Молош В.В., Томашев И.Г.

ОБЗОР МЕХАНИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕЗУ ПРИ ПРОДАВЛИВАНИИ В РАСЧЕТАХ ПЛОСКИХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ БЕЗ ПОПЕРЕЧНОЙ АРМАТУРЫ

Брестский государственный технический университет, кафедра прикладной механики

Введение. Большинство эмпирических математических моделей не отвечает на вопрос о том, как происходит перераспределение внутренних сил в плите. Это понимание может быть получено только при использовании механической модели, учитывающей напряжения и деформации в арматуре и бетоне, а также описывающей механизм разрушения под нагрузкой узла сопряжения плиты и колонны. В большинстве моделей для этого прибегают к делению железобетонной плиты на блоки или, учитывают распределение напряжений по поверхности наклонной трещины. Блочные модели (модель S. Kinnunen и H. Nylander [3], модель T. Georgopoulos [2]) зачастую учитывают ограниченную область материала, воспринимающую нагрузку, и не учитывают передачу внутренних сил в смежных областях, как например в моделях ферменной аналогии или моделях подкосов и затяжек. В других моделях, построенных на теории пластичности (модель J. Moe [5], модель Ph. Menetrey [4], Модель Z.P. Bažant и Z. Cao [0]), основным критерием сопротивления выступают предельные растягивающие напряжения в бетоне.

Поскольку проблема среза при продавливании является достаточно сложной, общепринятая модель для проектирования до сих пор не разработана. В нормативных документах по-прежнему предложены математические формулы для перерезывающей силы, распределенной по контрольной площади, полученные на основании эмпирически данных. Ниже рассмотрены лишь некоторые механические модели сопротивления срезу при продавливании, которые уже принято называть классическими.

Модель S. Kinnunen и H. Nylander [3]

Предельная перерезывающая сила для плит без поперечного армирования вычисляется по выражениям (1) и (2) при достижении равенства $V_{u,c}$ и $V_{u,s}$, которое осуществляется изменением высоты сжатой зоны бетона k_x.

$$V_{u,c} = k\pi\eta d^2 k_x \frac{1+\frac{2k_x}{\eta}}{1+\frac{k_x}{\eta}} f_c \cdot f(\alpha), \qquad (1)$$

где $\eta = \dfrac{c_2}{d}$ и $f(\alpha) = \dfrac{\tan\alpha(1-\tan\alpha)}{1+\tan^2\alpha}$,

$$V_{u,s} = k4\pi\rho_l f_y d r_f \left[1+\ln\left(\frac{\delta d}{2r_u}\right)\right]\frac{1-\frac{k_x}{3}}{\delta-\eta}, \text{ [МН]} \qquad (2)$$

В формулах (1) и (2) и далее: $V_{u,c}$ – составляющая перерезывающей силы, воспринимаемая бетоном; k = 1,1 поправочный коэффициент для плит с армированием в двух направлениях и колонной квадратного сечения (для круглых плит с круглой колонной k = 1,0); π − математическая константа; α − угол наклона трещины среза; d – рабочая высота плиты; k_x − высоты сжатой зоны бетона; f_c – прочность бетона при осевом сжатии, в уравнение (1) подставляют в МПа; c_2 – длина стороны (диаметра) колонны; $V_{u,s}$ − составляющая перерезывающей силы, воспринимаемая продольной арматурой; ρ_l − коэффициент продольного армирования; f_y – сопротивление продольной арматуры, соответствующее пределу текучести, в МПа; r_f – радиус колонны или длина половины стороны колонны; $\delta = l_{\text{плиты}} / d$; $l_{плиты}$ – диаметр окружности, очерченной сечением с нулевым моментом; r_u – радиус, отсчитываемый от оси колонны до центра тяжести растянутой арматуры в наклонной трещине.

Модель J. Moe [5]

В 1961 г. J. Moe [5] предложил рассматривать одновременно две формы разрушения в предельном состоянии. Первоначально рассчитывают поперечную силу V_{flex}, соответствующую предельному сопротивлению при изгибе по нормальному сечению у колонны. Выражение для определения предельной перерезывающей силы при продавливании V_u J. Moe получил в следующем виде:

$$V_u = \frac{1,246 \cdot (1 - 0,059\eta) \cdot u_{col} d \sqrt{f_c}}{1 + \dfrac{0,436}{V_{flex}} u_{col} d \sqrt{f_c}}, \tag{3}$$

$$V_{flex} = C\omega(1 + 0,29\omega) d^2 f_c, \tag{4}$$

$$\omega = \rho \frac{f_y}{f_c},\ \eta = \frac{c_2}{d}, \tag{5}$$

где

u_{col} – периметр колонны; C – коэффициент, который для соответствующих условий нагружения выражен отношением предельного изгибающего момента в плите к реакции в колонне V_{flex}.

Аналитическая модель Ph. Menetrey [4]

В общем случае считают, что разрушение происходит после достижении в наклонной трещине предельных напряжений растяжения. Предельную перерезывающую силу при этом предложено определять согласно выражению:

$$F_{pun} = F_{ct} + F_{dow} + F_{sw} + F_p, \tag{6}$$

где F_{ct}, F_{dow}, F_{sw}, F_p – вертикальные проекции равнодействующих соответственно растягивающих сил в бетоне, силы, вызванной нагельным сопротивлением продольной арматуры, силы в поперечной арматуре, силы в предварительно напряженных канатах.

$$F_{ct} = \pi(r_1 + r_2)s \cdot \sigma_v = \pi(r_1 + r_2)s \cdot f_{ct}^{2/3}\xi\eta\mu, \tag{7}$$

$$r_1 = r_f + \frac{1}{10}\frac{d}{\tan\alpha},\ r_2 = r_f + \frac{d}{\tan\alpha},\ s = \sqrt{\left(r_2 - r_1\right)^2 + \left(0,9d\right)^2},$$

$$\xi = \begin{cases} -0,1\rho_l^2 + 0,46\rho_l + 0,35 & 0 < \rho_l < 2\% \\ 0,87 & \rho_l \geq 2\% \end{cases},\ [\text{МПа}^{1/3}], \qquad \mu = 1,6 \cdot (1 + d / d_a)^{-1/2},$$

$$\eta = \begin{cases} 0,1(r_s / h)^2 - 0,5(r_s / h) + 1,25 & 0 < r_s / h < 2,5 \\ 0,625 & r_s / h \geq 2,5 \end{cases},$$

где f_{ct} − предел прочности бетона на осевое растяжение; s – длина наклонной трещины; r_f − радиус колонны; ξ, η, μ − безразмерные коэффициенты; ρ_l следует применять в процентах; d_a − максимальный размер заполнителя; h − толщина плиты.

$$F_{dow} = \frac{1}{2}\sum^{bars} \phi_s^2 \sqrt{f_c f_{ct}(1 - \zeta^2)} \sin\alpha, \tag{8}$$

где суммирование выполнено для всех стержней продольной арматуры, пересекающих наклонную трещину; ϕ_s − диаметр стержней продольной арматуры;

$$\zeta = \sigma_s / f_t$$

σ_s – продольные напряжения в растянутом арматурном стержне:

$$\sigma_s = \frac{F_{pun} / \tan\alpha}{\sum^{bars} A_s}.$$

Модель сопротивления T. Georgopoulos [2]

В модели, разработанной T. Georgopoulos [2] в 1988-1989 гг., главными параметрами являются прочность бетона при растяжении f_{ctk} и механический индекс армирования ω. T. Georgopoulos получает уравнение (12) для вычисления предельной продавливающей силы:

$$P_u = 4{,}13 \cdot f_{ct} \cdot d^2 \cdot \cot\alpha \cdot \left(\frac{\lambda}{2} + 0{,}2 + 0{,}35 \cdot \cot\alpha\right) \text{ [МН]}, \tag{9}$$

$$\tan\alpha = \frac{0{,}056}{\omega} + 0{,}3, \quad \omega = \rho_l \cdot \frac{f_y}{f_c},$$

где $\lambda = d_{st} / d$; d_{st} − диаметр колонны; ω − механический индекс армирования.

Модель Z.P. Bažant и Z. Cao [0]

В 1987 г. Z.P. Bažant и Z. Cao [0] выдвинули предположение, что предельная продавливающая сила должна определяться из рассмотрения уравнений равновесия с учетом энергии разрушения, а не построением критериев прочности только для предельного состояния. В экспериментальных исследованиях Z.P. Bažant и Z. Cao установили, что наибольшее влияние на сопротивление продавливанию оказывает высота плиты. Предельную продавливающую силу Z.P. Bažant и Z. Cao предложили определять по уравнению

$$V_u = \pi v_u b d \tag{10}$$

где

$$v_u = C\left(1 + \frac{d}{\lambda_0 \cdot d_a}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{11}$$

при

$$C = 0{,}155 \cdot f_c\left(1 + 0{,}35\frac{d}{u_{col}}\right),$$

где λ_0 = 28,5 − эмпирический параметр, характеризующий энергию нормального отрыва материала и форму конструкции.

Анализ рассмотренных механических моделей

Проверка достоверности и сравнение приведенных моделей сопротивления срезу при продавливании выполнена путем сравнения экспериментальных и расчетных значений продавливающих сил. Экспериментальные данные содержали информацию об образцах, исследованных как зарубежными авторами, так и самостоятельно [6] и были собраны в выборку, объем которой составил 250 экспериментальных образцов. В целом все расчетные модели кроме модели Z.P. Bažant и Z. Cao [0], которая дает в среднем 8 % превышения, достоверно оценивают величину перерезывающих сил при продавливании.

Модель Ph. Menetrey [4] наиболее точно оценивает влияние параметров ρ_l и d. Влияние f_c с ее ростом снижается. Из таблицы 1 видно, что статистические параметры V_x = 0,196 для значения V_{calc} / V_{exp}, V_δ = 0,196 и r_{ik} = 0,973, сопоставимым со значениями, полученными для эмпирических моделей в действующих нормативных документах. Одним из факторов влияющих на это может быть учёт влияния моделью

Ph. Menetrey [4] параметров ρ_l и d эмпирическими зависимостями, полученными аппроксимацией по базе данных аналогичной той, которая использована в данной работе. Следует также отметить, что модель Ph. Menetrey [4] является единственной моделью из рассматриваемых, которая в своей полной форме учитывает влияние поперечной арматуры и предварительного напряжения арматуры (в рамках данной работы указанные зависимости не приведены).

Таблица 1 – Результаты статистического анализа при сравнении расчетных и экспериментальных величин продавливающих сил

Модель	$\min\left(\frac{V_{calc}}{V_{exp}}\right)$	$\max\left(\frac{V_{calc}}{V_{exp}}\right)$	$m\left(\frac{V_{calc}}{V_{exp}}\right)$	r_{ik}	V_x	b	V_δ
2	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*		*8*
S. Kinnunen и H. Nylander [3]	0,096	1,329	0,678	0,922	0,343	1,368	0,429
J. Moe [5]	0,184	1,259	0,838	0,978	0,195	1,183	0,221
Ph. Menetrey [4]	0,327	1,059	0,598	0,973	0,196	1,768	0,198
T. Georgopoulos [2]	0,199	1,701	0,936	0,907	0,292	1,144	0,337
Z. P. Bažant и Z. Cao [0]	0,423	2,534	1,079	0,907	0,364	0,736	0,363

В таблице приняты следующие обозначения:
min, max, m – соответственно минимальное, максимальное и среднее значения;
r_{ik} − коэффициент корреляции расчетных и экспериментальных сопротивлений продавливанию;
b – поправочный коэффициент для среднего значения;
V_δ − коэффициент вариации для вектора ошибок δ.

Модель J. Moe [5] (1961) приводит к удивительно хорошим результатам с точки зрения большинства статистических характеристик: близкое к единице значение среднего отношений V_{calc} / V_{exp} составившее 0,838, наименьший V_x = 0,195, и относительно небольшой V_δ = 0,196, но при этом наибольший r_{ik} = 0,973. Модель J. Moe [5] достаточно точно оценивает влияние f_c (рисунок 4) вплоть до больших значений, свойственных высокопрочным бетонам. Влияние ρ_l и d оцениваются менее точно. При ρ_l > 0,06 применение модели становится не безопасным. Ключом к высокой точности предсказывания величины перерезывающих сил может служить предложенная J. Moe связь между сопротивлением изгибу и срезу, а также использованный механический коэффициента $\omega = \rho_l \cdot f_y / f_c$, вместо строго геометрического коэффициента ρ_l. По модели T. Georgopoulos [2] (1987) получен относительно небольшой V_x = 0,196. При $\rho_l > 0{,}023$ расчетные значения перерезывающих сил значительно превышают экспериментальные значения. Несмотря на относительно большой r_{ik} = 0,907, коэффициент V_δ составляет 0,337. Влияние рабочей высоты плиты d и прочности бетона на осевое сжатие f_c учтено достаточно безопасно (рисунок 4). Модель S. Kinnunen и H. Nylander [3] (1960, 1961) и модель Z.P. Bažant и Z. Cao [0] наименее адекватно оценивают величину расчетных перерезывающих сил. Модель S. Kinnunen и H. Nylander [3] при ρ_l > 0,023 приводит к небезопасному состоянию. А модель Z.P. Bažant и Z. Cao [0] в целом не безопасна и дает завышенные расчетные значения перерезывающих сил и особенно при повышении f_c и рабочей высоты плиты d.

Заключение

1. К настоящему времени разработано достаточно большое количество механических моделей сопротивления срезу при продавливании, которые опираются в своей основе на принципы и правила механики твердого тела, а именно на: уравнения равновесия, уравнения, описывающие физические свойства материалов,

уравнения совместности деформаций, критерии разрушения. Тем не менее единой общепринятой механической модели сопротивления, адекватно отвечающей экспериментальным данным, до сих пор не разработано. В большинство нормативных документов введены сугубо математические зависимости, не имеющие в своей основе физического и механического смысла, но отвечающие большей достоверностью в предсказании расчетных величин перерезывающих сил в границах их апробации. Все механические модели условно можно разделить на три основные группы: модели базирующиеся на уравнениях механики твердого деформируемого тела; модели аналогий – ферменной аналогии, подкосов и затяжек; модели, построенные на теории пластичности. Такое деление условно по причине того, что многие модели могут быть отнесены одновременно к двум или ко всем трем группам.

2. По причине того, что в узле сопряжения плиты и колонны под нагрузкой создается сложное напряженно-деформированное состояние, описать явление среза при продавливании только методами механики до сих пор не удалось. Поэтому практически во всех механических моделях некоторые уравнения построены на математических зависимостях, полученных аппроксимацией экспериментальных данных.

3. Из анализа рассматриваемых моделей установлено, что наиболее адекватными моделями можно считать модель J. Moe [5] и модель Ph. Menetrey. Несмотря на то, что модель J. Moe [5] является в меньшей степени «механической», чем «математической», она позволяет с большой точностью определять величину перерезывающих сил в широких пределах варьирования ρ_l, d и f_c. В модели, разработанной Ph. Menetrey, влияние ρ_l, d и f_c также описано «математическими» функциями. Несколько менее точной является модель, разработанная T. Georgopoulos [2]. Расчетная модель, предложенная Z.P. Bažant и Z. Cao [0] значительно завышает величину перерезывающих сил, что приводит к относительно большим V_x и V_δ. Модель S. Kinnunen и H. Nylander [3] является наименее точной.

Список использованных источников:

1. Bažant, Z.P. Size effect in punching shear failure of slabs / Z.P. Bazant, Z. Cao // ACI-Struct. Journ. − 1987. − Vol. 84, Jan.-Febr. – P. 44−53.
2. Georgopoulos, T. Durchstanzlast und Durchstanzwinkel punktförmig gestützter Stahlbetonplatten ohne Schubbewehrung / T. Georgopoulos // Bauingenieur. − 1989. – № 64. – S. 187−191.
3. Kinnunen, S. Punching of concrete slabs without shear reinforcement / S. Kinnunen, H. Nylander // Transactions of the Royal Inst. of Technology. − Stockholm, 1960. − Nr. 158.
4. Menetrey, Ph. Numerical analysis of punching failure in reinforced concrete structures / Ph. Menetrey // Dep. de Genie Civil, EPFL Lausanne, 1994. − These № 1279. – P. 179.
5. Moe, J. Shearing strength of reinforced concrete slabs and footings under concentrated loads / J. Moe // Portland Cement Association Research and Development Laboratories. 5420 Old Orchard Road. − Skokie, Illinois, 1961. − April – P. 144.
6. Молош, В.В. Сопротивление срезу при продавливании самонапряженных плоских железобетонных элементов без поперечного армирования: дис. к-та тех. наук : 05.23.01 / В.В. Молош. – Брест, 2000. – 225 л.
7. Основы проектирования строительных конструкций = Асновы праектавання будауничых канструкцый: ТКП EN 1990-2011. – Введ. 15.11.2012. – Минск: CEN/TC 250 «Конструкционные Еврокоды»: Министерство архитектуры и строительства Республики Беларусь, 2011. – 70 с.