

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Строительная механика

Рекомендовано Советом университета
в качестве пособия

по дисциплине «Строительная механика»
для слушателей

Института повышения квалификации и переподготовки кадров
специальности переподготовки

1-70 02 71 «Промышленное и гражданское строительство»

Брест 2011

УДК 624.04
ББК 38.112я73
И 26

Рецензенты:

заместитель директора филиала УП «БелНИИС» – «Научно-технический центр», кандидат технических наук Деркач Валерий Николаевич;

доцент кафедры «Строительная механика» Белорусского национального технического университета, кандидат технических наук, доцент Герашенко Геннадий Андреевич.

В.И. Игнатюк, И.С. Сыроквашко

И 26 Строительная механика: пособие. – Брест: Изд-во БрГТУ, 2011. – 96 с.

ISBN 978-985-493-188-3

В пособии изложены основы строительной механики плоских стержневых систем, включая основные понятия и принципы строительной механики, кинематический анализ сооружений, определение внутренних сил и перемещений в статически определимых рамах, расчет усилий в статически определимых фермах, расчет статически неопределимых рам методом сил и методом перемещений. Приведены примеры расчетов и задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для слушателей института повышения квалификации и переподготовки кадров специальности переподготовки 1-70 02 71 «Промышленное и гражданское строительство». Может использоваться студентами строительных специальностей дневной и заочной форм обучения.

УДК 624.04
ББК 38.112я73

ISBN 978-985-493-188-3

© В.И. Игнатюк, 2011
© И.С. Сыроквашко, 2011
© Издательство БрГТУ, 2011

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Строительная механика и ее задачи

Строительная механика, кратко, – это наука о расчете сооружений на прочность, жесткость и устойчивость.

Основная задача строительной механики – определение напряженно-деформированного состояния сооружений, то есть определение внутренних сил (усилий) и перемещений, возникающих в элементах сооружений от внешних воздействий (силовых, кинематических (смещений опор), температурных).

К задачам строительной механики относятся также изучение принципов образования сооружений, исследование условий их устойчивости, исследование поведения сооружений при различных подвижных и динамических нагрузках.

1.2. Расчетная схема сооружения

Строительная механика служит расчету и проектированию, естественно, реальных сооружений. Однако расчет реального сооружения с точным учетом всех особенностей его конструкции является сложной и, в большинстве случаев, практически неразрешимой задачей. В строительной механике этот расчет упрощают, заменяя реальное сооружение его расчетной схемой.

Расчетная схема сооружения – это упрощенная, идеализированная схема реального сооружения, вводимая в расчет, в которой отражены основные его свойства и пренебрегается второстепенными свойствами, несущественными деталями.

Выбор расчетной схемы во многом определяет трудоемкость расчета и корректность получаемых результатов. Для определения расчетной схемы сооружения необходимо иметь опыт в расчете сооружений, хорошо представлять работу рассчитываемого сооружения и отдельных его элементов, принципы взаимодействия элементов сооружения друг с другом.

Все сооружения являются пространственными системами. Однако часто, если это позволяет сделать структура сооружений, пространственные системы разделяют на плоские, в этом случае их расчет значительно упрощается. Такой подход можно применить, если в пространственной системе можно выделить плоские несущие элементы (рамы, фермы), связанные между собой поперечными связями.

В конструкциях сооружений выделяют стержневые элементы, пластины, оболочки и массивные тела, которые соединяются между собой в единую систему посредством узловых соединений (или просто узлов) и опираются на землю (основание) посредством опорных устройств (опор).

Стержневые элементы – это прямолинейные или криволинейные пространственные элементы, у которого один размер (длина) значительно больше двух других (поперечных размеров). На расчетных схемах такие элементы заменяются их осевыми линиями (прямыми, кривыми или ломаными) и называют стержнями. При этом в расчетах, естественно, учитываются и параметры поперечных сечений этих элементов через соответствующие их характеристики (площади поперечных сечений, моменты инерции и т. д.), приведенные к цен-

трам сечений.

Если сооружение состоит только из стержневых элементов, то оно является стержневой системой.

Реальные опорные устройства на расчетных схемах заменяются идеальными опорами (опорными связями). Опоры – это устройства, передающие нагрузку от сооружений, конструкций на основание, связанное с Землей.

Основные виды опор и их характеристики представлены в таблице 1.1 (суть понятий «кинематическая связь» и «степень свободы») – см. далее).

Таблица 1.1 – Основные виды опор

№ пп	Название опоры	Возможная конструктивная схема опоры	Изображение на расчетных схемах	Число кинематических связей	Число неизвестных реакций (и их составляющих)	Число степеней свободы
1	Шарнирно-подвижная			1	1	2
2	Шарнирно-неподвижная			2	1(2)	1
3	Защемление, заделка			3	2(3)	0
4	Подвижная заделка			2	2	1

Узлы могут быть жесткими, шарнирными и упругими (податливыми).

Шарнирное соединение (или просто шарнир) рассматривается как устройство, допускающее взаимный поворот соединяемых элементов относительно центра шарнира. На расчетных схемах шарнир обозначается кружком. Силами трения в шарнирах обычно пренебрегают.

Жесткое соединение элементов (жесткий узел) полностью устраняет их взаимное смещение, и угол между осями стержней в нем не изменяется при деформировании системы.

Иногда разделение узлов на идеально шарнирные и идеально жесткие не соответствует действительности. Тогда рассматривают податливые узлы, допускающие взаимные смещения соединяемых элементов (повороты, сдвиги), зависящие от возникающих в узле внутренних сил. На расчетных схемах податливые узлы специально оговаривают или изображают с упругими связями – линейными (рис. 1.1а) или угловыми (рис. 1.2а). Внутренние силы в податливом узле зависят от взаимного смещения соединяемых элементов. Например, величина изгибающего момента в узле на рис. 1.2а будет зависеть от взаимного угла поворота соединяемых стержней и может быть выражена через значение упругой податливости узла c , представляющего собой величину изгибающего момента, возникающего при взаимном повороте соединяемых в узле элементов на единичный угол (рис. 1.2б).

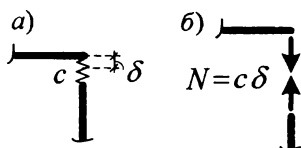


Рисунок 1.1

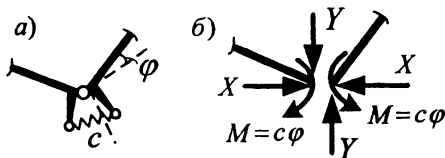


Рисунок 1.2

В реальных сооружениях любые элементы (стойки, балки, пластины, оболочки и т. д.) всегда имеют какие-то отклонения от проектных форм, размеров, свойств используемых материалов, которые возникают при их изготовлении, транспортировке, сборке и которые на расчетных схемах чаще всего не учитываются. Невозможно представить себе идеально прямую стойку, которая на расчетных схемах представляется прямым стержнем.

Шарнирные соединения элементов (шарниры) считаются идеальными, то есть считается, что в них отсутствуют силы трения, а усилия передаются через центры шарниров, что на практике труднодостижимо.

Еще больше приближений связано с нагрузками, определить точные величины которых в ряде случаев практически невозможно. Нормативные значения снеговых и ветровых нагрузок рассчитываются на основе статистической обработки величин нагрузок по результатам многолетних наблюдений. Разделение нагрузок на сосредоточенные силы и моменты, на равномерно распределенные нагрузки также достаточно условно.

Выбор расчетной схемы является первым весьма важным и сложным этапом расчета – расчетную схему надо выбрать так, чтобы учесть все основные особенности данного сооружения и при этом максимально облегчить расчет.

Степень точности отражения расчетной схемой реальной работы сооружения связана с возможностями учета в расчетной схеме:

- действительной геометрии элементов сооружения и их соединений;
- разнообразных физико-механических свойств материалов сооружения;
- реально действующих на сооружение воздействий и нагрузок;
- использования методов расчета, компьютерных программ и вычислительной техники, позволяющих выполнить расчет с необходимой точностью.

1.3. Нагрузки и воздействия на расчетные схемы

Все воздействия на сооружения можно разделить на силовые (нагрузки), температурные и кинематические (смещения опор и связей).

При этом воздействия могут быть *статическими* и *динамическими*.

К *статическим* относят воздействия и нагрузки, которые при приложении возрастают от нуля до конечной величины настолько медленно, что скорости и ускорения точек систем при их деформировании малы и можно пренебречь силами инерции.

К *динамическим* относят воздействия, которые сообщают массам сооружения существенные ускорения и соответственно вызывают такие силы инерции, что их влияние должно учитываться.

Примерами динамических воздействий являются ударные и вибрационные нагрузки, воздействия взрывных волн, сейсмические воздействия.

Динамические нагрузки и особенности поведения сооружений при их действии изучаются в разделе «Динамика сооружений».

Силовые воздействия или нагрузки представляются сосредоточенными силами, сосредоточенными моментами, распределенными нагрузками постоянной или переменной интенсивности. Эти нагрузки могут быть *подвижными* и *неподвижными*. *Неподвижные* нагрузки действуют постоянно в одном месте. *Подвижные* перемещаются по системе (например, транспорт по мосту).

1.4. Классификация сооружений

Классификация сооружений и их расчетных схем может выполняться по различным признакам, часть из которых представлена ниже.

Все сооружения являются *пространственными*. Однако, как уже указывалось, часто они могут рассчитываться и рассчитываются как *плоские* системы. В данном пособии далее рассматриваются только плоские стержневые системы.

По геометрическим признакам выделяют:

1. Стержневые сооружения (состоящие из стержней – балки, фермы, рамы).
2. Сооружения из пластин и оболочек.
3. Массивные сооружения (подпорные стены, плотины).

По особенностям работы сооружений различают:

1. Балочные конструкции.
2. Арочные конструкции.
3. Рамы – стержневые системы с жестким соединением элементов во всех либо некоторых узлах.
4. Фермы – системы, все элементы которых испытывают практически только растяжение-сжатие.
5. Висячие системы – в которых основные, преимущественно гибкие элементы, работают только на растяжение.
6. Комбинированные системы, представляющие комбинацию сооружений 1–5.
7. Плиты.
8. Оболочки.

С точки зрения статики, системы делятся на:

1. Статически определимые системы – не имеющие «лишних» связей и, соответственно, расчет которых может быть выполнен с использованием только уравнений равновесия (уравнений статики).

2. Статически неопределимые системы – имеющие «лишние» связи, и для расчета которых необходимо привлекать дополнительные уравнения.

По направлениям опорных реакций выделяют:

1. Безраспорные сооружения – сооружения, у которых нагрузка одного направления (например, вертикальная) вызывает опорные реакции того же направления (только вертикальные). Пример: простые и многопролетные балки.

2. Распорными называют сооружения, у которых при нагрузке одного направления возникают опорные реакции и в других направлениях. Примерами распорных систем являются арки, трехшарнирные рамы.

1.5. Основные допущения, принципы и понятия

В основу классических методов строительной механики положены следующие основные допущения, принципы и понятия:

1. Предполагается, что материал всех элементов сооружений является сплошным, изотропным и однородным.

Изотропным называется материал, свойства которого по всем направлениям одинаковы.

2. Тела считают идеально упругими. Такие тела полностью восстанавливают свою первоначальную форму и размеры после удаления внешней нагрузки.

3. Рассматриваются материалы, удовлетворяющие закону Гука, согласно которому зависимость между нагрузками и перемещением линейна.

4. Для систем и сооружений в целом также принимается физическая модель, для которой выполняется линейная зависимость между нагрузками и перемещениями, и такие системы называют линейно-деформируемыми или упругими.

5. Рассматривается статическое приложение нагрузок.

6. Принимается, что для нагрузок и воздействий, действующих на сооружения, справедлив принцип независимости действия сил, согласно которому – результат действия суммы сил равен сумме результатов действия каждой силы в отдельности.

2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ

Строительные сооружения предназначены воспринимать действующие на них нагрузки, сохраняя при этом заданную форму, и поэтому они должны быть геометрически неизменяемыми.

Геометрически неизменяемые системы – это системы, изменение формы и взаимного расположения элементов которых возможно только вследствие деформации их элементов.

Таким образом, в элементах неизменяемых систем допускается и будет иметь место изменяемость, которая возникает в результате деформирования

этих элементов (прогибы, продольное сжатие-растяжение и т. п.).

Примером простейшей неизменяемой системы является трехстержневой шарнирный треугольник (рис. 2.1).

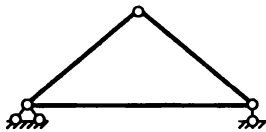


Рисунок 2.1

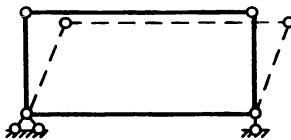


Рисунок 2.2

Геометрически изменяемые системы – это системы, изменение формы и взаимного расположения элементов которых возможно без деформации их элементов. Простейшим примером изменяемой системы является шарнирно-стержневой четырехугольник (рис. 2.2).

Изменяемые системы в сооружениях недопустимы, так как они могут резко менять форму и не могут воспринимать действующие на них нагрузки.

Для выяснений геометрической неизменяемости или изменяемости систем служит кинематический анализ сооружений, который должен предшествовать расчету и выполняется в два этапа:

- 1) определение степени свободы системы;
- 2) геометрический анализ структуры системы.

Степень свободы системы – это число независимых геометрических параметров (перемещений, координат), определяющих положение всех элементов сооружения на плоскости или в пространстве.

Например, точка на плоскости имеет две степени свободы, так как её положение характеризуется двумя координатами (рис. 2.3а).

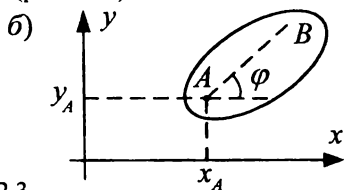
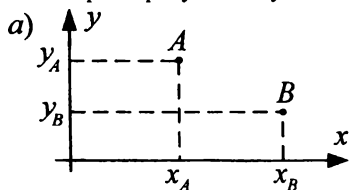


Рисунок 2.3

Точка в пространстве имеет три степени свободы.

Любое заведомо неизменяемое тело, сооружение либо его часть будем называть диском.

Примеры дисков представлены на рис. 2.4.

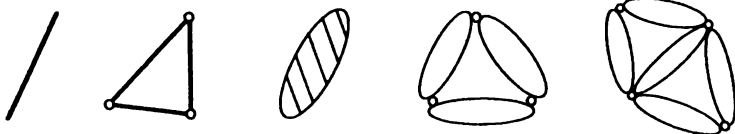


Рисунок 2.4

Любой диск на плоскости обладает тремя степенями свободы – его положение на плоскости определяется тремя параметрами (x_A, y_A, φ) (рис. 2.3б).

В пространстве диск имеет шесть степеней свободы – три координаты некоторой точки и три угла поворота относительно осей x, y, z .

Всякое тело, отнимающее у другого тела одну степень свободы, называется кинематической или простой связью.

Сооружения на расчетных схемах, как уже отмечалось, представляют в виде систем, состоящих из дисков, соединенных между собой шарнирами, и опирающихся с помощью опор на землю (основание).

При этом следует различать: – шарнирный узел (*шарнир*)
– и простой или одиночный шарнир.

Одиночный (простой шарнир) – это шарнир, соединяющий два диска.

В шарнирах (шарнирных узлах), соединяющих ряд дисков, будет несколько простых шарниров, число которых определяется по формуле:

$$n_{п.ш.} = n_y - 1,$$

где n_y – число дисков, соединяющихся в узле.

Например:

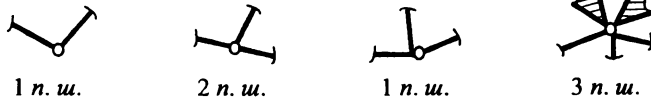


Рисунок 2.5

Каждый простой шарнир препятствует любым взаимным линейным перемещениям соединяемых элементов, оставляя возможность их взаимного поворота друг относительно друга, соответственно имеет две кинематические связи, и при разрезании в нем возникают две внутренние силы (рис. 2.6).

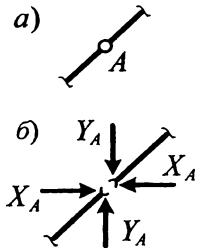


Рисунок 2.6

Определение степени свободы системы

может быть выполнено по формулам:

$$1. \quad W = -(3K - III), \tag{2.1}$$

где K – число замкнутых контуров в системе;

III – число простых, одиночных шарниров в системе, включая шарниры между дисками (стержнями) и основанием (землей).

Эта формула может применяться для любых плоских стержневых систем.

Под замкнутым контуром будем понимать замкнутую цепь, образованную последовательным соединением (жестко либо шарнирно) ряда дисков, одним из которых может выступать и земля (основание) (рис. 2.7)

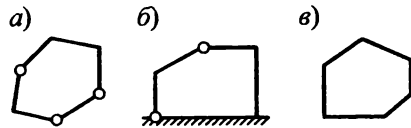


Рисунок 2.7

Если в замкнутом контуре все элементы соединены друг с другом только жестко, то его будем называть *жестким замкнутым контуром* (рис. 2.7в).

Формула основана на том, что каждый жесткий замкнутый контур имеет три «лишних» связи, а каждый врезанный в контур шарнир придает контуру одну степень свободы.

Для системы, изображенной на рис. 2.8, получим

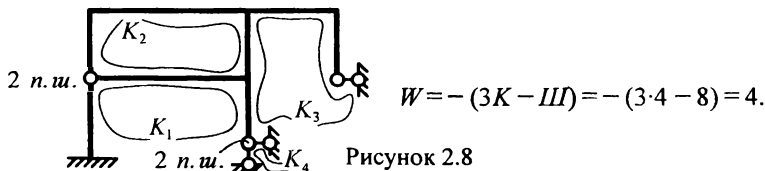


Рисунок 2.8

$$2. \quad W = 3D - 2\text{III} - C_0, \quad (2.2)$$

где D – число дисков в системе;

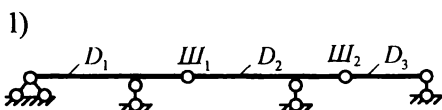
III – число одиночных (простых) шарниров, соединяющих диски D ;

C_0 – число кинематических опорных связей в системе.

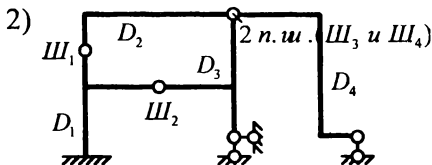
Данную формулу можно использовать для всех систем, кроме содержащих в себе полностью жесткие замкнутые контуры (рис. 2.7в).

Эта формула основана на том, что каждый диск имеет три степени свободы, каждый шарнир, соединяющий диски, отнимает у системы дисков две степени свободы, а каждая кинематическая связь отнимает одну степень свободы.

Примеры применения формулы:



$$W = 3D - 2\text{III} - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0; \quad W = 3D - 2\text{III} - C_0 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 6 = -2.$$



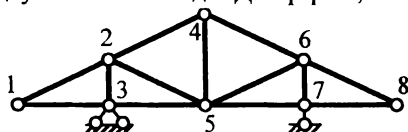
3. Для ферм более удобно и целесообразно применять формулу:

$$W = 2Y - C - C_0, \quad (2.3)$$

где Y – число шарнирных узлов в ферме; C – число стержней фермы;

C_0 – число опорных связей.

В основе этой формулы лежит то, что каждый узел фермы (как точка) имеет две степени свободы, а каждый стержень, соединяя узлы фермы, отнимает одну степень свободы. Для фермы, изображенной на рис. 2.9, получим



$$W = 2Y - C - C_0 = 2 \cdot 8 - 13 - 3 = 0.$$

Рисунок 2.9

В зависимости от числа степеней свободы для систем возможно три качественно отличных друг от друга результата:

1. $W > 0$ – система изменяема, является механизмом, так как не имеет достаточного количества связей;

2. $W = 0$ – система имеет достаточное число связей, чтобы быть неизменяемой и статически определимой;

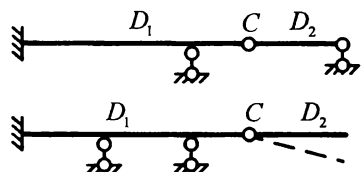
3. $W < 0$ – система имеет лишние связи, является статически неопределимой и должна быть неизменяемой.

Условия $W < 0$ и $W = 0$ – являются необходимыми, но недостаточными, чтобы утверждать, что система неизменяема, так как геометрическая неизменяемость зависит не только от числа связей, но и от их расположения, то есть от структуры системы. В ряде случаев система может иметь достаточное число связей, но быть изменяемой. Это иллюстрирует, например, простая система, представленная на рис. 2.10а. Балка как диск имеет три степени свободы, которые, казалось бы, убираются тремя имеющимися связями. Но так как все эти связи вертикальны, ни одна из них не закрепляет балку от горизонтального смещения, которое здесь возможно, и соответственно система изменяема. Если одну из опор переставить, например, установить ее горизонтально, как показано на рис. 2.10б, система становится неизменяемой.



Рисунок 2.10

На рис. 2.11 представлены две балочные системы, степень свободы которых описывается одним и тем же выражением (у них одинаковое число дисков, шарниров и опорных связей), однако первая из них геометрически неизменяема, а вторая изменяема (диск D_2 может поворачиваться относительно шарнира C).



$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 5 = 0.$$

Рисунок 2.11

Как видим, неизменяемость систем в большей степени определяется расположением их элементов, условиями их соединения друг с другом и положением опорных связей, то есть структурой систем.

Поэтому для выяснения, действительно ли сооружение геометрически неизменяемо, или оно изменяемо (мгновенно изменяемо), и необходимо выполнять *Геометрический анализ структуры сооружений*, который обычно производится на основе заранее известных

Принципов образования геометрически неизменяемых систем:

1. Три диска, соединенные друг с другом последовательно тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, образуют неизменяемую систему, то есть такая система в целом является диском (рис. 2.12, поз. 1).

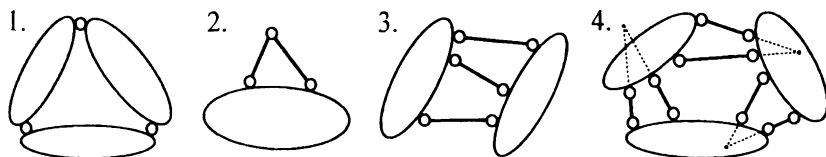


Рисунок 2.12 – Принципы образования геометрически неизменяемых систем

2. Если точка присоединяется к диску двумя стержнями, не лежащими на одной прямой, то такая система в целом неизменяема, т.е. является диском (рис. 2.12, поз. 2). С учетом того, что стержни – это тоже диски, здесь мы имеем, по существу, первый признак неизменяемости.

3. Два диска, соединенные друг с другом тремя стержнями, не параллельными друг другу и не пересекающимися в одной точке, образуют неизменяемую систему, то есть такая система в целом является диском (рис. 2.12, поз. 3).

Рассмотрим соединение двух дисков двумя пересекающимися (в некоторой точке C) стержнями (рис. 2.13а). Анализ этой системы показывает, что диски могут поворачиваться друг по отношению к другу относительно точки пересечения стержней C , будто в этой точке находится шарнир. Такой шарнир называют *фиктивным*, а рассматриваемое соединение двух дисков тогда может быть представлено в виде, показанном на рис. 2.13б.

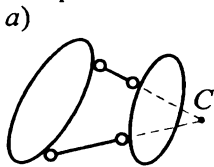


Рисунок 2.13

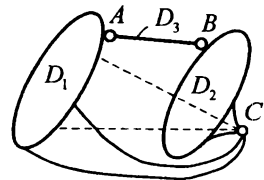


Рисунок 2.14

С учетом отмеченного рассматриваемый случай соединения трех дисков (рис. 2.12, поз. 3) может быть представлен в виде, показанном на рис. 2.14, что соответствует последовательному соединению трех дисков тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, или первому признаку неизменяемости.

4. Три диска, соединенные последовательно друг с другом парами стержней, точки пересечения которых не лежат на одной прямой, образуют неизменяемую систему, и система в целом является диском (рис. 2.12, поз. 4).

Если пары пересекающихся стержней заменить здесь фиктивными шарнирами, расположенными в точках пересечения этих пар стержней, то опять будем иметь три диска, соединенных друг с другом последовательно тремя шарнирами (правда, фиктивными), не лежащими на одной прямой.

Понятие о мгновенно изменяемых системах

Мгновенно изменяемые системы представляют собой исключительный случай геометрически неизменяемых систем, при котором они допускают бесконечно малые перемещения.

Рассмотрим, например, систему, представленную на рис. 2.15а.

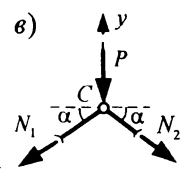
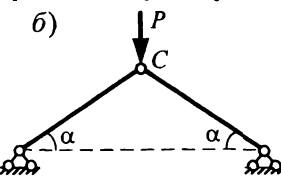
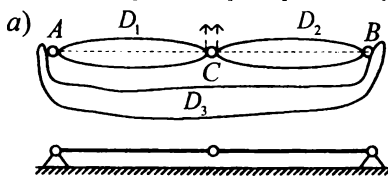


Рисунок 2.15

Несложно понять, что крайняя правая точка диска D_1 (у шарнира C) в рассматриваемом состоянии может вертикально перемещаться (при повороте диска D_1 относительно точки A вектор перемещения этой точки будет перпендикулярен радиусу AC); рассуждая аналогично, получим, что крайняя левая точка диска D_2 также имеет возможность вертикального перемещения, которое будет полностью совпадать с предыдущим вертикальным перемещением. Таким образом, точка C в системе может вертикально перемещаться. Но как только она переместится на некоторую величину, система станет удовлетворять первому признаку неизменяемости – три диска становятся соединенными последовательно друг с другом тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, и становится неизменяемой. Такова суть мгновенно изменяемой системы. Возможность перемещений в мгновенно изменяемых системах, пусть и небольших, не слугит их использованию в строительных сооружениях.

Рассматриваемую мгновенно изменяемую систему можно получить из системы, представленной на рис. 2.15б, если угол α устремить к нулю ($\alpha \rightarrow 0$). При узловой нагрузке стержни этой системы (рис. 2.15б) будут работать только на сжатие, и продольные усилия в них можно найти, вырезав узел C (рис. 2.15в):

$$\sum Y = 0; \quad 2N_1 \sin \alpha - P = 0; \quad N_1 = -\frac{P}{2 \sin \alpha}.$$

При $\alpha \rightarrow 0$ получим $N_1 = -\frac{P}{0} = \infty$.

Этот расчет показывает, что в мгновенно изменяемых системах усилия могут принимать очень большие значения, и соответственно подобрать сечения для их элементов практически невозможно. Поэтому и с этих позиций мгновенно изменяемые системы не могут использоваться в строительных сооружениях.

Признаки мгновенно изменяемых систем

1. Если три диска соединены друг с другом последовательно тремя шарнирами, лежащими на одной прямой, то такая система мгновенно изменяема (рис. 2.15а).

2. Если два диска соединены друг с другом тремя стержнями, параллельными друг другу, то эта система мгновенно изменяема (рис. 2.16а).

Здесь диски могут смещаться друг относительно друга в направлении, перпендикулярном параллельным стержням; но как только они переместятся на некоторую величину, вследствие поворота стержней на разные углы система начинает удовлетворять второму признаку неизменяемости – два диска становятся соединенными друг с другом тремя стержнями, не параллельными друг другу и не пересекающимися в одной точке, образуя неизменяемую систему.

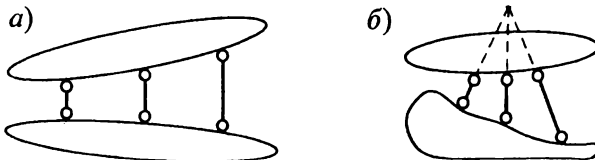


Рисунок 2.16

3. Если два диска соединены друг с другом тремя стержнями, пересекающимися в одной точке, то эта система мгновенно изменяема (рис. 2.16б).

В этом случае диски могут поворачиваться друг относительно друга вокруг точки пересечения стержней (как фиктивного шарнира); при этом повороте стержни, имея различную длину, будут поворачиваться на разные углы, вследствие чего два диска становятся соединенными друг с другом тремя стержнями, не параллельными друг другу и не пересекающимися в одной точке (второй признак неизменяемости), и система становится неизменяемой.

Выполним кинематический анализ нескольких систем.

Пример 1. Рассмотрим систему, представленную на рис. 2.17а. Определим степень свободы системы по формулам (2.1) (рис. 2.17а) и (2.2) (рис. 2.17б):

$$W = -(3K - \Pi) = -(3 \cdot 4 - 12) = 0; \quad W = 3D - 2\Pi - C_0 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 5 = 0.$$

Результаты, как видно, совпадают, что, конечно, и должно быть.

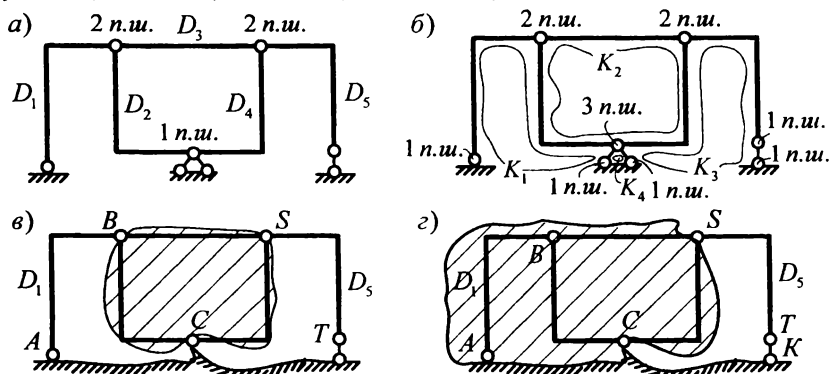


Рисунок 2.17

Переходим ко второму этапу кинематического анализа – геометрическому анализу структуры системы. Отметим, что основание (земля) является целостным объектом, то есть будет тоже диском.

Процедура геометрического анализа:

1) диски D_2, D_3 и D_4 соединены тремя шарнирами B, S, C , не лежащими на одной прямой, и соответственно образуют неизменяемую систему, то есть диск (первый признак неизменяемости) (рис. 2.17в);

2) шарнир C присоединен к диску земли двумя стержнями, не лежащими на одной прямой, образуя вместе с ней неизменяемую систему (второй признак неизменяемости) (рис. 2.17в);

3) диск D_1 , диск земли и диск BSC соединены тремя шарнирами A, B и C , не лежащими на одной прямой, образуя неизменяемую систему (первый признак неизменяемости) (рис. 2.17з);

4) последний диск (вместе с основанием), диск D_5 и опорный стержень TK (а это тоже диск) соединены друг с другом последовательно тремя шарнирами S, T и K , не лежащими на одной прямой, (рис. 2.17з) и соответственно образуют

в целом неизменяемую систему (первый признак неизменяемости).

Таким образом, делаем вывод, что рассматриваемая система статически определима и геометрически неизменяема.

Пример 2. Исследуем систему, представленную на рис. 2.18а. Определим степень свободы системы по формулам (1) (рис. 2.18б) и (2) (рис. 2.18в):

$$W = -(3K - 3\Pi) = -(3 \cdot 3 - 9) = 0;$$

$$W = 3D - 2\Pi - C_0 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0.$$

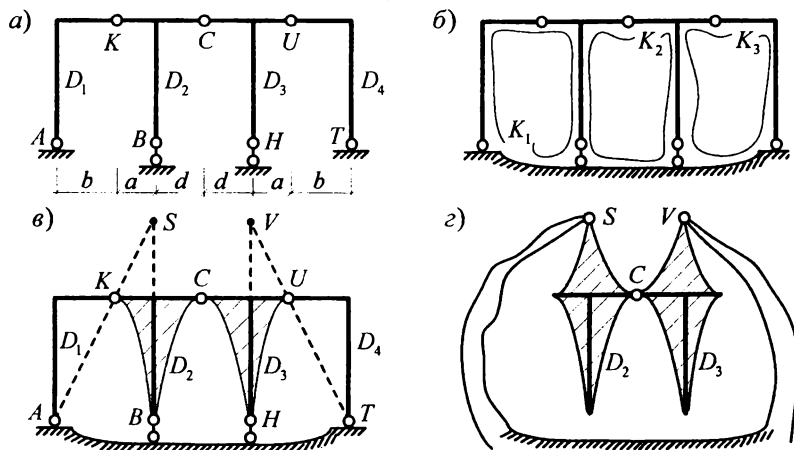


Рисунок 2.18

Геометрический анализ структуры системы:

1) диск D_1 соединяется с остальной системой двумя шарнирами A и K (рис. 2.18в); в каждом из шарниров возникает одна реактивная сила, и, таким образом, диск находится под действием двух сил; известно, что в равновесии такой диск может находиться только в том случае, если указанные силы будут направлены по прямой, соединяющей точки приложения сил, навстречу друг другу (друг от друга); то есть диск D_1 работает по существу как стержень AK ;

2) аналогично будет работать и диск D_4 (как стержень UT) (рис. 2.18в);

3) получается, что диск D_2 соединяется с диском земли двумя стержнями – стержнем AK и вертикальным стержнем шарнирно подвижной опоры B , которые пересекаются в точке S (рис. 2.18в); такое соединение этих дисков может быть заменено их соединением фиктивным шарниром в точке S (рис. 2.18з);

4) аналогично диск D_3 соединяется с диском земли двумя стержнями – стержнем UT и вертикальным стержнем шарнирно подвижной опоры H , которые пересекаются в точке V (рис. 2.18в), и такое соединение этих дисков можно заменить их соединением фиктивным шарниром в точке V (рис. 2.18з);

5) в результате получаем, что три диска – D_2, D_3 и диск земли – соединены друг с другом последовательно тремя шарнирами S, V и C , не лежащими на одной прямой, образуя неизменяемую систему (первый признак неизменяемости).

Вывод: рассматриваемая система статически определима и неизменяема.

Пример 3. Исследуем систему, представленную на рис. 2.19а. Определим степень свободы системы по формулам (1) (рис. 2.19а) и (2) (рис. 2.19б):

$$W = -(3K - III) = -(3 \cdot 3 - 9) = 0;$$

$$W = 3D - 2III - C_0 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 - 7 = 0.$$

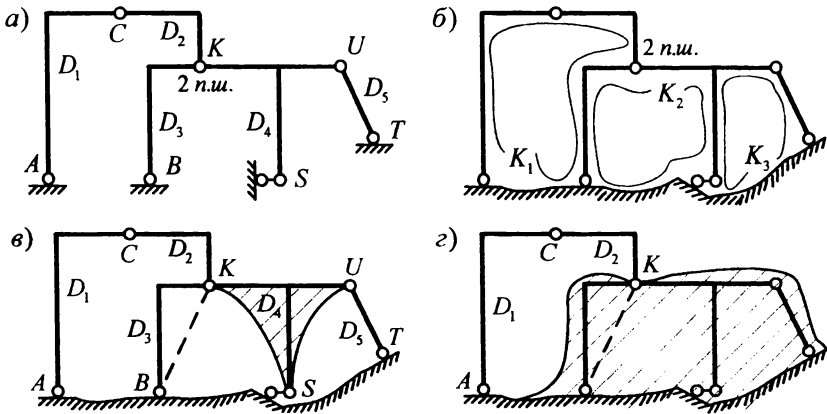


Рисунок 2.19

Геометрический анализ структуры системы:

1) диск D_3 (рис. 2.19в) соединяется с остальной системой двумя шарнирами B и K ; в каждом из шарниров возникает по реактивной силе, и, таким образом, диск находится под действием двух сил; в равновесии диск будет находиться только в том случае, если эти силы будут направлены по прямой BK навстречу друг другу (друг от друга), а в этом случае диск D_3 будет работать как стержень;

2) диск D_4 соединяется с диском земли тремя стержнями – BK , UT и горизонтальным опорным стержнем в точке S , которые не параллельны друг другу и не пересекаются в одной точке, образуя вместе с основанием (с землей) неизменяемую систему, то есть диск (третий признак неизменяемости) (рис. 2.19г);

3) последний диск и диски D_1 и D_2 соединены последовательно друг с другом тремя шарнирами A , C и K , не лежащими на одной прямой, образуя неизменяемую систему (первый признак неизменяемости) (рис. 2.19д).

Вывод: рассматриваемая система статически определима и геометрически неизменяема.

Пример 4. Исследуем систему, представленную на рис. 2.20а. Определим степень свободы системы по формулам (1) (рис. 2.20а) и (2) (рис. 2.20б):

$$W = 2Y - C - C_0 = 2 \cdot 8 - 12 - 4 = 0.$$

Геометрический анализ структуры системы:

1) представленная ферма в большей ее части имеет треугольную структуру, представляющую собой группы трех стержней (трех дисков), соединенных по-

следовательно друг с другом тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, образуя неизменяемую систему (согласно первому признаку неизменяемости); так, стержни 2–B, B–5 и 2–5 соединяются шарнирами B, 2 и 5, образуя диск; этот диск вместе со стержнями 2–3 и 3–5 соединяется шарнирами 2, 5 и 3, образуя вместе новый диск, который в свою очередь образует неизменяемую систему (диск D_1) вместе со стержнями 3–C и 5–C (рис. 2.20б), которые как диски соединяются шарнирами 3, 5 и C; аналогично по принципу треугольника соединены друг с другом стержни A–1, A–4 и 1–4 шарнирами A, 1 и 4, образуя диск D_2 ;

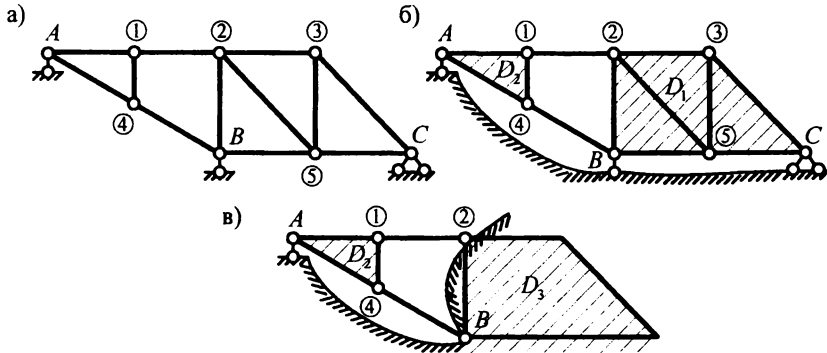


Рисунок 2.20

2) диск D_1 соединяется с диском земли тремя опорными стержнями, не параллельными друг другу и не пересекающимися в одной точке, образуя вместе с основанием, согласно третьему признаку неизменяемости, диск D_3 (рис. 2.20б,в);

3) теперь диск D_2 и диск D_3 соединены друг с другом тремя стержнями 1–2, 4–B и вертикальным опорным стержнем в узле A, которые пересекаются в одной точке – в узле A, а это значит, что система мгновенно изменяема (третий признак мгновенной изменяемости) (рис. 2.20в).

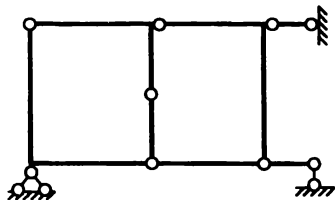
Вывод: рассматриваемая система является мгновенно изменяемой и не может применяться в строительных сооружениях.

Таким образом, выполнение геометрического анализа структуры системы представляет собой структурно-логическую задачу, решая которую, в структуре системы (в соединениях ее элементов) необходимо последовательно находить представленные выше случаи геометрической неизменяемости или мгновенной изменяемости (или выявлять изменяемость), и делать это нужно до тех пор, пока не будут задействованы все элементы (диски) системы и не будет выявлено, какой же система является с точки зрения изменяемости-неизменяемости.

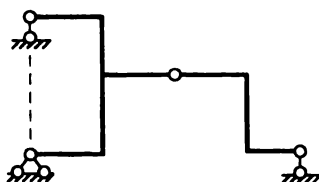
Представим ряд систем, для которых необходимо самостоятельно выполнить кинематический анализ (определить степень свободы и выполнить геометрический анализ структуры) и в результате определить, каковы эти системы – статически определимы или неопределимы, геометрически неизменяемы, изменяемы или мгновенно изменяемы.

Задачи:

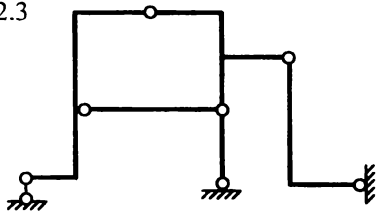
2.1



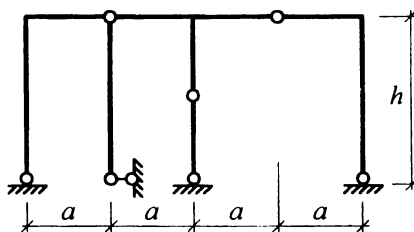
2.2



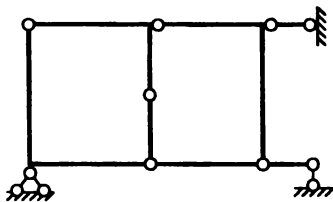
2.3



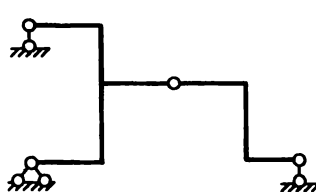
2.4



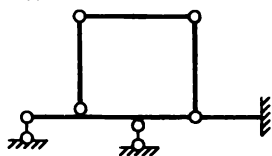
2.5



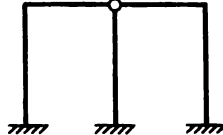
2.6



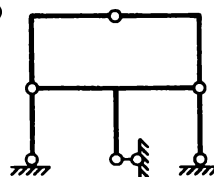
2.7



2.8



2.9



2.10



Ответы на данные задачи представлены в конце пособия в разделе «Ответы на задачи для самостоятельного решения» (с. 90).

3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

3.1. Внутренние силы и их определение

При действии на плоскую статически определимую стержневую систему внешней нагрузки в каждом поперечном сечении ее может возникать три вида внутренних сил (усилий) (рис. 3.1):

– изгибающий момент M , действующий в плоскости сооружения относительно центральной оси поперечного сечения элемента (стержня), перпендикулярной к этой плоскости;

– поперечная сила Q , действующая в плоскости поперечного сечения в направлении центральной оси поперечного сечения, лежащей в плоскости сооружения;

– продольная сила N , действующая перпендикулярно к сечению (вдоль оси стержня) и приложенная в центре тяжести сечения.

Определение усилий M , Q , N в сечениях статически определимых стержневых систем выполняется методом сечений. В заданном месте проводится сечение, разделяющее систему на две части. Затем рассматривается равновесие одной из частей системы. При этом действие отброшенной части на рассматриваемую заменяется силами, равными внутренним силам в сечении. Эти силы действуют на рассматриваемую часть как внешние силы. Из уравнений равновесия, число которых равно трем (что соответствует количеству неизвестных внутренних сил), определяются усилия в рассматриваемом сечении системы.

Метод сечений позволяет сформулировать следующие правила определения внутренних сил в сечениях плоских стержневых систем:

⚠ Изгибающий момент в сечении численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил (включая и опорные реакции), приложенных к части системы с одной стороны от сечения, относительно центра тяжести сечения.

⚠ Поперечная сила в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил (включая опорные реакции), приложенных к части системы с одной стороны от сечения, на ось, перпендикулярную к оси стержня.

⚠ Продольная сила в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил (включая опорные реакции), приложенных к части системы с одной стороны от сечения, на ось, касательную к оси стержня (для прямолинейных стержней – на ось самого стержня).

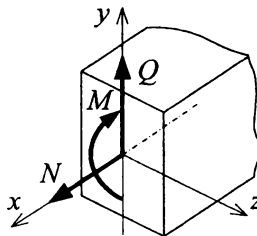


Рисунок 3.1

Напомним, что момент силы относительно некоторой точки равен произведению величины этой силы на ее плечо относительно этой точки (например, на рис. 3.2а – $M_A(P) = P \cdot h_p$), где плечо силы относительно точки (h_p) определяется как длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на линию действия силы.

Проекция силы на ось равна произведению величины силы на косинус угла между линией действия силы и рассматриваемой осью (рис. 3.2б) – $P_z = P \cos \varphi$.

По указанным правилам легко определяются момент относительно любой точки и проекция на любую ось нагрузки q , распределенной на участке по произвольному закону, если ее привести к равнодействующей силе R_q , приложенной в центре тяжести нагрузки на рассматриваемом участке. Величины моментов относительно точки A равномерно распределенной нагрузки q_1 (рис. 3.2а) (равнодействующая R_{q1} будет приложена в середине участка, на который действует эта нагрузка) и для нагрузки q_2 , изменяющейся на участке по треугольному закону, вычисляются следующим образом:

$$M_A(q_1) = R_{q1} h_{R1} = q a h_{R1};$$

$$M_A(q_2) = R_{q2} h_{R2} = \frac{1}{2} q_0 a h_{R2}.$$

Заметим, что момент относительно любой точки от действия сосредоточенного момента равен величине самого сосредоточенного момента, а его проекция на любую ось равна нулю.

Для наглядного представления об изменении усилий в сечениях систем строят эпюры усилий. **Эпюрой усилия** (M , Q , N и др.) называется график (диаграмма), отражающий зависимость изменения этого усилия по длинам всех элементов (стержней) системы от действия постоянной нагрузки.

Отметим некоторые правила, применяемые при построении эпюр усилий:

1. Ось (базу), на которой строится эпюра, всегда выбирают так, чтобы она была параллельна оси стержня или просто совпадала с ней.

2. Ординаты эпюр откладывают от базовой оси перпендикулярно к ней. Каждая из ординат эпюры усилий представляет собой в определенном масштабе величину усилия, для которого построена эпюра, в поперечном сечении рамы, в котором эта ордината отложена.

3. Штриховать эпюры принято линиями, перпендикулярными к базовой оси (каждая из линий штриховки – это тоже ордината эпюры усилий).

4. Ординаты усилий откладывают в определенном масштабе, одинаковом в пределах одной эпюры; в характерных точках проставляют значения ординат усилий, а в полях эпюр (в кружочках) обычно ставят знаки ординат эпюр.

При определении внутренних сил и построении их эпюр в строительной механике обычно принимают следующие правила знаков:

– **Поперечная сила** в сечении, определенная по вышеуказанному правилу, **положительна**, если при приложении ее на бесконечно малом расстоянии от сечения со стороны рассматриваемой части она стремится повернуть эту часть относительно сечения по часовой стрелке, и **отрицательна**, если стремится по-

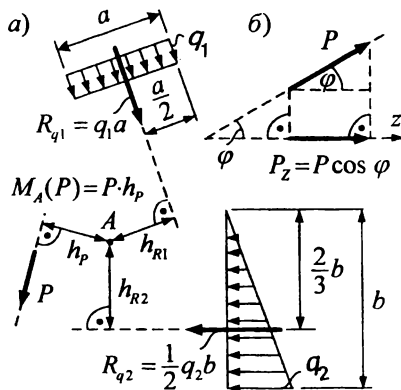


Рисунок 3.2

вернуть эту часть относительно сечения против часовой стрелки – см. рис. 3.3. Например, при рассмотрении отсеченной части на рис. 3.3в поперечная сила в сечении K равна силе P и положительна.

– **Продольная сила** в сечении **положительна**, если она вызывает растяжение в стержне рамы (направлена от сечения), и **отрицательна**, если вызывает сжатие (направлена к сечению) – см. рис. 3.4.

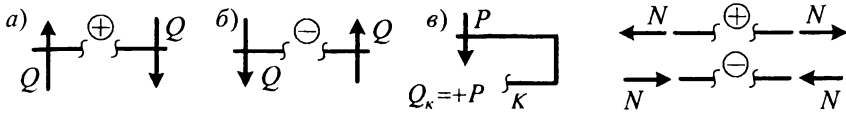


Рисунок 3.3

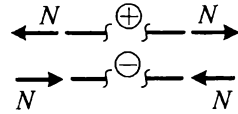


Рисунок 3.4

Отметим, что при построении эпюр Q и N ординаты поперечных и продольных сил могут откладываться с любой стороны от базовых осей (стержней). При этом следует руководствоваться наибольшей наглядностью эпюр (исключая, по возможности, наложение эпюр друг на друга) и, конечно, на одной эпюре и на участках, являющихся продолжением друг друга по прямой, целесообразно и предпочтительно ординаты одного знака откладывать с одной стороны.

Для изгибающих моментов специального правила знаков не устанавливают, а откладывают ординаты их на растянутых волокнах (со стороны растянутых волокон). При определении величин изгибающих моментов знаки их можно принимать по собственному усмотрению. Удобно принять, например, как это сделано в данных методических указаниях, изгибающий момент в сечении положительным, если он действует относительно сечения по часовой стрелке. Растянутые волокна в сечении при этом определяются следующим образом. В той части системы, из равновесия которой в расчетном сечении определен изгибающий момент, выделяем бесконечно малый элемент стержня, прилегающий к рассматриваемому сечению (на схемах этот бесконечно малый элемент стержня для наглядности изображается в виде элемента конечной длины). Считаем затем, что в расчетном сечении указанный элемент имеет защемление, и прикладываем к нему вычисленный для этого сечения изгибающий момент. Анализируя теперь изгиб рассматриваемого элемента системы (рамы), несложно определить, с какой стороны стержня волокна будут растянуты, а с какой – сжаты.

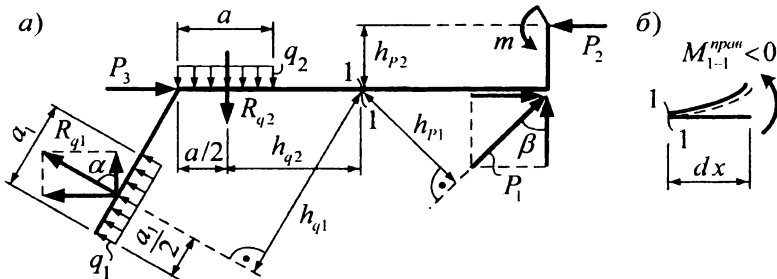


Рисунок 3.5

Схема изгиба элемента системы, выделенного возле сечения 1–1 с правой стороны, показана на рис. 3.5б. Из анализа этой схемы видно, что растянутыми в сечении 1–1 будут нижние волокна (здесь и далее на схемах изгиба элементов со стороны растянутых волокон будем проводить штриховые линии).

Для системы, изображенной на рис. 3.5а, которую будем считать равновесной, приведем несколько примеров вычисления (в общем виде) усилий в сечении 1–1:

$$M_{1-1}^{(лев)} = R_{q1} \cdot h_{q1} - R_{q2} \cdot h_{q2} + P_3 \cdot 0 = q_1 a_1 h_{q1} - q_2 a_2 h_{q2};$$

$$M_{1-1}^{(прав)} = -P_1 \cdot h_{p1} - P_2 \cdot h_{p2} - m;$$

$$Q_{1-1}^{(лев)} = R_{q1} \cdot \cos \alpha + P_3 \cdot \cos 90^\circ - R_{q2} \cdot \cos 0^\circ = q_1 a_1 \cos \alpha - q_2 a_2;$$

$$Q_{1-1}^{(прав)} = -P_1 \cdot \cos \beta + P_2 \cdot \cos 90^\circ = -P_1 \cos \beta;$$

$$N_{1-1}^{(лев)} = R_{q1} \cdot \sin \alpha - P_3 \cdot \cos 0^\circ - R_{q2} \cdot \cos 90^\circ = q_1 a_1 \sin \alpha - P_3;$$

$$N_{1-1}^{(прав)} = -P_2 + P_1 \sin \beta.$$

Здесь: $M_{1-1}^{(лев)}$, $Q_{1-1}^{(лев)}$, $N_{1-1}^{(лев)}$ – усилия в сечении 1–1, полученные из рассмотрения левой части системы относительно этого сечения; $M_{1-1}^{(прав)}$, $Q_{1-1}^{(прав)}$, $N_{1-1}^{(прав)}$ – те же усилия, полученные из рассмотрения правой части системы относительно сечения 1-1. Заметим, что для системы, находящейся в равновесии, внутренние силы в одном сечении, полученные при рассмотрении левой и правой частей, будут, естественно, равны друг другу (значения изгибающих моментов при этом при использовании рассматриваемых правил знаков будут получаться с противоположными знаками – растянутые же волокна, определенные по ним, будут расположены с одной и той же стороны). Для рассмотренной системы (рис. 3.5а), будем иметь: $M_{1-1}^{(лев)} = -M_{1-1}^{(прав)}$; $Q_{1-1}^{(лев)} = Q_{1-1}^{(прав)}$; $N_{1-1}^{(лев)} = N_{1-1}^{(прав)}$. Это обстоятельство следует использовать для проверки правильности вычисления внутренних сил в сечениях систем.

3.2. Рама. Расчет простых рам

Рамами называют системы, состоящие из прямолинейных стержней, соединенных между собой жестко (и шарнирно) в узлах, и опирающихся с помощью опор на основание. По структуре статически определимые рамы обычно разделяют на простые, трехшарнирные и составные.

Простые рамы – это системы (рис. 3.6), состоящие из одного диска в виде ломано-разветвленного стержня, соединенного с основанием тремя связями с использованием обычно трех основных видов опор – шарнирно подвижной опоры, шарнирно неподвижной и защемления (табл. 1.1).

Трехшарнирные рамы (рис. 3.7а,б) – это системы, состоящие из трех дисков (ломано-разветвленных стержней), соединенных между собой последовательно тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой (то есть по принципу трехдискового трехшарнирного треугольника). Одним из дисков при этом может быть основание (рис. 3.7а). Трехшарнирные рамы относятся к классу рас-

порных систем.

Составными называют рамы, состоящие из нескольких соединенных между собой простых и (или) трехшарнирных рам (рис. 3.7в). Их расчет выполняется путем расчета отдельных простых и трехшарнирных рам, на которые могут быть разделены составные рамы.

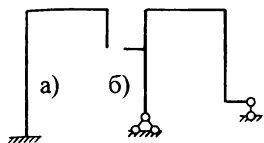


Рисунок 3.6

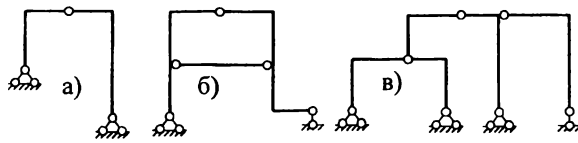


Рисунок 3.7

Выполним расчет простой рамы, изображенной на рис. 3.8. Из анализа рамы видно, что при определении внутренних сил в любом ее сечении нельзя обойтись без знания величин опорных реакций. И, следовательно, расчет таких рам необходимо начинать с нахождения значений опорных реакций.

Опорные реакции определяются из уравнений равновесия рамы в целом, которые в общем случае можно составить в трех различных вариантах:

1) в виде сумм проекций сил на две произвольные не параллельные друг другу оси и суммы моментов сил относительно некоторой точки плоскости ($\Sigma X = 0$; $\Sigma Y = 0$; $\Sigma M_T = 0$);

2) в виде суммы проекций сил на произвольную ось и двух сумм моментов относительно любых точек плоскости, не лежащих на одном перпендикуляре к указанной оси проекции ($\Sigma X = 0$; $\Sigma M_A = 0$; $\Sigma M_B = 0$);

3) в виде трех сумм моментов относительно трех точек, не лежащих на одной прямой ($\Sigma M_A = 0$; $\Sigma M_B = 0$; $\Sigma M_C = 0$).

Определим опорные реакции для рассматриваемой рамы (рис. 3.8). Для этого здесь используем второй вариант уравнений равновесия:

$$\Sigma X = 0; \quad R_A - 4 = 0; \quad R_A = 4 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_L = 0; \quad -4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 8 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - R_C \cdot 4 = 0; \quad R_C = 5 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_D = 0; \quad -4 \cdot 7 + 4 \cdot 2 + 8 - R_B \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0; \quad R_B = -7 \text{ кН}.$$

Если величина реакции в результате ее определения получается отрицательной, это указывает на то, что мы неверно предположили ее направление (в нашем примере – реакции R_B) и оно будет противоположным. В этом случае рекомендуется сразу же исправить направление реакции на действительное.

Проверка правильности определения опорных реакций:

$$\Sigma M_K = 0; \quad 4 \cdot 4 - 2 \cdot 4 + 8 - 7 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 5 - 5 \cdot 7 = 0; \quad +64 - 64 = 0; \quad 0 = 0.$$

Для удобства дальнейших расчетов численные значения вычисленных реакций рекомендуется показывать на расчетной схеме рамы (см. рис. 3.8).

Переходим к определению усилий и построению их эпюр. Несложно заметить, что любую раму можно разбить на отдельные участки (отрезки стержней), на каждом из которых изменение того или иного усилия описывается (в преде-

лах этого участка) одной зависимостью. Граничные точки этих участков, в которых происходит переход от одних зависимостей изменения эпюр к другим, будем называть характерными точками.

В качестве характерных точек обычно выступают:

- точки, в которых приложены внешние сосредоточенные нагрузки (силы, моменты) либо опорные реакции;
- точки начала и конца приложения распределенных нагрузок;
- точки излома и разветвления стержней.

Для рамы, изображенной на рис. 3.8, характерными являются точки A , T , K , B , C и можно выделить четыре расчетных участка: I $\rightarrow AT$, II $\rightarrow TK$, III $\rightarrow KB$ и участок IV $\rightarrow BC$.

Рассмотрим вначале участок I. Проведем на нем произвольное сечение I–I. Внутренние силы в любом сечении рамы могут быть определены из рассмотрения как левой относительно сечения, так и правой (как нижней, так и верхней) частей рамы; при этом эти значения должны получаться равными друг другу (см. раздел 1); это можно и нужно использовать для проверки правильности вычисления усилий в сечениях. Заметим, что определение внутренних сил в сечениях удобнее производить из рассмотрения той отсеченной части рамы, на которую действует меньшее количество сил. Для сечения I–I рассмотрим верхнюю часть рамы (для наглядности в этом примере покажем рассматриваемые части рамы отдельно – см. рис. 3.9а). Расстояние от верхней крайней точки (точка A) до сечения I–I обозначим x_1 . Тогда выражения для определения внутренних сил в произвольном сечении I–I участка I ($0 \leq x_1 \leq 2$) будут иметь вид:

$$M_1^{сврх} = R_A \cdot x_1 + P \cdot 0 = 4x_1; \quad Q_1^{сврх} = +R_A = 4; \quad N_1^{сврх} = -P = -4.$$

Аналогично определим внутренние силы на участке II ($0 \leq x_2 \leq 4$) (см. рис. 3.8, 3.9б):

$$M_{II}^{сврх} = 4 \cdot (2 + x_2) - 4 \cdot 0 - 4 \cdot x_2 = 8 \quad (\text{при любом значении } x_2);$$

$$Q_{II}^{сврх} = 4 - 4 = 0; \quad N_{II}^{сврх} = -4,$$

и на участке III ($0 \leq x_3 \leq 3$) (см. рис. 3.8, 3.9в):

$$M_{III}^{сврх} = 4 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 4 \cdot x_3 = 8 - 4 \cdot x_3$$

[при $x_3 = 0$ (сечение 5) – $M_5 = 8$ кН·м; при $x_3 = 3$ (сечение 6) – $M_6 = -4$ кН·м];

$$Q_{III}^{сврх} = -4; \quad N_{III}^{сврх} = 0.$$

Изгибающий момент на участке I изменяется по линейному закону, а поперечная и продольные силы – постоянны. Подставляя в выражение изгибающего момента значения x_1 для крайних сечений, найдем: $M_1 = M_A = 4 \cdot 0 = 0$;

$M_2 = 4 \cdot 2 = +8$ кН·м (сечение 2 расположено на бесконечно малом расстоянии сверху от точки T – точки приложения силы P). Растянутые волокна для сечения I–I (и в данном случае для всего участка I) определены на рис. 3.10а.

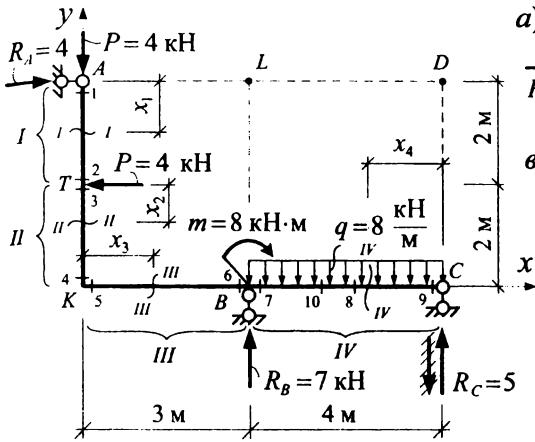


Рисунок 3.8

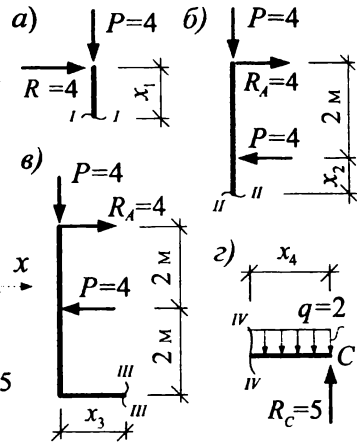


Рисунок 3.9

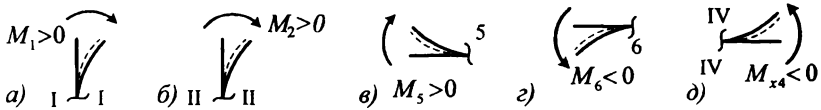


Рисунок 3.10. Определение растянутых волокон

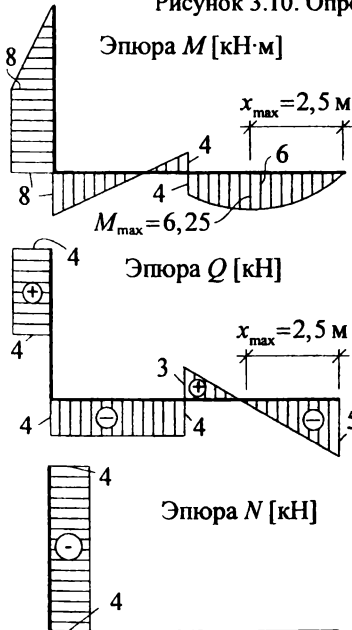
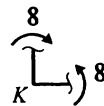


Рисунок 3.11

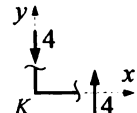
Проверка равновесия узлов

Узел К



$$\Sigma M_K = 0;$$

$$8 - 8 = 0;$$

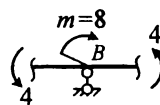


$$\Sigma X = 0; 0 = 0;$$

$$\Sigma Y = 0;$$

$$-4 + 4 = 0.$$

Опорный узел В



$$\Sigma M_B = 0; 8 - 4 - 4 = 0; 8 - 8 = 0;$$

$$\Sigma X = 0; 0 = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; -4 - 3 + 7 = 0; -7 + 7 = 0.$$

Рисунок 3.12

Несколько сложнее определяются усилия на участке IV. Проведя произвольное сечение IV–IV, рассмотрим правую часть рамы (рис. 3.8). Выражения для внутренних сил на участке будут иметь вид:

$$M_{IV}^{(npoe)} = -5 \cdot x_4 + 2 \cdot x_4 \cdot x_4 / 2 = x_4^2 - 5 \cdot x_4; \quad Q_{IV}^{(npoe)} = -5 + 2 \cdot x_4; \quad N_{IV}^{(npoe)} = 0.$$

Видно, что изгибающий момент на участке IV изменяется по криволинейному, параболическому закону, а поперечная сила – по линейному закону (непостоянна в отличие от участков I, II, III). Для построения эпюры M на этом участке, таким образом, необходимо вычислить значения изгибающих моментов минимум в трех точках – например, по краям участка (в сечениях 7 и 9) и в середине его – в сечении 8):

$$\text{сеч. 7} - x_7 = 4 \text{ м}; \quad M_7 = 4^2 - 5 \cdot 4 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{сеч. 8} - x_8 = 2 \text{ м}; \quad M_8 = 2^2 - 5 \cdot 2 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad \text{сеч. 9} - x_9 = 0; \quad M_9 = 0.$$

Растянутые волокна на участке IV по полученным значениям изгибающих моментов определены на рис. 3.10з, а сама эпюра M представлена на рис. 3.11.

Для построения эпюры поперечных сил на участке IV достаточно вычислить значения Q в двух сечениях (т. к. через две точки всегда можно провести прямую линию) – обычно вычисляют эти значения в крайних сечениях участков:

$$\text{сеч. 7} - x_7 = 4 \text{ м}; \quad Q_7 = -5 + 2 \cdot 4 = +3 \text{ кН};$$

$$\text{сеч. 9} - x_9 = 0; \quad Q_9 = -5 + 2 \cdot 0 = -5 \text{ кН}.$$

Следует иметь в виду, что на участках действия равномерно распределенных нагрузок, на которых изгибающие моменты изменяются по параболическим зависимостям, эпюра M может иметь экстремумы (максимальные или минимальные значения), которые являются важной характеристикой эпюр и должны определяться дополнительно. Если выполнить анализ выражений для M_{IV} и Q_{IV} , учитывая условие экстремальности функций (согласно которому экстремум функции находится в точке, для которой ее первая производная равна нулю) и известную дифференциальную зависимость $Q = dM/dx$, несложно заметить, что экстремальные значения изгибающие моменты принимают в сечениях, в которых поперечные силы равны нулю. Эти сечения могут быть определены из выражений для Q (в нашем примере – $Q_{IV} = 2 \cdot x_4 - 5 = 0$; $x_{\max} = 2,5$ м) или по эпюрам Q из геометрических соображений ($5/x_{\max} = 3/(4 - x_{\max})$; $x_{\max} = 2,5$ м). Максимальный изгибающий момент на участке IV рассматриваемой рамы, таким образом, имеет место в сечении 10 ($x_{\max} = 2,5$ м) и равен: $M_{10} = M_{IV\max} = 2,5^2 - 5 \cdot 2,5 = -6,25$ кН·м. Окончательные эпюры M , Q , N в рассматриваемой раме представлены на рис. 3.11.

Все узлы рамы, включая опорные, должны находиться в равновесии. Под узлами здесь будем понимать точки излома либо разветвления стержней рамы, а также точки примыкания стержней через шарниры. Поэтому после построения в раме эпюр M , Q и N целесообразно выполнить проверку равновесия ее узлов. Для этого узлы выделяем (вырезаем) из рамы, изображаем отдельно (для

наглядности показываем и элементы примыкающих к узлам стержней) и прикладываем к ним усилия, возникающие в сечениях, бесконечно близких к узлам, и внешние сосредоточенные нагрузки – силы и моменты, действующие в узлах (если они есть). После этого составляем уравнения равновесия всех сил, приложенных к узлам ($\Sigma M_y = 0$; $\Sigma X = 0$; $\Sigma Y = 0$), и проверяем их выполнение. Для рассмотренной рамы проверка равновесия узлов показана на рис. 3.12.

! Анализ полученных эпюр внутренних сил позволяет установить ряд общих закономерностей в изменении эпюр M , Q , N , которые должны всегда соблюдаться для стержневых систем:

1) на прямолинейном ненагруженном участке эпюра изгибающих моментов всегда линейна и может быть построена по двум ординатам (обычно для крайних сечений участка), а эпюры Q и N – постоянны (во всех сечениях одинаковы);

2) на участке действия равномерно распределенной нагрузки эпюра M всегда изменяется по параболическому закону и должна строиться минимум по трем ординатам (обычно для крайних и среднего сечений на участке); выпуклость эпюры M при этом всегда направлена в сторону действия равномерно распределенной нагрузки; эпюра Q на таком участке всегда линейна и может быть построена по двум ординатам (для крайних сечений);

3) в точке приложения сосредоточенной силы эпюра M всегда имеет излом, направленный в сторону действия силы, эпюра Q – скачок (разрыв) на величину произведения этой силы на косинус угла между силой и осью, нормальной к оси стержня, а эпюра N – скачок на величину произведения этой силы на синус угла между силой и осью, нормальной к оси стержня; если внешняя сила перпендикулярна к оси стержня, то скачок на эпюре Q будет равен величине самой силы, а на эпюре N скачка не будет;

4) в точке приложения сосредоточенного момента эпюра M всегда имеет скачок (разрыв) на величину этого момента;

5) в шарнире изгибающий момент всегда равен нулю (не следует путать сечение в шарнире и сечение, бесконечно близкое к шарниру; так, если в сечении, бесконечно близком к шарниру, приложен сосредоточенный момент, то на эпюре M в этом сечении, согласно предыдущему положению, будет скачок с нуля в шарнире до значения сосредоточенного момента в точке его приложения);

6) на участке действия распределенной нагрузки в сечении, в котором поперечная сила равна нулю, изгибающий момент всегда имеет экстремум (минимум, максимум);

7) при принятых правилах знаков знак эпюры Q можно определить (проверить) по эпюре M по следующему правилу: эпюра Q на участке положительна, если для совмещения по кратчайшему пути оси стержня с касательной к эпюре M на участке ось стержня необходимо поворачивать по часовой стрелке; если для указанного совмещения ось стержня нужно поворачивать против часовой стрелки, то эпюра Q на участке будет иметь отрицательный знак.

Используя изложенные закономерности в изменении эпюр M , Q , N , эти эпюры можно строить не составляя зависимостей для изгибающих моментов, поперечных и продольных сил на участках, а ограничиваясь вычислением значений указанных усилий в характерных сечениях рамы.

Для иллюстрации такого подхода построения эпюр M , Q , N рассмотрим раму, изображенную на рис. 3.13. Рама является консольной и при вычислении усилий в любом ее сечении можно обойтись без определения опорных реакций, если рассматривать для всех сечений равновесие отсеченных консольных частей рамы. Таким образом, при построении эпюр усилий в таких рамах опорные реакции можно не определять, если это не требуется специально. С другой сто-

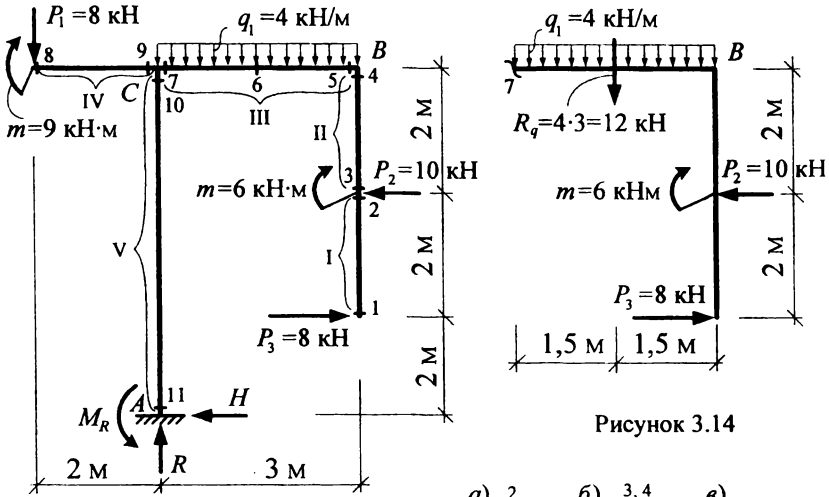


Рисунок 3.13 – Расчетная схема рамы

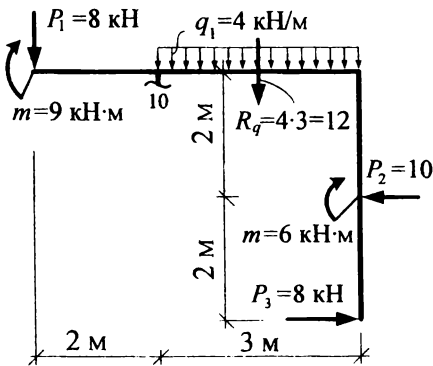


Рисунок 3.15

Рисунок 3.14

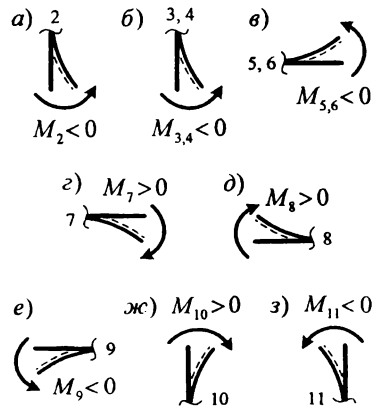


Рисунок 3.16 – Определение растянутых волокон

роны, зная опорные реакции, мы всегда имеем возможность выполнить проверку правильности предыдущих расчетов (рассматривая равновесие отсеченной части рамы со стороны опоры и равновесие опорного узла).

Для построения эпюр M , Q и N рассматриваемую раму следует разбить на 5 участков (рис. 3.13). При построении эпюры изгибающих моментов учтем, что на участках I, II, IV, V рамы эпюра M будет изменяться по линейному закону и для ее построения достаточно знать значения изгибающих моментов в крайних точках этих участков, то есть в сечениях 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11. На участке III, на который действует равномерно распределенная нагрузка, эпюра M будет изменяться по параболическому закону, и для ее построения необходимо вычислить изгибающие моменты в сечениях 5, 6, 7. Выполним вычисление усилий в указанных сечениях, рассматривая равновесие консольных частей рамы (на рис. 3.14 и 3.15 показаны соответствующие части для 7 и 10 сечений):

$$M_1 = -8 \cdot 0 = 0; \quad M_2 = -8 \cdot 2 = -16 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_3 = -8 \cdot 2 + 6 = -10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4 = M_5 = -8 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 6 = -6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_6 = -8 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 6 + 4 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = -1,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_7 = -8 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 6 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 = 12 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_8 = +9 - 8 \cdot 0 = 9 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_9 = +9 - 8 \cdot 2 = -7 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{10} = +9 - 8 \cdot 2 - 8 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 6 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 = -7 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{11} = +9 - 8 \cdot 2 + 8 \cdot 2 - 10 \cdot 4 + 6 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 = +6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Определение растянутых волокон в сечениях 1–11 по действующим в них изгибающим моментам показано на рис. 3.16. Окончательная эпюра изгибающих моментов в рассматриваемой раме представлена на рис. 3.17а.

Аналогично рассуждаем и при построении эпюр поперечных и продольных сил. На участках I, II, IV, V поперечные и продольные силы будут постоянны и для построения на этих участках эпюр Q и N достаточно вычислить значения Q и N в одном (произвольном) сечении:

$$Q_I = Q_1 = Q_2 = -8 \text{ кН}; \quad Q_{II} = Q_3 = Q_4 = -8 + 10 = +2 \text{ кН};$$

$$Q_{IV} = Q_8 = Q_9 = -8; \quad Q_V = Q_{10} = Q_{11} = +8 - 10 = -2 \text{ кН};$$

$$N_I = N_1 = N_2 = 0; \quad N_{II} = N_3 = N_4 = 0;$$

$$N_{IV} = N_8 = N_9 = 0; \quad N_V = N_{10} = N_{11} = -8 - 4 \cdot 3 = -20 \text{ кН}.$$

На участке III поперечная сила будет изменяться линейно, и для построения эпюры Q на этом участке необходимо вычислить значения Q в двух сечениях – 5 и 7:

$$Q_5 = 0; \quad Q_7 = 4 \cdot 3 = +12 \text{ кН}.$$

Продольная сила на этом участке будет постоянной и равной

$$N_{III} = N_5 = N_7 = 8 - 10 = -2 \text{ кН}.$$

Построенные по полученным данным эпюры Q и N изображены на рис. 3.17б, в.

После построения окончательных эпюр M , Q и N выполняется проверка равновесия узлов, показанная для рассмотренной рамы на рис. 3.18.

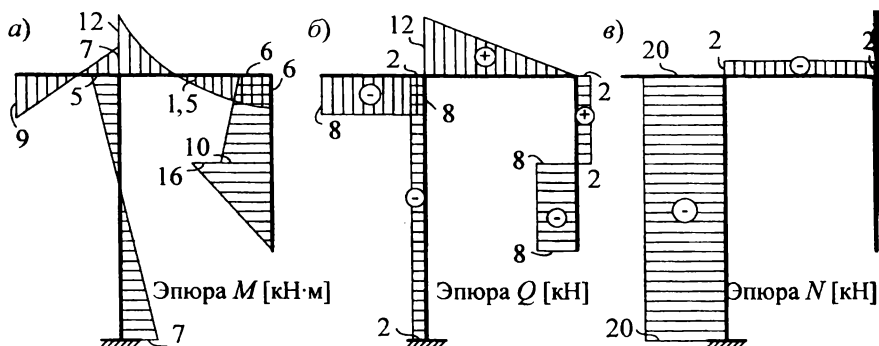


Рисунок 3.17 – Окончательные эпюры усилий

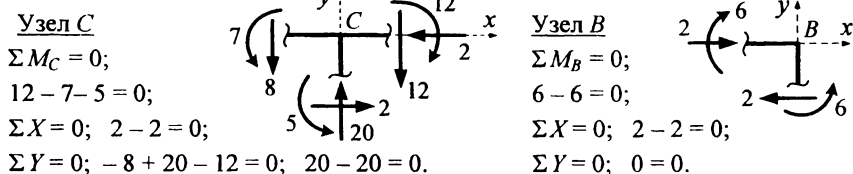


Рисунок 3.18 – Проверка равновесия узлов

На этом расчет консольной рамы можно и закончить, если нас не интересуют реакции заделки. Следует отметить, что в проектной практике расчета сооружений величины опорных реакций обычно знать необходимо (они используются в расчетах опорных узлов, нижележащих конструкций и т. д.). Поэтому здесь также выполним определение реактивных усилий в заделке, для чего рассмотрим равновесие рамы в целом:

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0; & 8 - 10 - H &= 0; & H &= -2 \text{ кН}; \\ \Sigma Y &= 0; & R - 8 - 4 \cdot 3 &= 0; & R &= 20 \text{ кН}; \\ \Sigma M_A &= 0; & 9 - 8 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 - 10 \cdot 4 + 8 \cdot 2 - M_R &= 0; & M_R &= -7 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Несложно увидеть, анализируя окончательные эпюры M , Q и N (рис. 3.17), что значения вычисленных опорных реакций равны соответствующим внутренним усилиям в приопорном сечении 11. Это свидетельствует о том, что опорный узел A находится в равновесии и что расчет рамы выполнен верно.

⚠ Анализ примеров расчета позволяет предложить следующий **порядок построения эпюр усилий M , Q и N** в рамно-стержневых и балочных системах:

1. Показываем предполагаемые направления опорных реакций в системе.
2. Составляем уравнения равновесия системы, решая которые определяем значения опорных реакций.
3. Выполняем проверку правильности определения опорных реакций.
4. Систему разбиваем на расчетные участки (участки между характерными точками) и определяем сечения, в которых необходимо вычислить внутренние силы M , Q и N для построения их эпюр.

5. Вычисляем значения внутренних сил M , Q и N в указанных сечениях (на основе вышеизложенных правил) и строим эпюры усилий (с учетом общих закономерностей изменения эпюр на участках); на участках действия равномерно распределенных нагрузок при этом вычисляем экстремальные значения изгибающих моментов (если они есть).

6. Выполняем проверку равновесия узлов и соблюдения общих закономерностей изменения эпюр усилий.

Каждый из указанных этапов расчета подробно рассмотрен выше. В ряде случаев некоторые из этапов могут быть опущены. Так, например, для консольных систем расчет можно начинать сразу с пункта 4.

3.3. Особенности расчета трехшарнирных рам

Трехшарнирные рамы (рис. 3.7) имеют обычно либо более трех внешних опорных реакций (рис. 3.7а), либо замкнутые контуры (рис. 3.7б), без разрезания которых нельзя полностью определить внутренние силы в таких системах. Поэтому для них, кроме трех уравнений равновесия всей системы, необходимо составлять и уравнения равновесия отдельных их частей и определять наряду с внешними опорными реакциями и некоторые внутренние силы – в шарнирах, в затяжках, после определения которых построение эпюр усилий M , Q , N в этих системах выполняется по тем же принципам, что и в простых рамах.

Ниже рассмотрим возможные схемы определения внешних опорных реакций и некоторых внутренних сил, знания которых достаточно для построения эпюр усилий в этих системах (внешняя нагрузка может быть любой и на схемах рам не показывается; при наличии особенностей в приложении нагрузок они оговариваются отдельно):

I. Трехшарнирная рама с опорами в одном уровне (рис. 3.19).

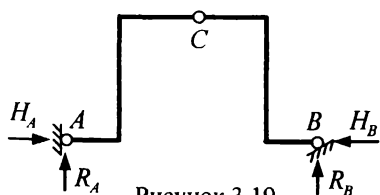


Рисунок 3.19

Возможный порядок расчета:

- 1) $\Sigma M_A = 0$; $R_B = \dots$
- 2) $\Sigma M_B = 0$; $R_A = \dots$
- 3) $\Sigma M_C^{лев} = 0$; $H_A = \dots$
- 4) $\Sigma X = 0$; $H_B = \dots$

Проверка: $\Sigma M_C^{прав} = 0$; ...

II. Трехшарнирная рама с опорами в разных уровнях (рис. 3.20).

Особенностью этой рамы является то, что для нее невозможно составить ни одного уравнения, в которое входило бы только одно неизвестное, и значит, здесь не обойтись без решения системы уравнений:

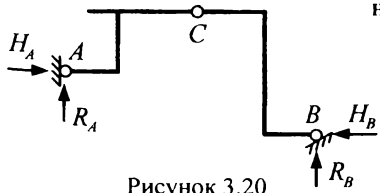


Рисунок 3.20

- $$\begin{cases} 1) \Sigma M_A = 0; & (R_B, H_B) \\ 2) \Sigma M_C^{прав} = 0; & (R_B, H_B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_B = \dots \\ H_B = \dots \end{cases}$$
- 3) $\Sigma X = 0$; $H_A = \dots$
 - 4) $\Sigma Y = 0$; $R_A = \dots$
- Проверка: $\Sigma M_C^{лев} = 0$; ...

III. Трехшарнирная рама с затяжкой.

Затяжкой называют прямолинейный стержень, соединяющийся с остальными частями системы по концам шарнирно и работающий при отсутствии на него нагрузки только на растяжение-сжатие.

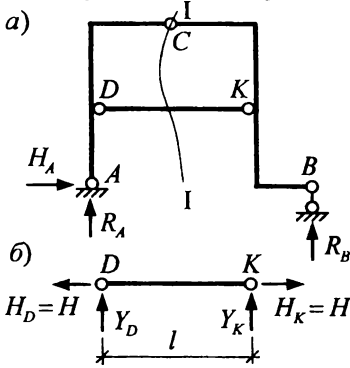


Рисунок 3.21

Тогда для рамы с ненагруженной затяжкой можно принять следующий порядок расчета:

1) определяем внешние опорные реакции, которых в рассматриваемой раме всего три – как в обычных простых рамах, например, из уравнений:

$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= 0; & R_B &= \dots \\ \Sigma M_B &= 0; & R_A &= \dots \\ \Sigma X &= 0; & H_A &= \dots \end{aligned}$$

Проверка: $\Sigma Y = 0$; ...

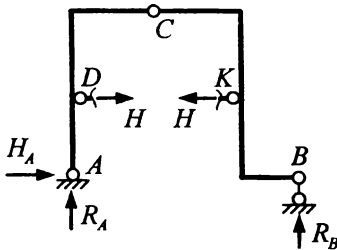


Рисунок 3.22

2) проводим сечение через шарнир C и затяжку DK (рис. 3.21), обозначая усилие в затяжке через H ; рама принимает вид, представленный на рис. 3.22; для определения усилия в затяжке рассмотрим равновесие одной из полурам (например, правой):

$$\Sigma M_C^{права} = 0; \quad H = \dots$$

3) для проверки используем уравнение равновесия левой части: $\Sigma M_C^{лев} = 0$

В случае нагруженной затяжки, вырезав ее и рассматривая отдельно (рис. 3.21б) с учетом действующей нагрузки, найдем значения вертикальных реакций в шарнирах – Y_D и Y_K , которые затем необходимо передать в точках D и K на основную раму (без затяжки) (рис. 3.22), направляя их в обратных направлениях; усилие в затяжке при этом остается неизвестным и определяется после этого так же, как и в раме с ненагруженной затяжкой; далее выполняется расчет рамы без затяжки (рис. 3.22), но с учетом сил Y_D и Y_K и распора H .

3.4. Расчет статически определимых составных балок

Составными статически определимыми называют балки, состоящие из нескольких простых балок, соединенных между собой по концам шарнирами, как правило, не совпадающими с опорами.

Кинематический анализ таких систем удобно выполнять с использованием формулы $W = (3D - 2Ш - C_0)$, где D – число дисков в системе, в качестве которых здесь выступают простые балки; $Ш$ – число одиночных (простых) шарниров, соединяющих эти балки; C_0 – число опорных связей в системе.

Геометрический анализ структуры составных балок позволяет ввести для них понятие позтажной схемы балки. Позтажная схема составной статически определимой балки представляет собой схему соединения и взаимодействия отдельных простых балок, образующих составную, между собой (см. рис. 3.23). При этом среди указанных простых балок можно выделить главные и второстепенные балки.

Главными называют простые балки, которые после разрезания составной балки по шарнирам, соединяющим простые балки, могут самостоятельно нести нагрузку (будут неизменяемы). Учитывая, что балка – это диск, имеющий три степени свободы, главные балки должны иметь три опорные связи, то есть главными будут двухопорные балки и балки с защемлением. Главными в системе составных будут и простые балки, имеющие две вертикальные опорные связи, учитывая, что третьей связью для них – горизонтальной – являются соседние балки (что подтверждает геометрический анализ соответствующей системы).

Второстепенными называют балки, которые после указанного разрезания по шарнирам самостоятельно нести нагрузку не могут, так как будут изменяемы. Эти балки опираются на рядом расположенные с помощью связей в шарнирах. При этом одни второстепенные балки могут опираться на другие, то есть и среди второстепенных балок имеется определенная иерархия и соответственно уровень их второстепенности может быть разным. Самыми второстепенными будут балки, расположенные выше всего на позтажной схеме.

Анализ работы составных статически определимых балок позволяет выявить ряд закономерностей в их работе и сформулировать их возможный порядок расчета:

- расчет составных статически определимых балок удобно выполнять посредством расчета отдельно простых балок, образующих составные;
- при этом расчет необходимо начинать с самых верхних на позтажных схемах балок, постепенно переходя к расчету нижерасположенных и передавая на них опорные реакции от вышерасположенных балок в обратных направлениях (считая их для нижерасположенных балок нагрузками); последними рассчитываются главные балки;
- усилия от нагрузки по позтажной схеме передаются только на нижележащие балки и не передаются на вышележащие;
- расчет простых балок выполняется аналогично расчету простых рам;

- при действии на составную статически определимую балку только вертикальных нагрузок продольные силы в ней будут отсутствовать;
- окончательные эпюры усилий в составной балке строятся путем объединения эпюр этих усилий, полученных при расчетах простых балок.

Выполним расчет многопролетной балки, представленной на рис. 3.23 (см. с. 36).

Кинематический анализ системы: $W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0$.



Определение опорных реакций и построение эпюр внутренних сил:

1) Расчет начинаем с балки EF , самой верхней на поэтажной схеме:

$$\sum M_E = 0; \quad -R_F \cdot 6,6 + 2 \cdot 4,4 \cdot 2,2 + 5 \cdot 8,8 = 0; \quad R_F = 9,6 \text{ кН};$$

$$\sum M_F = 0; \quad R_E \cdot 6,6 - 2 \cdot 4,4 \cdot 4,4 + 5 \cdot 2,2 = 0; \quad R_E = 4,2 \text{ кН};$$

Проверка: $\sum Y = 0; \quad 4,2 - 2 \cdot 4,4 + 9,6 - 5 = 0; \quad 0 = 0$.

Расчет ординат эпюры M : $M_1^{лев} = 0; \quad M_2^{лев} = 4,2 \cdot 2,2 - 2 \cdot 2,2 \cdot 1,1 = 4,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$

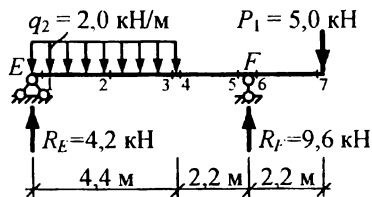
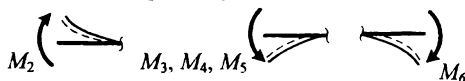
$$M_3^{лев} = 4,2 \cdot 4,4 - 2 \cdot 4,4 \cdot 2,2 = -0,88 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4^{лев} = -0,88 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5^{лев} = 4,2 \cdot 6,6 - 2 \cdot 4,4 \cdot 4,4 = -11 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6^{лев} = 5 \cdot 2,2 = 11 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_7^{лев} = 5 \cdot 0 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определение растянутых волокон:



Расчет ординат эпюры Q : $Q_1^{лев} = 4,2 \text{ кН}; \quad Q_2^{лев} = Q_4^{лев} = 4,2 - 2 \cdot 4,4 = -4,6 \text{ кН};$

$$Q_5^{прав} = -9,4 + 5 = -4,6 \text{ кН}; \quad Q_6^{прав} = Q_7^{прав} = 5 \text{ кН}.$$

Расчет экстремального значения изгибающего момента на участке 1–2:

$$\frac{x_1}{4,2} = \frac{4,4 - x_1}{4,6} \Rightarrow x_1 = 2,1 \text{ м}; \quad M_{\max} = 4,2 \cdot 2,1 - 2 \cdot 2,1 \cdot 1,05 = 4,41 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюры M и Q в балке изображаем на общей схеме составной балки (рис. 3.23).

2) Второй рассчитываем балку CDE :

$$\sum M_C = 0; \quad 9,4 \cdot 1,55 + 9,4 \cdot 3,1 - R_D \cdot 4,65 + 4,2 \cdot 6,85 = 0; \quad R_D = 15,587 \text{ кН};$$

$$\sum M_D = 0; \quad 4,65 R_C - 9,4 \cdot 3,1 - 9,4 \cdot 1,55 + 4,2 \cdot 2,2 = 0; \quad R_C = 7,413 \text{ кН};$$

$$\sum M_D = 0; \quad 4,65 R_C - 9,4 \cdot 3,1 - 9,4 \cdot 1,55 + 4,2 \cdot 2,2 = 0; \quad R_C = 7,413 \text{ кН}.$$

Проверка: $\sum Y = 0; \quad 7,413 - 9,4 - 9,4 + 15,587 - 4,2 = 0; \quad 0 = 0$.

Расчет ординат эпюры изгибающих моментов:

$$M_1^{лев} = 0; \quad M_2^{лев} = 7,413 \cdot 1,55 = 11,49 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3^{лев} = 11,49 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

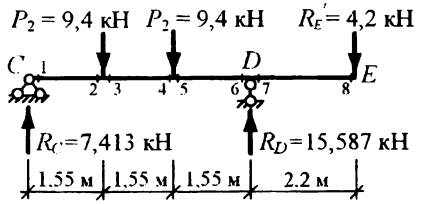
$$M_4^{лев} = 7,413 \cdot 3,1 - 9,4 \cdot 1,55 = 8,41 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_5^{лев} = 8,41; M_6^{лев} = -4,2 \cdot 2,2 = 9,24 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_7^{лев} = 9,42 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_8^{лев} = 0.$$

Определение растянутых волокон:

$$M_2, M_3, M_4, M_5 \quad \left(\curvearrowright \right) \quad M_6, M_7$$



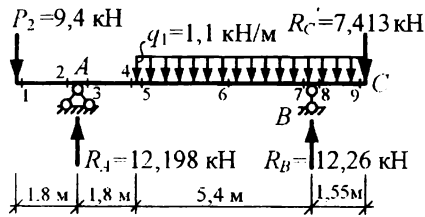
Расчет ординат эпюры Q :

$$Q_1^{лев} = 7,413 \text{ кН}; \quad Q_2^{лев} = 7,413 \text{ кН}; \quad Q_3^{лев} = Q_4^{лев} = 7,413 - 9,4 = -1,987 \text{ кН};$$

$$Q_5^{прав} = Q_6^{прав} = -15,587 + 4,2 = -11,387 \text{ кН}; \quad Q_7^{прав} = Q_8^{прав} = 4,2 \text{ кН}.$$

Эпюры M и Q в балке изображаем на общей схеме составной балки (рис. 3.23).

3) Последней рассчитываем главную балку ABC : $\Sigma M_A = 0$;



$$-9,4 \cdot 1,8 + 1,1 \cdot 6,95 \cdot 5,275 - R_B \cdot 7,2 + 7,413 \cdot 8,75 = 0; \quad R_B = 12,26 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$-9,4 \cdot 9 + R_A \cdot 7,2 - 1,1 \cdot 6,95 \cdot 1,925 + 7,413 \cdot 1,55 = 0; \quad R_A = 12,198 \text{ кН}.$$

Проверка: $\Sigma Y = 0$; $-9,4 + 12,198 - 1,1 \cdot 6,95 + 12,26 - 7,413 = 0; \quad 0 = 0.$

Расчет ординат эпюры изгибающих моментов M :

$$M_1^{лев} = 0; \quad M_2^{лев} = -9,4 \cdot 1,8 = -16,92 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_3^{лев} = -16,92 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4^{лев} = -9,4 \cdot 3,6 + 12,198 \cdot 1,8 = -11,884 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_5^{лев} = -11,884 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_7^{лев} = M_8^{лев} = 7,413 \cdot 1,55 - 1,1 \cdot 1,55 \cdot 0,775 = 12,812 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_9^{лев} = 0.$$

Определение растянутых волокон:

$$M_2, M_3, M_4, M_5 \quad \left(\curvearrowright \right) \quad M_7, M_8$$

Расчет ординат эпюры поперечных сил Q :

$$Q_1^{лев} = Q_2^{лев} = -9,4 \text{ кН}; \quad Q_3^{лев} = -9,4 + 12,198 = 2,798 \text{ кН}; \quad Q_4^{лев} = 2,798 \text{ кН};$$

$$Q_5^{лев} = 2,798 \text{ кН}; \quad Q_7^{прав} = 7,413 + 1,1 \cdot 1,55 - 12,26 = -3,142 \text{ кН};$$

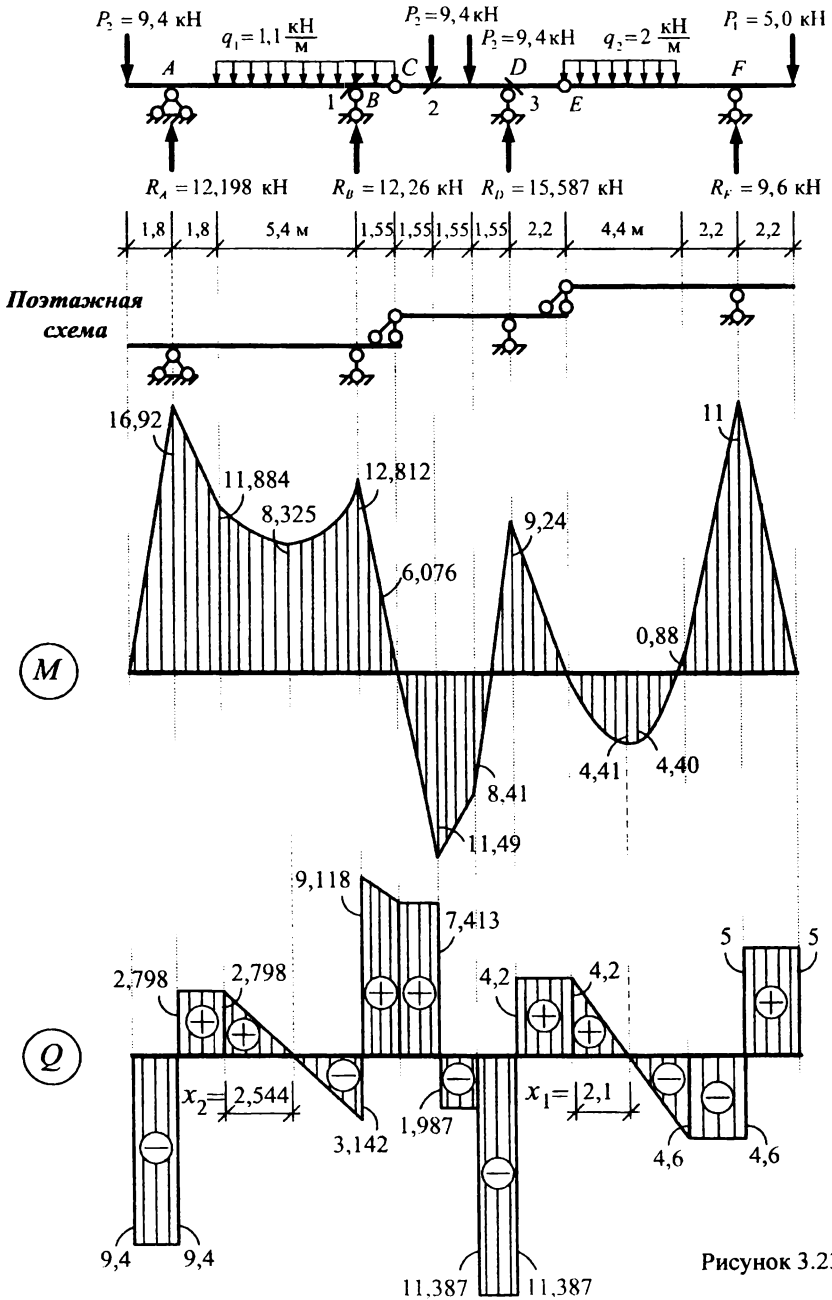
$$Q_8^{прав} = 7,413 + 1,1 \cdot 1,55 = 9,118 \text{ кН}; \quad Q_9^{прав} = 7,413 \text{ кН}.$$

Расчет экстремального значения изгибающих моментов на участке 5–7:

$$\frac{x_2}{2,798} = \frac{5,4 - x_2}{3,142} \Rightarrow x_2 = 2,544 \text{ м};$$

$$M_{\max} = -9,4 \cdot 6,144 + 12,198 \cdot 4,344 - 2,544 \cdot 1,1 \cdot 2,544/2 = -8,325 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюры M и Q в балке ABC и объединенные эпюры изгибающих моментов и поперечных сил представлены на рис. 3.23.



3.5. Определение усилий в фермах

Статически определимая шарнирная ферма – это геометрически неизменяемая система, расчетная схема которой состоит из прямых стержней, соединенных в узлах шарнирно (рис. 3.24). Число степеней свободы у нее, определенное, например, по формуле $W = 2Y - C - C_0$, равно нулю. При узловой передаче нагрузок стержни шарнирных ферм работают только на растяжение-сжатие. К таким расчетным схемам могут быть приведены и стропильные фермы с жестким соединением элементов в узлах, в которых при узловой передаче нагрузок величины изгибающих моментов и поперечных сил в стержнях незначительны (и ими соответственно можно пренебречь). Жесткие узлы на расчетных схемах таких ферм заменяются шарнирными.

Определим ряд понятий для ферм, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Расстояние между опорами называют пролетом фермы (l), наибольший вертикальный размер – высотой фермы (h).

Совокупность элементов (стержней) фермы, образующих ее верхний и нижний контуры, называют соответственно верхним и нижним поясами фермы (рис. 3.24). Стержни, расположенные между поясами и соединяющие их, называют решеткой фермы. Среди стержней решетки различают раскосы и стойки. Расстояния между соседними узлами поясов фермы (по горизонтали) называют панелями. Различают панели нижнего и верхнего поясов.

Передача нагрузок в узлы ферм осуществляется через так называемые передаточные балочки, в качестве которых в реальных сооружениях могут выступать перекрытия по прогонам, балкам; плиты покрытия и т. п. На расчетных схемах передаточные балочки представляются в виде простых двухопорных балок с пролетом, равным длине панелей нагруженного пояса фермы.

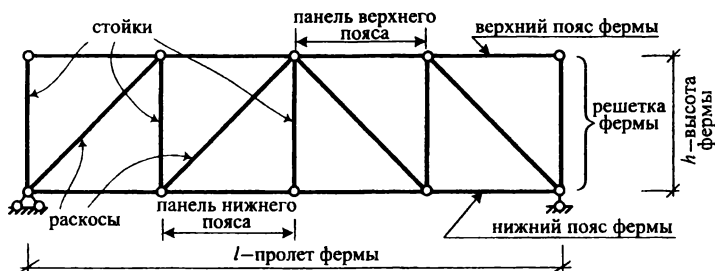


Рисунок 3.24 – Расчетная схема фермы и ее элементы

Основным методом определения усилий в стержнях статически определенных ферм является метод сечений. Ферма сквозным или замкнутым сечением (рис. 3.25) разрезается (разделяется) на две или несколько частей так, чтобы был рассечен стержень, в котором определяется усилие. После этого рассматривается равновесие одной из частей, действие на которую отброшенной части (частей) фермы заменяется пока неизвестными продольными силами. Направ-

ляют эти продольные силы обычно от узлов (от сечений), что соответствует положительным для них направлениям, при которых в стержнях возникает растяжение (рис. 3.25б). Из уравнений равновесия определяются искомые продольные силы и устанавливается истинный знак усилий (если усилие получилось отрицательным, значит оно будет направлено в противоположную сторону и в стержне будет иметь место сжатие). Метод сечений для ферм реализуется с помощью способов вырезания узлов, моментной точки и проекций.

Способ вырезания узлов. Замкнутым сечением вырезается узел фермы. Усилия в рассеченных стержнях, соединяющихся в узле, представляют систему сил, сходящихся в одной точке, для равновесия которой можно составить два независимых уравнения в виде сумм проекций сил на две оси:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; & & \Sigma Z_1 = 0; \\ \Sigma Y = 0; & \text{или} & \Sigma Z_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Направлять эти оси можно произвольно, исключая только их параллельность. С точки зрения рациональности расчета, выбирать направления осей следует так, чтобы в каждое из уравнений (3.1) входило по возможности только одно неизвестное усилие. Вырезать можно те узлы, в которых число неизвестных усилий не превышает двух, и эти усилия не направлены по одной прямой. В отдельных случаях возникает необходимость вырезания узлов и с большим числом неизвестных – например, если это позволяет найти усилие хотя бы в одном

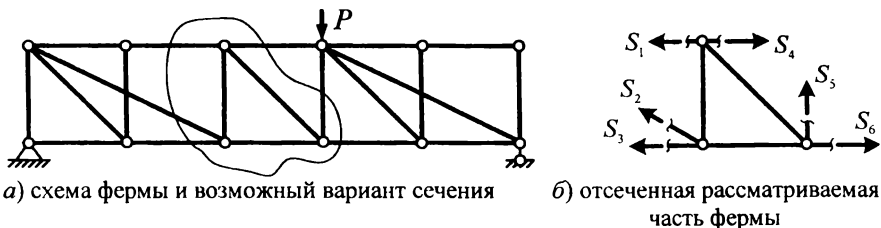


Рисунок 3.25 – Применение метода сечений

из стержней (в случае, если в трехстержневом узле два стержня направлены по одной прямой, то можно найти усилие в третьем стержне – см. узлы 2 и 7 на рис. 3.26), либо позволяет найти зависимость между некоторыми усилиями, которая будет потом использоваться в дальнейших расчетах.

Например, для фермы на рис. 3.26 сначала можно вырезать узел 1 (рис. 3.26б), из рассмотрения равновесия которого найдем:

$$\Sigma Y = 0; \quad S_{1-3} \sin \alpha - P = 0; \quad S_{1-3} = \frac{P}{\sin \alpha};$$

$$\Sigma X = 0; \quad S_{1-2} + S_{1-3} \cos \alpha = 0; \quad S_{1-2} = -S_{1-3} \cos \alpha = -\frac{P}{\sin \alpha} \cos \alpha = -P \operatorname{ctg} \alpha.$$

Угол α и его тригонометрические функции $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ находятся из геометрических соображений.

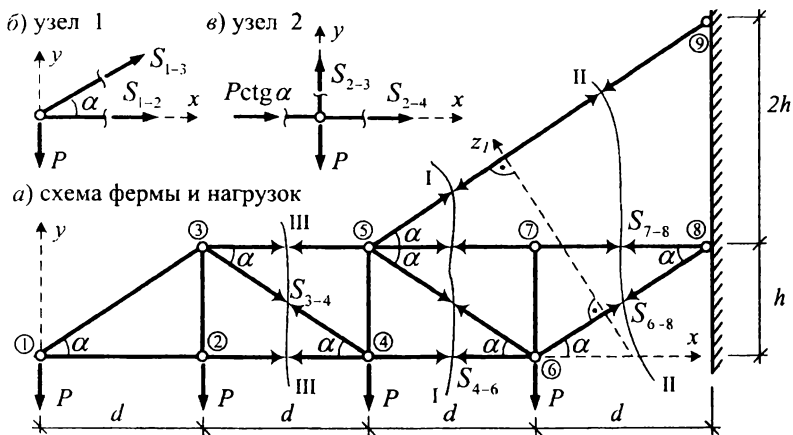


Рисунок 3.26

Затем можно вырезать узел 2 (рис. 3.26в). При этом в стержне 1–2 прикладывается уже известное усилие $S_{1-2} = -Pctg\alpha$. Из рассмотрения равновесия узла находим усилия в новых стержнях:

$$\sum X = 0; \quad Pctg\alpha + S_{2-4} = 0; \quad S_{2-4} = -Pctg\alpha;$$

$$\sum Y = 0; \quad S_{2-3} - P = 0; \quad S_{2-3} = P.$$

Дальнейшая процедура расчета фермы на рис. 3.26 предполагает вырезание узлов 3 и 4, из рассмотрения равновесия которых найдутся усилия в стержнях 3–4, 3–5, 4–5 и 4–6. Вырезав узел 7, из уравнения $\sum Y = 0$ можно найти еще усилие в стержне 7–6, которое в данном случае будет нулевым. Для определения усилий в остальных стержнях, если не определять опорные реакции, способ вырезания узлов здесь не применим, так как в каждом из оставшихся узлов сходится более двух стержней с неизвестными усилиями.

Способ вырезания узлов позволяет сформулировать **признаки «нулевых» стержней**, с помощью которых легко находить стержни, в которых усилия равны нулю:

1) в двухстержневом незагруженном узле, в котором стержни не лежат на одной прямой (рис. 3.27, поз. 1), усилия в обоих стержнях равны нулю:

$$\sum Z_1 = 0; \quad -S_2 \cos \alpha = 0; \quad S_2 = 0;$$

$$\sum Z_2 = 0; \quad -S_1 \cos \beta = 0; \quad S_1 = 0;$$

2) в трехстержневом незагруженном узле, в котором два стержня лежат на одной прямой, а третий под углом к ним (рис. 3.27, поз. 2), усилие в третьем стержне равно нулю, а усилия в первых двух стержнях равны друг другу:

$$\sum Y = 0; \quad S_3 \sin \alpha = 0; \quad S_3 = 0; \quad \sum X = 0; \quad -S_1 + S_2 + 0 = 0; \quad S_1 = S_2;$$

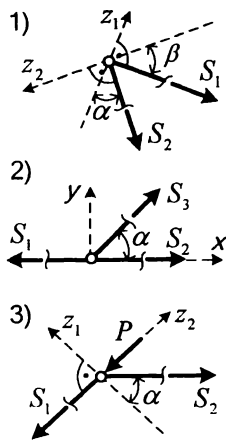


Рисунок 3.27

3) в двухстержневом узле, в котором стержни не лежат на одной прямой и по направлению одного из стержней приложена сила (рис. 3.27, поз. 3), усилие во втором стержне будет равно нулю, а усилие в первом – указанной внешней силе:

$$\begin{aligned} \Sigma Z_1 = 0; & \quad -S_2 \cos \alpha = 0; & \quad S_2 = 0; \\ \Sigma Z_2 = 0; & \quad -S_1 - P = 0; & \quad S_1 = -P. \end{aligned}$$

Достоинство способа – его простота. *Недостатками* являются:

1) то, что часто нельзя сразу (без предварительного последовательного расчета ряда узлов и иногда довольно большого их количества) найти усилие в интересующем нас стержне внутри фермы;

2) то, что в процессе последовательного вырезания узлов погрешности расчетов передаются от предыдущих узлов к последующим, постепенно накапливаясь и увеличиваясь.

Способ моментной точки. Ферма рассекается на две части или вырезается часть ее таким образом (если это, конечно, возможно), чтобы оси всех рассеченных стержней с неизвестными усилиями, кроме одного (того, в котором ищется усилие), пересекались в одной точке; эта точка принимается за моментную и относительно ее составляется сумма моментов всех сил для рассматриваемой части фермы; из полученного уравнения определяется искомое усилие.

Например, для фермы на рис. 3.26 для определения усилия в стержне 4–6 необходимо провести сечение I–I и рассмотреть равновесие левой части фермы. Моментной для усилия S_{4-6} будет точка в узле 5, в котором пересекаются оставшиеся три стержня, рассеченные сечением I–I, то есть стержни 5–6, 5–7 и 5–9. Искомое усилие найдется из уравнения:

$$\Sigma M_5^{лев} = 0; \quad -P \cdot 2d - P \cdot d - S_{4-6} \cdot h = 0; \quad S_{4-6} = -\frac{3d}{h} P.$$

Усилие в стержне 6–8 найдем, проведя сечение II–II и рассмотрев равновесие левой части фермы, с учетом того, что моментной точкой в этом случае будет также точка в узле 5, в которой пересекаются оси стержней 5–9 и 7–8, разрезанные сечением вместе со стержнем 6–8:

$$\begin{aligned} \Sigma M_5^{лев} = 0; & \quad -2P \cdot d + P \cdot d - P \cdot d - S_{6-8} \cos \alpha \cdot h - S_{6-8} \sin \alpha \cdot d = 0; \\ S_{6-8} = & \quad -\frac{2d}{h \cos \alpha + d \sin \alpha} P. \end{aligned}$$

Способ проекций. Ферма рассекается на две части или вырезается часть ее таким образом (если это, конечно, возможно), чтобы все стержни с неизвестными усилиями, кроме одного (того, в котором ищется усилие), были параллельны друг другу. Для рассматриваемой части фермы составляется сумма проекций всех сил на ось, перпендикулярную к указанным параллельным стержням. Из полученного уравнения определяется искомое усилие.

Например, для фермы на рис. 3.26 для определения усилия в стержне 7–8 можно использовать уже проведенное ранее сечение II–II; стержни 6–8 и 5–9,

рассеченные сечением вместе со стержнем 7–8, параллельны друг другу; поэтому, если составить уравнение проекций всех сил, например, левой части фермы на ось Z_1 , перпендикулярную стержням 6–8 и 5–9, то неизвестные усилия в этих стержнях не войдут в рассматриваемое уравнение равновесия (их проекции на ось Z_1 равны нулю); в уравнении будет только одно неизвестное – усилие S_{7-8} , которое и найдется из решения уравнения:

$$\Sigma Z_1 = 0; \quad -4P \cos \alpha - S_{7-8} \sin \alpha = 0; \quad S_{7-8} = -4P \operatorname{ctg} \alpha.$$

Аналогично можно найти усилие в стержне 3–4, проведя сечение III–III и составив для левой части фермы сумму проекций сил на вертикальную ось y (стержни 3–5 и 2–4 горизонтальны):

$$\Sigma Y = 0; \quad -2P - S_{3-4} \sin \alpha = 0; \quad S_{3-4} = -\frac{2P}{\sin \alpha}.$$

Достоинствами способов моментной точки и проекций является то, что в большинстве случаев с их помощью усилия в стержнях можно выразить только через внешние нагрузки и опорные реакции (не выражая через другие усилия).

Применяя совместно способы моментной точки, проекций и вырезания узлов, для большинства ферм можно найти усилия во всех стержнях.

3.6. Определение перемещений в статически определимых изгибаемых системах

Определение перемещений в стержневых системах от действия внешних нагрузок удобно выполнять по формуле Мора. Для изгибаемых систем (рам, балок) при этом обычно учитывают только изгибающие моменты (ввиду незначительности влияния на величины перемещений в таких системах поперечных и продольных сил). Формула Мора в этом случае принимает вид

$$\Delta_{iP} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_P dx}{EJ}, \quad (3.2)$$

где \bar{M}_i – изгибающие моменты в системе от действия единичной «силы»,

приложенной в сечении (точке), для которого определяется перемещение, в направлении искомого (i -го) перемещения; M_P – изгибающие моменты в системе от действия заданной нагрузки; EJ – изгибная жесткость стержней (участков) системы; n – число участков, на которые разбивается система для вычисления интегралов Мора; l – длины этих участков.

Порядок определения перемещений по формуле Мора:

1. Определяются изгибающие моменты в системе от действия заданной нагрузки (находятся аналитические зависимости их изменения в пределах каждого участка либо строится эпюра M_P).

2. В сечении (точке), для которого определяется перемещение, в направлении искомого перемещения прикладывается единичная «сила»; при этом в зависимости от вида определяемого перемещения эта «сила» может быть разной:

а) если определяется линейное (горизонтальное, вертикальное, в произвольном направлении) перемещение, то прикладывается единичная сосредоточенная сила $P = 1$ (рис. 3.28а);

б) если определяется взаимное сближение (расхождение) двух точек, то к этим точкам прикладываются две единичные силы, направленные по прямой, соединяющей указанные точки, навстречу друг другу (друг от друга) (рис. 3.28б);

в) если определяется угол поворота сечения, то прикладывается единичный сосредоточенный момент $m = 1$ (рис. 3.28в);

г) если определяется взаимный угол поворота двух сечений (изменение величины угла между сечениями), то к этим сечениям прикладываются два единичных момента, действующих навстречу друг другу (рис. 3.28г).

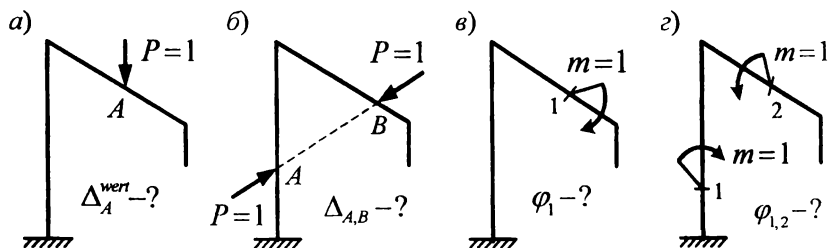


Рисунок 3.28

3. От действия единичной «силы» (приложенной согласно пункту 2) определяются изгибающие моменты в системе (находятся аналитические зависимости изменения изгибающих моментов в пределах каждого участка либо строится эпюра \bar{M}_i).

4. Вычисляется искомое перемещение по формуле Мора (3.2). При этом вычисление интегралов Мора может производиться:

а) непосредственным интегрированием (что не всегда просто);

б) по правилу Верещагина;

в) по формулам трапеций, Симпсона;

д) численным способом, когда интегрирование заменяется суммированием по малым конечным участкам, и другими способами.

Заметим, что вычисление интегралов Мора по правилу Верещагина и по формулам трапеций и Симпсона часто условно называют «перемножением эпюр».

Правило Верещагина. Для вычисления интеграла Мора вида

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_i M_p dx}{EJ}$$

на участке постоянной жесткости, в пределах которого характер изменения эпюр \bar{M}_i и M_p не меняется, необходимо площадь Ω одной из эпюр умножить на ординату, взятую под центром тяжести этой площади из другой эпюры y_c .

(если одна из эпюр криволинейна, то берется площадь обязательно криволинейной эпюры):

$$\frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}_i M_p dx = \frac{1}{EJ} \Omega \cdot y_c. \quad (3.3)$$

При использовании правила Верещагина, таким образом, для эпюры, площадь которой берется, необходимо уметь вычислять эту площадь и уметь находить (знать) положение ее центра тяжести.

Правило знаков: Если центр тяжести одной «перемножаемой» эпюры и соответствующая ему ордината другой эпюры расположены по одну сторону от оси стержня (растянутые волокна находятся с одной стороны стержня), то результат «перемножения» принимается со знаком «плюс».

Приведем несколько примеров применения правила Верещагина.

Для эпюр, представленных на рис. 3.29, вычисление интеграла Мора по правилу Верещагина может быть выполнено четырьмя разными способами, которые будут давать один и тот же результат:

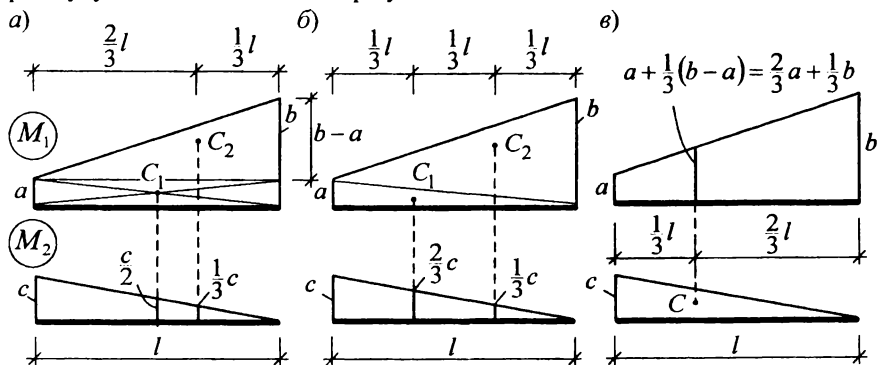


Рисунок 3.29

а) при вычислении площади эпюры M_1 и разбивке ее (для быстрого и удобного определения положения центров тяжести) на прямоугольник $a \times l$ и треугольник $(b - a) \times l$ (рис. 3.29а) будем иметь:

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[(a \cdot l) \cdot \frac{c}{2} + \frac{1}{2} (b - a) l \cdot \frac{1}{3} c \right];$$

б) при вычислении площади эпюры M_1 и разбивке ее на два треугольника $a \times l$ и $b \times l$ (рис. 3.29б) получим:

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\left(\frac{a \cdot l}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} c + \left(\frac{b \cdot l}{2} \right) \cdot \frac{1}{3} c \right];$$

в) при вычислении площади эпюры M_2 (так как обе эпюры M_1 и M_2 линейны, то не имеет значения, площадь какой из них брать) (рис 3.29в) можно записать:

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{c \cdot l}{2} \right) \cdot \left[a + \frac{1}{3}(b-a) \right], \text{ или } = \frac{1}{EJ} \left(\frac{c \cdot l}{2} \right) \cdot \left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b \right).$$

если эпюру M_1 разобьем на
прямоугольник и треугольник;

если эпюру M_1 разобьем на
два треугольника.

Формула трапеций применяется для «перемножения» только линейных эпюр (рис. 3.30):

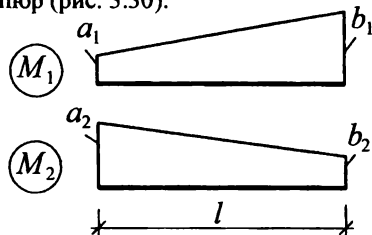


Рисунок 3.30

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{l}{6EJ} (2a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 + 2b_1 \cdot b_2). \quad (3.4)$$

Формула Симпсона может применяться для вычисления интегралов Мора путем соответствующего «перемножения» как линейных эпюр, так и эпюр, одна из которых криволинейна (изменяется по параболическому закону) (рис. 3.31). Формула Симпсона имеет вид:

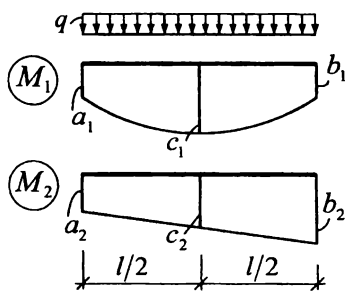


Рисунок 3.31

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{l}{6EJ} (a_1 \cdot a_2 + 4c_1 \cdot c_2 + b_1 \cdot b_2). \quad (3.5)$$

Правило знаков. В формулах Симпсона и трапеций произведения «перемножаемых» ординат принимаются со знаком «плюс», если ординаты находятся с одной стороны от оси стержня на обоих эпюрах, и со знаком «минус», если эти ординаты находятся с разных сторон от оси стержня.

Рекомендации к вычислению интегралов Мора в рамно-балочных системах:

- для эпюр усилий (изгибающих моментов), имеющих линейный характер изменения и простую форму (прямоугольную, треугольную), предлагается использовать правило Верещагина;
- для эпюр усилий, имеющих линейный характер изменения, но более сложную форму (трапецидальную), рекомендуется использовать формулу трапеций;

– для эпюр усилий (изгибающих моментов), одна из которых криволинейна, необходимо использовать формулу Симпсона.

При этом отметим, что формула Симпсона является наиболее общей и ее можно применять и для всех случаев обоих линейных эпюр усилий.

Следует заметить, что при использовании для вычисления интегралов Мора указанных способов обе «перемножаемые» эпюры на участке должны удовлетворять следующим требованиям:

- жесткость стержня на участке должна быть постоянной;
- зависимости изменения обеих эпюр (характер их изменения) не должны изменяться в пределах участка, или, по другому;
- в пределах участка «перемножения» эпюры не должны иметь изломов, разрывов (скачков) и переходов к другим зависимостям изменения усилий.

Если одно из этих требований не соблюдается, то такой участок следует разбить на более мелкие участки, и сделать это надо таким образом, чтобы указанные требования выполнялись. Границами рассматриваемых участков интегрирования в рамно-стержневых системах будут точки (сечения) излома и разветвления стержней, приложения сосредоточенных нагрузок (сил, моментов), действия опорных реакций, начала и конца распределенных нагрузок.

Вычисление перемещений от действия заданных нагрузок по формуле Мора (3.2) производится, таким образом, путем суммирования результатов вычисления интегралов Мора рассмотренными способами по всем участкам одновременной непрерывности эпюр системы.

Рассмотрим определение вертикального перемещения точки С от действия заданной нагрузки в трехшарнирной раме, представленной на рис. 3.32а.

Вычисление опорных реакций и построение эпюры изгибающих моментов в раме выполняем на основе подходов, изложенных в разделах 3.1–3.3.

Эпюра изгибающих моментов от действия заданной нагрузки имеет вид, показанный на рис. 3.32б.

Так как определяется вертикальное перемещение точки С, то в этой точке в вертикальном направлении прикладываем единичную сосредоточенную силу и направляем ее вниз, предполагая, что точка С будет смещаться вниз.

От действия этой силы строим единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M}_1 (рис. 3.32в). После этого выделяем в раме участки одновременной непрерывности эпюр, в пределах которых жесткость стержней постоянна и обе эпюры изменяются непрерывно (рис. 3.32г), и вычисляем искомое перемещение по формуле Мора (3.2)

$$\Delta_C^{верт} = \Delta_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ} = -\frac{1}{EJ} \left(\frac{2,5 \cdot 2,5}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} + 0 +$$

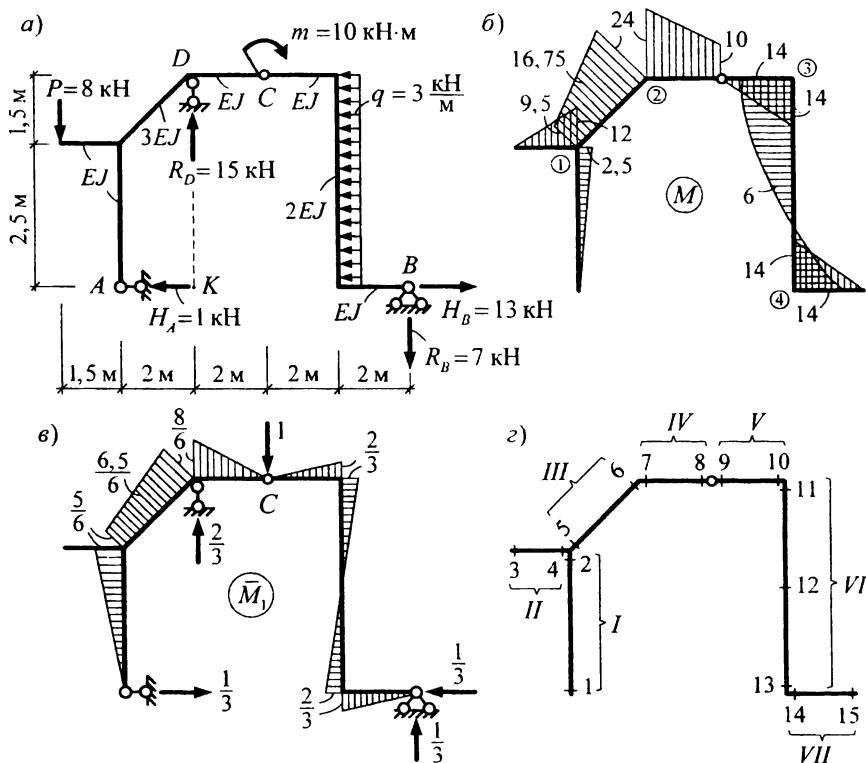


Рисунок 3.32

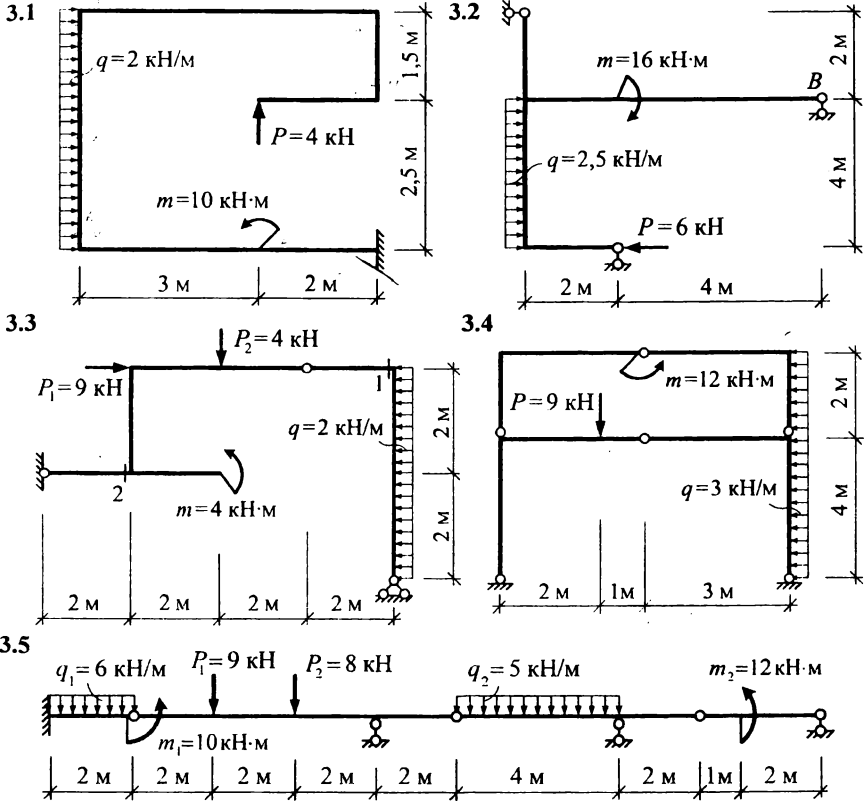
$$\begin{aligned}
 & + \frac{2,5}{6 \cdot 3EJ} \left(9,5 \cdot \frac{5}{6} + 4 \cdot \frac{6,5}{6} \cdot 16,75 + 24 \cdot \frac{8}{6} \right) + \frac{2}{6EJ} \left(2 \cdot 24 \cdot \frac{8}{6} + \frac{8}{6} \cdot 10 + 0 \cdot 24 + 2 \cdot 10 \cdot 0 \right) - \\
 & - \frac{1}{EJ} \left(\frac{14 \cdot 2}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{6 \cdot 2EJ} \left(-14 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot 0 \cdot 6 - 14 \cdot \frac{2}{3} \right) - \frac{1}{EJ} \left(\frac{14 \cdot 2}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10,333}{EJ}.
 \end{aligned}$$

Отметим, что на участках I, V и VII вычисление производилось по правилу Верещагина (3.3), на участке IV – по формуле трапеций (3.4), а на участках III и VI – по формуле Симпсона (3.5). На участке II единичная эпюра изгибающих моментов (рис. 3.32в) нулевая, поэтому и результат вычисления интеграла Мора – ноль.

Значение перемещения положительно, следовательно, точка С действительно перемещается вниз.

3.7. Задачи для самостоятельного решения

Построить в рамах (задачи 3.1-3.4) и в балке (задача 3.5) эпюры M , Q и N .

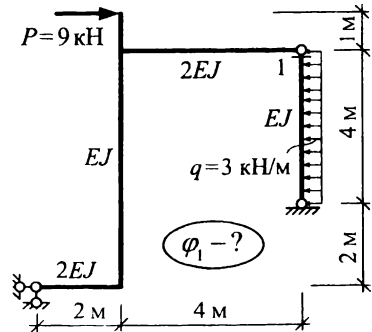


3.6. Определить горизонтальное перемещение точки B в раме, представленной в задаче 3.2, от действия приложенной там нагрузки, приняв жесткость всех стержней рамы постоянной ($EJ = \text{Const}$).

3.7. Определить взаимный угол поворота сечений 1 и 2 в раме, представленной в задаче 3.3, от действия приложенной там нагрузки, приняв жесткость всех стержней рамы постоянной ($EJ = \text{Const}$).

3.8. Определить угол поворота сечения 1 в раме, представленной справа.

Ответы на данные задачи представлены в конце пособия в разделе «Ответы на задачи для самостоятельного решения» (с. 91-92).



4. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ МЕТОДОМ СИЛ

4.1. Идея метода сил

В методе сил расчет статически неопределимых систем сводится к известным способам расчета статически определимых систем.

Статически определимая система, используемая для расчета статически неопределимой системы, получается путем отбрасывания так называемых «лишних» связей (с заменой их усилиями, которые могут возникать в этих связях) и называется основной системой (*О.С.*) метода сил. Эта система должна работать так же как рассматриваемая статически неопределимая система.

Для соблюдения этого необходимо выполнение для основной системы метода сил следующих условий:

1) в основной системе метода сил вместо отброшенных связей необходимо приложить усилия, соответствующие реакциям в этих связях, так как в статически неопределимой системе эти связи есть, и в них могут и будут возникать реактивные усилия; эти усилия и будут неизвестными метода сил; в результате основная система метода сил будет находиться под действием заданной нагрузки (*P*) и неизвестных метода сил X_i ($i = 1 \dots L$, где L – число «лишних» связей в системе);

2) перемещения точек (сечений) в направлении отброшенных («лишних») связей в основной системе должны быть равны нулю, так как в статически неопределимой системе в этих направлениях связи есть, что для основной системы, находящейся под действием заданной нагрузки (*P*) и неизвестных метода сил (X_i), может быть записано аналитически в виде системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1(X_1, X_2, \dots, X_L, P) = 0; \\ \Delta_2(X_1, X_2, \dots, X_L, P) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta_L(X_1, X_2, \dots, X_L, P) = 0. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Решение этой системы уравнений позволяет определить основные неизвестные метода сил.

Приложив после этого найденные неизвестные вместе с заданной нагрузкой к основной системе метода сил, будем иметь возможность построить для неё эпюры усилий (M , Q , N) обычными способами (способами расчета статически определимых систем). Эти эпюры будут являться эпюрами внутренних сил в заданной статически неопределимой системе.

Ниже принципы расчета статически неопределимых систем методом сил рассмотрены применительно к расчету статически неопределимых рам более подробно и последовательно с выделением всех этапов расчета.

4.2. Степень статической неопределимости системы

Степенью статической неопределимости системы называют количество «лишних» связей, удаление которых обращает систему в статически определимую. Число же «лишних» связей равно степени свободы системы с обратным знаком: $L = -W$. Формулы для определения степени свободы системы приведены и обсуждаются в разделе «Кинематический анализ сооружений».

Степень статической неопределимости рам может быть определена по формулам:

$$L = 3K - Ш; \quad (4.2)$$

$$L = -(3D - 2Ш - C_0). \quad (4.3)$$

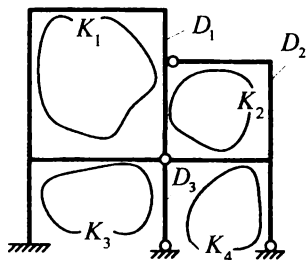


Рисунок 4.1

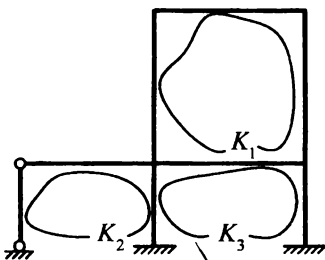


Рисунок 4.2

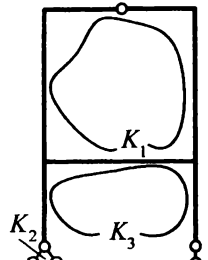


Рисунок 4.3

Вычислим число лишних связей для рам, представленных на рис. 2÷4:

а) для рамы на рис. 4.1: $L = 3K - Ш = 3 \cdot 4 - 6 = 6;$

$$L = -(3D - 2Ш - C_0) = -(3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 7) = 6.$$

б) для рамы на рис. 4.2:

$$L = 3K - Ш = 3 \cdot 3 - 2 = 7;$$

рама содержит в себе жесткие замкнутые контуры, и по формуле:

$$L = -(3D - 2Ш - C_0)$$

лишние связи в ней рассчитывать нельзя;

в) для рамы на рис. 4.3: $L = 3K - Ш = 3 \cdot 3 - 7 = 2;$

$$L = -(3D - 2Ш - C_0) = -(3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 3) = 2.$$

4.3. Выбор основной системы метода сил

Основной системой (О.С.) метода сил называется статически определимая, геометрически неизменяемая система, получаемая из заданной статически неопределимой системы путем отбрасывания «лишних» связей и замены их известными усилиями, которые могут возникать в этих связях.

Геометрическая неизменяемость определяется с помощью кинематического анализа основной системы, а точнее, с помощью геометрического анализа структуры системы (см. раздел «Кинематический анализ сооружений»).

Рассмотрим несколько примеров выбора основных систем метода сил.

Пример 4.1. Рама, представленная на рис. 4.4а, имеет две «лишние» связи –

$$L = 3K - III = 3 \cdot 1 - 1 = 2$$

$$\text{или } L = -(3D - 2III - C_0) = -(3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 6 = 2),$$

и для нее могут быть выбраны основные системы (О.С.) метода сил, показанные на рис. 4.4б–4.4д, и не может быть принята система, изображенная на рис. 4.4е, так как она мгновенно изменяема в верхней части по первому признаку мгновенной изменяемости – три диска соединены тремя шарнирами, лежащими на одной прямой.

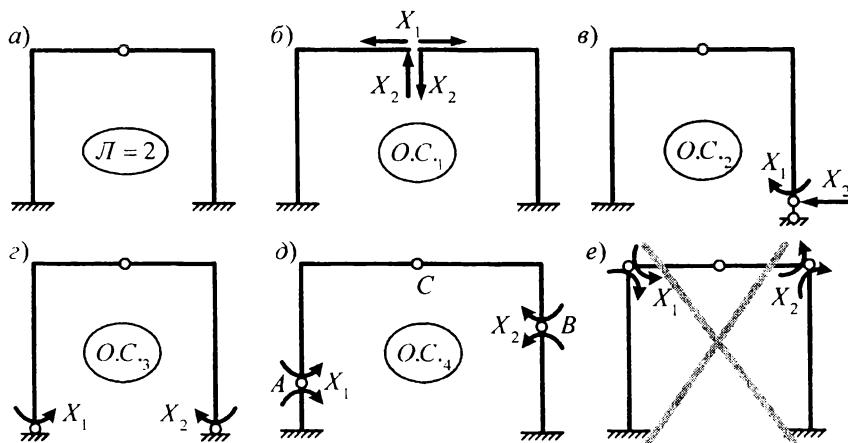


Рисунок 4.4

Пример 4.2. Рама, представленная на рис. 4.5а, имеет три «лишние» связи –

$$L = 3K - III = 3 \cdot 3 - 6 = 3$$

$$\text{или } L = -(3D - 2III - C_0) = -(3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 7 = 3),$$

и для нее варианты основных систем метода сил представлены на рис. 4.5б–4.5е; при этом нельзя принимать в качестве О.С. метода сил системы, изображенные на рис. 4.5ж (первый признак мгновенной изменяемости – шарниры B , C , T) и на рис. 4.5з (система изменяема в правой части, которая может вращаться относительно шарнира C , а левая часть при этом статически неопределима, что является следствием неправильного отбрасывания «лишних» связей).

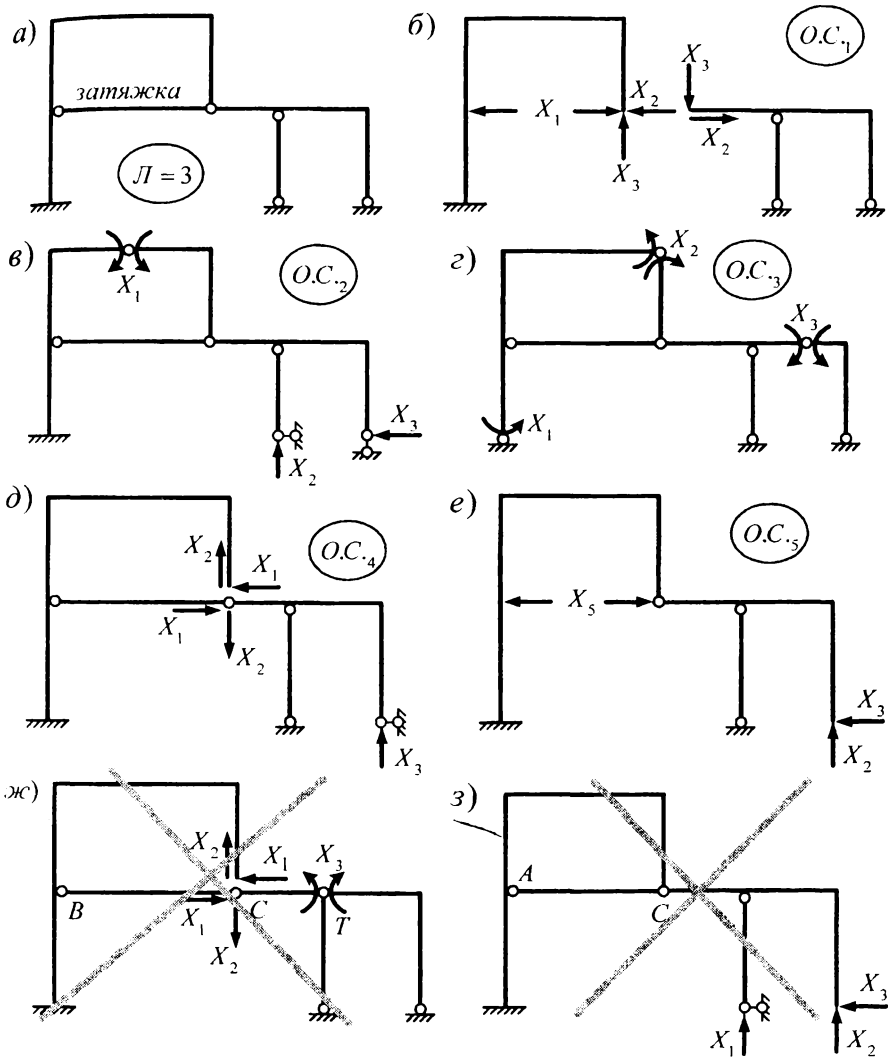


Рисунок 4.5

Пример 4.3. Для рамы, представленной на рис. 4.6а и имеющей три «лишние» связи –

$$L = 3K - Ш = 3 \cdot 1 - 0 = 3,$$

возможные варианты основных систем метода сил показаны на рис. 4.6б–4.6е.

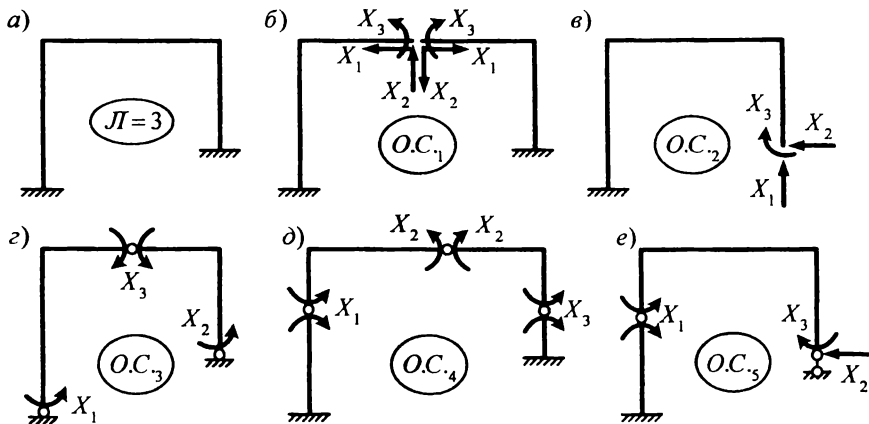


Рисунок 4.6

метода сил можно использовать следующие подходы в отбрасывании «лишних» связей:

- отбрасывание опор (удаляется одна связь при отбрасывании шарнирно подвижной опоры, две связи – при отбрасывании шарнирно неподвижной опоры и три связи – при отбрасывании заделки);
- отбрасывание отдельных опорных связей в опорах (число удаляемых связей равно числу отброшенных опорных связей);
- разрезание затяжек (удаляется одна связь, действующая вдоль затяжки);
- врезание шарниров (удаляется одна связь (угловая));
- разрезание шарниров (удаляются две связи при разрезании одного простого шарнира);
- разрезание стержней (удаляются три связи).

Анализ представленных основных систем метода сил позволяет сделать следующий вывод:

⚠ Для любой статически неопределимой системы существует бесконечно большое число основных систем метода сил.

Для расчета же методом сил должна быть выбрана одна основная система, которую будем называть **расчетной основной системой** метода сил.

В качестве расчетной О.С. следует принимать наиболее рациональную.

Рациональность основных систем определяется следующими положениями:

- 1) в расчетной основной системе метода сил определение опорных реакций и построение эпюр внутренних усилий должно быть как можно более простым;
- 2) эпюры внутренних сил (изгибающих моментов) также должны быть как можно более простыми;
- 3) для симметричных рам следует выбирать симметричные расчетные основные системы.

Для рамы на рис. 4.4 в качестве расчетной целесообразнее всего принять $O.C._1$, для рамы на рис. 4.5 – $O.C._1$, для рамы на рис. 4.6 – $O.C._1$ либо $O.C._2$.

4.4. Система канонических уравнений метода сил

Основная система (О.С.) метода сил, принимаемая для расчета, как уже указывалось (раздел 4.1), должна быть эквивалентна заданной статически неопределимой системе, а это будет, если эти системы будут одинаково деформироваться и иметь одинаковые перемещения всех точек. И соответственно перемещения в О.С. в направлениях отброшенных связей должны быть равны нулю (4.1), так как в статически неопределимой системе эти связи есть.

Запишем условие эквивалентности основной системы, нагруженной неизвестными метода сил $X_1, X_2, X_3, \dots, X_L$ и заданной нагрузкой, статически неопределимой системе с L лишними связями (4.1) в развернутой форме, используя принцип независимости действия сил. В результате перемещение по направлению i -ой отброшенной связи будет иметь вид

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \Delta_{i3} + \dots + \Delta_{ik} + \dots + \Delta_{iL} + \Delta_{iP} = 0,$$

где Δ_{ik} – перемещение по направлению i -ой отброшенной связи, вызванное действием k -ой неизвестной силы (X_k); Δ_{iP} – перемещение по направлению i -ой отброшенной связи от действия заданной нагрузки.

Для линейно-деформируемых систем любое перемещение, вызванное действием какой-либо силы, можно выразить в виде произведения этой силы на перемещение того же вида и в том же направлении от действия соответствующей единичной силы $\Delta_{ik} = \delta_{ik} \cdot X_k$.

Выражая каждое из перемещений от действия неизвестных сил через эти силы и соответствующие единичные перемещения, получим систему канонических уравнений метода сил в виде

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \dots + \delta_{1L} X_L + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \dots + \delta_{2L} X_L + \Delta_{2P} = 0; \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \dots + \delta_{3L} X_L + \Delta_{3P} = 0; \\ \dots \\ \delta_{L1} X_1 + \delta_{L2} X_2 + \delta_{L3} X_3 + \dots + \delta_{LL} X_L + \Delta_{LP} = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

где δ_{ik} и Δ_{iP} – перемещения, в обозначениях которых:

- первые индексы определяют точки (сечения), которые перемещаются, и направления их перемещений (они совпадают соответственно с точками (сечениями), в которых приложены силы X_i , и с направлениями этих сил);
- вторые индексы указывают на причины, вызывающие эти перемещения, то есть на силу X_k единичной величины, если второй индекс – k , или на внешние нагрузки, действующие на сооружение, если этот индекс – P .

Коэффициенты уравнений (4.4), имеющие одинаковые индексы (δ_{ij}), называются *главными*, коэффициенты с разными индексами (δ_{ik}) – *побочными*, а величины Δ_{iP} – *свободными членами*.

Главные коэффициенты здесь будут всегда *положительными* и *не могут равняться нулю*. Побочные коэффициенты могут принимать любые значения, в том числе и нулевое, и для них на основе теоремы Максвелла всегда должно соблюдаться равенство

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}. \quad (4.5)$$

В зависимости от вида сил X_i перемещения δ_{ik} и Δ_{iP} по физическому смыслу могут быть:

- линейным перемещением, если X_i – сосредоточенная сила;
- угловым перемещением (углом поворота), если X_i – сосредоточенный момент;
- взаимным линейным перемещением (сближением или расхождением) двух точек, если X_i – две сосредоточенные силы, приложенные в двух точках по прямой, их соединяющей, навстречу друг другу или друг от друга;
- взаимным углом поворота двух сечений, если X_i – два сосредоточенных момента, приложенные в этих сечениях навстречу друг другу.

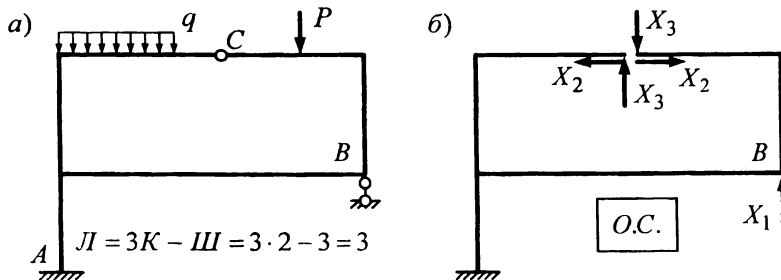


Рисунок 4.7

Например, для рамы, изображенной на рис. 4.7а, при выборе основной системы метода сил в виде, представленном на рис. 4.7б, будем иметь систему трех уравнений вида (4.4).

Физический смысл коэффициентов этой системы (на примере нескольких коэффициентов) будет следующим:

δ_{11} – вертикальное перемещение точки B в основной системе (О.С.) от действия силы X_1 единичной величины;

δ_{23} – взаимное расхождение в О.С. сечений слева и справа от шарнира C по горизонтали от действия сил X_3 , равных единице;

Δ_{3P} – взаимное расхождение в О.С. сечений слева и справа от шарнира C по вертикали от действия заданных нагрузок.

Физический смысл уравнений в целом будет:

1-го уравнения – вертикальное перемещение точки B от действия сил X_1, X_2, X_3 и внешних нагрузок должно равняться нулю, так как в заданной статически неопределимой системе (рис. 4.7а) в точке B имеется вертикальная связь;

2-ое уравнение представляет собой взаимное расхождение сечений слева и справа от шарнира C по горизонтали от действия сил X_1, X_2, X_3 и внешних нагрузок, которое должно равняться нулю, так как указанные сечения соединены между собой шарниром C (рис. 4.7а) и не могут расходиться.

Физический смысл 3-го уравнения аналогичен смыслу 2-го с разницей в направлении взаимного расхождения сечений (по вертикали).

4.5. Вычисление коэффициентов и свободных членов канонических уравнений

Коэффициенты и свободные члены уравнений метода сил (4.4) являются по физическому смыслу перемещениями и могут быть вычислены по формуле Мора (3.2). При этом для рам, как изгибаемых систем, в формуле Мора обычно пренебрегают влиянием поперечных и продольных сил, которое для таких систем незначительно, опуская соответствующие слагаемые. В результате выражения для определения коэффициентов и свободных членов систем канонических уравнений метода сил будем иметь в виде:

$$\delta_{ii} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i^2 dx}{EJ}; \quad \delta_{ik} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k dx}{EJ}; \quad \Delta_{iP} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_P dx}{EJ}, \quad (4.6)$$

где \bar{M}_i (\bar{M}_k) – закон изменения (эпюра) изгибающих моментов в О.С. от действия силы $X_i = 1$ ($X_k = 1$); M_P – закон изменения (эпюра) изгибающих моментов в О.С. от действия внешних нагрузок; EJ – жесткость стержня (участка) при изгибе, n – число участков интегрирования, l – длины этих участков.

Таким образом, для вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода сил мы должны в основной системе построить единичные эпюры изгибающих моментов \bar{M}_i ($i = 1 \dots J$) от действия единичных значений неизвестных ($X_i = 1$) и грузовую эпюру изгибающих моментов M_P от действия заданных нагрузок. После этого сможем приступить к определению искоемых величин.

Принципы вычисления интегралов Мора (4.6) изложены в разделе 3.5.

4.6. Проверки коэффициентов и свободных членов канонических уравнений

После вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений по формулам (4.6) необходимо выполнить проверки правильности выполнения расчетов, в качестве которых могут быть использованы:

а) универсальная проверка правильности вычисления единичных коэффициентов:

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_S^2 dx}{EJ} = \sum_{i=1}^{\mathcal{L}} \sum_{k=1}^{\mathcal{L}} \delta_{ik}, \quad (4.7)$$

где правая часть выражения представляет собой сумму всех коэффициентов системы уравнений метода сил (5), а $\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_{\mathcal{L}}$ – суммарная единичная эпюра;

б) если универсальная проверка коэффициентов не выполняется, то для определения того, в каком уравнении (какой строке) находятся неверно вычисленные коэффициенты, можно сделать построчные проверки, записываемые в виде

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_S dx}{EJ} = \sum_{k=1}^{\mathcal{L}} \delta_{ik}, \quad (k = 1 \dots \mathcal{L}) \quad (4.8)$$

где правая часть представляет собой сумму всех коэффициентов в i -ом уравнении системы (4.4).

Анализ выполнения или невыполнения отдельных построчных проверок позволяет определить (по крайней мере, ориентировочно), какой из коэффициентов δ_{ik} , возможно, вычислен неверно.

Как несложно видеть, все (\mathcal{L}) построчные проверки заменяют собой универсальную, и наоборот.

в) столбцовая проверка правильности вычисления свободных членов (грузовых перемещений) системы уравнений – записывается в виде:

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_S M_p dx}{EJ} = \sum_{i=1}^{\mathcal{L}} \Delta_{iP}, \quad (4.9)$$

где правая часть выражения представляет собой сумму всех свободных членов системы уравнений.

4.7. Решение системы канонических уравнений

Система канонических уравнений метода сил (4.4) является неоднородной системой линейных алгебраических уравнений и может быть решена, например, способом подстановки, способом Гаусса и другими известными способами.

Заметим, что после нахождения неизвестных метода сил следует обязательно выполнить проверку правильности решения системы уравнений путем подстановки найденных значений $X_i (i = 1 \dots \mathcal{L})$ во все уравнения системы. *Если такую проверку не сделать, то может оказаться, что все дальнейшие расчеты и вычисления будут напрасной тратой времени.*

4.8. Построение окончательных эпюр усилий и их проверки

После определения неизвестных метода сил $X_i (i = 1 \dots \mathcal{L})$ построение окончательных эпюр внутренних усилий в рассчитываемой статически неопредели-

мой системе может быть выполнено двумя способами:

1. Можно приложить к *О.С.* метода сил заданные нагрузки и все найденные неизвестные и построить в этой *О.С.*, как в обычной статически определимой системе, эпюры M , Q и N , которые и будут эпюрами усилий в заданной статически неопределимой системе.

2. Учитывая, что от действия каждого из неизвестных метода сил X_i единичной величины и от действия заданных нагрузок эпюры изгибающих моментов в *О.С.* уже построены (перед вычислением коэффициентов системы уравнений – см. раздел 4.5), ими можно воспользоваться. В этом случае окончательную эпюру изгибающих моментов в заданной статически неопределимой системе можно построить, используя принцип независимости действия сил, по формуле:

$$M = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + \bar{M}_3 \cdot X_3 + \dots + M_{\text{л}} \cdot X_{\text{л}} + M_{\text{р}}. \quad (4.10)$$

Так как здесь используются результаты расчетов и построений эпюр, уже выполненных ранее (и которые в первом подходе, по существу, надо повторять), то этот подход получается более простым и быстрее приводит к цели, и поэтому далее используется только такой подход.

Правильность расчетов и построения эпюр изгибающих моментов проверяется с помощью деформационной (кинематической) проверки, которая может быть представлена в двух вариантах:

1) *полная деформационная проверка* – записывается в виде

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_s M dx}{EJ} = 0 \quad (4.11)$$

и по физическому смыслу представляет собой суммарное перемещение по направлениям всех неизвестных метода сил X_i ($i = 1 \dots \text{л}$) от действия этих неизвестных и заданных нагрузок, которое должно равняться нулю, так как в заданной статически неопределимой системе в направлении этих неизвестных (X_i) есть связи (этот физический смысл совпадает с физическим смыслом всех вместе взятых канонических уравнений метода сил – см. раздел 4.4);

2) *построчные деформационные (кинематические) проверки* – имеют вид

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i M dx}{EJ} = 0, \quad i = 1 \dots \text{л}; \quad (4.12)$$

физический смысл каждой из этих проверок заключается в равенстве нулю перемещений от действия всех X_i и заданных нагрузок по направлениям каждого из неизвестных метода сил X_i , так как по этим направлениям в статически неопределимой системе есть связи (и это соответствует физическому смыслу соответствующих канонических уравнений метода сил – см. раздел 4.4).

Все вместе построчные деформационные проверки (4.12) соответствуют полной деформационной проверке (4.11), и если полная проверка выполняется,

то не имеет смысла выполнять построчные проверки. Их целесообразно производить при невыполнении полной деформационной проверки для того, чтобы выявить, в каком из направлений (уравнений) искать ошибку.

Эюра поперечных сил Q может быть построена по эюре M с использованием известной дифференциальной зависимости $Q = \frac{dM}{dx}$, которая для линейных участков эюры M может быть представлена в виде

$$Q = \pm \left| \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{l} \right|, \quad (4.13)$$

где $M_{\text{лев}}$, $M_{\text{прав}}$ — величины изгибающих моментов по концам участка (слева и справа); если растянутые волокна у этих изгибающих моментов находятся с разных сторон стержня, то одна из них принимается положительной, а вторая — отрицательной.

Знак перед абсолютной величиной в формуле (4.13) принимается **по правилу**:

если для совмещения стержня, на котором построена эюра M , с касательной к этой эюре стержень необходимо поворачивать по часовой стрелке (при угле поворота меньше 90°), то принимается знак «+», если против часовой стрелки, то принимается знак «-».

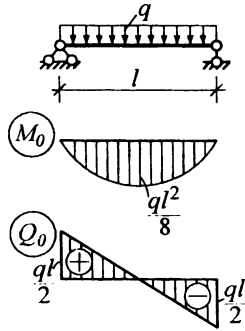


Рисунок 4.8

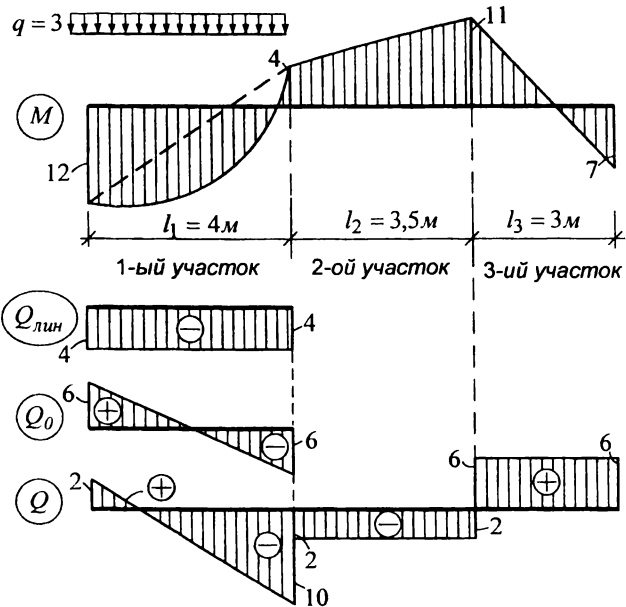


Рисунок 4.9

Для криволинейных (параболических) участков эпюры M дифференциальная зависимость $Q = \frac{dM}{dx}$ может быть записана в следующем виде

$$Q = Q_0 \pm \left| \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{l} \right|, \quad (4.14)$$

где второе слагаемое представляет собой поперечную силу $Q_{\text{лин}}$ от линейной части эпюры M на участке, а первое слагаемое Q_0 учитывает криволинейную часть этой эпюры и представляет собой эпюру (закон изменения) поперечных сил на участке, рассматриваемом в виде простой двухопорной балки, от действия равномерно распределенной нагрузки (см. рис. 4.8).

Например, для эпюры M на рис. 4.9, представленной тремя участками с различными законами ее изменения, поперечные силы на этих участках (слева направо) будут равны:

$$Q_1^{\text{лев. прав}} = \pm \frac{ql_1}{2} - \left| \frac{4 - (-12)}{4} \right| = \pm \frac{3 \cdot 4}{2} - 4 = \pm 6 - 4; \quad Q_1^{\text{лев}} = +2; \quad Q_1^{\text{прав}} = -10;$$

$$Q_2 = - \left| \frac{11 - 4}{3,5} \right| = -2; \quad Q_3 = + \left| \frac{-7 - 11}{3} \right| = +6.$$

Эпюру продольных сил N строят по эпюре Q способом вырезания узлов, то есть вырезают узлы рамы, прикладывая в сечениях уже известные поперечные силы и неизвестные (а также известные) продольные силы (если в узле приложены внешние сосредоточенные силы, то они также должны быть учтены). Затем составляются уравнения равновесия узлов ($\sum X = 0$; $\sum Y = 0$), из которых определяются неизвестные продольные силы.

После построения эпюр внутренних сил, вырезая опорные узлы и рассматривая их равновесие, можно найти реакции в опорах рамы, после чего нужно выполнить статическую проверку равновесия рамы в целом с использованием, например, уравнений:

$$\begin{aligned} \sum X_{\text{оп. реакций}} + \sum X_{\text{вн. нагрузок}} &= 0; \\ \sum Y_{\text{оп. реакций}} + \sum Y_{\text{вн. нагрузок}} &= 0; \\ \sum M_{\text{Т. оп. реакций}} + \sum M_{\text{Т. вн. нагрузок}} &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.9. Порядок расчета рам методом сил

Таким образом, на основе изложенного предлагается следующий порядок расчета рам методом сил:

1. Определяем степень статической неопределимости рамы (то есть число «лишних» связей в раме – L), используя, например, формулы (4.2, 4.3).

2. Выбираем расчетную основную систему метода сил (О.С.), представив предварительно несколько возможных вариантов основных систем.

3. Записываем в общем виде систему канонических уравнений метода сил (4.4) и выясняем физический смысл этих уравнений и входящих в них величин.

4. В расчетной О.С. метода сил строим единичные $(\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_L)$ и грузовую (M_p) эпюры изгибающих моментов.

5. Вычисляем все единичные коэффициенты (δ_{ik}) и свободные члены (Δ_{iP}) системы канонических уравнений метода сил (4.6).

6. Выполняем проверки правильности вычисления единичных коэффициентов (4.7 либо 4.8) и свободных членов системы уравнений (4.9).

7. Решаем систему канонических уравнений и находим неизвестные метода сил X_1, X_2, \dots, X_L ; выполняем проверку правильности решения системы уравнений, подставляя найденные неизвестные во все уравнения.

8. Строим в заданной статически неопределимой раме окончательную эпюру изгибающих моментов M (4.10).

9. Выполняем деформационную проверку эпюры M (см. 4.12 либо 4.11).

10. По эпюре M строим окончательную эпюру поперечных сил Q (используя зависимости 4.13 либо 4.14).

11. Способом вырезания узлов на эпюре Q с учетом действующих в узлах нагрузок строим в заданной раме эпюру продольных сил N .

12. Вырезая опорные узлы, определяем опорные реакции, и выполняем статическую проверку равновесия рамы в целом (4.15).

4.10. Пример расчета

Здесь представлен пример расчета рамы методом сил с одной лишней связью. Принципы и подходы в расчетах рам с большим числом лишних связей ничем не отличаются от представленных в данных примерах – разница будет связана только с числом уравнений в системах уравнений, с числом вычисляемых единичных коэффициентов и свободных членов системы уравнений и с числом единичных эпюр изгибающих моментов, которые необходимо будет строить и с использованием которых выполняются расчеты.

Рассчитаем раму, представленную на рис. 4.10а.

1. Данная рама имеет одну лишнюю связь:

$$L = 3K - 3H = 3 \cdot 3 - 8 = 1$$

$$\text{или } L = -(3D - 2H - C_0) = -(3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 4 = 1).$$

2. Принятая расчетная основная система метода сил показана на рис. 4.10б. Выбор основной системы здесь может быть осуществлен также отбрасыванием любой другой опорной связи, либо врезанием шарнира в любом из сечений рамы, кроме сечения, лежащего на пересечении стержня CD и воображаемой прямой AB , так как в этом случае полученная система будет мгновенно изменяемой, как образованная тремя дисками, соединенными между собой тремя шарнирами, лежащими на одной прямой (первый признак мгновенно изменяемости – см. раздел 2.2).

3. Каноническое уравнение метода сил здесь будет также одно

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0, \quad (4.16)$$

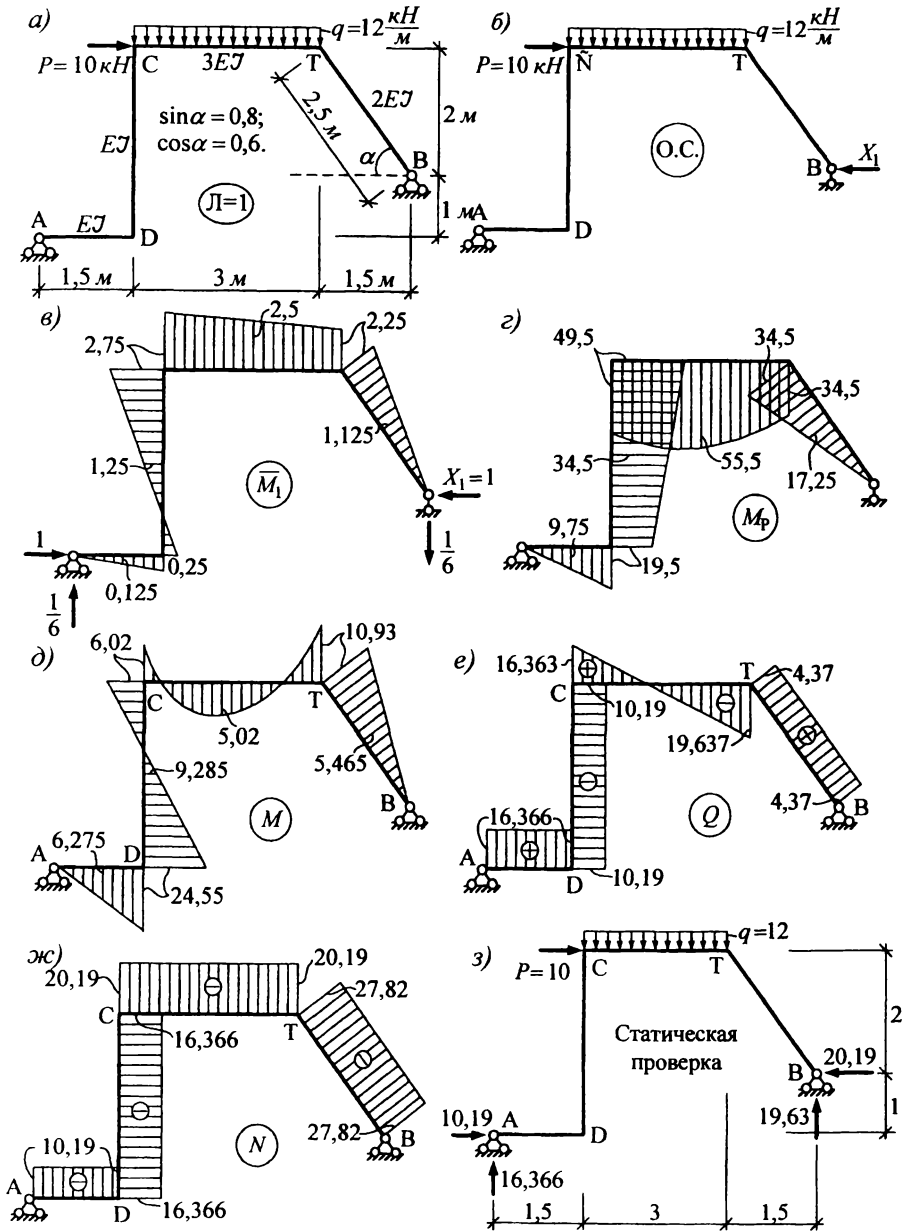


Рисунок 4.10

и будет представлять собой по физическому смыслу горизонтальное перемещение точки B в основной системе метода сил от действия силы X_1 и внешней нагрузки, которое должно равняться нулю, так как в исходной системе (рис. 4.10а) в точке B имеется горизонтальная связь (стоит шарнирно неподвижная опора).

4. В основной системе (О.С.) метода сил как в обычной статической определимой системе строим единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M}_1 от действия силы X_1 единичной величины ($X_1 = 1$) (рис. 4.10в) и грузовую эпюру M_P от действия заданных нагрузок (рис. 4.10з).

5. Вычисляем коэффициент δ_{11} и свободный член Δ_{1P} уравнения метода сил. Покажем здесь вычисление этих величин разными способами:

а) по правилу Верещагина:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{0,25 \cdot 1,5}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,25 + \frac{1}{EJ} \left[-(0,25 \cdot 3) \cdot 1,25 + \frac{(2,75 + 0,25)}{2} \cdot 3 \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{2}{3} \cdot 3 - 0,25 \right) \right] + \frac{1}{3EJ} \left[(2,25 \cdot 3) \cdot 2,5 + \frac{(2,75 - 2,25) \cdot 3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 0,5 + 2,25 \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2EJ} \left(\frac{2,25 \cdot 2,5}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,25 = \frac{1}{EJ} (0,031 + 6,938 + 6,271 + 2,109) = \frac{15,35}{EJ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_D dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{19,5 \cdot 1,5}{2} \right) \frac{2}{3} \cdot 0,25 + \frac{1}{EJ} \left[-(19,5 \cdot 3) \cdot 1,25 - \frac{(49,5 - 19,5)}{2} \cdot 3 \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{2}{3} \cdot 3 - 0,25 \right) \right] + \frac{1}{3EJ} \left[-(34,5 \cdot 3) \cdot 2,5 - \frac{(49,5 - 34,5)}{2} \cdot 3 \left(2,25 + \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{12 \cdot 3^2}{8} \cdot 3 \right) \cdot 2,5 \right] - \frac{1}{2EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 34,5 \cdot 2,5 \right) \frac{2}{3} \cdot 2,25 = \\ &= \frac{1}{EJ} (2,438 - 151,875 - 128,125 - 32,344) = -\frac{309,906}{EJ}; \end{aligned}$$

б) по формуле Симпсона:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2 dx}{EJ} = \frac{1,5}{6EJ} (0^2 + 4 \cdot 0,125^2 + 0,25^2) + \frac{3}{6EJ} (0,25^2 + 4 \cdot 1,25^2 + 2,75^2) + \\ &\quad + \frac{3}{6 \cdot 3EJ} (2,75^2 + 4 \cdot 2,5^2 + 2,25^2) + \frac{2,5}{6 \cdot 2EJ} (2,25^2 + 4 \cdot 1,125^2 + 0^2) = \\ &= \frac{1}{EJ} (0,031 + 6,938 + 6,271 + 2,109) = \frac{15,35}{EJ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = \frac{1,5}{6EJ} (0^2 + 4 \cdot 0,125 \cdot 9,75 + 0,25 \cdot 19,5) + \frac{3}{6EJ} (0,25 \cdot 19,5 - \\ &- 4 \cdot 1,25 \cdot 34,5 - 2,75 \cdot 49,5) - \frac{3}{6 \cdot 3EJ} (-2,75 \cdot 49,5 - 4 \cdot 2,5 \cdot 55,5 - 2,25 \cdot 34,5) + \\ &+ \frac{2,5}{6 \cdot 2EJ} (2,25 \cdot 34,5 + 4 \cdot 1,125 \cdot 17,25 + 0 \cdot 0) = \\ &= \frac{1}{EJ} (2,438 - 151,875 - 128,125 - 32,344) = -\frac{309,906}{EJ}. \end{aligned}$$

⊙ Заметим, что при подобных вычислениях интегралов Мора можно на различных участках выполнять расчеты разными способами (по правилу Верещагина, по формуле трапеций, по формуле Симпсона), комбинируя их с точки зрения удобства выполнения вычислений.

7. Решаем каноническое уравнение метода сил (4.16)

$$\frac{15,35}{EJ} X_1 - \frac{309,906}{EJ} = 0; \quad X_1 = 20,19 \text{ кН.}$$

8. Строим окончательную эпюру изгибающих моментов по формуле (4.10)

$$M = \bar{M}_1 \cdot X_1 + M_P,$$

умножая все характерные ординаты эпюры \bar{M}_1 на величину 20,19 и складывая результаты с соответствующими ординатами эпюры M_P . Окончательная эпюра M представлена на рис. 17д.

9. Деформационная (кинематическая) проверка окончательной эпюры M :

$$\begin{aligned} \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M dx}{EJ} &= 0; \quad \frac{1}{EJ} \left(\frac{24,55 \cdot 1,5}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,25 + \frac{3}{6EJ} (0,25 \cdot 24,55 - 4 \cdot 1,25 \cdot 9,285 + \\ &+ 2,75 \cdot 6,02) + \frac{3}{6 \cdot 3EJ} (2,75 \cdot 6,02 - 4 \cdot 2,5 \cdot 5,02 + 2,25 \cdot 10,93) + \frac{1}{2EJ} \left(\frac{10,93 \cdot 2,5}{2} \right) \frac{2}{3} \cdot 2,25 = \\ &= \frac{1}{EJ} (3,069 - 11,866 - 1,509 + 10,247) = \frac{1}{EJ} (13,316 - 13,375) = 0,059 \approx 0; \end{aligned}$$

$$\text{погрешность} \left| \frac{13,316 - 13,375}{13,375} \right| \cdot 100\% = 0,443\% < 1\% \text{ незначительна.}$$

10. Строим эпюру поперечных сил в заданной статически неопределимой системе, используя формулы (4.13), (4.14):

а) на участках AD и DC по формуле (4.13) получим

$$Q_{AD} = + \left| \frac{24,55 - 0}{1,5} \right| = +16,366 \text{ кН}; \quad Q_{DC} = - \left| \frac{24,55 - (-6,02)}{3} \right| = -10,19 \text{ кН};$$

б) на участке CT необходимо использовать формулу (4.14)

$$Q_{CT} = \pm \frac{12 \cdot 3}{2} - \left| \frac{10,93 - 6,02}{3} \right| = \pm 18 - 1,637 \text{ кН};$$

$$Q_{CT}^{лев} = +18 - 1,637 = 16,363 \text{ кН}; \quad Q_{CT}^{прав} = -18 - 1,637 = -19,637 \text{ кН};$$

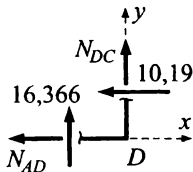
в) на участке TB поперечную силу получим по формуле (4.13)

$$Q_{TB} = + \left| \frac{10,93 - 0}{2,5} \right| = +4,37 \text{ кН}.$$

Эпюра поперечных сил изображена на рис. 4.10е.

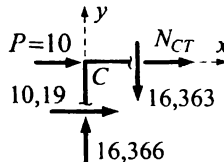
11. Эпюру продольных сил N строим способом вырезания узлов на эпюре Q :

а) узел D



$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \\ N_{AD} &= -10,19; \\ \sum Y &= 0; \\ N_{DC} &= -16,366; \end{aligned}$$

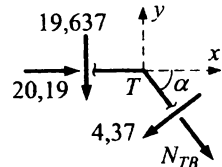
б) узел C



$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \\ 10 + 10,19 - N_{CT} &= 0; \\ N_{CT} &= -20,19; \\ \sum Y &= 0; \\ 16,366 - 16,363 &\approx 0. \end{aligned}$$

в) узел T

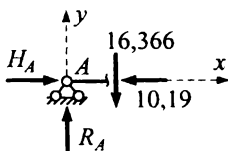
$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \quad 20,19 - 4,37 \cdot 0,8 + N_{TB} \cdot 0,6 = 0; \quad N_{TB} = -27,823; \\ \sum Y &= 0; \quad -19,637 - 4,37 \cdot 0,6 + 27,823 \cdot 0,8 = 0; \\ &\quad -22,259 + 22,259 = 0. \end{aligned}$$



Эпюра продольных сил в заданной статически неопределимой системе изображена на рис. 4.10ж.

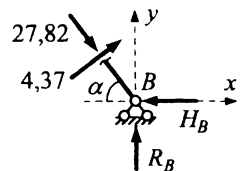
12. Вырезая опорные узлы, найдем опорные реакции:

а) узел A



$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \quad H_A = 10,19; \\ \sum Y &= 0; \quad R_A = 16,366. \end{aligned}$$

б) узел B



$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \quad 27,82 \cdot 0,6 + 4,37 \cdot 0,8 - H_B = 0; \\ &\quad H_B = 20,19; \\ \sum Y &= 0; \quad -27,82 \cdot 0,8 + 4,37 \cdot 0,6 + R_B = 0; \\ &\quad R_B = 19,63. \end{aligned}$$

Приложив заданные нагрузки и опорные реакции к системе (рис. 4.10з), выполним статическую проверку равновесия рамы:

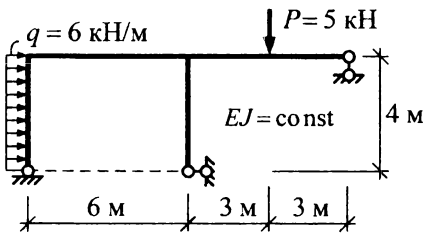
$$\begin{aligned} \sum X = 0; & \quad 10,19 + 10 - 20,19 = 0; & \quad 20,19 - 20,19 = 0; \\ \sum Y = 0; & \quad 16,366 - 12 \cdot 3 + 19,63 = 0; & \quad 35,999 - 36 \approx 0; \\ \sum M_C = 0; & \quad 12 \cdot 3 \cdot 1,5 - 10,19 \cdot 3 + 16,366 \cdot 1,5 - 19,63 \cdot 4,5 + 20,19 \cdot 2 = 0; \\ & & \quad 118,929 - 118,905 \approx 0; \end{aligned}$$

$$\text{погрешность} \left| \frac{118,929 - 118,905}{118,905} \right| \cdot 100\% = 0,02\% \text{ незначительна.}$$

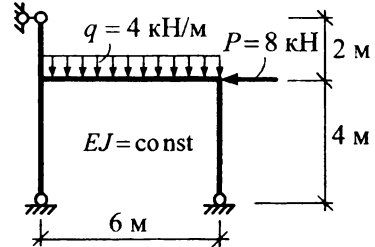
4.11. Задачи для самостоятельного решения

Построить в ниже представленных рамах эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

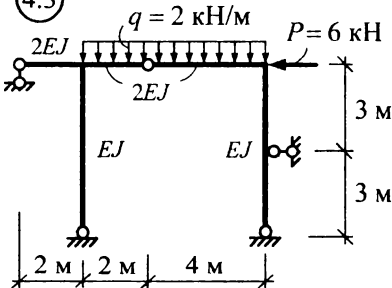
4.1



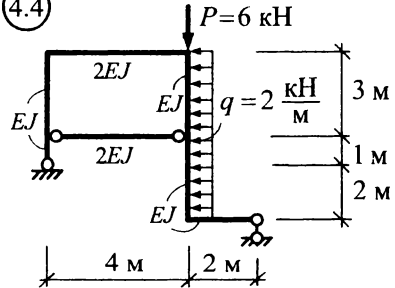
4.2



4.3



4.4



Ответы на данные задачи представлены в конце пособия в разделе «Ответы на задачи для самостоятельного решения» (с. 93-94).

5. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

5.1. Подходы и допущения, положенные в основу метода перемещений

При расчете статически неопределимых систем методом сил за неизвестные принимаются усилия в лишних связях, после определения которых легко находятся внутренние силы (M, Q, N) в сечениях системы и перемещения ее точек.

Но задача может быть решена и в обратном направлении. Если сначала определить деформированный вид системы (перемещения точек), то затем можно установить и соответствующее им распределение внутренних сил, что иллюстрирует и широко известная зависимость

$$M = EJ \cdot y''.$$

Именно такой подход и используется в методе перемещений. При этом анализ показывает, что деформированный вид системы полностью определен, если известны угловые и линейные перемещения ее узлов. Это объясняется тем, что перемещения узлов равны перемещениям концов стержней, соединяющихся в этих узлах, а деформации стержней полностью и однозначно определяются перемещениями концов стержней. Последнее относится и к загруженным стержням, для которых, правда, деформированный вид будет зависеть дополнительно еще и от действующих на них нагрузок.

Рассмотрим, например, раму, изображенную на рис. 5.1а. Деформированное состояние этой рамы определяется линейными и угловым перемещениями узлов 1 и 2; при этом число этих перемещений зависит от допущений, используемых в методе. Так, в общем случае число перемещений, определяющих деформации рамы, здесь равно пяти (рис. 5.1б); в случае же неучета поперечных и продольных деформаций и неучета изменения длин стержней при их изгибе (влиянием этих величин для изгибаемых рамно-стержневых систем ввиду их малости обычно пренебрегают – классическая постановка задачи) число этих неизвестных перемещений равно двум (рис. 5.1в) – Δ и φ .

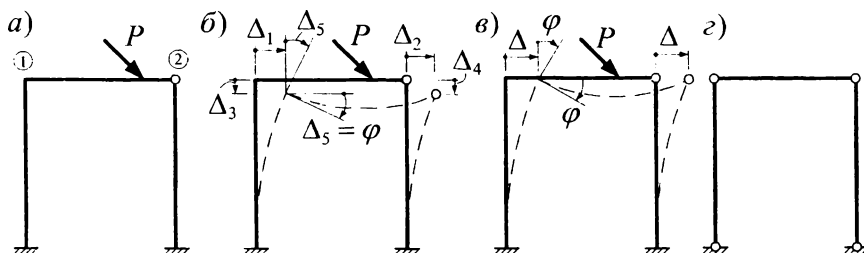


Рисунок 5.1

Ⓛ Число независимых угловых и линейных смещений узлов, полностью и однозначно определяющих деформированный вид системы, называется **степенью ее кинематической неопределимости**.

Все эти независимые перемещения узлов и принимаются за неизвестные в методе перемещений. Отсюда пошло и название метода – метод перемещений (деформаций).

Отметим, что в классической форме метода перемещений, как, впрочем, и в методе сил, используются следующие допущения:

а) пренебрегается поперечными и продольными деформациями элементов системы при ее деформировании;

б) принимается, что проекция изогнутого (деформированного) стержня на его первоначальное направление равна первоначальной длине стержня (рис. 5.2);

в) считается, что величина углов в жестких узлах в процессе деформирования системы не изменяется;

г) углы поворота узлов и сечений стержней при деформации систем ввиду их малости принимаются равными тангенсам этих углов.

Следует отметить, что для ряда статически неопределимых систем степень кинематической неопределимости ниже, чем степень статической неопределимости, а также, что метод перемещений при равном числе неизвестных несколько проще в расчете, чем метод сил.

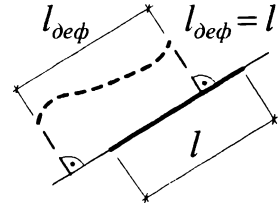


Рисунок 5.2

5.2. Определение степени кинематической неопределимости рам

Степень кинематической неопределимости системы, то есть число неизвестных независимых угловых и линейных смещений узлов, величины которых надо найти для определения деформированной схемы системы и соответственно для вычисления внутренних усилий, находится по формуле:

$$n = n_y + n_l. \quad (5.1)$$

Здесь: n_y – число неизвестных независимых угловых смещений узлов, определяемое по числу жестких узлов метода перемещений в системе; при этом под жесткими узлами метода перемещений (далее их будем называть просто жесткими узлами) здесь понимают такие, в которых соблюдается два условия:

- в которых жестко соединяются под любым углом два и более стержня;
- в которых происходит изменение внутренних сил (изгибающих моментов), неопределяемое исходя из обычных уравнений равновесия (статики).

Например, в раме, изображенной на рис. 5.3а, жесткими узлами, удовлетворяющими указанному условию, будут узлы 1, 2, 3 ($n_y = 3$); для узлов же А, В, С не выполняется второе условие, так как они относятся, по существу, к статически определимым частям системы, в которых все усилия можно определить с помощью обычных методов расчета статически определимых систем;

n_l – число независимых неизвестных линейных смещений узлов системы,

которое можно определять двумя способами:

1. По числу возможных независимых линейных смещений жестких (см. определение n_s) и шарнирных узлов системы на основе анализа ее возможного упругого деформирования с учетом принятых допущений (раздел 5.1).

Например, в раме на рис. 5.3а необходимо проанализировать возможность и независимость линейных смещений жестких узлов 1, 2, 3 и шарнирных узлов 4, 5 при произвольном возможном упругом деформировании этой системы:

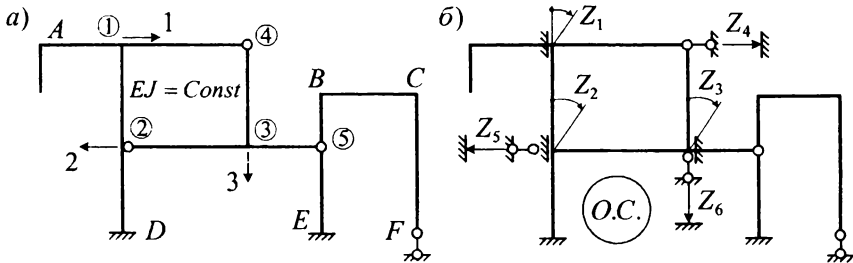


Рисунок 5.3

– узел 1 по вертикали смещаться не может, так как он закреплен от вертикального смещения с помощью стержня 1–D, который на основе допущений *a* и *б* (раздел 1) не позволяет разойтись (сойтись) точкам 1 и D, и защемления D;

– по горизонтали узел 1 может смещаться, так как стержни 1–2 и 4–3 могут изгибаться (горизонтальное перемещение узла 1 показано стрелкой с цифрой 1);

– узел 2 по вертикали смещаться не может на основе тех же рассуждений, что и для узла 1;

– по горизонтали же узел 2 может смещаться, учитывая, что стержни 1–2, 2–D, 4–3 и 5–E могут изгибаться (горизонтальное смещение узла 2 обозначено стрелкой с цифрой 2);

– узел 3 по горизонтали может смещаться (по аналогии с узлом 2), но это его смещение будет таким же, как и горизонтальное смещение узла 2, так как стержень 2–3, соединяющий узлы 2 и 3, на основе допущений *a* и *б* (раздел 5.1), не позволяет изменяться расстоянию между этими узлами;

– по вертикали узел 3, учитывая возможность упругого деформирования стержней 1–4, 2–3 и 3–5, может смещаться (показано стрелкой с цифрой 3);

– шарнирный узел 4 в данном случае может смещаться как по горизонтали (но одинаково с узлом 1, так как стержень 1–4 на основе допущений *a* и *б* (раздел 5.1) не дает возможности точкам 1 и 4 разойтись), так и по вертикали (но вместе с узлом 3 – вследствие наличия стержня 3–4);

– шарнирный узел 5 по аналогии вертикально перемещаться не может, а по горизонтали он будет смещаться на такую же величину, как узлы 2 и 3.

Таким образом, для рамы на рис. 5.3 имеем три независимых линейных смещения узлов ($n_n = 3$), а всего в итоге получаем шесть неизвестных перемещений при расчете рамы методом перемещений:

$$n = n_y + n_n = 3 + 3 = 6.$$

2. В ряде учебников для определения n_n предлагается формула:

$$n_n = W_{\text{шарнирной схемы рамы}} = 3D - 2Ш - C_0, \quad (5.2)$$

согласно которой n_n равно степени свободы шарнирной схемы рамы, получаемой путем введения (врезания) шарниров во все жесткие узлы системы, включая опорные (в жесткие заделки).

Например, для рамы на рис. 5.1а шарнирная схема имеет вид, представленный на рис. 5.1з, в соответствии которому получим

$$n_n = W_{\text{ш. сх. р.}} = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 4 = 1.$$

Для рамы же на рис. 5.4а, шарнирная схема которой представлена на рис. 5.4б, будем иметь:

$$n_n = W_{\text{ш. сх. р.}} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0.$$

Однако анализ возможного деформирования рамы по первому способу показывает, что узлы 1 и 2 могут горизонтально смещаться. Таким образом, применение формулы (5.2) приводит здесь к неверному результату, причиной которого является мгновенная изменяемость шарнирной схемы рассматриваемой рамы (рис. 5.4б).

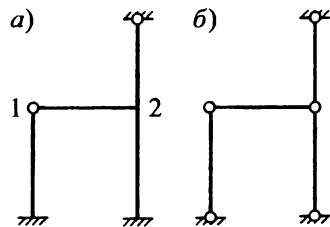


Рисунок 5.4

Такая ситуация может встречаться часто, и формула (5.2) будет всегда давать неверные результаты в случаях, когда в шарнирной схеме рамы есть мгновенная изменяемость. Учитывая это, пользоваться этим вариантом вычисления n_n не рекомендуется, а предлагается во всех случаях применять первый вариант определения n_n , который и прост, и надежен.

5.3. Основная система метода перемещений

Основная система метода перемещений получается введением *дополнительных* связей, закрепляющих узлы от их возможных угловых и линейных смещений, которые были выявлены ранее (при определении степени кинематической неопределенности n). То есть во все жесткие узлы, которые могут поворачиваться (n_y), устанавливаются дополнительные жесткие заделки, закрепляющие их от поворота, а все узлы (жесткие и шарнирные), которые могут линейно смещаться (n_n), закрепляются от этих смещений с помощью постановки дополнительных линейных связей. В качестве неизвестных при этом принимаются перемещения этих дополнительных связей (вместе, конечно, с узлами). Обозначаются эти перемещения через Z_i ($i = 1 \dots n$). Следует отметить, что до-

полнительная заделка в отличие от действительной заделки обладает только одной связью, закрепляющей узел от поворота (от линейных смещений узлы она не закрепляет).

Для рамы, изображенной на рис. 5.1а, основная система (О.С.) метода перемещений имеет вид, представленный на рис. 5.5.

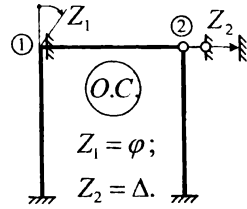


Рисунок 5.5

С учетом принятых допущений и установленных дополнительных связей узлы основных систем метода перемещений будут неподвижными. Учитывая, что в классической форме метода перемещений пренебрегается поперечными и продольными силами, в О.С. метода перемещений далее будем строить только эпюры изгибающих моментов. При этом воздействия на участки основной системы (внешние нагрузки, принудительные перемещения узлов) будут вызывать изгибающие моменты только на тех участках, которые непосредственно подвержены этим воздействиям; то есть через заделки в жестких узлах и через шарнирные узлы основной системы воздействия изгиба передаваться не будут.

Ⓜ Таким образом, О.С. метода перемещений будет представлять собой совокупность отдельных не зависящих друг от друга однопролетных балочек. Эти балочки в зависимости от условий присоединения их концов к узлам (условий опирания) могут быть трех типов, вид которых представлен на рис. 5.6.

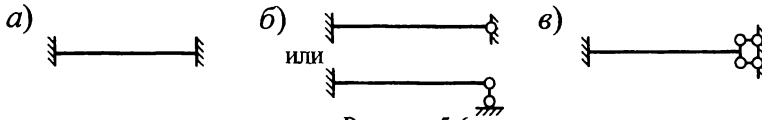


Рисунок 5.6

Для рамы на рис. 5.3а основная система (О.С.) метода перемещений представлена рис. 5.3б.

5.4. Канонические уравнения метода перемещений

Расчет рам методом перемещений выполняется с использованием основной системы этого метода, получаемой закреплением узлов, которые могут смещаться, от этих смещений путем установки дополнительных связей. При этом основная система должна работать так же как исходная система, в которой нет указанных дополнительных связей. В качестве условий, приравнивающих работу О.С. к работе заданной системы, принимается равенство нулю реакций (R) в дополнительных связях, так как их в исходной системе нет. Например, для рамы на рис. 5.5 следует записать $R_1 = 0$, $R_2 = 0$. Учитывая, что реакции в О.С. возникают от внешней нагрузки и перемещений узлов, получим:

$$R_1(Z_1, Z_2, P) = 0, \quad R_2(Z_1, Z_2, P) = 0.$$

Пользуясь принципом независимости действия сил и воздействий (перемещений), эти выражения можно представить в виде

$$\begin{cases} R_1(Z_1) + R_1(Z_2) + R_1(P) = 0; \\ R_2(Z_1) + R_2(Z_2) + R_2(P) = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} R_{1Z_1} + R_{1Z_2} + R_{1P} = 0; \\ R_{2Z_1} + R_{2Z_2} + R_{2P} = 0. \end{cases}$$

Так как перемещения Z_1 и Z_2 не известны, то реакции от их действия выражают через соответствующие единичные реакции – $R_{iZ_k} = r_{ik}Z_k$.

В результате получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0. \end{cases}$$

Такая форма записи уравнений метода перемещений называется канонической. В общем случае система канонических уравнений метода перемещений имеет вид:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + \dots + r_{1k}Z_k + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1P} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + \dots + r_{2k}Z_k + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2P} = 0; \\ \text{-----} \\ r_{i1}Z_1 + r_{i2}Z_2 + r_{i3}Z_3 + \dots + r_{ik}Z_k + \dots + r_{in}Z_n + R_{iP} = 0; \\ \text{-----} \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + r_{n3}Z_3 + \dots + r_{nk}Z_k + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nP} = 0; \end{cases} \quad (5.3)$$

Здесь: n – число неизвестных (угловых и линейных) смещений узлов в системе, или степень кинематической неопределимости системы; Z_k ($k=1\dots n$) – неизвестные (угловые и линейные) смещения узлов; r_{ik} – реактивное усилие (момент, сила) в i -ой дополнительной связи (заделке, линейной связи) от перемещения (углового, линейного) k -ой дополнительной связи (заделки, линейной связи) на единичную величину ($Z_k = 1$);

R_{iP} – реактивное усилие (момент, сила) в i -ой дополнительной связи (заделке, линейной связи) от действия внешней нагрузки.

Физический смысл уравнений (для i -го уравнения): реактивное усилие (момент, сила) в i -ой дополнительной связи (заделке, линейной связи) от перемещений всех дополнительных связей (угловых и линейных) Z_1, Z_2, \dots, Z_n и заданной нагрузки равняется нулю, так как этой i -ой связи в исходной (рассчитываемой) системе нет.

Приведем примеры физического смысла коэффициентов и уравнений в целом, например, для О.С. метода перемещений, представленной на рис. 5.3:

r_{11} – реактивный момент в 1-ой дополнительной заделке от ее же поворота на единичный угол;

r_{53} – реактивная сила в 5-ой дополнительной линейной связи от поворота 3-ей дополнительной заделки на угол, равный единице;

r_{26} – реактивный момент во 2-ой дополнительной заделке от единичного линейного смещения 6-ой дополнительной линейной связи;

R_{4p} – реактивная сила в 4-ой дополнительной линейной связи от действия внешней нагрузки;

3-е уравнение: $r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + \dots + r_{3n}Z_n + R_{3p} = 0$; – реактивный момент в 3-ей дополнительной заделке от перемещений всех дополнительных связей на величины Z_1, Z_2, \dots, Z_6 и от действия внешней нагрузки равняется нулю, так как в заданной системе (рис. 5.3а) этой (3-ей) заделки нет.

Отметим, что коэффициенты r_{ik} , имеющие одинаковые индексы (r_{11}, r_{22}), называют *главными*, а остальные – *побочными*; главные коэффициенты не могут быть отрицательными и нулевыми, а побочные коэффициенты должны удовлетворять теореме о взаимности единичных реакций ($r_{ik} = r_{ki}$).

5.5. Табличные эпюры метода перемещений

Для определения реактивных усилий r_{ik} и R_{ip} необходимо уметь определять внутренние силы (строить их эпюры) в основной системе метода перемещений от единичных перемещений дополнительных связей (вместе, конечно, с соответствующими узлами) и от действия заданных нагрузок. Построение этих эпюр усилий, в связи с тем, что О.С. метода перемещений представляет собой совокупность отдельных балочек, совершенно не зависящих друг от друга, связано с умением рассчитывать эти балочки (рис. 5.6). В качестве внешних воздействий здесь будут выступать повороты заделок, линейные смещения заделок и шарнирных опор и силовые факторы (сосредоточенные силы, сосредоточенные моменты, распределенные нагрузки). Расчет таких балочек выполняется обычно методом сил, а результаты расчета сводят в таблицы (см. табл. 5.1).

Таблица 5.1

	$M_A = 3i;$	$R_A = R_B = \frac{3i}{l},$
	$M_A = \frac{3i}{l};$	$R_A = R_B = \frac{3i}{l^2},$
		$\text{где } i = \frac{EJ}{l}.$

	$M_A = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{2l^2}; \quad M^* = \frac{Pab}{l};$ $M_C = \frac{Pb}{2} \left[\frac{2a}{l} - \frac{b}{l^3}(l^2 - b^2) \right];$ $R_A = \frac{Pb(3l^2 - b^2)}{2l^3}; \quad R_B = \frac{Pa^2(3l - a)}{2l^3}.$ <p>При $a = b = \frac{l}{2}$: $M_A = \frac{3}{16}Pl$; $M^* = \frac{Pl}{4}$;</p> $M_C = \frac{5}{32}Pl; \quad R_A = \frac{11}{16}P; \quad R_B = \frac{5}{16}P.$
	$M_A = \frac{ql^2}{8}; \quad R_A = \frac{5}{8}ql;$ $M^* = \frac{ql^2}{8}; \quad R_B = \frac{3}{8}ql.$ $M_{cp} = \frac{ql^2}{16}.$
	$M_A = \frac{m(l^2 - 3b^2)}{2l^2};$ $M_C^{лев} = \frac{ma}{l} - \frac{b}{l}M_A;$ $M_C^{np} = \frac{mb}{l} + \frac{b}{l}M_A;$ $R_A = R_B = \frac{3m(l^2 - b^2)}{2l^3}.$ <p>При $a = b = l/2$:</p> $M_A = \frac{m}{8}; \quad R_A = R_B = \frac{9}{8} \frac{m}{l}.$

	$M_A = 4i;$ $M_B = 2i;$ <p style="text-align: center;">зде</p>	$R_A = R_B = \frac{6i}{l},$ $i = \frac{EJ}{l}.$
	$M_A = M_B = \frac{6i}{l};$ <p style="text-align: center;">зде</p>	$R_A = R_B = \frac{12i}{l^2},$ $i = \frac{EJ}{l}.$
	$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12};$ $M^* = \frac{ql^2}{8};$ $M_{cp} = \frac{ql^2}{24};$	$R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$
	$M_A = 2qcl \left[\frac{1}{2l} \left(a + \frac{c}{2} \right) + (\beta - \gamma) \right];$ $M_B = 2qcl (\gamma - 2\beta);$ $R_B = 2qc(2\gamma - 3\beta);$ $M_C = 2qc \left[(l - 2a)\gamma + (3a - l)\beta - \frac{c}{4} \right];$ $M_D = 2qc \left[(2b - l)\gamma + (2l - 3b)\beta \right];$ $R_A = qc - R_B = qc \left[1 - 2(2\gamma - 3\beta) \right];$ <p style="text-align: center;">зде:</p> $\beta = \frac{1}{2l^2} \left[\frac{c^2}{3} + \gamma(l - b) \right];$	$\gamma = \frac{1}{2l^3} \left[c^2 \left(b + \frac{3}{4}c \right) + la^2 + a(2l - a) \left(l + \frac{c}{2} - b \right) \right].$

Продолжение таблицы 5.1

	$M_A = \frac{Pab^2}{l^2}; M_B = \frac{Pa^2b}{l^2}; M^* = \frac{Pab}{l}$ $M_C = \frac{Pab}{l} \left[1 - \frac{a}{l} - \frac{(b-a)b}{l^2} \right];$ $R_A = \frac{Pb^2}{l^2} \left(1 + \frac{2a}{l} \right);$ $R_B = \frac{Pa^2}{l^2} \left(1 + \frac{2b}{l} \right).$ <p>При $a = b = l/2$: $R_A = R_B = \frac{P}{2}$; $M_A = M_B = M_C = \frac{Pl}{8}$; $M^* = \frac{Pl}{4}$.</p>
	$M_A = M_B = Pa \left(1 - \frac{a}{l} \right);$ $M^* = Pa; \quad M_C = M_D = \frac{Pa^2}{l};$ $R_A = R_B = P.$
	$M_A = \frac{mb}{l^2}(3a-l); M_B = \frac{ma}{l^2}(3b-l);$ $M_C^{nea} = \frac{mb}{l^3}(l^2 - 3al + 6a^2);$ $M_C^{np} = \frac{ma}{l^3}(l^2 - 3bl + 6b^2);$ $R_A = R_B = \frac{6ab}{l^3}m.$ <p>При $a = b = l/2$: $M_A = M_B = \frac{m}{4}$; $M_C^{nea} = M_C^{np} = \frac{m}{2}$; $R_A = R_B = \frac{3m}{2l}$.</p>

5.6. Построение единичных и грузовых эпюр усилий в основной системе метода перемещений

Построение единичных и грузовых эпюр усилий (изгибающих моментов) в основной системе метода перемещений выполняется с использованием готовых (табличных) эпюр усилий для отдельных участков основной системы (см. табл. 5.1), каждый из которых работает независимо от других, на действующее непосредственно на него воздействие, в соответствии которому табличная эпюра с учетом конкретных параметров данного участка переносится на этот участок. При этом при построении единичных эпюр усилий вначале целесообразно представить схему деформирования основной системы от соответствующего перемещения узла, которая позволяет четко выявить, какие элементы (участки) основной системы работают, как они работают и с какой стороны элементы волокна растягиваются, а с какой сжимаются (эпюры изгибающих моментов должны строиться со стороны растянутых волокон). Ординаты единичных эпюр, как видно из табличных эпюр, выражаются через погонные жесткости участков (s -го участка), представляющих собой отношения действительных жесткостей участков к их длинам – $i_s = EJ_s / l_s$, что в случае задания жесткостей участков в общем виде может вызывать некоторые трудности со сравнением ординат единичных эпюр на разных участках. Чтобы избежать этих трудностей, можно поступать по-разному:

– можно одну из погонных жесткостей участков выбрать за базовую (обозначив ее, например, через i) и через нее затем выразить погонные жесткости остальных участков системы; так, для рамы на рис. 5.10а погонные жесткости участков записываются следующим образом:

$$i_{01} = i_{23} = \frac{EJ}{h}; \quad i_{12} = \frac{EJ_{12}}{l} = \frac{kEJ}{\alpha \cdot h} = \frac{k}{\alpha} \cdot \frac{EJ}{h},$$

и если обозначить $\frac{EJ}{h} = i$ или $EJ = i \cdot h$, то получим: $i_{01} = i_{23} = i$; $i_{12} = \frac{k}{\alpha} i$

(далее в этом пособии используется именно этот подход выражения погонных жесткостей участков);

– можно выражать погонные жесткости участков через некоторую величину EJ , общую для всех участков – $EJ_s = \beta_s EJ$; в этом случае для рамы на рис. 5.10а получим:

$$i_{01} = i_{23} = \frac{EJ}{h}; \quad i_{12} = \frac{k}{\alpha h} EJ;$$

– можно для величин i , EJ задаться и некоторыми численными значениями, удобными, с нашей точки зрения, для дальнейших расчетов; это можно сделать в связи с тем, что впоследствии при построении окончательных эпюр усилий величины i , EJ , являющиеся общими для всех участков, сокращаются, поэтому их величины не влияют на результаты расчета (значение имеют соотно-

шения жесткостей участков); для рамы на рис. 5.7а удобно, например, принять $EJ = ah$, а $i = \alpha$.

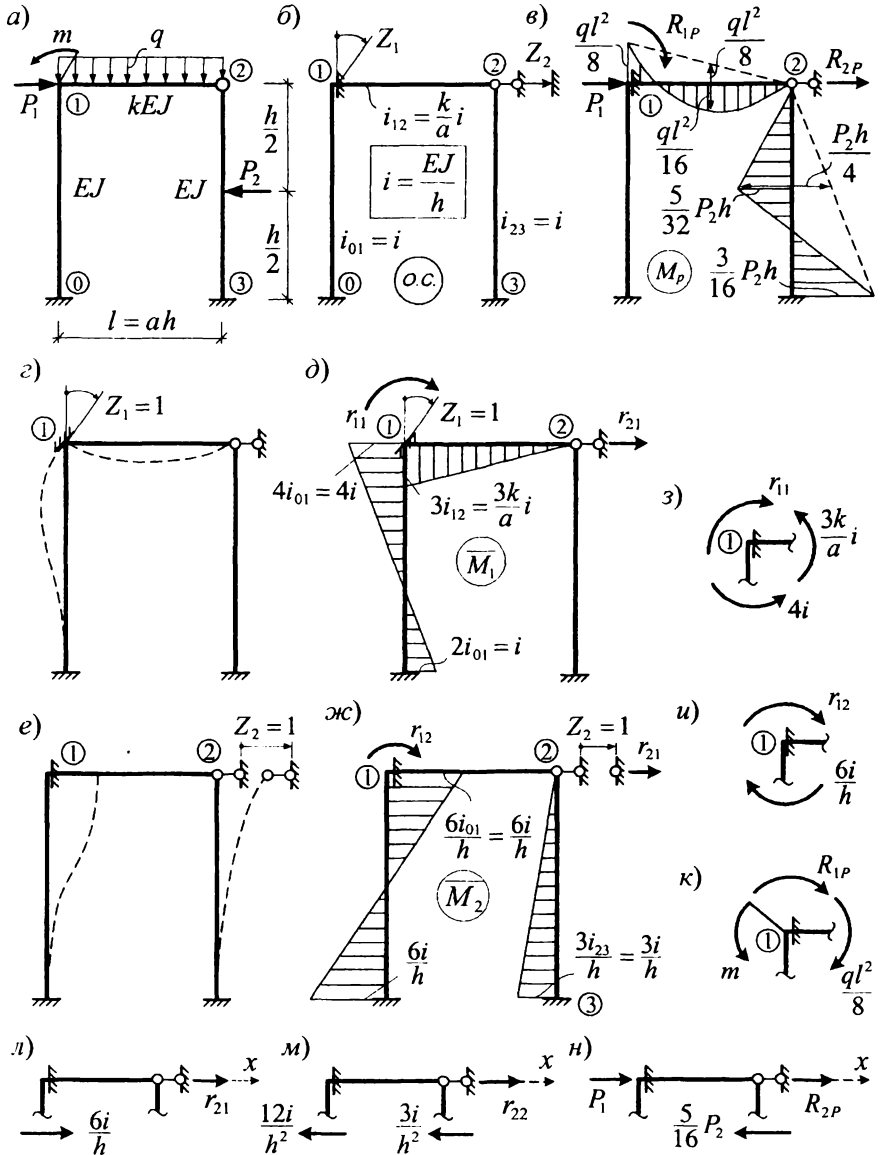


Рисунок 5.7

Рама, представленная на рис. 5.7а, как определено ранее (рис. 5.1), имеет в методе перемещений два неизвестных (степень ее кинематической неопределимости равна двум), и основная система метода перемещений для нее имеет вид, показанный на рис. 5.7б, а единичные и грузовые эпюры изгибающих моментов (а также соответствующие единичным перемещениям и эпюрам схемы деформаций) представлены на рис. 5.7в – 5.7ж.

5.7. Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений

Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений метода перемещений r_{ik} и R_{iP} по физическому смыслу, как уже отмечалось, могут быть двух видов – реактивные моменты в дополнительных заделках и реактивные силы в дополнительных линейных связях. Их определение, как определение любых реакций, может быть выполнено на основе уравнений равновесия либо всей системы, либо какой-то части (статический способ). Как показывает опыт, удобнее рассматривать равновесие отдельных частей основной системы метода перемещений, находящейся под тем воздействием, от которого определяется искомое реактивное усилие. При этом для реактивных усилий в дополнительных связях в методе перемещений применяется следующее правило знаков – реактивное усилие считается положительным, если его направление совпадает с направлением перемещения соответствующей дополнительной связи. При определении неизвестных реактивных усилий всегда следует направлять в положительных направлениях, используя их далее с полученными знаками.

В соответствии с изложенным, определение величин r_{ik} и R_{iP} , представляющих по смыслу реактивные моменты в заделках, удобнее всего выполнять на основе рассмотрения равновесия узлов, в которых установлены соответствующие дополнительные заделки, предварительно вырезав эти узлы. В качестве уравнений равновесия при этом составляются суммы всех моментов в узлах. Из этих уравнений и определяются искомые реактивные моменты.

Так, для рамы на рис. 5.7 при определении коэффициента r_{11} , представляющего собой реактивный момент в 1-ой дополнительной заделке от ее же поворота на единичный угол, необходимо вырезать узел 1 из эпюры \overline{M}_1 (построенной от поворота 1-ой заделки на единичный угол) (см. рис. 5.7з), из равновесия которого получим:

$$\sum M_1 = 0; \quad r_{11} - 4i - \frac{3k}{\alpha}i = 0; \quad r_{11} = 4i + \frac{3k}{\alpha}i.$$

Коэффициент r_{12} найдем из вырезания узла 1 на эпюре \overline{M}_2 (рис. 5.7у):

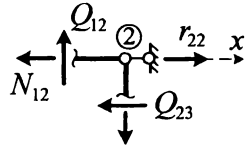
$$\sum M_1 = 0; \quad r_{12} + \frac{6i}{h} = 0; \quad r_{12} = -\frac{6i}{h}.$$

Для определений свободного члена R_{1p} необходимо вырезать узел 1 на эпюре M_p (рис. 5.7к):

$$\sum M_1 = 0; \quad R_{1p} + \frac{ql^2}{8} - m = 0; \quad R_{1p} = m - \frac{ql^2}{8}.$$

Таким образом, первый индекс искомого коэффициента или свободного члена здесь, по существу, показывает номер узла, который надо вырезать для определения этого коэффициента или свободного члена, а второй индекс указывает на эпюру, из которой этот узел надо вырезать.

Казалось бы, что и коэффициенты (свободные члены) канонических уравнений, представляющие по смыслу реактивные силы в дополнительных линейных связях, также будет удобно определять из вырезания узлов, в которых эти связи установлены. Но, оказывается, это не совсем так. Например, для определения коэффициента r_{22} , являющегося реактивной силой во 2-ой дополнительной линейной связи от ее же единичного смещения, можно, конечно, вырезать узел 2 на эпюре \bar{M}_2 (рис. 5.8); в результате чего получим:



$$\sum X = 0; \quad r_{22} - Q_{23} - N_{12} = 0; \quad r_{22} = Q_{23} + N_{12}. \quad \text{Рисунок 5.8}$$

Величину Q_{23} легко определить по эпюре \bar{M}_2 , используя, например, формулу:

$$Q = Q_0 \pm \left| \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{l} \right|, \quad (5.4)$$

где Q_0 учитывает действие распределенной нагрузки q на участке, т.е. это эпюра поперечных сил на участке, как в простой двухопорной балке (если q нет, то $Q_0 = 0$); $M_{\text{прав}}$, $M_{\text{лев}}$ – ординаты изгибающих моментов справа и слева по концам участка; l – длина участка;

знак перед абсолютной величиной принимается *по следующему правилу*: если стержень, на котором построена рассматриваемая эпюра M , необходимо поворачивать до совмещения с прямой, соединяющей ординаты $M_{\text{прав}}$ и $M_{\text{лев}}$ по кратчайшему пути по часовой стрелке, то принимается знак «+», если против часовой стрелки, то – знак «-».

В результате на участке 2–3 (рис. 5.10ж) получим:

$$Q_{23} = 0 + \left| \frac{3i/h - 0}{h} \right| = \frac{3i}{h^2}.$$

Следует заметить, что величину Q_{23} можно получить и через опорную реакцию в стержне 2–3 от действия заданного смещения $Z_2 = 1$, учитывая, что поперечная сила в приопорном сечении равна по величине реакции соответст-

вующей опоры, которая приведена в табличных эпюрах; знак же поперечной силы при этом определяется по обычному правилу знаков для Q или по эпюре M . Для определения же величины продольной силы N_{1-2} в стержне 1–2 необходимо вначале по эпюре \bar{M}_2 , используя формулу (4), построить эпюру поперечных сил \bar{Q}_2 , после чего можно будет найти из вырезания узлов величину N_{1-2} . Этот процесс, как видим, достаточно трудоемок.

Проще будет процедура определения коэффициентов r_{ik} , R_{iP} , представляющих собой реакции в линейных связях, если вырезать не узлы, а части основной системы метода перемещений таким образом, чтобы в уравнения равновесия входили только поперечные силы; при этом в качестве уравнений равновесия удобнее всего использовать сумму проекций сил на ось, параллельную искомой реактивной силе.

Так, для определения коэффициента r_{21} удобно вырезать из эпюры \bar{M}_1 верхнюю часть, показанную на рис. 5.7л, из равновесия которой получим:

$$\sum X = 0; \quad r_{21} + \frac{6i}{h} = 0; \quad r_{21} = -\frac{6i}{h}.$$

Аналогично найдем коэффициент r_{22} (рис. 5.7м) и свободный член R_{2P} (рис. 5.7н), вырезав соответствующие части основной системы из эпюр \bar{M}_2 и M_P :

$$\sum X = 0; \quad r_{22} - \frac{12i}{h^2} = \frac{3i}{h^2} = 0; \quad r_{22} = \frac{15i}{h^2};$$

$$\sum X = 0; \quad R_{2P} + P_1 - \frac{5}{16}P_2 = 0; \quad R_{2P} = \frac{5}{16}P_2 - P_1.$$

Следует отметить, что значения r_{ik} и R_{iP} можно определить и с помощью формулы Мора [1]. При этом величины r_{ii} и r_{ik} вычисляются по формулам:

$$r_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k ds}{EJ}; \quad r_{ii} = \sum \int \frac{\bar{M}_i^2 ds}{EJ}; \quad (5.5)$$

а величины свободных членов R_{iP} по формуле

$$R_{iP} = -\sum \int \frac{\bar{M}_i M'_P ds}{EJ}, \quad (5.6)$$

где M'_P – эпюра изгибающих моментов от действия внешней нагрузки в статически определимой системе, полученной из заданной системы или О.С. метода перемещений удалением лишних связей, в том числе обязательно той связи, реакция которой определяется.

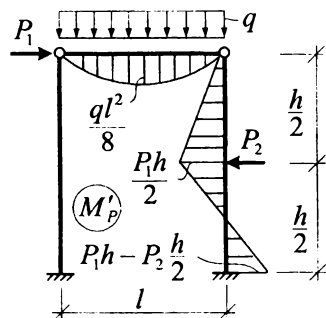


Рисунок 5.9

Вычислим таким способом для рассматриваемого примера (рис. 5.7), на-

пример, коэффициенты r_{12} , r_{22} и свободный член R_{1p} . Единичные эпюры в О.С. метода перемещений показаны на рис. 5.7а один из возможных вариантов эпюры M'_p – на рис. 5.9.

Учитывая, что $\frac{h}{EJ} = \frac{1}{i}$, а $\frac{1}{kJ} = \frac{\alpha h}{kJ} = \frac{\alpha}{ki}$, получим:

$$r_{12} = r_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 ds}{EJ} = \frac{h}{6EJ} \left(-\frac{6i}{h} \cdot 2i - 4i \cdot \frac{6i}{h} \right) = -\frac{6i}{h};$$

$$r_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2^2 ds}{EJ} = \frac{h}{6EJ} \left[\left(\frac{6i}{h} \right)^2 + \left(\frac{6i}{h} \right)^2 \right] + \frac{h}{6EJ} \left[\left(\frac{3i}{h} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1,5i}{h} \right)^2 \right] = \frac{15i}{h^2};$$

$$R_{1p} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M'_p ds}{EJ} = -\frac{l}{6kJ} \left(4 \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{15k}{\alpha} i \right) = -\frac{\alpha}{6ki} \left(\frac{ql^2}{2} \cdot 1,5 \frac{ki}{\alpha} \right) = -\frac{ql^2}{8};$$

вычисленные здесь значения совпадают с найденными ранее статическим способом.

5.8. Проверки коэффициентов и свободных членов канонических уравнений

Проверка правильности вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода перемещений выполняется аналогично проверке коэффициентов уравнений в методе сил. При этом для выполнения проверок должна быть построена единичная суммарная эпюра \bar{M}_s , представляющая сумму всех единичных эпюр \bar{M}_i в основной системе метода перемещений:

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_3 + \dots + \bar{M}_n. \quad (5.7)$$

После этого в методе перемещений могут быть выполнены следующие проверки:

а) универсальная проверка

$$\sum \int \frac{\bar{M}_s^2 ds}{EJ} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n r_{ik}, \quad (5.8)$$

где $\sum \sum r_{ik}$ – сумма всех единичных коэффициентов метода перемещений (сумма единичных коэффициентов по всем уравнениям метода перемещений)

$$\begin{aligned} \sum \sum r_{ik} = & (r_{11} + r_{12} + \dots + r_{1n}) + (r_{21} + r_{22} + \dots + r_{2n}) + \\ & + \dots + (r_{n1} + r_{n2} + \dots + r_{nn}). \end{aligned}$$

Если универсальная проверка выполняется, то это подтверждает правильность вычислений единичных коэффициентов; если же универсальная проверка не выполняется, то для выяснения, в какой группе единичных коэффициентов находится ошибка, можно сделать так называемые построчные проверки.

б) построчные проверки, то есть проверки коэффициентов, входящих в каждое из уравнений (1-ое, 2-ое, ... n -ое) метода перемещений, имеют вид:

$$\sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_s ds}{EJ} = \sum_{k=1}^n r_{ik} \quad (i = 1 \dots n), \quad (5.9)$$

где $\sum r_{ik}$ – сумма коэффициентов, входящих в i -ое уравнение метода перемещений.

Таких проверок, как видно, может быть n ; какие-то из них будут выполняться (значит, соответствующие коэффициенты вычислены верно), а какие-то могут не выполняться; анализ полученных результатов позволяет выявить те коэффициенты, при вычислениях которых были допущены ошибки.

Заметим, что если универсальная проверка выполняется, то необходимости в выполнении построчных проверок нет.

в) столбцовая проверка – служит для проверки грузовых коэффициентов и выполняется по формуле:

$$-\sum \int \frac{\overline{M}_s M'_p ds}{EJ} = \sum_{i=1}^n R_{ip}, \quad (5.10)$$

где $R_{ip} = R_{1p} + R_{2p} + \dots + R_{np}$ – сумма всех грузовых коэффициентов (свободных членов системы уравнений);

M'_p – эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки в статически определимой системе, полученной из заданной системы или основной системы метода перемещений путем отбрасывания лишних связей, в том числе обязательно дополнительных связей, в которых определяются реакции R_{ip} (см., например, рис. 5.9).

5.9. Построение окончательных эпюр усилий и их проверки

Найденные значения единичных и грузовых коэффициентов подставляются в систему канонических уравнений метода перемещений (5.3), решая которую, определим неизвестные метода перемещений Z_i ($i = 1 \dots n$). После этого окончательная эпюра изгибающих моментов может быть построена на основе принципа независимости действия сил и воздействий (перемещений) по формуле:

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + \dots + \overline{M}_n Z_n + M_p. \quad (5.11)$$

Окончательная эпюра поперечных сил строится по эпюре M с использованием формулы (5.4). Окончательная эпюра продольных сил строится по эпюре Q способом вырезания узлов. Для подтверждения правильности расчета и построения окончательных эпюр M , Q и N выполняются следующие проверки:

а) проверка равновесия узлов на эпюре M ; эта проверка при расчете рам методом перемещений имеет важное значение, так как на единичных (\overline{M}_i) и грузовых (M_p) эпюрах в О.С. метода перемещений без учета дополнительных

заделок (которых в системе действительно нет) равновесие узлов не выполняется; в окончательной же эпюре M равновесие узлов должно выполняться;

б) деформационная (кинематическая) проверка эпюры M ; эта проверка здесь производится так же, как и в методе сил; но здесь для ее выполнения вначале необходимо для заданной системы выбрать основную систему метода сил (предварительно, определив число лишних связей), в которой необходимо построить суммарную единичную эпюру $\overline{M}_s^{мет.сил}$ от единичных значений всех неизвестных метода сил (или хотя бы одну из единичных эпюр $\overline{M}_i^{мет.сил}$), которая охватывала бы максимальное число участков системы; после этого деформационная проверка выполняется по формуле:

$$\sum \int \frac{\overline{M}_s^{мет.сил} M ds}{EJ} = 0 \quad \left(\text{или} \quad \sum \int \frac{\overline{M}_i^{мет.сил} M ds}{EJ} = 0 \right). \quad (5.12)$$

Физический смысл этой проверки здесь такой же, как и в методе сил;

в) проверка равновесия узлов при построении эпюры N по эпюре Q ; эпюра N строится, как уже отмечалось, по эпюре Q способом вырезания узлов, т.е. продольные силы находятся из уравнений равновесия сил в узлах (уравнений проекций на две любые оси); соблюдение равновесия всех узлов при этом свидетельствует о правильности расчета; если же хотя бы в одном из узлов хотя бы одно из уравнений равновесия не будет выполняться, то это значит, что в расчете допущена ошибка; чаще всего эта ошибка бывает связана с неверным определением коэффициентов или свободных членов, представляющих собой реактивные силы в линейных дополнительных связях;

г) статическая проверка; выполняется так же, как и в методе сил, то есть вычисляются суммы проекций всех заданных нагрузок и опорных реакций на две любые оси и сумма моментов этих же сил и опорных реакций относительно любой точки, которые должны быть равны нулю.

5.10. Пример расчета

Рассмотрим раму, изображенную на рис. 5.10а; степень кинематической неопределимости ее равна трем ($n = n_y + n_r = 2 + 1 = 3$). Основная система метода перемещений представлена на рис. 5.10б. Погонные жесткости участков

$$i_{01} = \frac{EJ}{2}; \quad i_{12} = i_{24} = i_{35} = \frac{EJ}{4}; \quad i_{23} = \frac{EJ}{6}$$

удобно выразить через общую для всех участков величину $i = EJ/12$ ($EJ = 12i$), с учетом которой получим:

$$i_{01} = 6i; \quad i_{12} = i_{24} = i_{35} = 3i; \quad i_{23} = 2i;$$

для наглядности эти погонные жесткости участков удобно показать на основной системе метода перемещений (рис. 5.10б). Единичные эпюры изгибающих моментов в основной системе метода перемещений $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3$ построены на ос-

нове схем деформаций О.С. от перемещений узлов Z_1, Z_2, Z_3 на единичные величины (рис. 5.10в, 5.10е, 5.10и) с использованием табличных эпюр (табл.1) и показаны соответственно на рис. 5.10г, 5.10ж, 5.10к. Единичные коэффициенты канонических уравнений определяются статическим способом: реактивные моменты r_{1k}, r_{2k} – из вырезания узлов 1 и 2 из эпюр \bar{M}_k , а реактивные силы r_{3k} – из вырезания верхней части рамы на эпюрах \bar{M}_k – см. рис. 5.10д, 5.10з, 5.10л:

$$- \text{рис. 5.10д: } \begin{cases} \sum M_1 = 0; & r_{11} - 12i - 18i = 0; & r_{11} = 30i; \\ \sum M_2 = 0; & r_{21} - 6i = 0; & r_{21} = 6i; \\ \sum X = 0; & r_{31} + 9i = 0; & r_{31} = -9i; \end{cases}$$

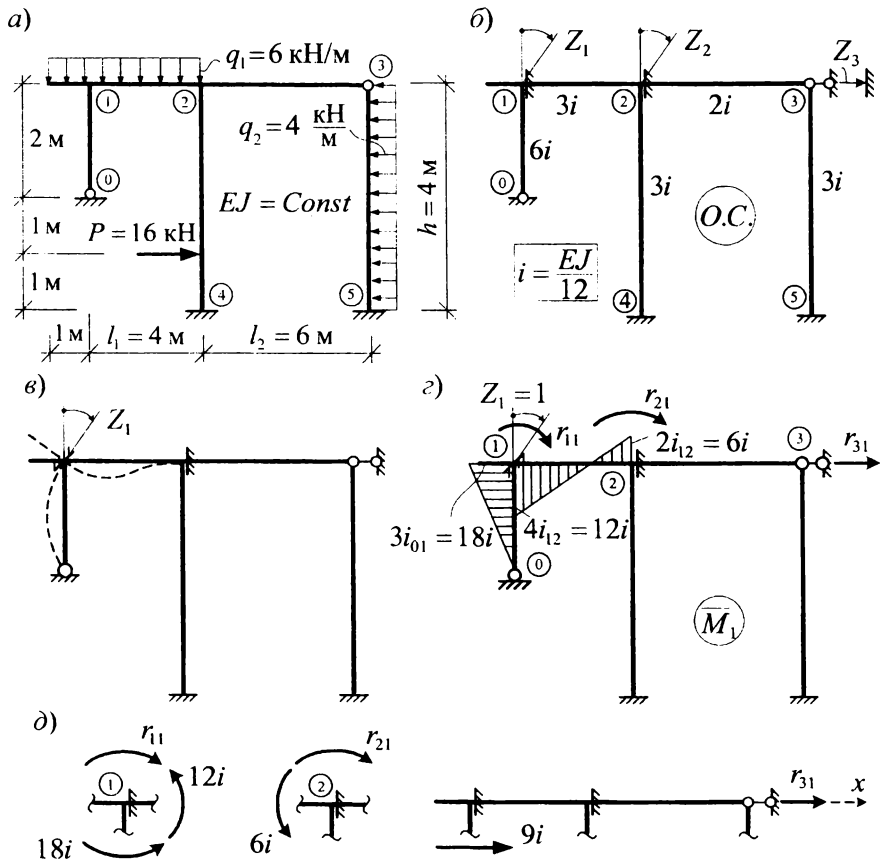


Рисунок 5.10

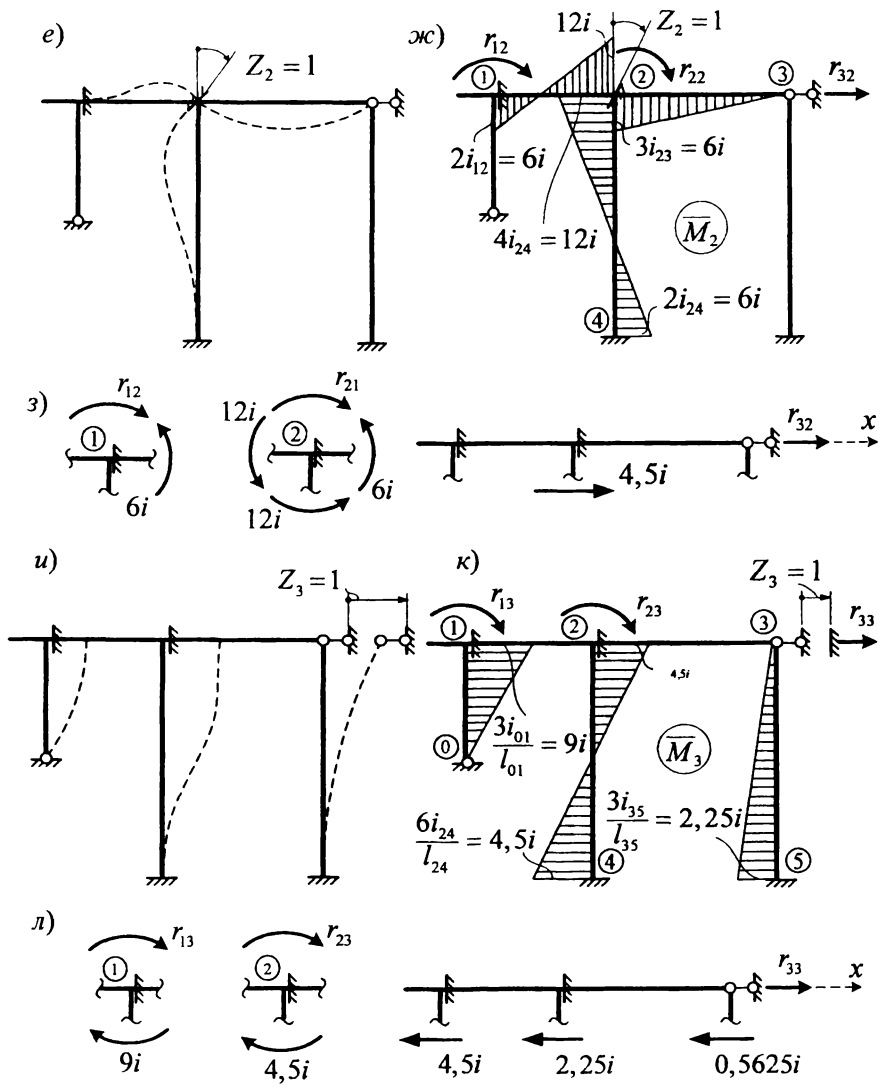


Рисунок 5.10 (продолжение)

- рис. 5.10з:
$$\begin{cases} \sum M_1 = 0; & r_{12} - 6i = 0; & r_{12} = 6i; \\ \sum M_2 = 0; & r_{22} - 6i - 12i - 12i = 0; & r_{22} = 30i; \\ \sum X = 0; & r_{32} + 4,5i = 0; & r_{32} = -4,5i; \end{cases}$$

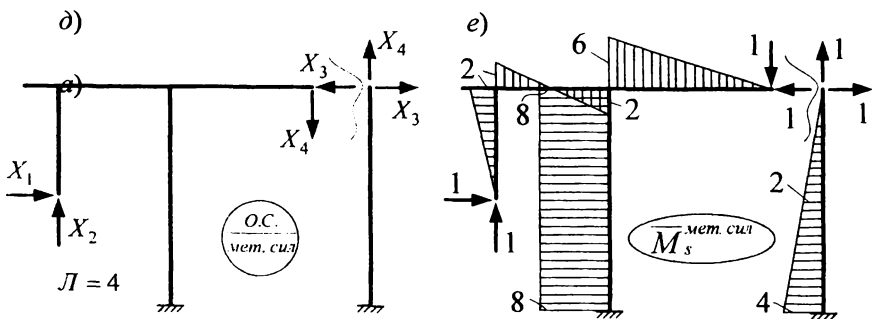
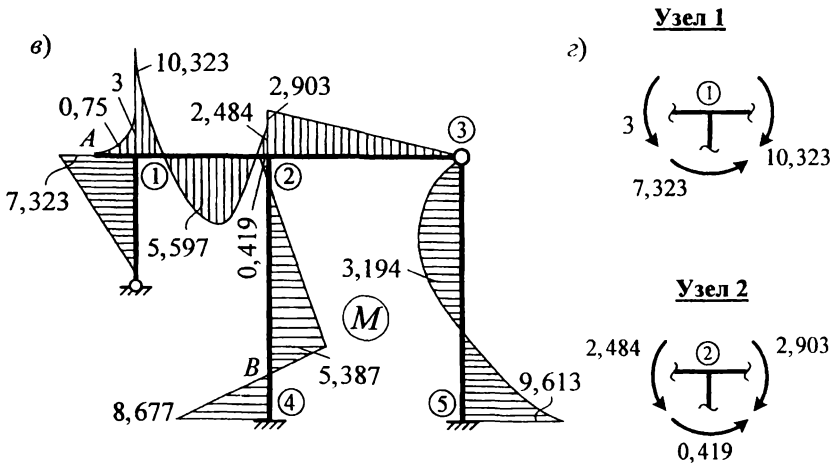
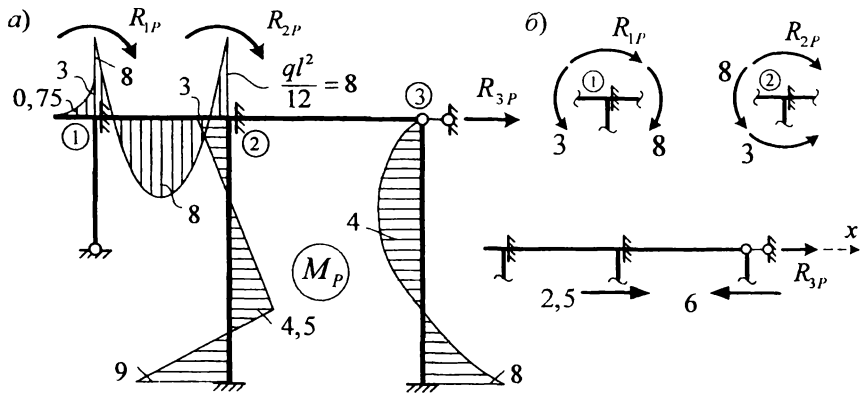


Рисунок 5.11

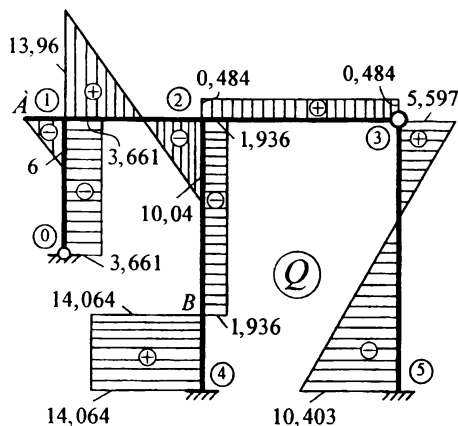


Рисунок 5.12

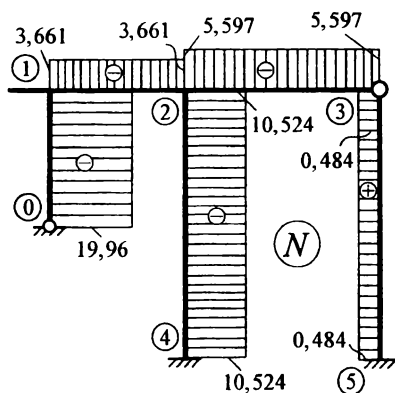


Рисунок 5.13

- рис. 5.10л:
$$\begin{cases} \sum M_1 = 0; & r_{13} + 9i = 0; & r_{13} = -9i; \\ \sum M_2 = 0; & r_{23} + 4,5i = 0; & r_{23} = -4,5i; \\ \sum X = 0; & r_{33} - 4,5i - 2,25i - 0,5625i = 0; & r_{33} = 7,3125i. \end{cases}$$

Грузовая эпюра M_p в основной системе метода перемещений представлена на рис. 5.11а. Грузовые коэффициенты (свободные члены уравнений) определяются по аналогии с единичными (см. рис 5.11б):

$$\begin{aligned} \sum M_1 = 0; & \quad R_{1p} + 8 - 3 = 0; & \quad R_{1p} = -5; \\ \sum M_2 = 0; & \quad R_{2p} - 8 - 3 = 0; & \quad R_{2p} = 11; \\ \sum X = 0; & \quad R_{3p} + 2,5 - 6 = 0; & \quad R_{3p} = 3,5. \end{aligned}$$

После подстановки найденных значений единичных коэффициентов и свободных членов в систему уравнений (3) получим ее в виде

$$\begin{cases} 30i \cdot Z_1 + 6i \cdot Z_2 - 9i \cdot Z_3 - 5 = 0; \\ 6i \cdot Z_1 + 30i \cdot Z_2 - 4,5i \cdot Z_3 + 11 = 0; \\ -9i \cdot Z_1 - 4,5i \cdot Z_2 + 7,3125i \cdot Z_3 + 3,5 = 0; \end{cases}$$

решив эту систему уравнений, найдем неизвестные перемещения узлов рамы

$$Z_1 = \frac{0,0484}{i}; \quad Z_2 = -\frac{0,4839}{i}; \quad Z_3 = -\frac{0,7169}{i},$$

после чего окончательная эпюра изгибающих моментов строится по формуле:

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + \overline{M}_3 Z_3 + M_p$$

и будет иметь вид, представленный на рис. 5.11в; на рис. 5.11г показано равновесие узлов 1 и 2 на окончательной эпюре M .

Для выполнения деформационной проверки эпюры M выберем для заданной рамы, имеющей четыре лишние связи ($L = 4$), основную систему метода сил в виде, показанном на рис. 5.11д; суммарная единичная эпюра $M_s^{мет. сил}$, построенная сразу от всех неизвестных $X_1 \dots X_4$ единичных величин, показана на рис. 5.11е; тогда деформационная проверка запишется в виде:

$$\sum \int \frac{\overline{M}_s^{мет. сил} \cdot M \, ds}{EJ} = 0;$$

$$\frac{1}{EJ} \left[\frac{7,323 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{6} (10,323 \cdot 2 + 4 \cdot 5,597 \cdot 0 - 2 \cdot 2,484) + \frac{2,903 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{6} (4 \cdot 2 \cdot 3,194 - 9,613 \cdot 4) - (8 \cdot 3) \cdot \frac{5,387 - 0,419}{2} + (8 \cdot 1) \cdot \frac{8,677 - 5,387}{2} \right] = \frac{1}{EJ} (9,764 + 13,764 - 3,312 + 34,838 + 17,032 - 25,634 - 59,612 + 13,161) = \frac{1}{EJ} (88,559 - 88,558) \approx 0;$$

Погрешность $\left(\left| \frac{88,559 - 88,558}{88,558} \right| \cdot 100\% = 0,1\% \right)$ незначительна.

Эпюру поперечных сил Q построим, вычислив на участках непрерывного изменения эпюры M значения Q по формуле (4):

$$Q_{0-1} = - \left| \frac{7,323 - 0}{2} \right| = -3,661 \text{ кН}; \quad Q_{A-1}^{лев} = + \frac{6 \cdot 1}{2} - \left| \frac{3 - 0}{1} \right| = 0;$$

$$Q_{A-1}^{прав} = - \frac{6 \cdot 1}{2} - \left| \frac{3 - 0}{1} \right| = -6 \text{ кН};$$

$$Q_{1-2}^{лев} = \frac{6 \cdot 4}{2} + \left| \frac{10,323 - 2,484}{4} \right| = 12 + 1,96 = 13,96 \text{ кН};$$

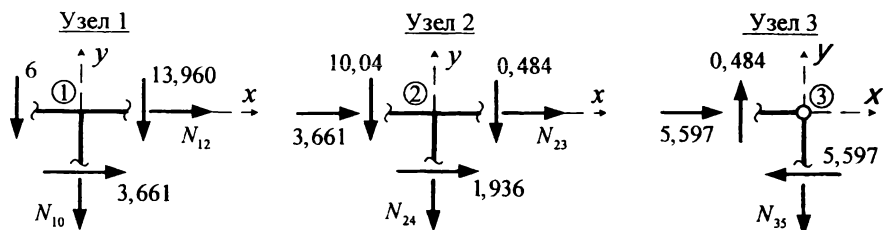
$$Q_{1-2}^{прав} = - \frac{6 \cdot 4}{2} + \left| \frac{10,323 - 2,484}{4} \right| = -12 + 1,96 = -10,04 \text{ кН};$$

$$Q_{2-3} = + \left| \frac{2,903 - 0}{6} \right| = 0,484 \text{ кН}; \quad Q_{4-B} = + \left| \frac{8,677 - (-5,387)}{1} \right| = 14,064 \text{ кН};$$

$$Q_{B-2} = - \left| \frac{5,387 - (-0,419)}{3} \right| = -1,936 \text{ кН}; \quad Q_{3-5}^{лев} = + \frac{4 \cdot 4}{2} - \left| \frac{9,613 - 0}{4} \right| = 5,597 \text{ кН};$$

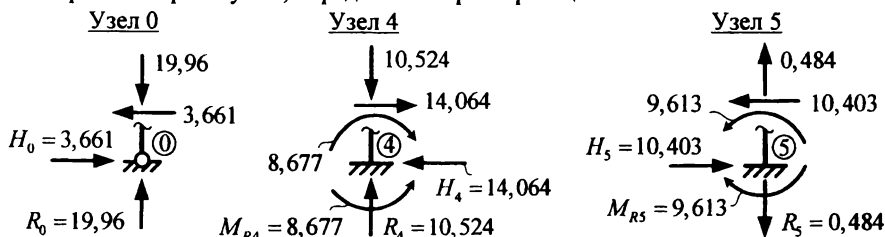
$$Q_{3-5}^{прав} = - \frac{4 \cdot 4}{2} - \left| \frac{9,613 - 0}{4} \right| = -8 - 2,403 = -10,403 \text{ кН}.$$

Эпюру продольных сил N построим способом вырезания узлов (из эпюры Q):



$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; N_{12} = -3,661 \text{ кН}; \quad \Sigma X = 0; N_{23} = -5,597 \text{ кН}; \quad \Sigma X = 0; 5,597 - 5,597 = 0; \\ \Sigma Y = 0; N_{10} = -19,96 \text{ кН}; \quad \Sigma Y = 0; N_{24} = -10,524 \text{ кН}; \quad \Sigma Y = 0; N_{35} = 0,484 \text{ кН}; \end{aligned}$$

Вырезав опорные узлы, определим опорные реакции:



Статическая проверка:

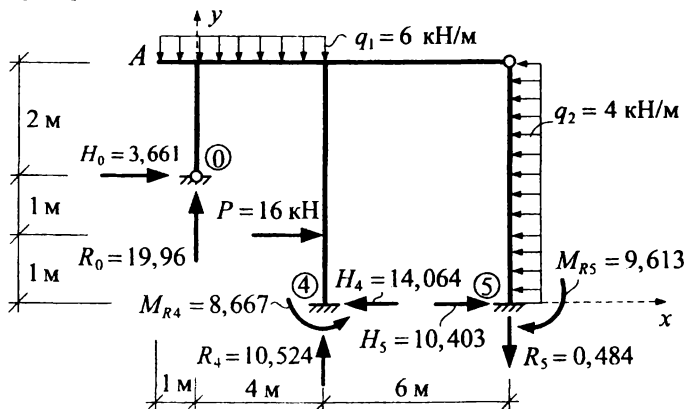


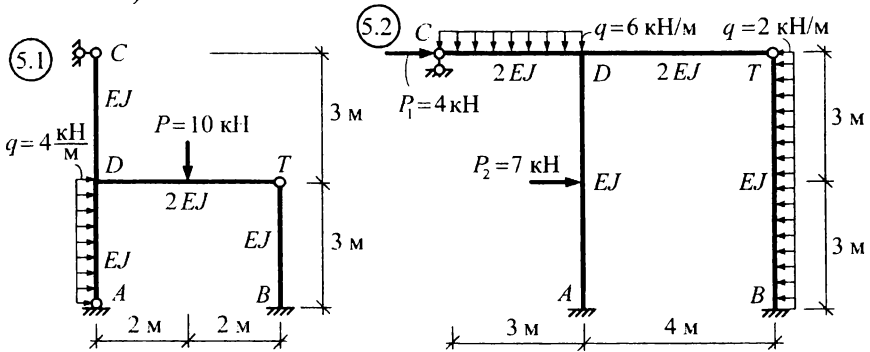
Рисунок 5.14

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; \quad 3,661 - 14,064 + 10,403 - 4 \cdot 4 + 16 = 0; \quad 30,064 - 30,064 = 0; \\ \Sigma Y = 0; \quad 19,96 + 10,524 - 0,484 - 6 \cdot 5 = 0; \quad 30,484 - 30,484 = 0; \\ \Sigma M_A = 0; \quad 6 \cdot 5 \cdot 2,5 - 16 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 2 - 3,661 \cdot 2 + 14,064 \cdot 4 - 10,403 \cdot 4 - \\ - 19,96 \cdot 1 - 10,524 \cdot 5 + 0,484 \cdot 11 - 8,667 + 9,613 = 0; \\ 178,193 - 178,191 \approx 0. \end{aligned}$$

Все проверки выполняются. Расчет рамы выполнен верно.

5.11. Задачи для самостоятельного решения

Построить в нижепредставленных рамах эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил (ответы на задачи представлены на с. 94).



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ, РЕКОМЕНДУЕМОЙ

ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА»

1. Борисевич, А.А. Строительная механика / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – 1-е изд. – Минск: БНТУ, 2007. – 821 с.
– 2-е изд. – Минск: БНТУ, 2009. – 756 с.
2. Строительная механика: учебник для вузов / А.В. Дарков [и др.]; под ред. А.В. Даркова. – 7-е изд. – М.: Высш. школа, 1976. – 600 с.
3. Дарков, А.В. Строительная механика: учебник для строит. спец. вузов / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – 8-е изд. – М.: Высш. школа, 1986. – 608 с.
4. Довнар, Е.П. Строительная механика / Е.П. Довнар, Л.И. Коршун. – Минск, 1986. – 310 с.
5. Руководство по практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем) / Под общ. ред. Г.К.Клейна. – М., 1980. – 384 с.
6. Селюков, В.М. Расчетно-проектировочные работы по строительной механике. – Минск, 1989. – 204 с.
7. Строительная механика: учебник: в 2 кн. / Под ред. В.Д. Потапова. – Кн. 1: Статика упругих систем. – М.: Высшая школа, 2007. – 511 с.

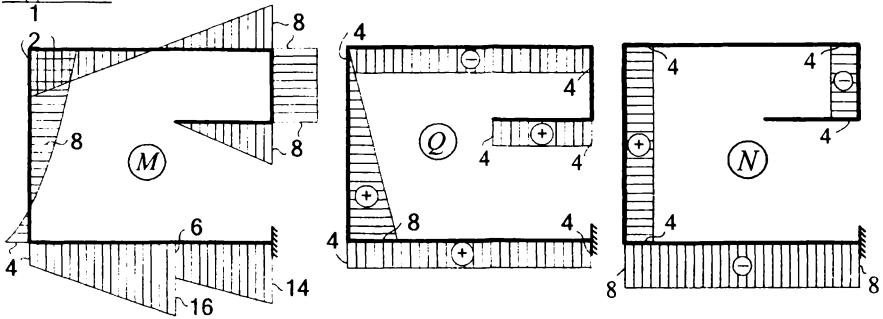
ОТВЕТЫ НА ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Раздел 2. Кинематический анализ сооружений

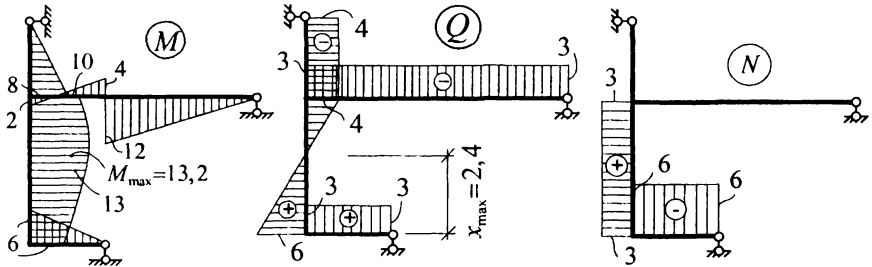
- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------------------|
| 2.1. $W = 0$; система неизменяема. | 2.2. $W = 0$; система мгновенно изменяема. |
| 2.3. $W = 0$; система неизменяема. | 2.4. $W = 0$; система мгновенно изменяема. |
| 2.5. $W = 0$; система неизменяема. | 2.6. $W = 0$; система мгновенно изменяема. |
| 2.7. $W = 0$; система изменяема. | 2.8. $W = -4$; система неизменяема. |
| 2.9. $W = 0$; система неизменяема. | 2.10. $W = 0$; система неизменяема. |

Раздел 3. Расчет статически определимых систем

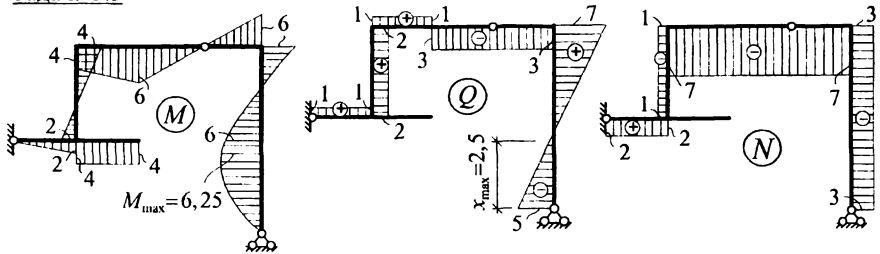
Задача 3.1



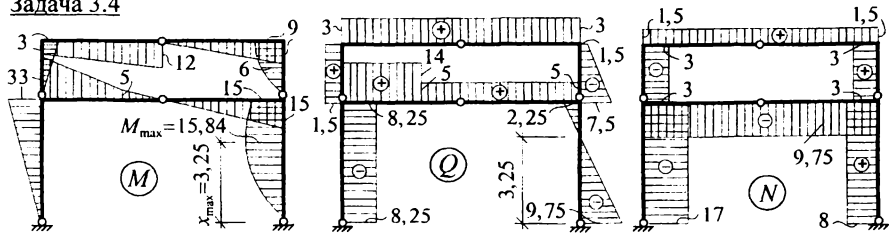
Задача 3.2



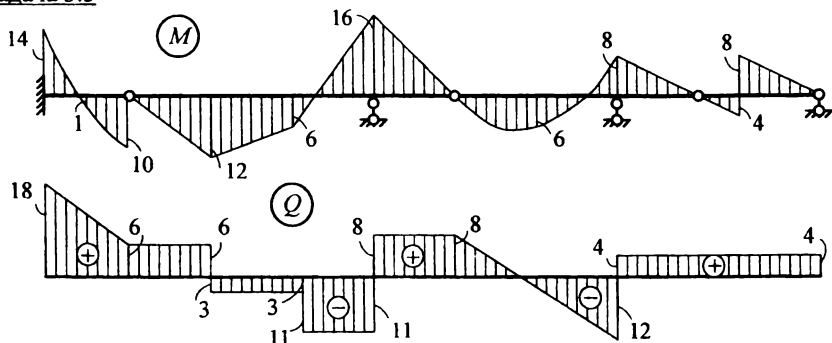
Задача 3.3



Задача 3.4



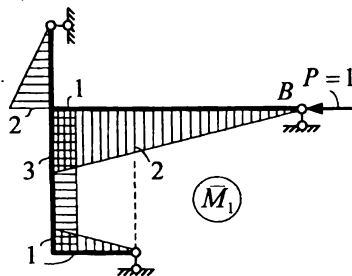
Задача 3.5



Продольные силы в балке при действии только вертикальных нагрузок и сосредоточенных моментов отсутствуют (равны нулю).

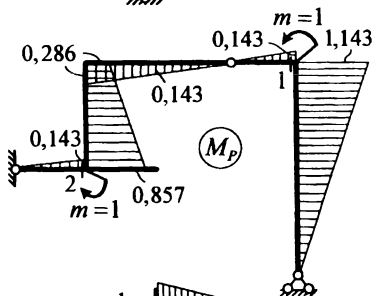
Задача 3.6

Эпюра изгибающих моментов от действия внешней нагрузки (грузовая эпюра) представлена в ответе к задаче 3.2, единичная эпюра изгибающих моментов показана справа. Горизонтальное перемещение точки B равно $66,667/EJ$ (влево).



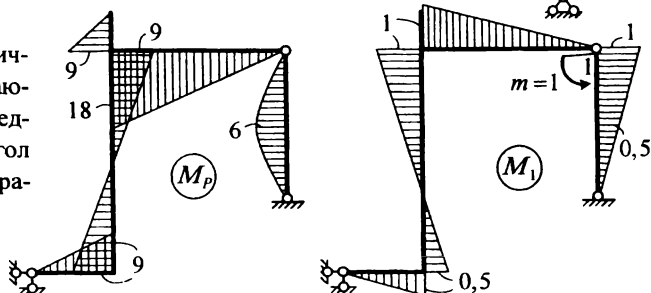
Задача 3.7

Грузовая эпюра изгибающих моментов представлена в ответе к задаче 3.3, единичная эпюра изгибающих моментов показана справа. Взаимный угол поворота сечений 1 и 2 равен $2,953/EJ$.

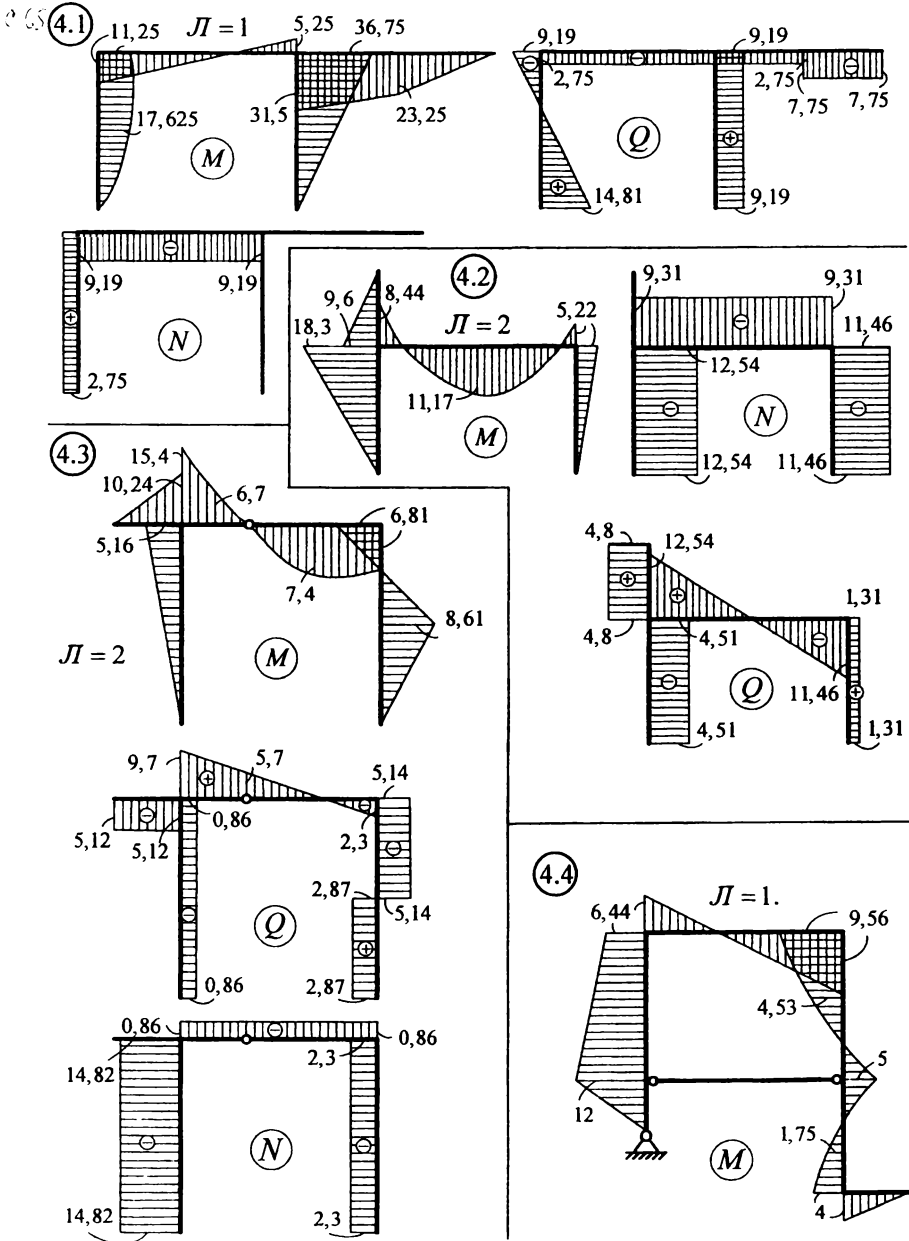


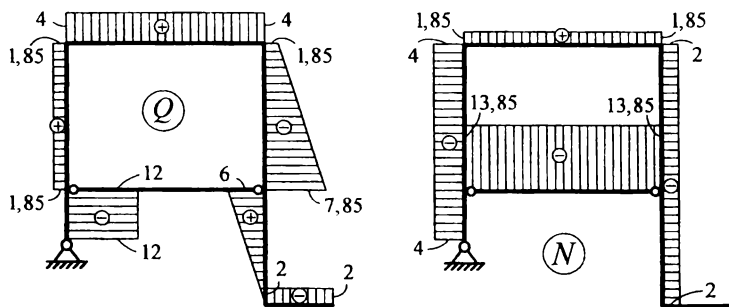
Задача 3.8.

Грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов представлены справа. Угол поворота сечения 1 равен $35/EJ$.



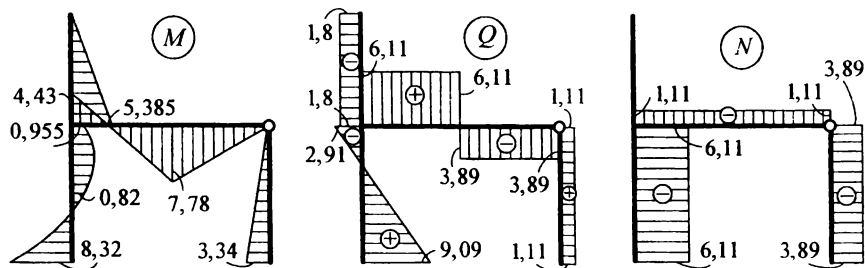
Раздел 4. Расчет статически неопределимых рам методом сил



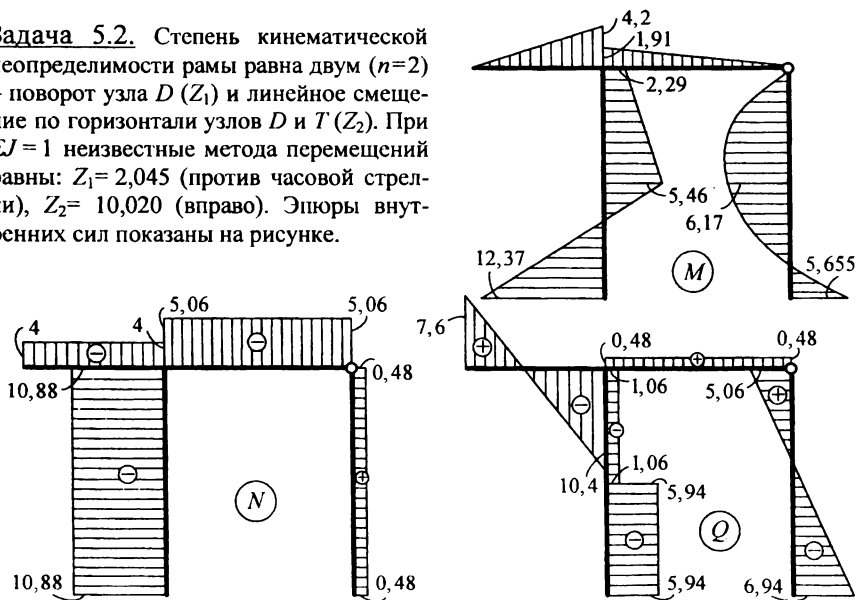


Раздел 5. Расчет статически неопределимых рам методом перемещений

Задача 5.1. $n=2$ – поворот узла D (Z_1) и линейное смещение по горизонтали узлов D и T (Z_2) при $EJ=1$ равны: $Z_1=2,045$ (по часовой стрелке), $Z_2= 10,020$ (вправо).



Задача 5.2. Степень кинематической неопределимости рамы равна двум ($n=2$) – поворот узла D (Z_1) и линейное смещение по горизонтали узлов D и T (Z_2). При $EJ=1$ неизвестные метода перемещений равны: $Z_1= 2,045$ (против часовой стрелки), $Z_2= 10,020$ (вправо). Эпюры внутренних сил показаны на рисунке.



СОДЕРЖАНИЕ

1. Основные понятия	3
1.1. Строительная механика и ее задачи	3
1.2. Расчетная схема сооружения	3
1.3. Нагрузки и воздействия на расчетные схемы	6
1.4. Классификация сооружений	6
1.5. Основные допущения, принципы и понятия	7
2. Кинематический анализ сооружений	7
3. Расчет статически определимых систем	19
3.1. Внутренние силы и их определение	19
3.2. Рамы. Расчет простых рам	22
3.3. Особенности расчета трехшарнирных рам	31
3.4. Расчет многопролетных статически определимых балок	33
3.5. Определение усилий в фермах	37
3.6. Определение перемещений в статически определимых изгибаемых системах	41
3.7. Задачи для самостоятельного решения	47
4. Расчет статически неопределимых рам методом сил	48
4.1. Идея метода сил	48
4.2. Степень статической неопределимости	49
4.3. Выбор основной системы метода сил	49
4.4. Система канонических уравнений метода сил	53
4.5. Вычисление коэффициентов и свободных членов уравнений	55
4.6. Проверки коэффициентов и свободных членов канонических уравнений	55
4.7. Решение системы канонических уравнений	56
4.8. Построение окончательных эпюр усилий и их проверки	56
4.9. Порядок расчета рам методом сил	59
4.10. Пример расчета	60
4.11. Задачи для самостоятельного решения	65
5. Расчет статически неопределимых рам методом перемещений	66
5.1. Подходы и допущения, положенные в основу метода перемещений	66
5.2. Определение степени кинематической неопределимости рам	67
5.3. Основная система метода перемещений	69
5.4. Канонические уравнения метода перемещений	70
5.5. Табличные эпюры метода перемещений	72
5.6. Построение единичных и грузовых эпюр в основной системе	76
5.7. Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода перемещений	78
5.8. Проверки коэффициентов и свободных членов канонических уравнений	81
5.9. Построение окончательных эпюр усилий и их проверки	82
5.10. Пример расчета	83
5.11. Задачи для самостоятельного решения	90
Список литературы, рекомендуемой для изучения дисциплины	90
Ответы на задачи для самостоятельного решения	90

Учебное издание

Игнатюк Валерий Иванович
Сыроквашко Иван Степанович

Строительная механика

Рекомендовано Советом университета в качестве пособия
по дисциплине «Строительная механика»
для слушателей

Института повышения квалификации и переподготовки кадров
специальности переподготовки
1-70 02 71 «Промышленное и гражданское строительство»

Ответственный за выпуск Игнатюк В.И.

Редактор Строкач Т.В.

Компьютерный набор и верстка Игнатюк В.И.

Корректор Никитчик Е.В.

ISBN 978-985-493-183-8



9 78 9854 931838

Издательство БрГТУ

Лицензия № 02330/0549435 от 08.04.2009 г.

Подписано к печати 12.04.2011. Формат 60×84¹/₁₆.

Бумага «Снегурочка». Гарнитура Times New Roman.

Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 6,0. Тираж 100 экз.

Заказ № 449. Отпечатано на ризографе Учреждения
образования «Брестский государственный техниче-
ский университет». 224017, Брест, ул. Московская, 267.