

УДК 681.5+621.52

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОЗИЦИОННОГО ПРИВОДА ПОСТОЯННОГО ТОКА

О. Н. Прокопеня¹, Л. И. Вабищевич², О. Г. Прожихко³, А. С. Лапука⁴¹ К. т. н., доцент, заведующий кафедрой автоматизации технологических процессов и производств УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: olegprokopenya@mail.ru² К. т. н., доцент, доцент кафедры автоматизации технологических процессов и производств УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: vabik1948@mail.ru³ Магистр, аспирант кафедры автоматизации технологических процессов и производств УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: prozhizhko_og@mail.ru⁴ Ассистент кафедры автоматизации технологических процессов и производств УО «Брестский государственный технический университет», Брест, Беларусь, e-mail: saluzung@mail.ru

Реферат

Для приводов постоянного тока, входящих в состав промышленных роботов, является актуальной проблема оптимизации по критерию минимальных потерь энергии, поскольку данные приводы работают с частыми пусками и торможениями, во время которых имеют место повышенные потери энергии.

В данной статье предлагается решение задачи оптимизации привода постоянного тока с регулируемым углом поворота. Получены аналитические зависимости для расчета оптимальных коэффициентов в цепях обратной связи. С помощью математической модели исследовано влияние матриц критерия оптимизации на качество переходных процессов и потери энергии. Предложены рекомендации по выбору данных матриц при проектировании оптимальных позиционных приводов.

Ключевые слова: привод постоянного тока, регулирование углового перемещения, оптимальный привод.

DC POSITION DRIVE OPTIMIZATION

O. N. Prokopenya, L. I. Vabishchevich, O. G. Prozhizhko, A. S. Lapuka

Abstract

For DC drives included in industrial robots, the problem of optimization according to the minimum loss criterion is urgent, since these drives operate with frequent starts and braking, during which there are increased energy losses.

This article offers a solution to the problem of optimizing the DC drive with adjustable position. Analytical dependencies were obtained to calculate optimal coefficients in feedback circuits. With the help of a mathematical model, the influence of the optimization criterion matrices on the quality of transient processes and energy loss was determined. Recommendations on selection of these matrices during design of optimal positioning drives are proposed.

Keywords: DC drive, position control, optimal drive.

Введение

Для приводов, работающих в повторно-кратковременном режиме, является актуальной задача минимизации энергопотребления, поскольку повышенные потери энергии имеют место в периоды пуска и торможения, когда ток двигателя принимает пиковое значение. В этой связи возникает задача оптимизации работы привода по критерию, обеспечивающему минимальные потери энергии при заданном качестве переходных процессов. На практике задача поиска оптимального управления обычно решается для линейного объекта с использованием квадратичного критерия [1] и именуется аналитическим конструированием регулятора. Данная задача была решена для привода постоянного тока с регулируемой скоростью [2, 3]. В составе роботов чаще всего используются позиционные приводы, представляющие собой систему третьего порядка, в которой регулируемой переменной является угловое или линейное перемещение выходного звена.

В данной работе предпринята попытка аналитического решения задачи оптимизации для указанной системы.

Постановка задачи

На основе аналитического решения оптимизационной задачи для позиционного привода постоянного тока необходимо получить математические зависимости, позволяющие рассчитывать оптимальные значения коэффициентов обратной связи по перемещению, скорости и току двигателя в зависимости от элементов, входящих в критерий оптимизации матриц Q и R , которые определяют качество переходного процесса и количество затрачиваемой на регулирование энергии. Это

дает возможность с помощью математической модели исследовать влияние коэффициентов данных матриц на показатели качества переходного процесса и потери в приводе и сформулировать рекомендации по выбору коэффициентов данных матриц при расчете и проектировании оптимального привода.

Решение задачи оптимизации

Исходные уравнения, описывающие динамику привода,

$$\dot{\alpha} = k_p \omega; \quad (1)$$

$$J_{\text{пр}} \cdot \dot{\omega} = C_M \cdot I_{\text{я}}, \quad (2)$$

$$L_{\text{я}} \cdot \dot{I}_{\text{я}} + R_{\text{я}} \cdot I_{\text{я}} + C_e \cdot \omega = k_y U_{\text{я}}, \quad (3)$$

где α – угол поворота выходного звена; ω – угловая скорость двигателя; $I_{\text{я}}$ – ток якоря двигателя; $J_{\text{пр}}$ – приведенный к валу двигателя момент инерции привода; $L_{\text{я}}$ – индуктивность обмотки якоря; k_p и k_y – коэффициенты передачи редуктора и силового преобразователя.

При их приведении к виду уравнений состояния

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4)$$

матрицы объекта имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & k_p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_M}{J_{\text{ПР}}} \\ 0 & -\frac{C_e}{L_{\text{Я}}} & -\frac{R_{\text{Я}}}{L_{\text{Я}}} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_y}{L_{\text{Я}}} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где A и B – матрицы объекта; x – вектор переменных состояния (в нашем случае α , ω , $I_{\text{Я}}$); u – вектор управления.

Критерий качества регулирования (на интервале времени $t_0 - t_k$)

$$I = \int_{t_0}^{t_k} (u^T R u + x^T Q x) dt, \quad (7)$$

где R – симметричная, положительно-определенная матрица весовых коэффициентов, определяющих затраты на управление;
 Q – симметричная, неотрицательно-определенная матрица весовых коэффициентов, определяющих качество переходного процесса.

$$U^* = -k_1 \alpha - k_2 \omega - k_3 I_{\text{Я}} = -\frac{k_y}{L_{\text{Я}} R} p_{13} \alpha - \frac{k_y}{L_{\text{Я}} R} p_{23} \omega - \frac{k_y}{L_{\text{Я}} R} p_{33} I_{\text{Я}}. \quad (12)$$

Таким образом, для построения оптимальной системы требуется находить только трех элементов p_{13} , p_{23} и p_{33} последнего столбца матрицы \bar{P} .

Оптимальное значение критерия

$$I^* = x^T P(t) x, \quad (8)$$

где $P(t)$ – весовая матрица (в общем случае зависящая от времени).

Постоянные значения весовой матрицы получаются при оптимизации на бесконечном интервале времени и находятся из решения алгебраического уравнения [1]

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (9)$$

Найденную матрицу постоянных коэффициентов обозначаем \bar{P} .

При этом оптимальное управление

$$U^* = -Kx, \quad (10)$$

где $K = R^{-1}B^T \bar{P}$ – матрица коэффициентов обратной связи по переменным состояния.

В нашем случае (для системы третьего порядка) требуется находить коэффициенты k_1, k_2, k_3 матрицы K .

Для системы с одним входом матрица R состоит из одного элемента. Обозначим

$$R = [r]. \quad (11)$$

С учетом (6) и (11) закон оптимального управления

Матрицу Q , входящую в критерий (7), принимаем в виде

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Уравнение (9) после подстановки матриц (5), (6), (12), (13) приводится к виду

$$\begin{bmatrix} \frac{k_y^2}{L_{\text{Я}}^2 R} p_{13}^2 - q_{11} & \frac{k_y^2}{L_{\text{Я}}^2 R} p_{13} p_{23} - k_p p_{11} + \frac{C_e}{L_{\text{Я}}} p_{13} & \frac{k_y^2}{L_{\text{Я}}^2 R} p_{13} p_{33} - \frac{C_M}{J_P} p_{12} + \frac{R_{\text{Я}}}{L_{\text{Я}}} p_{13} \\ X & \frac{k_y^2}{L_{\text{Я}}^2 R} p_{13} - 2k_p p_{12} + \frac{2C_e}{L_{\text{Я}}} p_{23} - q_{22} & \frac{k_y^2}{L_{\text{Я}}^2 R} p_{23} p_{33} - k_p p_{13} - \frac{C_M}{J_P} p_{22} + \frac{R_{\text{Я}}}{L_{\text{Я}}} p_{23} + \frac{C_e}{L_{\text{Я}}} p_{33} \\ X & X & \frac{k_y^2}{L_{\text{Я}}^2 R} p_{33}^2 - \frac{2C_M}{J_P} p_{23} + \frac{2R_{\text{Я}}}{L_{\text{Я}}} p_{33} - q_{33} \end{bmatrix} = 0. \quad (14)$$

Элементы, обозначенные «X», равны соответствующим элементам над главной диагональю, поскольку матрица является симметричной.

Для нахождения p_{13} , p_{23} и p_{33} , которые входят в закон управления (12), приравняем к нулю следующие элементы матрицы (14)

$$\frac{k_y^2}{L_{\text{Я}}^2 R} p_{13}^2 - q_{11} = 0; \quad (15)$$

$$\frac{k_y^2}{L_{\text{Я}}^2 R} p_{13} p_{33} - \frac{C_M}{J_P} p_{12} + \frac{R_{\text{Я}}}{L_{\text{Я}}} p_{13} = 0; \quad (16)$$

$$\frac{k_y^2}{L_{\text{Я}}^2 R} p_{23}^2 - 2k_p p_{12} + \frac{2C_e}{L_{\text{Я}}} p_{23} - q_{22} = 0; \quad (17)$$

Из (15) находим

$$p_{13} = \frac{L_{\text{Я}}}{k_y} \sqrt{q_{11} R}. \quad (19)$$

Из (19) и (12) получаем оптимальное значение

$$k_1 = \sqrt{q_{11} / R}. \quad (20)$$

Таким образом, оптимальное значение коэффициента обратной связи по перемещению определяется только значениями матриц критерия оптимизации и не зависит от матриц объекта управления.

Из уравнений (16), (17), исключая p_{12} , находим

$$p_{33} = \frac{C_M}{2k_p J_p p_{13}} p_{23}^2 + \frac{c_e C_M L_{я} R}{k_p k_y J_p p_{13}} p_{23} - \frac{R_{я} L_{я} R}{k_y^2} - \frac{C_M L_{я}^2 R}{2k_p k_y^2 J_p p_{13}} q_{22}. \quad (21)$$

Из уравнения (18)

$$p_{33} = \frac{L_{я} R}{k_y} \left[-\frac{R_{я}}{k_y} + \sqrt{\frac{R_{я}^2}{k_y^2} + \frac{2C_M}{J_p R} p_{23} + \frac{q_{33}}{R}} \right]. \quad (22)$$

К сожалению, из (21), (22) не удается в чистом виде выразить p_{23} , p_{33} .

Из (21) и (12) с учетом (20) получаем

$$k_3 = \frac{C_M \sqrt{R/q_{11}}}{2k_p J_p} k_2^2 + \frac{c_e C_M \sqrt{R/q_{11}}}{k_p k_y J_p} k_2 - \frac{R_{я}}{k_y} - \frac{C_M}{2k_p J_p \sqrt{Rq_{11}}} q_{22}. \quad (23)$$

Из (22) и (12) с учетом (20) получаем

$$k_3 = -\frac{R_{я}}{k_y} + \sqrt{\frac{R_{я}^2}{k_y^2} + \frac{2C_M L_{я}}{J_p k_y} k_2 + \frac{q_{33}}{R}}. \quad (24)$$

Методика исследований

Для оценки показателей качества переходного процесса и потерь энергии разработана математическая модель привода в приложении Simulink, которая приведена на рисунке 1.

Совместное решение (23), (24) графическим или итерационным методом позволяет определить оптимальные значения k_2 и k_3 .

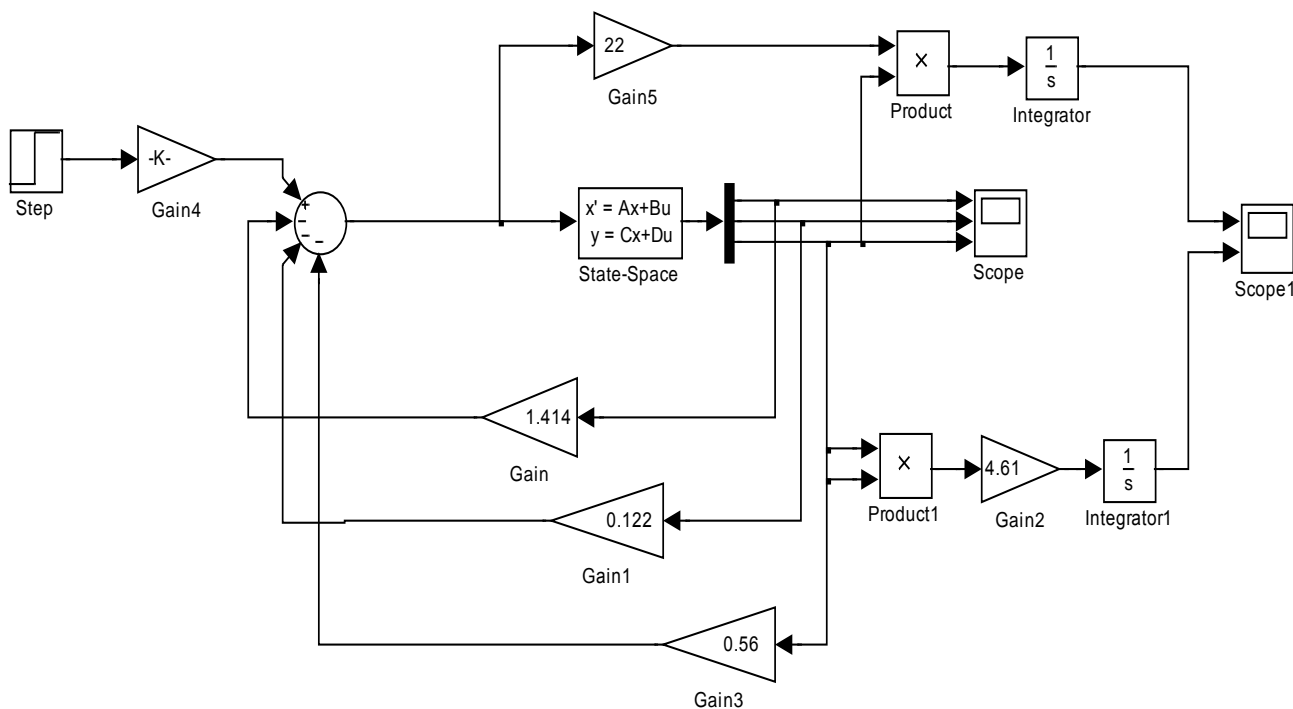


Рисунок 1 – Модель привода в приложении Simulink

В модели предусмотрен вывод на осциллограф Scope переменных состояния: угла поворота выходного вала α (она же является выходной переменной), угловой скорости ω и тока якорной обмотки $I_{я}$. Вид осциллограммы показан на рисунке 2. На осциллограф Scope1 выводятся кривые изменения энергии, потребленной двигателем, и потерь энергии в обмотке якоря ΔP . Вид осциллограммы показан на рисунке 3.

Первая кривая учитывает накопление энергии ротором двигателя (пик кривой) и ее возврат источнику при торможении ротора. Установившиеся значения по двум кривым совпадают и соответствуют потерям энергии (рассеянии на активном сопротивлении обмотки ротора).

Процедура анализа реализуется следующим образом. При заданных значениях элементов матриц Q и R вычисляются значения k_1 , k_2 и k_3 по (20), (23), (24). Данные коэффициенты вводятся в модель и на основе получаемых в результате моделирования осциллограмм находятся показатели качества переходного процесса и потери энергии.

Результаты исследования и обсуждение

Результаты вычислений приведены в таблицах 1–4. В качестве показателей качества переходного процесса приняты время регулирования t_p (вычисляется при допустимом отклонении регулируемой переменной 2 %) и перерегулирование σ , а в качестве показателя энергоэффективности – потери энергии в приводе за время переходного процесса ΔP . Данные показатели приводятся в таблицах 1–4.

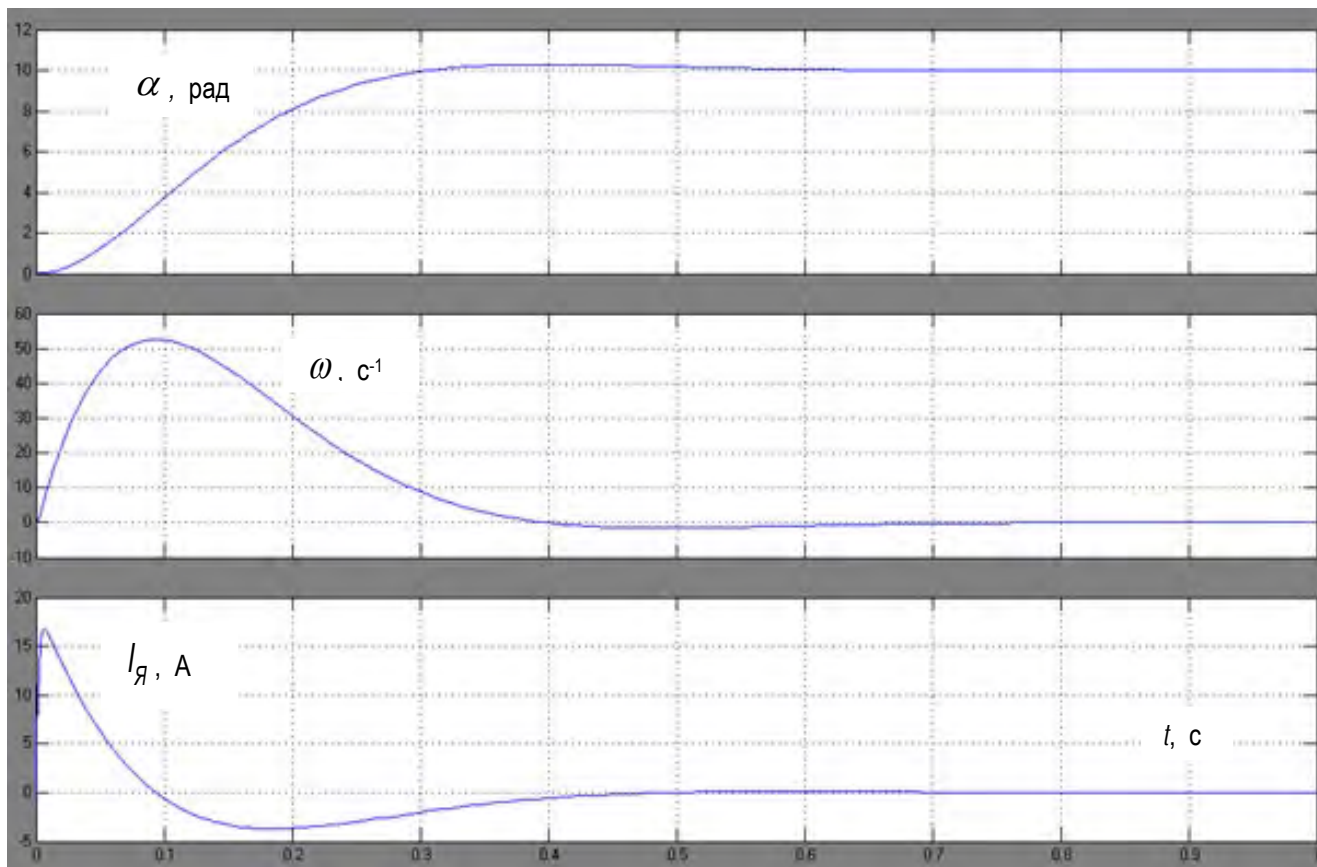


Рисунок 2 – Осциллограммы изменения угла поворота выходного вала, угловой скорости и тока двигателя

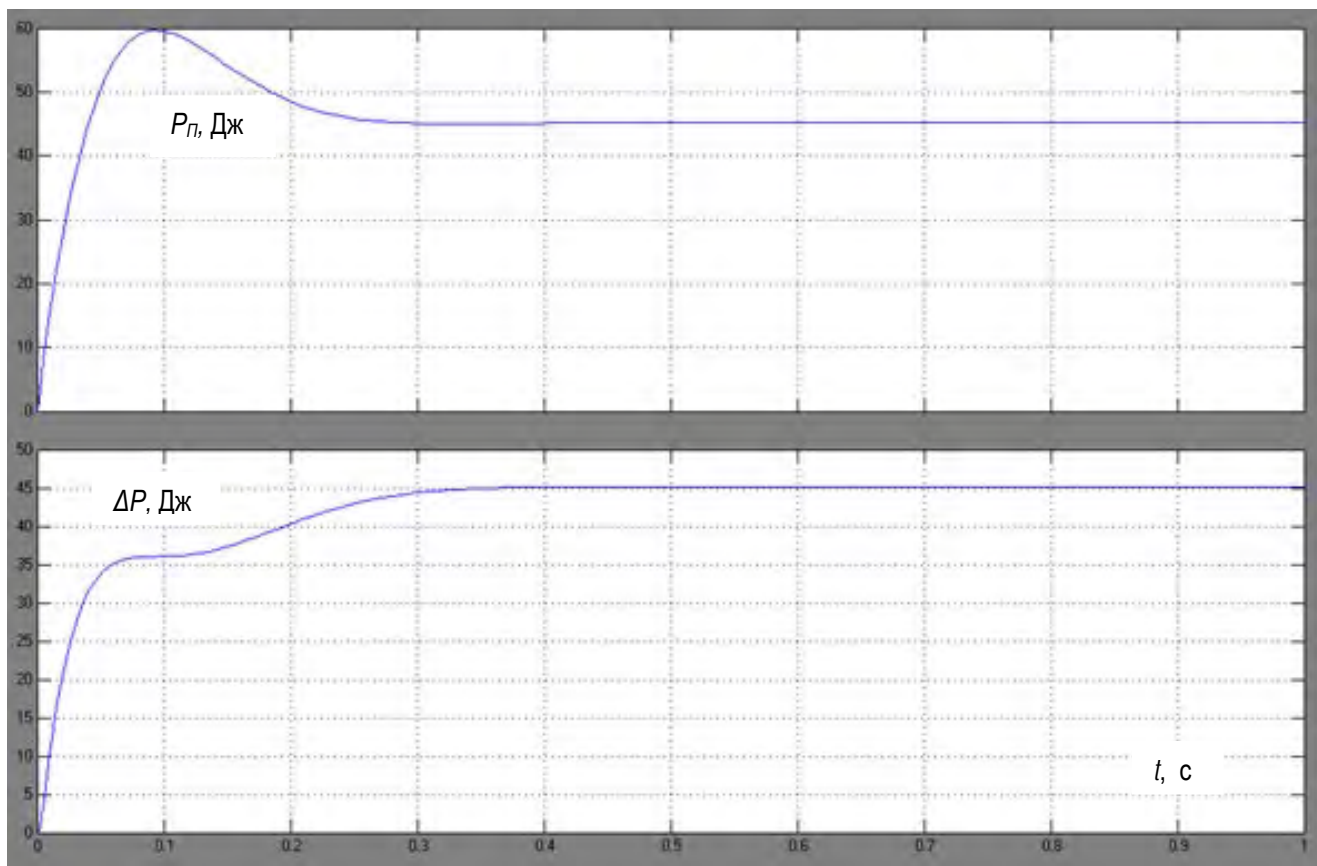


Рисунок 3 – Осциллограммы изменения потребленной энергии и потерь энергии

Таблица 1 – Результаты моделирования при $q_{11} = 1, q_{22} = 0, q_{33} = 0$

| r | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| k_1 | 1,0000 | 0,7071 | 0,5774 | 0,5000 | 0,4472 | 0,3162 |
| k_2 | 0,0393 | 0,0291 | 0,0244 | 0,0214 | 0,0194 | 0,0141 |
| k_3 | 0,0189 | 0,0142 | 0,0119 | 0,0105 | 0,0095 | 0,0070 |
| t_p, c | 0,249 | 0,337 | 0,421 | 0,483 | 0,539 | 0,761 |
| $\sigma, \%$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\Delta P, Дж$ | 148 | 86 | 59 | 46 | 38 | 20 |

Таблица 2 – Результаты моделирования при $q_{11} = 1, q_{22} = 1, q_{33} = 0$

| r | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| k_1 | 1,0000 | 0,7071 | 0,5774 | 0,5000 | 0,4472 | 0,3162 |
| k_2 | 0,9503 | 0,6572 | 0,5275 | 0,4503 | 0,3977 | 0,2676 |
| k_3 | 0,2846 | 0,2176 | 0,1843 | 0,1631 | 0,1479 | 0,1072 |
| t_p, c | 3,91 | 0,337 | 3,95 | 3,96 | 3,97 | 3,99 |
| $\sigma, \%$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\Delta P, Дж$ | 6,21 | 5,02 | 4,48 | 4,12 | 3,81 | 3,05 |

Таблица 3 – Результаты моделирования при $q_{11} = 1, q_{22} = 1, q_{33} = 1$

| r | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| k_1 | 1,0000 | 0,7071 | 0,5774 | 0,5000 | 0,4472 | 0,3162 |
| k_2 | 0,9585 | 0,6624 | 0,5315 | 0,4536 | 0,4005 | 0,2693 |
| k_3 | 0,9067 | 0,6172 | 0,4900 | 0,4146 | 0,3635 | 0,2384 |
| t_p, c | 3,94 | 3,95 | 3,95 | 3,95 | 3,95 | 3,96 |
| $\sigma, \%$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\Delta P, Дж$ | 2,71 | 2,62 | 2,53 | 2,44 | 2,35 | 2,12 |

Таблица 4 – Результаты моделирования при $q_{11} = 1, q_{22} = 0, q_{33} = 1$

| r | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| k_1 | 1,0000 | 0,7071 | 0,5774 | 0,5000 | 0,4472 | 0,3162 |
| k_2 | 0,1181 | 0,0743 | 0,0560 | 0,0456 | 0,0388 | 0,0234 |
| k_3 | 0,8243 | 0,5385 | 0,4142 | 0,3414 | 0,2925 | 0,1763 |
| t_p, c | 0,67 | 0,43 | 0,47 | 0,51 | 0,56 | 0,76 |
| $\sigma, \%$ | 2,8 | 1,8 | 1,0 | 0,5 | 0 | 0 |
| $\Delta P, Дж$ | 17,2 | 15,7 | 14,6 | 13,7 | 12,8 | 9,95 |

Из полученных результатов следует, что увеличение значения r матрицы R приводит к снижению потерь во всех случаях. Наиболее сильно данный эффект проявляется при $q_{11} = 1$ и нулевых значениях q_{22}, q_{33} . При последовательном увеличении до единицы элементов q_{22}, q_{33} влияние r на величину потерь ослабевает. Из таблиц 1–4 следует, что значение r целесообразно всегда принимать в пределах 4...10. При этом обеспечивается практически монотонный переходный процесс (отсутствие перерегулирования). Дальнейшее увеличение r снижает потери не существенно. В то же время увеличение r приводит к уменьшению k_1 , что в определенных случаях может иметь свои неудобства. Поэтому принимать $r > 10$ вряд ли целесообразно. При выборе r из указанного диапазона можно исходить, в том числе, из наиболее приемлемого значения k_1 .

Следует отметить, что увеличение q_{22} и q_{33} приводит к весьма интенсивному снижению потерь, но и столь же существенному увеличению длительности переходного процесса, как следует из таблиц 2, 3. Получаемое время регулирования (до 4 с) в большинстве случаев не приемлемо. Длительность переходного процесса при этом практически не зависит от r .

Наиболее предпочтительный вариант, когда элементы матрицы Q имеют значения $q_{11} = 1, q_{22} = 0, q_{33} = 1$ (см. таблицу 4). В сравнении с вариантом $q_{11} = 1, q_{22} = 0, q_{33} = 0$ (см. таблицу 1) в диапазоне $r = 4...10$ время регулирования практически одинаково, а потери уменьшились в 2...3,5 раза. Таким образом, при выборе элементов матрицы Q можно использовать следующий подход. Принять $q_{11} = 1, q_{33} = 1$, а q_{22} увеличивать, пока время регулирования не достигнет максимально допустимого значения. В этом случае потери будут минимальны при заданной длительности переходного процесса.

В соответствии с полученной аналитической зависимостью для оптимального значения коэффициента k_1 , оно определяется только соотношением q_{11}/r . Поэтому в соответствии с рекомендуемым диапазоном для выбора r (4...10) k_1 можно принимать в диапазоне 0,5...0,3. Для коэффициентов k_2 и k_3 соответствующие оптимальные значения можно определить только совместным решением (23), (24) итерационным методом.

Анализ результатов расчета показывает, что увеличение q_{22} , как и увеличение q_{33} , приводит к одновременному росту обоих коэффициентов k_2 и k_3 . В то же время увеличение r приводит к уменьшению всех трех коэффициентов обратной связи. Поэтому оценить влияние на величину потерь и показатели качества каждого коэффициента (k_1, k_2 и k_3) в отдельности сложно.

Заключение

В результате решения задачи оптимального управления для позиционного привода постоянного тока получены аналитические зависимости для расчета коэффициентов обратной связи по углу поворота выходного вала, угловой скорости и току двигателя. Это позволяет синтезировать оптимальный привод инженерным расчетом, не прибегая каждый раз к процедуре оптимизации. При этом коэффициент обратной связи по положению однозначно определяется значениями матриц Q и R , а коэффициенты обратной связи по скорости и току зависят также от параметров двигателя и могут быть вычислены на основе полученных аналитических выражений итерационным методом.

Анализ результатов расчета оптимального привода при варьировании значениями матриц Q и R показал, что увеличение значения r матрицы R во всех случаях приводит к уменьшению потерь в приводе, при этом целесообразно принимать r в диапазоне 4...10, что обеспечивает отсутствие перерегулирования. Увеличение элементов q_{22}, q_{33} матрицы Q приводит к интенсивному снижению потерь в приводе, сопровождающемуся интенсивным ростом времени регулирования (снижением быстродействия привода). Наиболее рациональным является сочетание $q_{11} = 1, q_{22} = 0, q_{33} = 1$, при котором обеспечивается существенное снижение потерь в приводе без заметного уменьшения быстродействия. При этом дальнейшее снижение потерь может быть достигнуто за счет увеличения q_{22} в пределах, определяемых допустимым увеличением времени регулирования. Выявленные закономерности и сформулированные на их основе рекомендации позволяют целенаправленно подойти к выбору матриц Q и R при проектировании оптимальных приводов.

Список цитированных источников

1. Солодовников, В. В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования / В. В. Солодовников, В. Н. Плотников, А. В. Яковлев. – М.: Машиностроение, 1985. – 536 с.
2. Оптимизация привода постоянного тока с регулируемой скоростью / О. Н. Прокопья [и др.] // Вестник Брестского государственного технического университета. – 2023. – № 2. – С. 93–96.
3. Супрунчук, П. Д. Оптимальный электропривод постоянного тока / П. Д. Супрунчук, О. Н. Прокопья, О. Г. Прожизко // Новые технологии и материалы, автоматизация производства: сборник статей / Брестский государственный технический университет. – Брест: БрГТУ, 2021. – С. 20–25.

References

1. Solodovnikov, V. V. Osnovy teorii i elementy sistem avtomaticheskogo regulirovaniya / V. V. Solodovnikov, V. N. Plotnikov, A. V. Yakovlev. – M.: Mashinostroenie, 1985. – 536 c.
2. Optimizatsiya privoda postoyannogo toka s reguliruemoy skorost'yu / O. N. Prokopenya [i dr.] // Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. – 2023. – № 2. – S. 93–96.
3. Suprunchuk, P. D. Optimal'nyy elektroprivod postoyannogo toka / P. D. Suprunchuk, O. N. Prokopenya, O. G. Prozhizhko // Novye tekhnologii i materialy, avtomatizatsiya proizvodstva: sbornik statej / Brestskij gosudarstvennyj tekhnicheskij universitet – Brest: BrGTU, 2021. – S. 20–25.

Материал поступил 11.03.2024, одобрен 28.03.2024, принят к публикации 28.03.2024