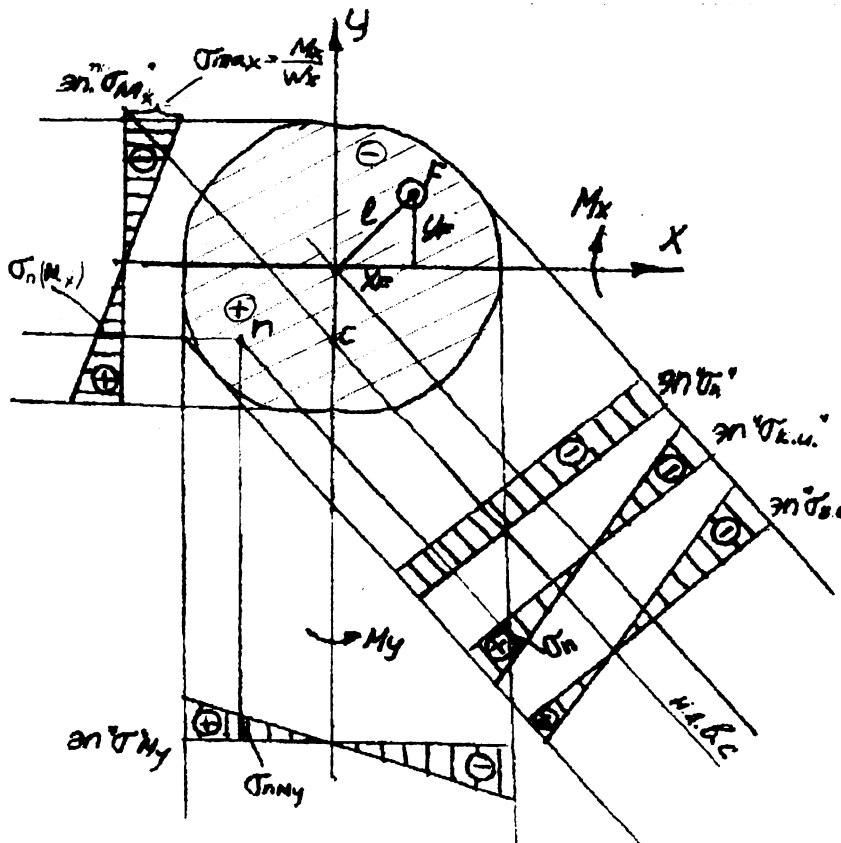


Рис. 104

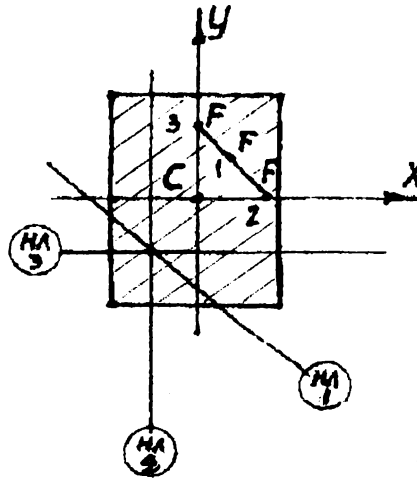


Рис. 103

**УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ ПРИ ВНЕЦЕНТРЕННОМ РАСТЯЖЕНИИ, СЖАТИИ. ПОДБОР СЕЧЕНИЙ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРУЗОПОДЪЕМНОСТИ.**

$$\sigma_{в.р.} = \pm \sigma_{(F)} \pm \sigma_{(M_x)} \pm \sigma_{(M_y)} = \pm \frac{F}{A} \pm \frac{M_x}{J_x} y \pm \frac{M_y}{J_y} x$$

$$\sigma_{max} \leq [\sigma] \quad y = max, \quad x = max$$

$$\sigma_{max} = \pm \frac{F}{A} \pm \frac{M_x}{J_x} y_{max} \pm \frac{M_y}{J_y} x_{max} = \pm \frac{F}{A} \pm \frac{M_x}{J_x} \pm \frac{M_y}{J_y} = \pm \frac{F}{A} \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]$$

$W_x, W_y$  - моменты сопротивления.

По этой формуле производят проверку прочности при внецентренном растяжении - сжатии. По ней же можно производить подбор сечения, определение грузоподъемности и решать другие задачи.

Если  $e \rightarrow F$  - мало ( $e$ ), то моменты  $M_x$  и  $M_y$  малы, следовательно ими можно пренебречь  $\Rightarrow \sigma_{max} = \frac{F}{A} \leq [\sigma]$

$$A \geq \frac{F}{[\sigma]}$$

Если  $e \rightarrow F$  - велико ( $e$ ), то  $M_x$  и  $M_y$  большие, тогда:

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma] \text{ и подбирают сечение как при косом изгибе.}$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРУЗОПОДЪЕМНОСТИ.**

Определение грузоподъемности производится выразив  $M_x$  и  $M_y$  через  $F$ .

$$\sigma = \pm \frac{F}{A} \pm \frac{M_x}{J_x} y_{max} \pm \frac{M_y}{J_y} x_{max} \leq [\sigma]$$

$$e \rightarrow F$$

$$\sigma = \pm \frac{F}{A} \pm \frac{F \cdot y_f \cdot y_{max}}{J_x} \pm \frac{F \cdot x_f \cdot x_{max}}{J_y} \leq [\sigma]$$

## ЯДРО СЕЧЕНИЯ.

**Ядром сечения** называется область вокруг центра тяжести сечения стержня, в которой приложив сжимающую или растягивающую силу во всем сечении напряжения будут иметь один знак.

Значение ядра сечения необходимо в тех случаях, когда материал или конструкция хорошо воспринимают сжимающие нагрузки и не воспринимает растягивающие.

**Примеры:** Кирпичная стенка, каменная стена, здание из сборных железобетонных элементов, которые на сжатие работают хорошо, на растяжение плохо.

Для построения ядра сечения используются следующие аналитические выражения:

$$b = y_{\sigma_0} = -\frac{i_x^2}{Y_F}$$

$$a = x_{\sigma_0} = -\frac{i_y^2}{X_F}$$

где  $x_{\sigma_0}, y_{\sigma_0}$  — координаты

нейтральной линии;

$X_F, Y_F$  — координаты приложения

силы;

$i_y, i_x$  — главные радиусы инерции.

Выражаем  $Y_F$  и  $X_F$ :

$$y_F = -\frac{i_x^2}{y_{\sigma_0}} = -\frac{i_x^2}{b}$$

$$x_F = -\frac{i_y^2}{x_{\sigma_0}} = -\frac{i_y^2}{a}$$

По этим формулам строится ядро сечения, как показано на рис.105

Пусть дано прямоугольное сечение:

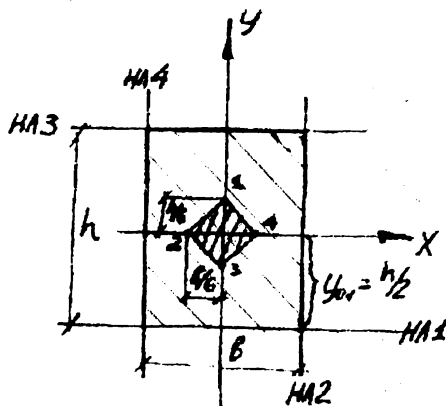


Рис. 105

Если в ядре приложить сжимающую силу, то сечение будет испытывать напряжение одного знака, если выйти за эти пределы, то — разного знака.

Для построения ядра сечения исходят из того, что нейтральная линия не должна пересекать сечения, а только касаться его.

Сечение обметывается нейтральными линиями и находятся отрезки соответствующих координат **ядра**, как показано на рис. 105

$$y_{F1} = -\frac{i_x^2}{y_{\sigma_0}} = -\frac{\frac{J_x}{A}}{-y_{\sigma_0}} = -\frac{bh^3/12}{(12 \cdot b \cdot h) \cdot (-h/2)} = +\frac{h}{6}$$

$$x_{F2} = -\frac{i_y^2}{x_{\sigma_0}} = -\frac{\frac{J_y}{A}}{x_{\sigma_0}} = -\frac{b^3h/12}{b/2} = -\frac{b}{6}$$

## СОВМЕСТНЫЕ ДЕЙСТВИЯ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

### Общие понятия.

Совместным изгибом и кручением является деформация конструктивных элементов, когда на них одновременно действуют изгибающие и крутящие моменты.

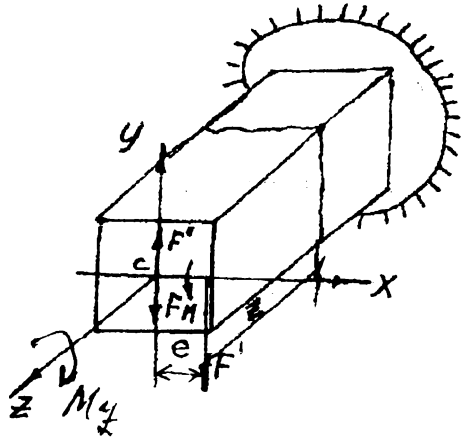


Рис. 106

$$M_x = F' e \text{ — кручение}$$

$$M_y = Fz = F' z \text{ — изгиб}$$

При смещениях нагрузок в балках и передаче усилия с помощью ременных, шестеренчатых и др. передач возникает изгиб с кручением.

### ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ПРИ ИЗГИБЕ С КРУЧЕНИЕМ.

$$Q = \sum y_{\text{отс. части}}$$

$$M_y = \sum M_{F \text{ отс. части}}$$

$$M_K = \sum M_{c(f) \text{ отс. части}}$$

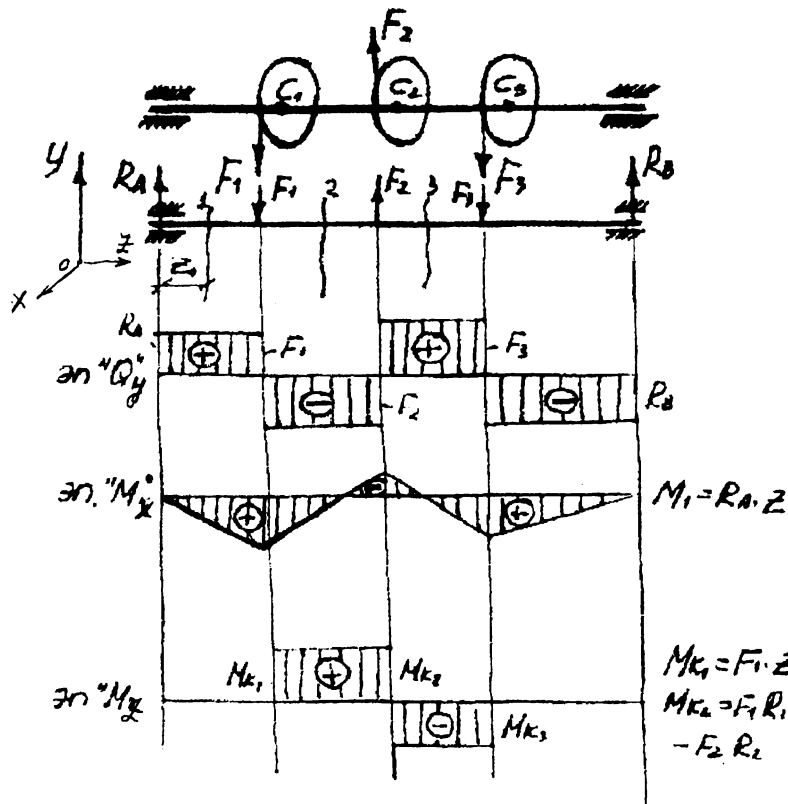


Рис. 107

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ СОВМЕСТНОМ ИЗГИБЕ И КРУЧЕНИИ КРУГЛЫХ СТЕРЖНЕЙ.

Мы ограничиваемся круглыми стержнями потому, что в них точно определяются все напряжения, а в стержнях прямоугольного, треугольного, эллиптического сечения напряжения определяются не точно (из-за деформации сечений).

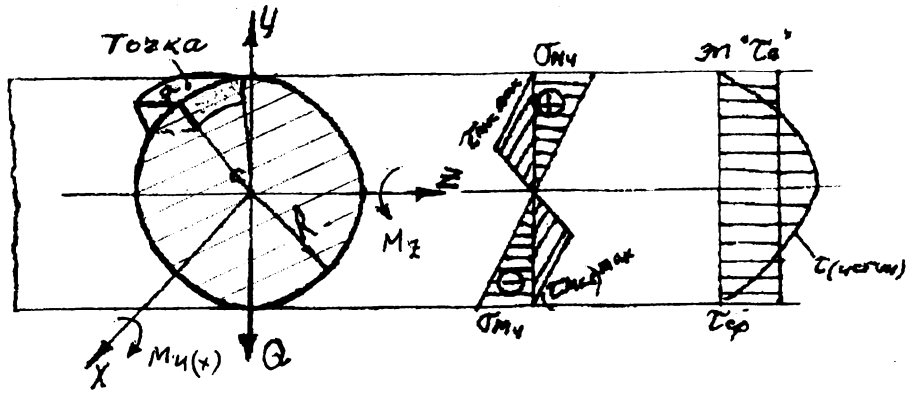


Рис. 108

$$\tau_{(Mki)} = \frac{M_{Ki}}{J_p} \rho;$$

$$\rho = R$$

$$\tau_{(Mki)max} = \frac{M_{Ki}}{W_p}; \quad \frac{J_p}{R} = W_p$$

$$\sigma_{Mu2} = \frac{M_{U2}}{J_x} y; \quad y_{max} = R$$

$$\sigma_{(Mu2)max} = \frac{M_{U2}}{J_x} = \frac{M_{U2}}{W_x}$$

$$\tau_{cp} = \frac{Q}{A}; \quad \tau = \frac{Q \cdot S_{omc}}{J_x b}$$

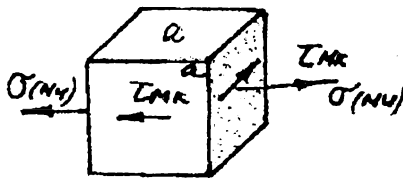


Рис. 109

$$\tau_{cp(a)} = \frac{Q}{A}$$

$$\tau_{(Q)} = \frac{Q \cdot S_{omc}}{J_x b}$$

Видим, что в точке *a* имеет место плоское напряженное состояние  $\Rightarrow$  для проверки прочности в этой точке обычные условия прочности (при кручении, при изгибе) не пригодны. В данном случае необходимо пользоваться теориями прочности.

$$\sigma_{(3m.n.p)} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{(4m.n.p)} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{(3m.n.p)} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_x}\right)^2 + 4\left(\frac{M_k}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma]$$

$W_p = 2W_x$  для круглого сечения

$J_p = 2J_x$  для круглого сечения

$$\sigma_{(3m.n.p)} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_x}\right)^2 + \left(\frac{M_k}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{(3m.n.p)} = \frac{\sqrt{(M_y)^2 + (M_k)^2}}{W_x} \leq [\sigma]$$

$\sqrt{(M_Y)^2 + (M_K)^2}$  обозначим как  $M_{n\text{привед.}}$ , т.е. приведенный момент:

$$\sigma_{(3\text{т.н.р})} = \frac{M_{n\text{привед.}}}{W_X} \leq [\sigma]$$

Условие прочности для совместного действия изгиба и кручения по 3 теории прочности. Оно позволяет проверить прочность стержня в интересующем нас сечении. С помощью этого условия можно подобрать сечение:

$$W_X = \frac{M_{n\text{привед.}}}{[\sigma]}$$

Можно определить грузоподъемность в виде приведенного момента:

$$M_{np} \leq [\sigma] \cdot W_X$$

Аналогично можно получить условие прочности используя 4 теорию прочности.

## УСТОЙЧИВОСТЬ И ЕЕ ПОТЕРЯ.

### Общие понятия.

**Устойчивость** (стабильность) - это способность определенного качественного признака конструкции (состояния, свойства, явления, процесса и др.) внутренне сопротивляться и тем самым сохраняться в определенной области внешнего силового возмущения  $\min \leq F \leq \max$ .

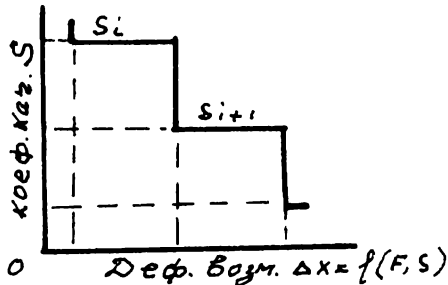


Рис. 111

Из повседневного опыта известно, что любое качество исчерпавшее свое сопротивление силовому возмущению самопроизвольно и скачкообразно сменяется на новое, то есть теряется. Это явление называется потерей устойчивости (изменчивостью). Следовательно, саморазвитие любой системы (эволюция) может представиться схематически лестницей (см. Рис. 111), где ступени выражают устойчивое качество  $S_i$ , а уступы его скачкообразную потерю (смену).

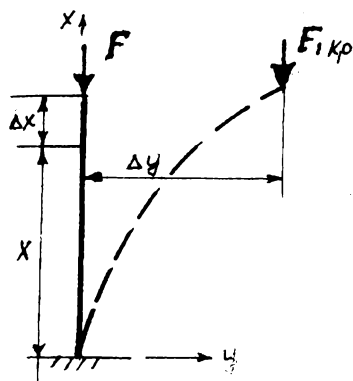


Рис. 112

Например, стержень, возмущенной силой  $F = k\Delta x$ , может сохранять и скачкообразно изменять свое качество  $S$  (см. Рис. 112) в процессе деформации  $\Delta x$ .

1. Сжатие  $S$  на изгиб  $S_1$ ;  $\Delta x = \Delta x = \Delta y$ ,  $F = F_{1\text{кр}}$  (см. Рис. 113);
2. Состояние упругости  $S_2$  на состояние текучести  $S_2$ ;  $\Delta x_2 = \Delta x_3$ ;  $F = F_{2\text{кр}}$ ;
3. Текучесть  $S_2$  на процесс упрочнения  $S_3$ ;  $\Delta x_2 = \Delta x_3$ ;  $F_2 = F_{3\text{кр}}$ ;
4. Упрочнение  $S_3$  на местное разупрочнение  $S_4$ ;  $\Delta x_3 = \Delta x_4$ ;  $F_3 = F_{4\text{кр}}$ ;
5. Разупрочнение  $S_4$  на разрыв  $S_5$ ;  $\Delta x_4 = \Delta x_5$ ;  $F_4 = F_{5\text{кр}}$ .



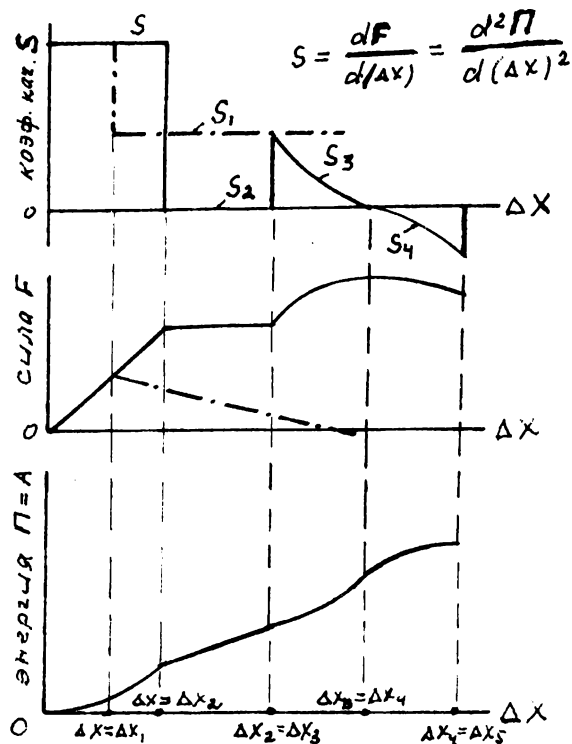


Рис. 113

$$S = \frac{dF}{d(\Delta x)} = \frac{d^2 \Pi}{d(\Delta x)^2}$$

Так как  $F_{1kp} < F_{2kp} < F_{3kp} < F_{4kp} < F_{5kp}$ , то условие устойчивости в общем виде запишется по  $F_{kp(min)}$ :

$$F \leq [F]_y = \frac{F_{1kp}}{k_y} = \frac{F_{kp(min)}}{k_y}$$

где  $[F]_y$  - допускаемое силовое возмущение из соображений устойчивости;

$k_y$  - коэффициент запаса на устойчивость /табл. величина/.

Вычисление и экспериментальное определение  $F_{kp(min)}$ , в общем случае, задача чрезвычайно трудная и сложная. Как будет показано, обычно используются частные решения. Например, метод Эйлера для сжатого стержня, который будет рассмотрен ниже.

### Энергетическая сущность устойчивости и ее потери.

Согласно закону сохранения, энергия несотворима, неуничтожима, а только передаваема от одной системы к другой. Следовательно, устойчивость любого качества однозначно определяется его потенциальной энергией  $\Pi$  и величиной совершаемой внешней работы  $A$ . Внешнее возмущение  $F$ , потенциальная энергия  $\Pi$  и работа изменения качества  $A$  взаимосвязаны между собой дифзависимостью

$$\frac{d^2 \Pi}{d(\Delta x)^2} = \frac{d^2 A}{d(\Delta x)^2} = \frac{dF}{d\Delta x} = S,$$

где  $S$  - коэффициент качества.

Для выявления устойчивости и ее потери достаточно построить графики дифзависимостей, как показано на рис.113. Они дают исчерпывающие физико-механические и графоаналитические представления о всех устойчивых состояниях и их потере, в частности, например, при сжатии стержня, изображаемого на рис.112.

В тех областях, где  $S = const$  или изменяется по одной зависимости качество всегда устойчиво. В точках разрыва или перегиба  $S$  устойчивость теряется и возникает новая спонтанно и скачкообразно, в виде самоудара предельной мощности (наш термин), как показано на рис. 113.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ ПРИ  
СТЕРЖНЯ.  
ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА.**

**СЖАТИИ**

Пусть будет задан стержень, как показано на рис. 114

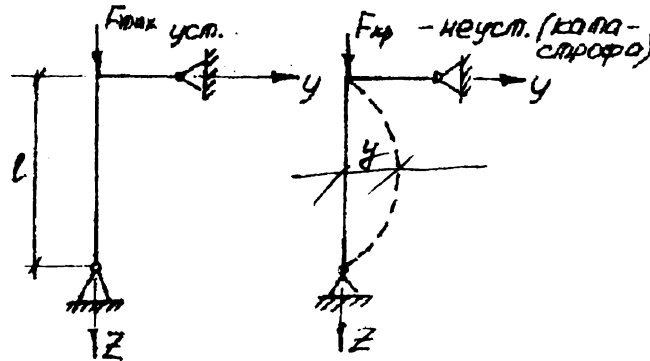


Рис. 114

$$y'' EJ = -M$$

$$M = F_{кр} \cdot y$$

$$y'' EJ + F_{кр} \cdot y = 0$$

$$y'' + \frac{F_{кр}}{EJ} y = 0$$

$$\frac{F_{кр}}{EJ} = c^2 \quad y'' + c^2 y = 0$$

$$y = A \sin CZ + B \cos CZ$$

$A, B$  — постоянные интегрирования,  
 $Z$  — координата точки на этом стержне.

Находим постоянные интегрирования:

при  $Z = 0; \quad y = 0; \quad B = 0, \quad y = A \sin CZ$

при  $Z = l; \quad y = 0; \quad 0 = A \sin CZ$

$A \neq 0$  потому что балка не сможет изогнуться,

тогда  $\sin CZ = 0; \quad Cl = 0 = \bar{n} = 2\bar{n} = \dots = n\bar{n}, \quad n = 1, 2, 3, 4$

$$Cl = n\bar{n}$$

$$C = \frac{n\bar{n}}{l}$$

$$\frac{F_{кр}}{EJ} = \left(\frac{n\bar{n}}{l}\right)^2;$$

$$F_{кр} = \left(\frac{n\bar{n}}{l}\right)^2 EJ$$

$n = 1; \quad J — \min;$

$$F_{кр} = \left(\frac{\bar{n}}{l}\right)^2 EJ_{\min};$$

$$\sigma_{кр} \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\left(\frac{\bar{n}}{l}\right)^2 EJ_{\min}}{A}$$

$$\frac{J_{\min}}{A} = i_{\min}^2; \quad \sigma_{кр} = \left(\frac{\bar{n}}{l}\right)^2 E \cdot i_{\min}^2$$

$$\sigma_{кр} = \frac{\bar{n}^2}{l^2} E; \quad \text{обозначим } \frac{l}{i_{\min}} = \lambda_{\max} \text{ — гибкость}$$

$$\sigma_{кр} = \frac{n^2}{\lambda_{max}^2} E$$

### ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА ПРИ РАЗЛИЧНОМ ЗАКРЕПЛЕНИИ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ.

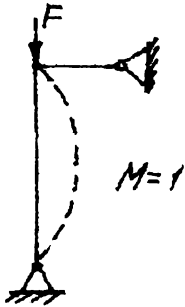


Рис. 115

Формула Эйлера получена для этого стержня (рис. 115) теряющего устойчивость в виде полусинусоиды.

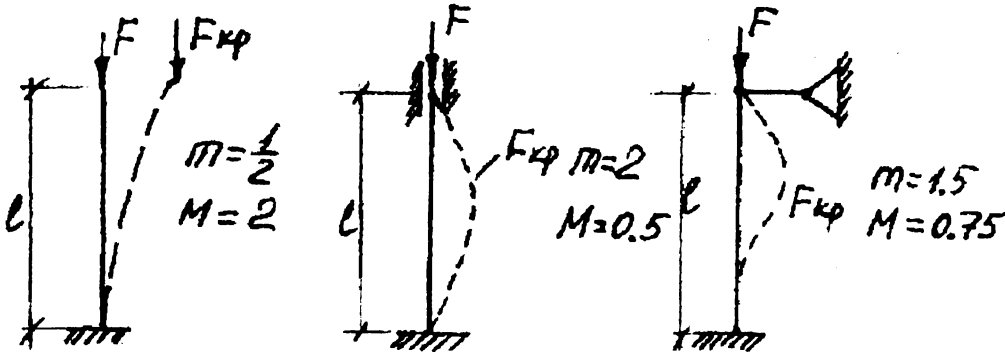


Рис. 116

$$F_{кр} = \left( \frac{n}{l_{np}} \right)^2 EJ_{min}$$

$l_{np}$  — приведенная  $l$ ,  $l_{np} = l\mu$

$\mu$  — коэффициент приведения,  $\mu = \frac{l}{m}$

$m$  — число полусинусоид

$$F_{кр} = \left( \frac{n}{l\mu} \right)^2 EJ_{min}$$

### ПРИМЕНИМОСТЬ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА.

Формула Эйлера имеет ограниченное применение и справедлива только в пределах пропорциональности (в пределах применимости закона Гука)  $\sigma_{пр}$ .

$$\sigma_{кр} = \frac{n^2}{\lambda_{min}^2} E \leq \sigma_{пр}$$

$$\lambda_{пред.} = \lambda_{max} \geq n \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пр}}}; \text{ где}$$

$\lambda_{пред.}$  — предельная гибкость

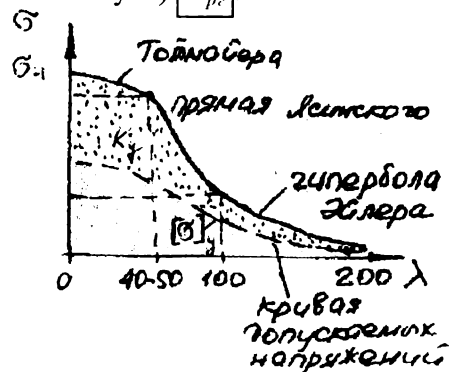


Рис. 117

Для стержней средней гибкости — формула Ясиньского

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda \quad \lambda \text{ — фактическая гибкость; } a, b \text{ — постоянные.}$$

Эти зависимости позволяют производить расчеты стержней на устойчивость.

### ПРАКТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ.

Определение  $\sigma$  допускаемого на устойчивость при расчетах не всегда удобно, поэтому его стремятся выразить как функцию  $[\sigma]$  при растяжении и сжатии.

$$[\sigma]_y = f([\sigma]) \quad [\sigma]_y = \varphi([\sigma]) \quad (0 < \varphi < 1)$$

$\varphi$  — коэффициент снижения допускаемых напряжений при растяжении и сжатии из соображений обеспечения устойчивости. При этом условие устойчивости запишется:

$$\sigma_{p \max} = \frac{F}{A_{б \text{ р у н т о}}} \leq \varphi[\sigma] \quad \sigma_{p} = \frac{F}{\varphi A} \leq [\sigma]$$

$A_{б \text{ р у н т о}}$  — поперечное сечение без учета ослабления.

$A_{н е т т о}$  — поперечное сечение с учетом ослабления. (см. рис. 118)

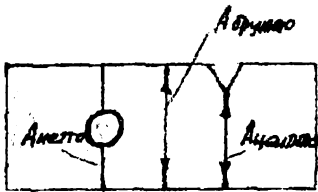


Рис. 118

При расчете на величину критической силы не оказывает влияние отверстие, надрез и т.д.

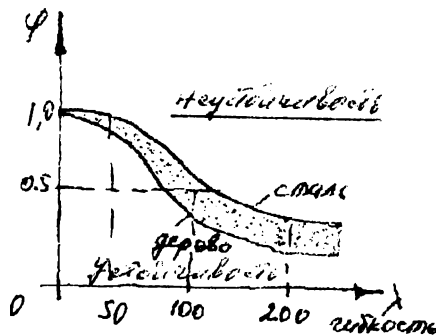


Рис. 119

$\varphi$  — ищется по графику или таблице.

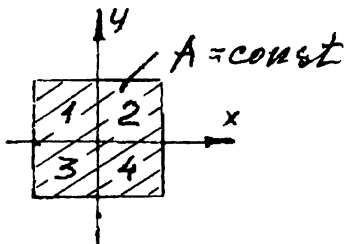
По условию устойчивости можно определить допустимую нагрузку:

$$[F]_y \leq A_{\sigma p} [\sigma] \varphi$$

С помощью условия устойчивости можно подобрать площадь поперечного сечения стержня.

$$A_{\sigma p} \geq \frac{F}{[\sigma] \varphi}$$

Подобрав сечение стержня из соображений устойчивости, площадь его проектируют таким образом, чтобы он был равноустойчив относительно главных осей, т.е.  $J_x \approx J_y$ , и чтобы стремились к max, при минимальной площади сечения (см. рис. 120, 121)



$A = \text{const}$  (не меняя площадь расставить эти четыре части)

Рис. 120

68 Чем больше  $\alpha$  — расставим эти части, тем больше  $J_x$  и  $J_y$  при  $A = \text{const}$  (см. рис. 121).

$$0 \leq a \leq \infty$$

$$F_{кр} = \left(\frac{n}{c}\right)^2 EJ_{min}$$

$$E = 2 \cdot 10^6 - 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг} / \text{см}^2$$

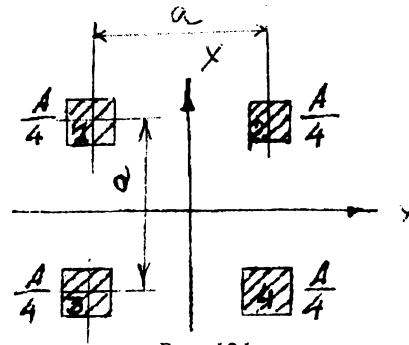


Рис. 121

Пример: Подбор сечения

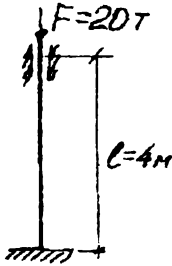


Рис. 122

$$[\sigma] = 1600 \text{ кг} / \text{см}^2$$

$$\text{сталь } E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг} / \text{см}^2$$

Решение:

$$A_{бр} \geq \frac{F}{[\sigma]\varphi}; \quad \varphi = 0,5 \text{ (среднее значение берем из интервала } 0 < \varphi < 1)$$

$$A \geq \frac{F}{[\sigma]\varphi} = \frac{20000}{0,5 \cdot 1600} = 25 \text{ см}^2$$

$$\text{№16 } A = 26,1 \text{ см}^2; \quad J_{min(y)} = 93 \text{ см}^4; \quad i = 1,89 \text{ см}$$

$$\lambda = \frac{l_{нр}}{i} = \frac{l \cdot \mu}{i} = \frac{\varphi \cdot 0,5}{i} = \frac{200}{1,89} = 106$$

$$\varphi_{таб} = 0,54 \quad \sigma_{раб} = \frac{20000}{26,1} = 1420$$

$$[\sigma] > \sigma_{раб}$$

### ПОНЯТИЕ О ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ.

Используем дифференциальное уравнение упругой линии (см. рис. 123)

$$y'' EJ = M$$

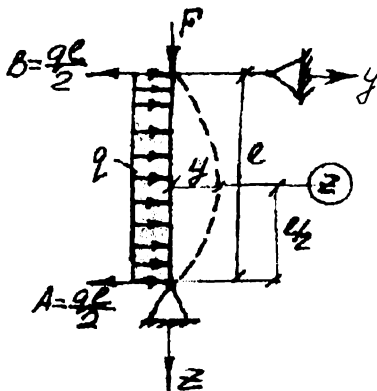


Рис. 123

Определяем M в произвольном сечении:

$$M_{(z)} = Fy + \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} = Fy + \frac{ql^2}{4} - \frac{ql^2}{8} = Fy + \frac{ql^2}{8}$$

Подставляем:

$$y'' EJ = -Ey - \frac{ql^2}{8}$$

$$y'' + \frac{F}{EJ} y = \frac{ql^2}{8EJ}$$

$$y'' + K^2 y = -\frac{ql^2}{8EJ}$$

$$\frac{F}{EJ} = K^2$$

$J$  — главный момент инерции,  
 $E$  — модуль упругости,  
 $y$  — прогиб,  
 $K = const$  ,  
 $q$  — распределение нагрузки.

Подобные дифференциальные уравнения не имеют точного решения. Оно решается приближенно в предположении что изогнутая ось балки представляет собой синусоиду.

### РАСЧЕТ КРИВЫХ БРУСЬЕВ. (общие понятия)

Рассмотрим брусья, у которых кривая ось лежит в одной плоскости. Поперечное сечение бруса относительно этой плоскости симметрично и внешние силы лежат в этой плоскости.

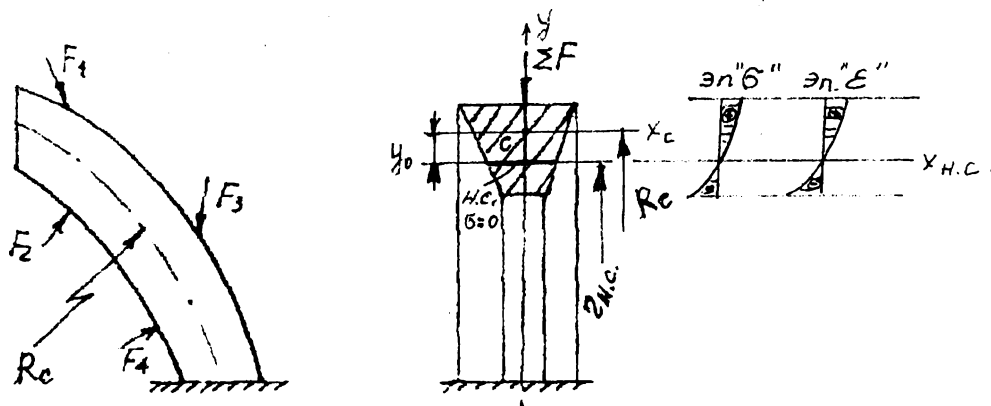


Рис. 124

Кривые брусья широко распространены в строительстве, например, арки.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В КРИВЫХ БРУСЬЯХ.

Внутренние силовые факторы в кривых брусьях определяются так же как и в балках методом сечений.

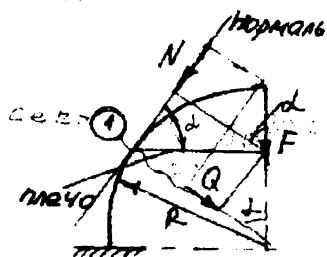


Рис. 125

$$\frac{N}{F} = \sin \alpha \quad \boxed{N = F \cdot \sin \alpha} \quad \langle - \rangle \text{ — Нсжат.}; \langle + \rangle \text{ — Нрастяж.}$$

$$\frac{Q}{F} = \cos \alpha \quad \boxed{Q = F \cdot \cos \alpha}$$

$$\boxed{M = R \cdot F = F \cdot R \sin \alpha}$$

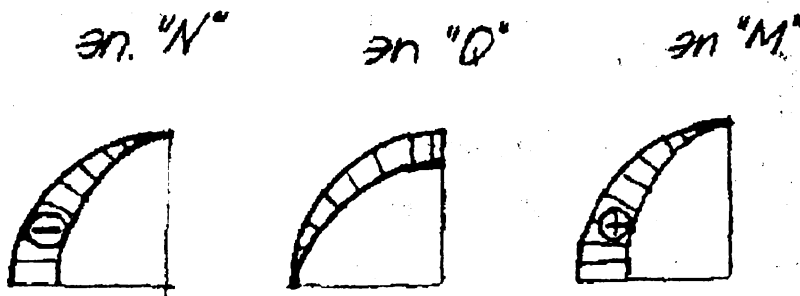


Рис. 126

Если под действием  $M$  момент увеличивается, то "+".

Если под действием  $M$  момент уменьшается, то "-".

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КРИВЫХ СТЕРЖНЯХ ОТ $N$ И $Q$ .

Напряжения определяют в опасных сечениях, где  $N \rightarrow \max$ ;  $Q \rightarrow \max$ ;  $M \rightarrow \max$ .

$$\sigma_{(N)} = \frac{N}{A}; \quad \tau_{(Q)} = \frac{Q \cdot S_{отс}}{Jb} \quad \text{— формула Журавского.} \quad \sigma_{(M)} = \frac{M}{S_{x(н.с)}} \cdot \frac{y}{z_{н.с} + y}$$

где  $S_{x(н.с)}$  — стат момент относ х н.с.;  $M$  — момент;  $y$  — координата где опр.  $\sigma_M$

### ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК.

#### Общие сведения.

Все вопросы рассмотренные до настоящего времени решались в предположении, что внешние силы действуют на конструктивные элементы статически, т.е. очень медленно изменяясь во времени.

Под динамическими нагрузками, как отмечалось в начале курса, подразумевались такие силы, которые прилагались с большими ускорениями и где возникают большие дополнительные силы инерции.

Вообще, в инженерной практике статических сил не существует. Они всегда изменяются во времени. Поэтому подавляющее большинство практических задач необходимо решать с учетом динамики. Например, подземные толчки на здания и сооружения; порывы сильного ветра, колебания и т.д.

Все без исключения расчеты при динамических нагрузках, в общем, сводятся к статическим с учетом коэффициента динамичности  $K_d$

$$\begin{aligned} F_{дин} &= F_{ст} \cdot K_d \\ \sigma_d &= \sigma_{ст} \cdot K_d \\ \tau_d &= \tau_{ст} \cdot K_d \\ \Delta l_d &= \Delta l_{ст} \cdot K_d \\ \varphi_d &= \varphi_{ст} \cdot K_d \end{aligned}$$

где  $F_{дин}, \sigma_d, \tau_d, \Delta l_d, \varphi_d$  соответственно силы напряжения и деформации, возникающие при динамических нагрузках.

$F_{ст}, \sigma_{ст}, \tau_{ст}, \Delta l_{ст}, \varphi_{ст}$  соответственно силы напряжения и деформации, которые возникают при статических нагрузках

$K_d$  — динамический коэффициент,  $1 < K_d < \infty$  — определяется теоретически или экспериментально.

### РАСЧЕТ СИЛ ИНЕРЦИИ ГРУЗОПОДЪЕМНЫХ УСТРОЙСТВ.

Пусть задан какой-то груз, который нужно поднимать грузоподъемным устройством.

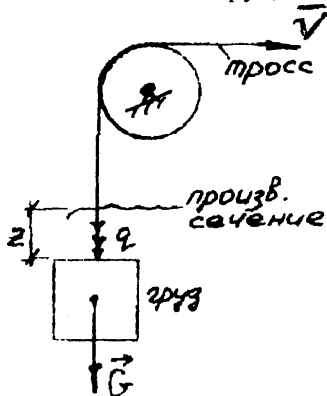


Рис. 127

$$N_d = N_{ст} + N_{инерции}$$

Вычислим  $N_d$  и  $N_{ст}$ .

$$N_{ст} = G + q \cdot Z$$

$$N_{ин} = ma = \frac{G + q \cdot Z}{q} a$$

$$N_{л} = (G + q \cdot Z) + \frac{G + q \cdot Z}{q} a = (G + q \cdot Z) \cdot \left(1 + \frac{a}{q}\right) = N_{ст} \left(1 + \frac{a}{q}\right)$$

$$N_{л} = N_{ст} \cdot \left(1 \pm \frac{a}{q}\right)$$

$$K_g = 1 + \frac{a}{q}$$

$+\frac{a}{q}$ , если груз подымается;  $-\frac{a}{q}$ , если груз опускается.

Если при опускании груза  $a = q$ , то тогда груз падает, на него силы вообще не действуют.

Чем больше  $\bar{a}$ , тем больше  $K_{л}$ , согласно полученному выражению.

### РАСЧЕТ НА УДАР.

Физика удара чрезвычайно сложна и еще недостаточно изучена, поэтому при решении инженерных задач прибегают к приближенным методам

Все виды ударов имеют две фазы (см. рис. 128а,б,в)

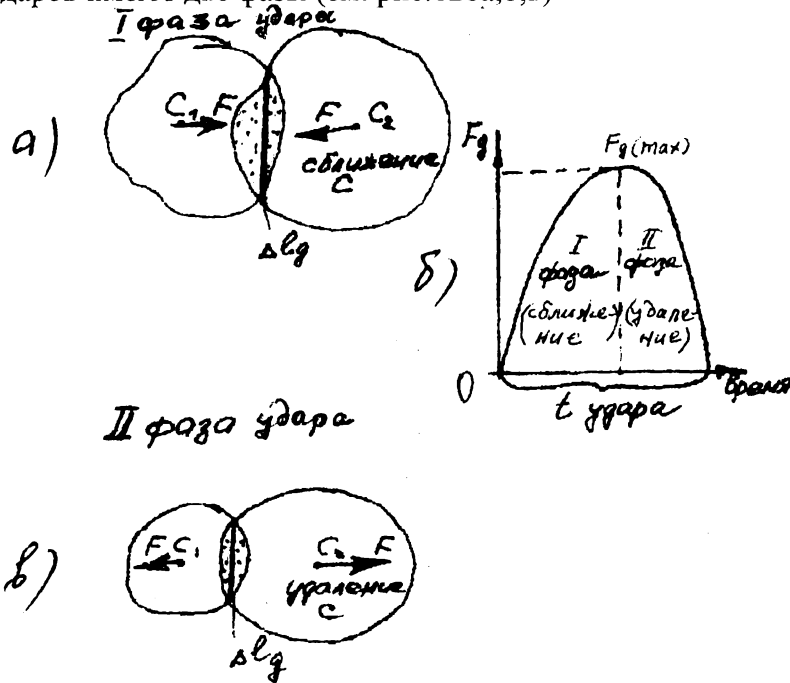


Рис. 128

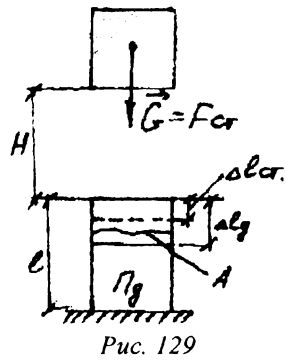
$S = \int_0^t F dt$  — импульс силы при ударе.

$$K = П_{л}$$

$K$  — кинетическая энергия,

$П$  — потенциальная энергия.





$$K = G \cdot (H + \Delta l_{\text{л}}) = A$$

$$\Pi_{\text{л}} = \frac{F_{\text{л}} \cdot \Delta l_{\text{л}}}{2} \text{ согласно закону Гука.}$$

$$F_{\text{л}} = C \cdot \Delta l_{\text{л}};$$

$$C = \frac{F_{\text{л}}}{\Delta l_{\text{л}}} = \text{tg} \alpha = \text{const}; \Rightarrow (\text{см. рис. 130})$$

$$\Pi_{\text{л}} = \frac{C \cdot \Delta l_{\text{л}}^2}{2}$$

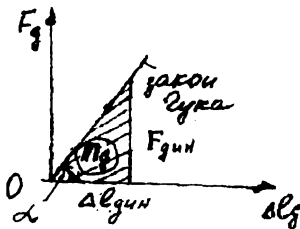
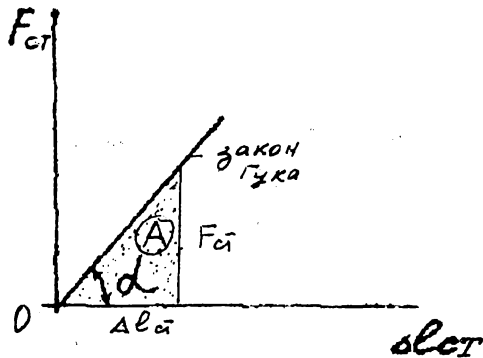


Рис. 130

Закон Гука при динамических и статических нагрузках не нарушается.



$$C = \frac{F_{\text{ст}}}{\Delta l_{\text{ст}}} = \text{const}$$

$$\Pi_{\text{л}} = \frac{F_{\text{ст}} \cdot \Delta l_{\text{л}}}{2 \cdot \Delta l_{\text{ст}}} = \frac{G \cdot \Delta l_{\text{л}}^2}{2 \cdot \Delta l_{\text{ст}}}$$

Рис. 131

$$G \cdot (M + \Delta l_{\text{л}}) = \frac{G \cdot \Delta l_{\text{л}}^2}{2 \cdot \Delta l_{\text{ст}}};$$

$$\Delta l_{\text{л}}^2 - 2l_{\text{л}} \cdot \Delta l_{\text{ст}} - 2 \cdot \Delta l_{\text{ст}} \cdot H = 0; \quad \Delta l_{\text{л}} = \Delta l_{\text{ст}} \pm \sqrt{\Delta l_{\text{ст}}^2 + 2H \cdot \Delta l_{\text{ст}}}$$

« - » — смысла не имеет.

$$\Delta l_{\text{л}} = \Delta l_{\text{ст}} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{\text{ст}}}} \right]$$

$$\text{где } K_{\text{л}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{\text{ст}}}}$$

$$\Delta l_{\text{ст}} = \frac{Fl}{EA} \quad V^2 = 2qH \Rightarrow 2H = \frac{V^2}{q}$$

$$K_{\text{л}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{\Delta l_{\text{ст}} \cdot q}}$$

$$K_{\text{л}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{H \cdot G}{\Delta l_{\text{ст}} \cdot G}}$$

$$K_{\text{л}} = 1 + \sqrt{1 + K_0 / \Pi_{\text{ст}}}$$

$K_0$  — без учета удара.

При определении динамического коэффициента его можно выразить через высоту  $H$  падения груза, через скорость удара и через соотношение энергии ударяющего  $K_0$  и  $W_{ст}$  — ударяемого грузов и т.д.

Определив коэффициент динамичности его используют для определения сил и напряжений. Если высота падения  $H$ , скорость удара  $V$ , и начальная кинетическая энергия  $K_0$  — велики, то тогда единицей за знаком радикала и единицей под знаком радикала можно пренебречь: и формула для  $K_d$  существенно упрощается.

$$K_d = \sqrt{\frac{2H}{\Delta l_{ст}}} = \sqrt{\frac{V^2}{\Delta l_{ст} \cdot g}} = \sqrt{\frac{K_0}{W_{ст}}}$$

Ошибки при этом упрощении могут колебаться в пределах приемлемых для практики.

### **ПОНЯТИЕ О РАСЧЕТЕ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ.**

Если известен  $K_d$  — коэффициент динамичности, то обычными методами вычисляются нормальные напряжения

(растяжение, сжатие)  $\sigma_{ст} = \frac{F}{A}; \quad \sigma_d = \frac{F}{A} K_d$

касательные напряжения:  $\tau_{ст} = \frac{Q}{A}$  (сдвиг)  $\tau_d = \frac{Q}{A} K_d$

удлинение:  $\Delta l_{ст} = \frac{Fl}{EA}; \quad l_d = \frac{Fl}{EA} K_d$  (растяжение, сжатие)

изгиб:  $\sigma_{ст} = \frac{M_x}{W_x}; \quad \tau_{ст} = \frac{Q \cdot S_{01x}}{J_b}; \quad \sigma_d = \sigma_{ст} \cdot K_d; \quad \tau_d \approx \tau_{ст} \cdot K_d$

### **РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ НАПРЯЖЕНИЯХ, ПЕРЕМЕННЫХ ВО ВРЕМЕНИ (ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ).**

При динамических нагрузках все величины умножаем на  $K_d$ .

Циклические нагрузки проявляют себя по иному.

При нагрузках, переменных во времени возникает явление «усталости». Под «усталостью» материалов понимают процесс накопления в нем повреждений в виде микро- и макротрещин. Так как появление трещин в материале и конструктивных элементах опасно, то необходимы инженерные методы, с помощью которых можно предсказывать или предотвращать их появление.

Обеспечение выносливости материала, т.е. нагружение его такими нагрузками и деформациями, при которых накопление повреждений было бы исключено, или сведено до минимума и предсказано.

Усталостные повреждения в материале при циклических нагрузках, как считает современная наука, возникают в результате того, что они неоднородны и в них всегда имеются естественные несплошности (т.е. незаполненные объемы), которые можно считать элементарными трещинами, склонными к развитию без остаточных деформаций.

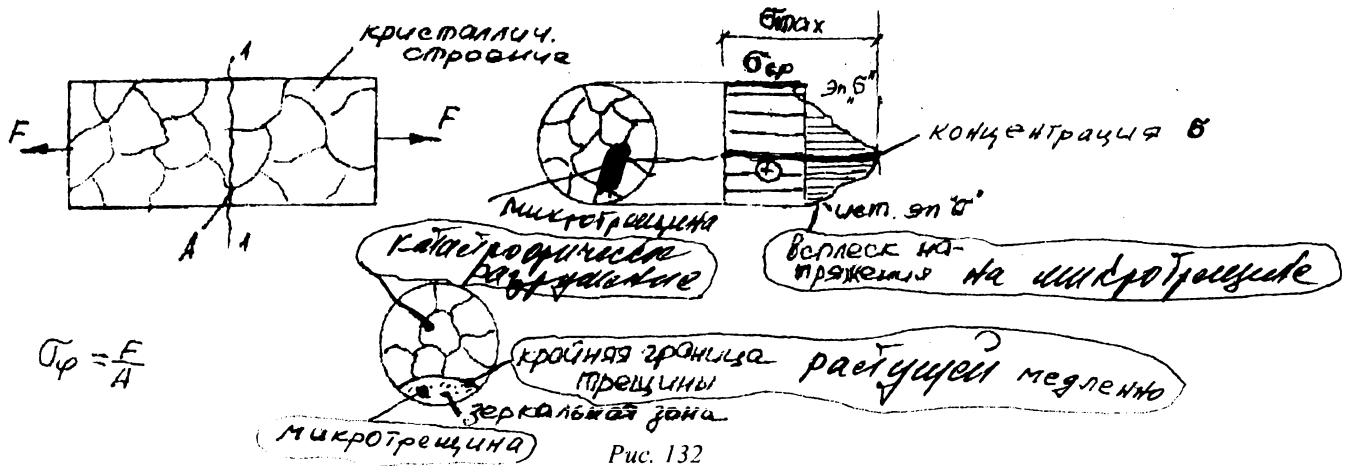


Рис. 132

### ВИДЫ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЗОК.

Циклические нагрузки могут быть симметричными, знакопеременными и пульсирующими.

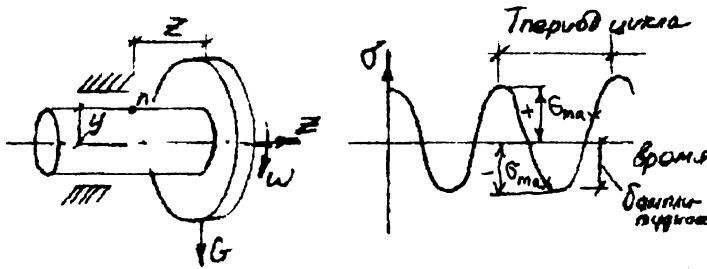


Рис. 133

Симметричная нагрузка.  
симметричный цикл.

$$\sigma_{max} = \pm \frac{M}{J} y = \pm \frac{GZ}{j} y = const$$

Пульсирующий цикл.

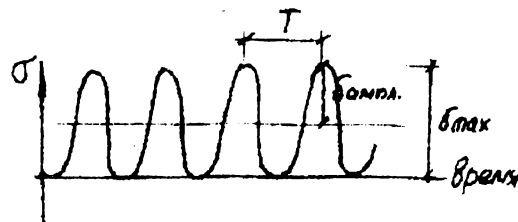


Рис. 134

Знакопостоянный цикл.

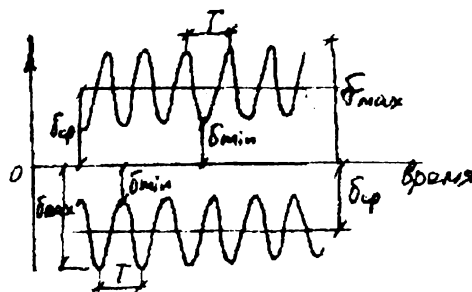


Рис. 135

$$\sigma_{max} = \sigma_{cp} + \sigma_{am}$$

$$\sigma_{min} = \sigma_{cp} - \sigma_{am}$$

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

$$\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = R \text{ --- характеристика цикла}$$

Все циклы у которых  $R = const$  являются подобными, что дает возможность использовать подобие при расчете (см. рис. 136)

! Самым опасным циклом является симметричный.

## КРИВАЯ ВЕЛЛЕРА (ДИАГРАММА ПОВЕДЕНИЯ МАТЕРИАЛА ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ).

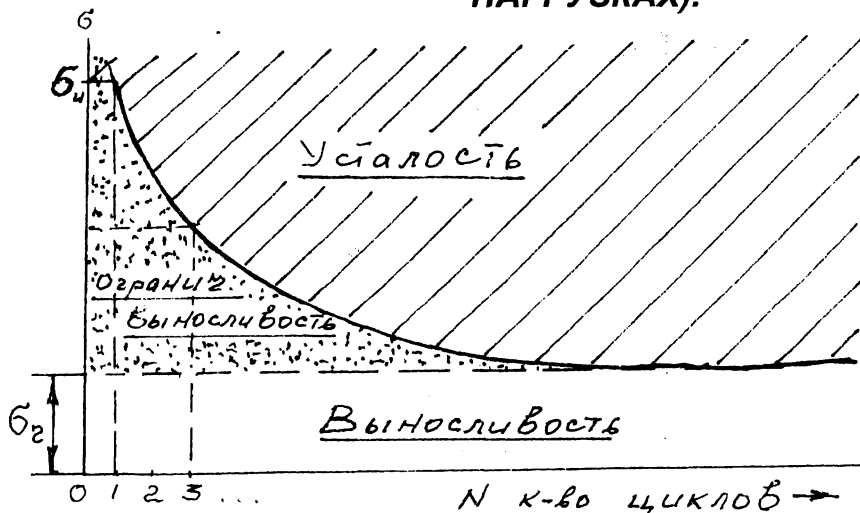


Рис. 136

$\sigma_u$  — предел прочности,  
 $\sigma_z$  — предел выносливости.

Для стали:

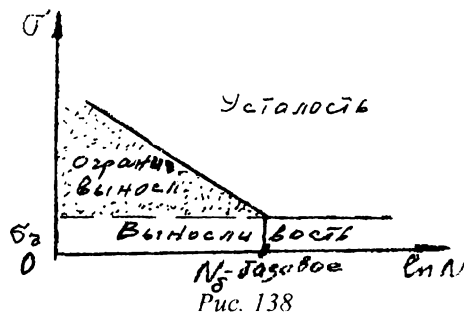


Рис. 138

$N\sigma = 10^7$  — для стали.

$N\sigma = 10^8$  — для цветных металлов.

$\sigma_r$  — самое малое будет при симметричном цикле и оно имеет специальное обозначение  $\sigma_{-1}$ .

Так, например для углеродистой стали  $\sigma_{-1} \cong 0,36\sigma_u$

для легированных сталей и серых чугунов  $\sigma_{-1} \cong 0,35\sigma_u$

### РАСЧЕТЫ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ.

Расчеты при циклических нагрузках можно вести по напряжению и по коэффициенту запаса прочности на выносливость:

[1] По напряжению, max расчетные напряжения.  $\sigma_{p\max} \leq \sigma_r / K$

[2] По коэффициенту запаса  $n_p \geq [n]$ ,

$n_p$  — расчетный коэффициент запаса,

$[n]$  — допускаемый коэффициент запаса  $[n] = 1,4 \div 3,0$ .

Для нахождения расчетного коэффициента используют диаграмму предельных циклов.

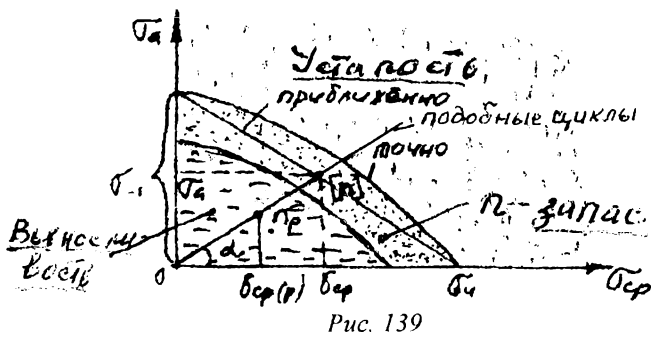


Рис. 139

На предел выносливости оказывают большое влияние  $t$  окружающей среды, химическая активность среды, радиоактивное излучение и т.д.

## ВОПРОСЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО И ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКОГО ИЗУЧЕНИЯ

В зависимости от специальности, дефицита лекционных часов и необходимости формирования навыков самостоятельной работы студентов, кручение круглых стержней, механические характеристики материалов, геометрические характеристики плоских сечений можно не излагать лекционно. При этом важно обратить внимание на принципиальные вопросы.

### КРУЧЕНИЕ КРУГЛЫХ СЕЧЕНИЙ

излагается после изучения сдвига

В основе изучения этого вопроса используется гипотеза плоских сечений (плоское сечение и прямой радиус до деформации, не изменяются после деформации).

Пусть задан стержень круглого сечения (рис. 140)

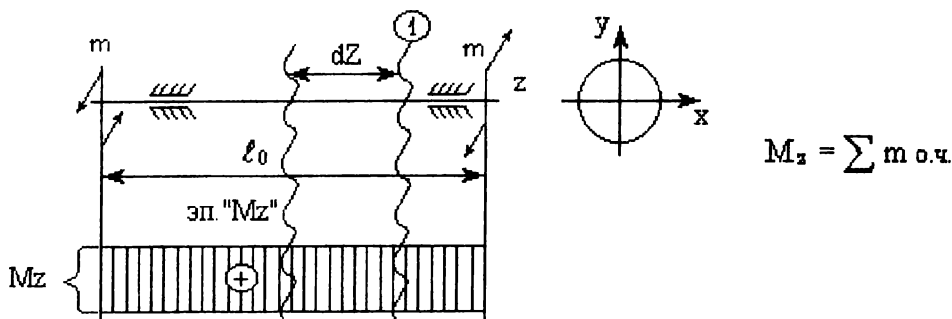


Рис. 140

Для определения деформаций и напряжений в сечении 1 вырежем и рассмотрим деформацию элементарного участка  $dZ$ , как показано на рис. 141. Воспользуемся законом Гука при сдвиге  $\tau = \gamma \cdot G$

$$\gamma = \frac{m}{dZ}; \quad m = r \cdot d\varphi = \rho \cdot d\varphi$$

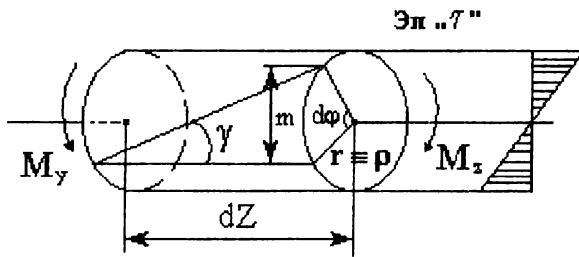


Рис. 141

$$\tau = \frac{m}{dZ} \cdot G = \frac{\rho d\varphi}{dZ} \cdot G$$

$$\frac{d\varphi}{dZ} = \varphi_{\text{пог}} - \text{погонный угол закручивания}$$

Касательное напряжение пропорционально  $\rho$   $\tau = \varphi_{\text{пог}} \cdot \rho G$  или  $\varphi_{\text{пог}} = \frac{\tau}{\rho G}$  рад

Вычислим крутящий момент в сечении 1 по  $\tau$  воспользовавшись рис. 142.

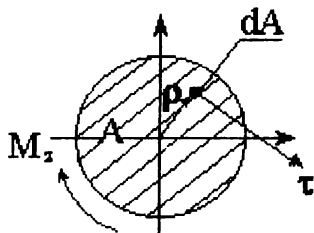


Рис. 142.

$dM_z = \tau dA \cdot \rho$  интегрируем по  $A$

$$M_z = \int_A \tau \rho dA$$

подставив  $\tau$  получим:

$$M_z = \int_A \varphi_{\text{пог}} \rho G \rho dA = \varphi_{\text{пог}} G J_p$$

Полярный момент инерции -  $J_p = \int_A \rho^2 dA = \frac{\pi r^4}{2}$

Полярный момент сопротивления  $W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi r^3}{2}$

$$\varphi_{\text{пог}} = \frac{M_z}{G J_p} \text{ рад}$$

$G \cdot J_p$  - жёсткость стержня при кручении. Приравняв погонные углы получим:

$$\tau = \frac{M_z}{J_p} \cdot \rho \quad \text{аналогично} \quad \sigma = \frac{M_x}{J_y} \cdot y \quad \text{при изгибе}$$

Полный угол закручивания определяется:  $\varphi_{\text{пол}} = \varphi_{\text{пог}} \cdot \ell = \frac{M_z \cdot \ell}{G J_p}$

Формула аналогична:  $\Delta \ell = \frac{F \cdot \ell}{E \cdot A}; \quad m = \frac{Q \cdot h}{G \cdot A}$

Условие прочности:  $\tau_{\text{max}} = \frac{M_z}{J_p} \cdot \rho_{\text{max}} = \frac{M_z}{J_p} \cdot r = \frac{M_z}{\frac{J_p}{r}} = \frac{M_z}{W_p} \leq [\tau];$

$$\rho_{\text{max}} = r; \quad [\tau] \approx 0,5[\sigma]$$

Условие жёсткости:  $\varphi_{\text{пол}} = \frac{M_z \cdot \ell}{G \cdot J_p} \leq [\varphi]$

Эти два условия позволяют решить задачу: проверять прочность, жёсткость, оценивать несущую способность, подбирать сечение и длину стержней.

Работа деформации  $A$  и потенциальная энергия  $U$  кручения в пределах упругости определится площадью диаграммы (рис. 143)

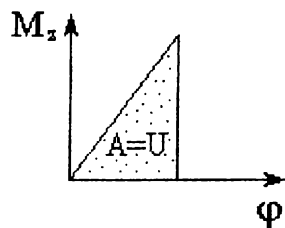


Рис 143

$$A = \varphi = \frac{M_z \cdot \varphi}{2} = \frac{M_z}{2} \cdot \frac{M_z \cdot \ell}{2J_p \cdot G} =$$

$$= \frac{M_z^2 \cdot \ell}{2J_p \cdot G} \cdot \frac{J_p}{J_p} \cdot \frac{r^2}{r^2} = \frac{\tau^2}{4G} \cdot \frac{\ell \cdot J_p}{r^2} = \frac{\tau^2 V}{4G}$$

Удельная работа (a), энергия (u):  $a = u = \frac{A}{V} = \frac{\varphi}{V} = \frac{\tau^2}{4G}$

Что касается кручения некруглых стержней, то их плоские сечения искажаются, а определение напряжений и перемещений в них представляет собой сложную задачу.

## Физико-механические характеристики материалов

Изучаются после изложения основных положений курса.

Экспериментальное определение физико-механических свойств может производиться статически, циклически и динамически. Для сравнимости получаемых результатов в различных отраслях странах и производствах испытания производятся на стандартных образцах, в одинаковых условиях и на машинах аттестованных службами Госметрологии.

Например, определение этих характеристик при растяжении образца производится путём его нагружения до разрыва, как схематически показано на рис. 144 а и б с получением машинной диаграммы (рис. 144в) в масштабе.

Обработывая данные машинной диаграммы можно получить целый ряд основных физико-математических свойств на любом участке кривой.

Абсолютное удлинение образца  $\Delta l = l_k - l_0$

Абсолютное сужение  $\Delta b = b_0 - b_k$

Относительное удлинение  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

Относительное сужение  $\varepsilon_1 = \frac{\Delta b}{b_0}$

Коэффициент Пуассона (упругой деформации)  $\mu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{\Delta b_{p2} \ell_0}{\Delta \ell_{p2} b_0}$

Для различных материалов колеблется в пределах  $0 \leq \mu \leq 0,5$

Материалы с неизменяемым объёмом  $\mu = 0,5$ , а с идеально изменяемым  $\mu = 0$

Для оценки пластичности материалов определяются относительное остаточное удлинение

$$\delta = \frac{\Delta \ell_{\text{ост}}}{\Delta \ell_0} \cdot 100\%$$

и относительное остаточное сужение

$$\Psi = \frac{A_0 - A_{\text{ш}}}{A_0} \cdot 100\%$$

Для хрупких материалов

$$\delta = \Psi = 0$$

Для пластичных материалов

$$\delta \neq 0 \text{ и } \Psi \neq 0$$

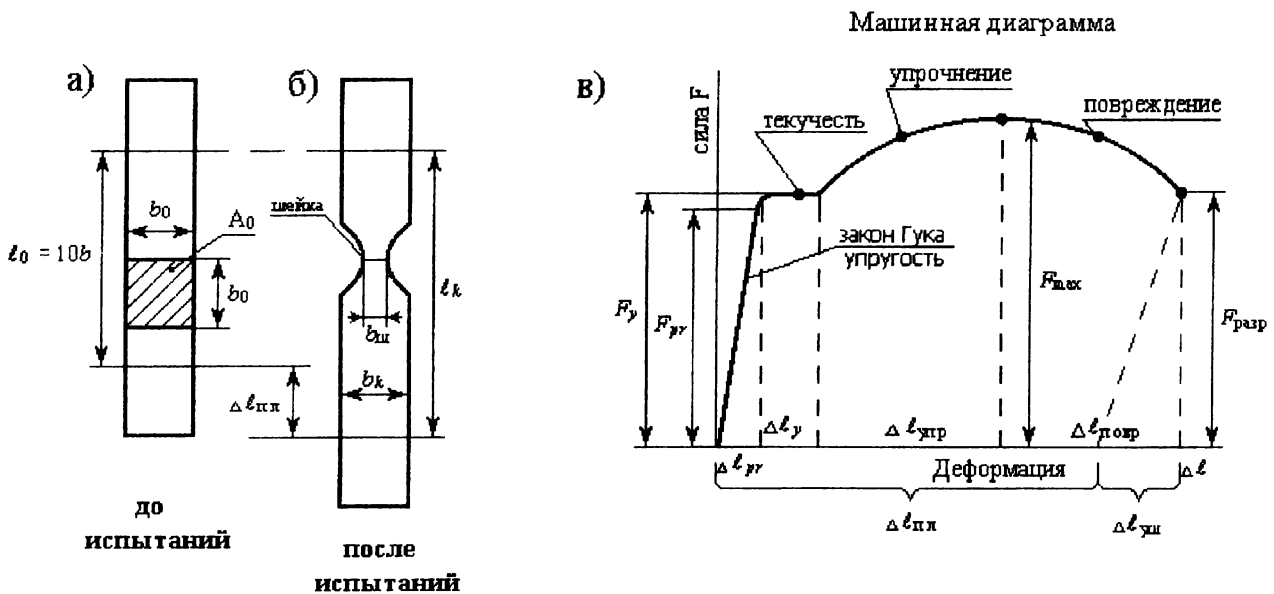


Рис. 144 а,б,в

Приняв условно, что сечение образца в процессе нагружения образца до разрыва не изменяется, что не соответствует действительности, получим условный предел пропорциональности

$$\sigma_{pr} = \frac{F_{pr}}{A_0}$$

Условный предел текучести

$$\sigma_y = \frac{F_y}{A_0}$$



Условный предел прочности ( временное сопротивление )

$$\sigma_n = \frac{F_{\max}}{A_0}$$

Условный предел разрыва

$$\sigma_{\text{разр}} = \frac{F_{\text{разр}}}{A_0}$$

Если учесть соответствующие изменения площади сечения в процессе деформации, то получим истинные предельные характеристики. По ним строят условную и истинную диаграммы напряжений, как показано схематически на рис. 145

Так как все технические устройства эксплуатируются только в пределах пропорциональности (упругости) где условная и истинная диаграмма напряжений практически совпадают, то необходимость определения истинных напряжений и построение диаграммы теряется за ненадобностью.

Из условной диаграммы можно определить модуль Юнга, ( модуль упругости при растяжении-сжатии , первого рода )  $E$  .  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_{\text{пр}}}{\varepsilon_{\text{пр}}} = \operatorname{const} = E$  ( Па , Мпа )

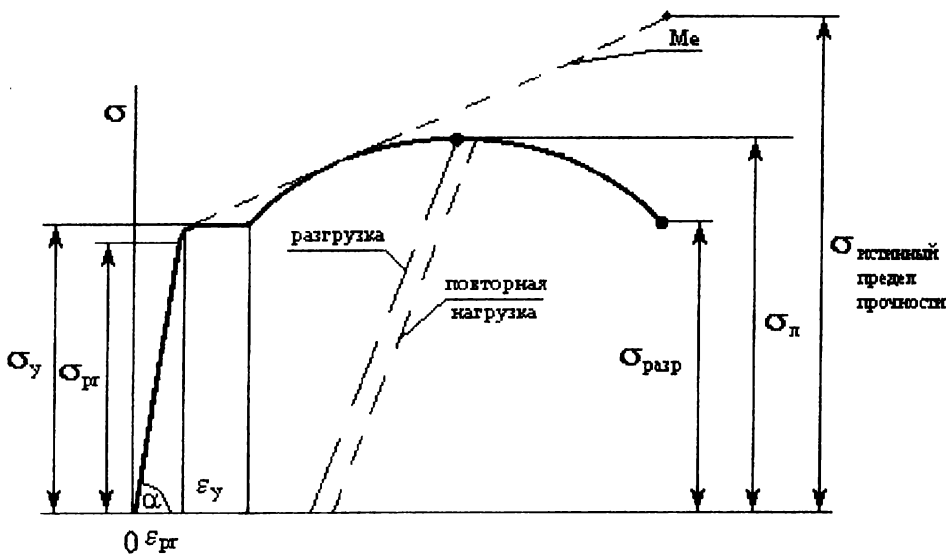


Рис. 145

Отсюда закон Гука на основании опыта

$$\sigma_{\text{пр}} = \varepsilon_{\text{пр}} \cdot E$$

Или подставив значения  $\sigma$  и  $\varepsilon$  можно выразить закон Гука через абсолютные характеристики образца

$$\frac{F_{\text{пр}}}{A_0} = \frac{\ell_{\text{пр}}}{\ell_0} \cdot E$$

$$F_{pr} = \Delta l_{pr} \cdot \frac{E \cdot A_0}{l_0}$$

$\frac{E \cdot A_0}{l_0} = K$  - постоянная величина, угловой коэффициент

$$F_{pr} = \Delta l_{pr} \cdot K$$

Аналогичные физико-механические характеристики можно экспериментально получить для сдвига и других деформаций, используя соответствующие стандартные образцы и испытательные машины.

## Геометрические характеристики сечений .

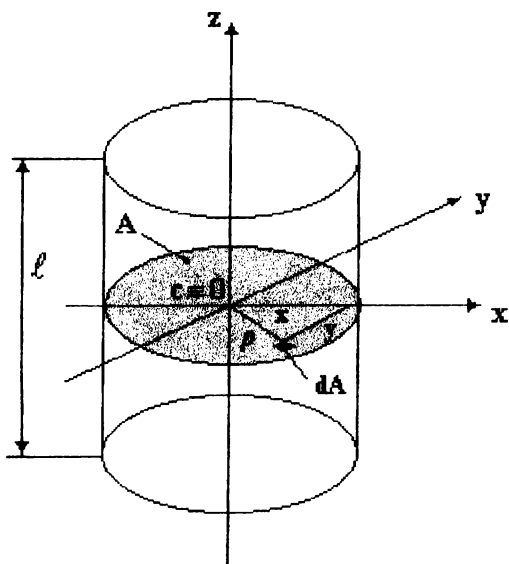
В случае выдачи по теме расчётно-графического задания изучаются в начале курса или перед кручением и изгибом .

К геометрическим характеристикам поперечных сечений брусьев , как показано на рис. 145, относятся: площадь сечения –  $A$ ; размеры; центр тяжести  $c$  и моменты инерции (статические –  $S_x, S_y$ ; осевые –  $I_x, I_y$ ; центробежные –  $I_{xy}$ ; полярные –  $I_p$ ; радиусы инерции  $i_x, i_y$ ; эллипс инерции ).

В сопротивлении материалов центр тяжести сечения  $c$  является полюсом для проведения внешних и внутренних сил при определении последних. С ним совмещается начало  $O$  системы координат  $xyz$ .

Площадь поперечного сечения  $A$  характеризует жёсткость сечения при растяжении , сжатии и сдвиге стержней (  $EA$  и  $GA$  ).

Запишем возможные геометрические характеристики для элементарной площадки  $dA$  сечения  $A$



$$\begin{aligned} dA \cdot x &= dS_y; & dA \cdot y &= dS_x; \\ dA \cdot x^2 &= dI_y; & dA \cdot y^2 &= dI_x; \\ dA \cdot x \cdot y &= dI_{xy}; \\ dA \cdot \rho^2 &= dA(x^2 + y^2) = dI_p; \end{aligned}$$

Рис.146

Проинтегрировав эти выражения по А получим :

$$S_x = \pm \int_A y dA ; S_y = \pm \int_A x dA \quad (\text{см}^3, \text{м}^3) - \text{статические моменты площади сечения}$$

Относительно центральных осей координат  $xu$   $S_x=S_y=0$  . Это свойство используется для определения координат  $x_c$  ,  $y_c$  центров тяжести сложных сечений относительно произвольно выбранной системы координат  $x_1$  ,  $y_1$  .

$$x_c = \pm \frac{\sum S y_1}{\sum A}; \quad y_c = \pm \frac{\sum S x_1}{\sum A};$$

$$I_y = + \int_A x^2 dA ; \quad I_x = + \int_A y^2 dA \quad (\text{см}^4, \text{м}^4) - \text{осевые центральные моменты инерции сечений}$$

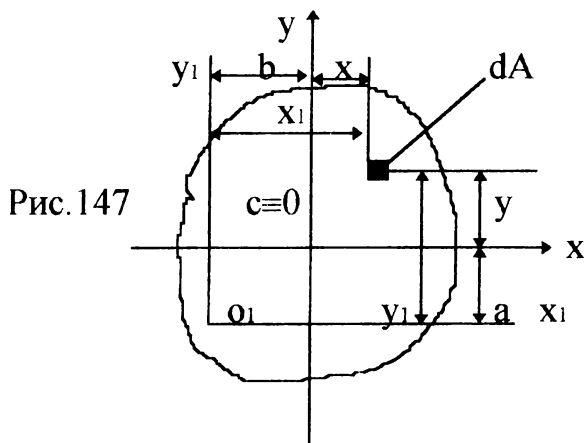
Они характеризуют жёсткость брусьев при изгибе ( $I_x E$  ,  $I_y E$  ) . Обычно используются экстремальные ( главные ) центральные моменты инерции  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  .

$$I_{xy} = \pm \int_A x y dA \quad (\text{см}^4, \text{м}^4) - \text{центробежный момент инерции сечения}$$

$I_{xy} = 0$  относительно осей  $xu$  , где  $\{ I_x , I_y \} \rightarrow e_{x1}$  .

Такие оси называются главными и определяются по этому признаку .

Геометрические характеристики сечений увеличиваются при параллельном переносе осей координат  $x_1, y_1$  относительно центральных  $x, y$  , как показано на рис.147 .



Воспользовавшись полученными выше формулами и новыми координатами

$$y_1 = y + a$$

$$x_1 = x + b$$

Получим

$$S_{x_1} = Sx + aA; S_{y_1} = Sy + bA$$

$$I_{x_1} = Ix + a^2 A; I_{y_1} = Iy + b^2 A$$

$$I_{x_1 y_1} = Ixy + abA$$

В случае параллельного переноса осей ближе к центру тяжести вторые слагаемые вычитаются ( берутся с минусом ) .

При повороте осей координат  $v, u$  на угол  $\alpha$  относительно начальных  $xu$  , как показано на рис.148 , также используются исходные формулы для моментов площадей и новые координаты .

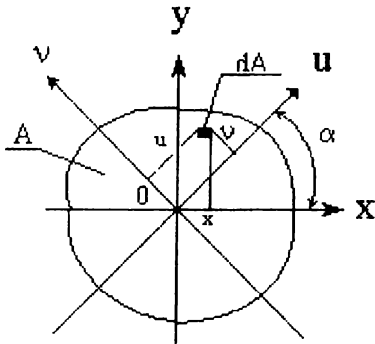
$$v = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

$$u = y \sin \alpha + x \cos \alpha$$

В результате подстановки и преобразования получим

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_v = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha$$



$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha$$

Сложив выражения и преобразовав получим

$$I_u + I_v = I_x + I_y = \text{const}$$

Положение главных осей инерции определяется из условия  $I_{uv} = 0$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad \text{рад}$$

Значение угла  $\alpha$  откладывается в соответствии с правилами тригонометрии.

Экстремальные ( главные ) моменты инерции определяются

$$\left. \begin{array}{l} I_{\max} \\ I_{\min} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left[ (I_x + I_y) \pm \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \right]$$

Полученные формулы являются уравнениями окружности в параметрической форме . Это позволяет все выше приведенные аналитические вычисления заменить графоаналитическим определением геометрических характеристик с помощью Круга Мора , как показано схематически на рис. 149 .

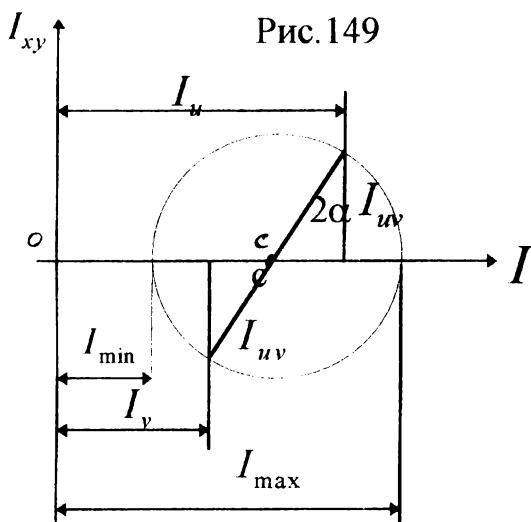


Рис. 149

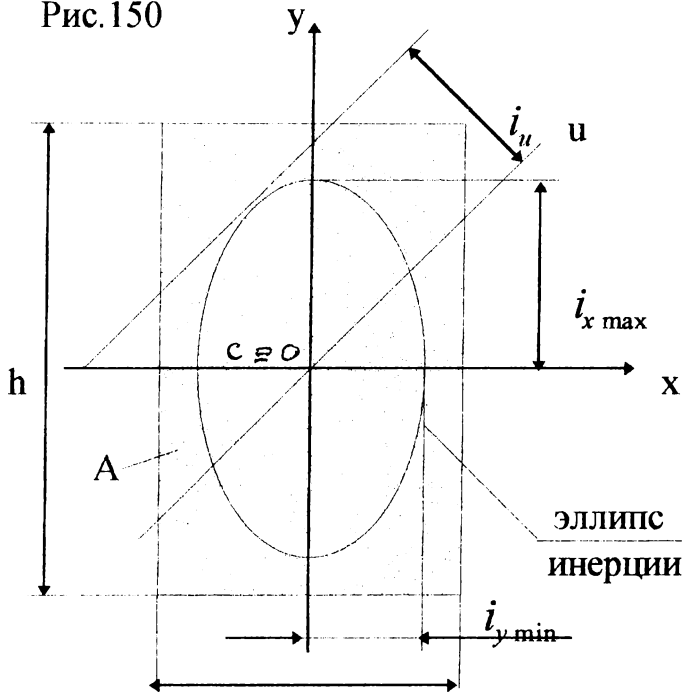
При известных  $I_u, I_v$  и  $I_{uv}$  по графику определяются  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$ , подобно главным напряжениям в точке по заданным произвольным напряжениям  $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$  и  $\tau$ .

В курсе сопротивления материалов широко используются радиусы инерции  $i_x, i_y$  и эллипсы инерции для оценки гибкости ( $\lambda$ )

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

С помощью радиусов инерции можно построить эллипс инерции сечения, как показано на рис. 150.

Рис. 150



$$i_{x \max} = \sqrt{\frac{bh^3}{12}} / bh$$

$$i_{x \min} = \sqrt{\frac{b^3h}{12}} / bh$$

$$I_u = i_u^2 A$$

Т.о. можно найти момент инерции  $I_u$  при повороте оси  $U$  на любой угол  $\alpha$  и графическом определении  $i_u$ .

## Заключение

*Данный курс лекций прочитан для студентов строительного факультета и является основой для дальнейшего изучения курсов теории упругости, строительной механики, оснований и фундаментов, строительных конструкций (железобетонных, металлических, деревянных, композиционных и т. д.).*

Учебное издание

Трусъ Александр Михайлович

Конспект лекций по курсу  
«СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

Ответственный за выпуск Трусъ А. М.  
Редактор Строкач Т.В.

---

Подписано к печати 3. 10. 97 г. Формат 60×84/8. Бумага писчая № 1. Усл. п. л. 8,6.  
Уч. изд. л. 9,7. Заказ № 673. Тираж 75 экз. Бесплатно. Отпечатано на ризографе  
Брестского политехнического института. 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.