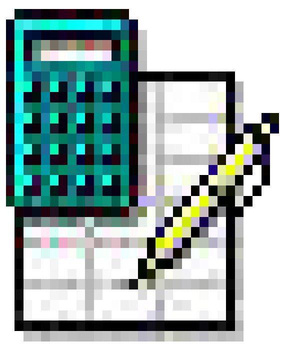
Министерство образования Республики Беларусь

Брестский политехнический институт

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

Избранные задачи вступительных экзаменов по математике в Брестский политехнический институт в 1995-1999 г. г.



Брест 2000

ББК 51(075.4)
УДК 22.1я729
М 23

Пособие содержит наиболее сложные задачи вступительных экзаменов по математике в Брестский политехнический институт в 1995 - 1999 г. г. Ко всем задачам приведены ответы, а к наиболее трудным и типичным решения и комментарии.

Предназначено школьникам, абитуриентам, слушателям подготовительных курсов, учителям.

Составители: Махнист Л.П., к.т.н., доцент
Рубанов В.С., к.ф.-м.н., доцент
Сидоревич М.П., к.ф.-м.н., доцент

Рецензент: Савчук В.Ф., к.ф.-м.н., зав. кафедрой алгебры и геометрии Брестского государственного университета

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским Советом БПИ. Протокол №1 от 26.04.2000 г.

Оглавление

Предисловие

В настоящее пособие вошли наиболее трудные задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах по математике в Брестском политехническом институте в 1995-1999 г.г.

Для удобства работы с пособием задачи разбиты на типы, хотя такое деление в некоторых случаях носит условный характер. Каждая из задач снабжена указателем факультета, в котором она в свое время предлагалась на вступительных экзаменах. Это позволит абитуриенту Брестского политехнического института обратить внимание на уровень сложности и специфику предлагаемых на выбранном факультете заданий. В конце предисловия приводится список принятых сокращений в названиях факультетов и их расшифровка. Ко всем задачам пособия приведены ответы, а к более чем половине задач – решения.

Издание может быть использовано в качестве пособия для подготовительных курсов. Авторы предполагают, что данное пособие окажет помощь абитуриентам и старшеклассникам при самостоятельной подготовке к вступительным экзаменам по математике. С другой стороны, приведенные в пособии задачи, позволят учителям использовать их на уроках математики, в работе математических кружков и факультативов.

При изложении решений авторы не претендуют на "оптимальные" способы решения. Даже решения типовых задач часто даются с несовпадающими комментариями. Возможно, читателям удастся найти более простые, более понятные, а может быть, совершенно нестандартные подходы к решению задач. Успехов в этом и на вступительных экзаменах будущим абитуриентам!

В заключение авторы хотели бы выразить благодарность всем преподавателям кафедры высшей математики за ценные советы и помощь, замечания и советы, оказанные в процессе подготовки и использования материалов вступительных экзаменов, вошедших в настоящее пособие.

Примечание

ВиГ – факультет водоснабжения и гидромелиорации,
СФ – строительный факультет,
ЭМФ – электронно-механический факультет,
ЭФ – экономический факультет,
ЗФ – заочный факультет,
ПО – подготовительное отделение.

<u>Глава 1.</u> Избранные задачи по математике на вступительных экзаменах 1995-1999 г.г.

1.1. Уравнения

1.1.1. (ЭМФ, 95) Решить уравнение
$$\left(x^2-2\right)\cdot\left|\sin x\right|=\sin x\,.$$
1.1.2. (ЭМФ, 95) Решить уравнение
$$(x-2)^2\cdot\left|\cos x\right|=\cos x\,.$$
1.1.3. (ЭМФ, 95) Решить уравнение
$$\left(x^2+2\right)\cdot\cos x=3x\cdot\left|\cos x\right|\,.$$
1.1.4. (ЭМФ, 95) Решить уравнение
$$\left(x^2+4\right)\cdot\sin x=5x\cdot\left|\sin x\right|.$$
1.1.5. (ЭМФ, 95) Решить уравнение
$$\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x\,.$$
1.1.6. (ЭМФ, 95) Решить уравнение
$$\log_2^2 x+(x-5)\log_2 x+6-2x=0\,.$$
1.1.7. (ЭМФ, 95) Решить уравнение
$$4^x+(x-13)\cdot 2^x-2x+22=0\,.$$
1.1.8. (ЭМФ, 95) Решить уравнение
$$4^x+(2x-3)\cdot 2^x+2-4x=0\,.$$
1.1.9. (ЭФ, 97) Решить уравнение
$$\sin\frac{\pi x}{2}+\sin\frac{5\pi x}{2}+2x=x^2+3\,.$$
1.1.10. (ЭФ, 97) Решить уравнение
$$x^2-\cos\pi x=4x-5\,.$$
1.1.11. (ЭФ, 97) Решить уравнение
$$2^{\cos^2 2x}=\frac{\sin 3x-\cos 3x}{\sqrt{2}}\,.$$
1.1.12. (ЭФ, 97) Решить уравнение
$$3^{1+\sin 2x}=11-\sqrt{2}(\sin x+\cos x).$$
1.1.13. (ПО, 97) Решить уравнение
$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}-\sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}}=2\,.$$
1.1.14. (ПО, 97) Решить уравнение
$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=3+\sqrt{x+24-10\sqrt{x-1}}\,.$$
1.1.15. (ПО, 97) Решить уравнение
$$\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{4x^2-4x+1}\,.$$
1.1.16. (ПО, 97) Решить уравнение

$$\sqrt{3-6x}=\sqrt{9x^2-12x+4}-2.$$

1.1.17. (ЭМФ, 97) Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1.$$

1.1.18. (ЭМФ, 97) Решить уравнение

$$\sqrt[3]{12-x}+\sqrt{24+x}=6.$$

1.1.19. (ЭМФ, 97) Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1.$$

1.1.20. (ЭМФ, 97) Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1.$$

1.1.21. (ЭМФ, 98) При каких значениях параметра p найдутся такие значения x, что числа

$$5^{1+x}+5^{1-x};\quad \frac{p}{2};\quad 25^{x}+25^{-x},$$

взятые в указанном порядке, составляют арифметическую прогрессию?

1.1.22. (ЭМФ, 98) При каких значениях параметра p найдутся такие значения x, что числа

$$4^{1-x}+4^{1+x};\quad p;\quad 16^{x}+16^{-x},$$

взятые в указанном порядке, составляют арифметическую прогрессию?

1.1.23. (ЭМФ, 98) Решить уравнение

$$\frac{4}{3}\cdot\log_3^2(5x-6)^3-2\cdot\log_3(5x-6)^3\cdot\log_3 x^6=-24\cdot\log_3^2\frac{1}{x}.$$

1.1.24. (ЭМФ, 98) Решить уравнение

$$\frac{3}{2}\cdot\log_5^2(2x-3)^2+12\cdot\log_5^2\sqrt{x}=\log_5(2x-3)^3\cdot\log_5 x^3.$$

1.1.25. (ЭМФ, 98) Решить уравнение

$$\frac{x}{18}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x 12}.$$

1.1.26. (ЭМФ, 98) Решить уравнение

$$\frac{9}{4}\cdot x=\left(\frac{27}{2}\right)^{\log_x 6}.$$

1.1.27. (ЭФ, 98) Решить уравнение

$$\left|-1+\cos\left(\pi\sqrt[3]{x}\right)\right|+\left|x^2-16x+55\right|=16x-x^2+\cos\left(\pi\sqrt[3]{x}\right)-56.$$

1.1.28. (ЗФ, 98) Найти все значения параметра p, при каждом из которых уравнение

$$(x-p)^2\cdot\left(p\cdot(x-p)^2-p-1\right)=-1$$

имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

1.1.29. (ЗФ, 98) Найти все значения параметра p, при каждом из которых уравнение

$$\left((x-p)^2-2p-4\right)\cdot(x-p)^2=-2p-3$$

имеет больше отрицательных корней, чем положительных.

1.1.30. (ПО, 98) Найти все целые значения параметра *p*, при каждом из которых уравнение $2-2\cos 2x = 3p + 4\sin x$ имеет решения.

1.1.31. (ПО, 98) Найти все целые значения параметра *p*, при каждом из которых уравнение $5-4\sin^2 x - 8\cos^2 \frac{x}{2} = 3p$ имеет решения.

1.1.32. (ЭФ, 99) Решить уравнение
$$\sqrt{2x^2-3x-5} + x\sqrt{x+1} + 5 = 4\sqrt{x+1} + 2\sqrt{2x-5} + 2x.$$

1.1.33. (ЭФ, 99) Решить уравнение
$$\sqrt{2x^2+3x-2} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{2x^2+11x-6} + 3\sqrt{x+2}.$$

1.1.34. (ЭФ, 99) Решить уравнение
$$\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{x^2-3x-2} = \sqrt{2x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-x+2}.$$

1.1.35. (ЭФ, 99) Решить уравнение
$$\sqrt{x^2-3x+4} + \sqrt{3x^2-7x+3} = \sqrt{x^2-2} + \sqrt{3x^2-5x-1}.$$

1.1.36. (ЭФ, 99) Решить уравнение $x^2 + \sqrt{x^2-2x+2} + \sqrt{3x^2-6x+7} = 2+2x$.

1.1.37. (ЭФ, 99) Решить уравнение $1+x^2 + \sqrt{x^2-4x+5} + \sqrt{3x^2-12x+16} = 4x$.

1.1.38. (ЭФ, 99) Решить уравнение $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = x^2-4x+6$.

1.1.39. (ЭФ, 99) Решить уравнение $6x + \sqrt{4-x} + \sqrt{x-2} = x^2+11$.

1.1.40. (ЭМФ, 99) Найти все значения параметра *p*, при каждом из которых уравнение $p\cdot 9^x - 4\cdot 3^x + 1 = 0$ имеет единственное решение.

1.1.41. (ЭМФ, 99) Найти все значения параметра *p*, при каждом из которых уравнение $4^x - p\cdot 2^{x+1} - 3p^2 + 4p = 0$ имеет единственное решение.

1.1.42. (ЭФ, 99) Определить, при каких значениях параметра *p* уравнение $\left|x^2-2x-3\right| = p$ имеет ровно три различных действительных корня.

1.1.43. (ЭФ, 99) Определить, при каких значениях параметра *p* уравнение $\left|x^2-3x+2\right| = p$ имеет ровно три различных действительных корня.

1.1.44. (ЭФ, 99) Определить, при каких значениях параметра *p* уравнение $x^2+5 = 6|x| + p$ имеет ровно три различных действительных корня.

1.1.45. (ЭФ, 99) Определить, при каких значениях параметра *p* уравнение $x^2 - 7|x| = p-12$ имеет ровно три различных действительных корня.

1.1.46. (ПО, 99) При каких значениях параметра *p* сумма квадратов корней уравнения $x^2+2px+2p^2+4p+3=0$ является наибольшей?

1.1.47. (ПО, 99) При каких значениях параметра *p* сумма квадратов корней уравнения $x^2-2px+2p^2-6p+8=0$ является наименьшей?

1.1.48. (ПО, 99) При каких значениях параметра *p* сумма корней уравнения $x^2+2(p^2-3p)x-6p^3+12p^2+4=0$ является наибольшей?

1.1.49. (ПО, 99) Найти все значения параметра p, при которых сумма корней уравнения $x^2-2(p^2+4p)x+8p^3+18p^2+63=0$ принимает наименьшее значение.

1.1.50. (ПО, 99) Найти значения параметра p, при которых отношение корней уравнения $2x^2+(p-10)x+6=0$ равно 12.

1.1.51. (ПО, 99) Найти значения параметра p, при которых один из корней уравнения $2x^2-6x+1-p=0$ больше другого на 10.

1.2. Неравенства

1.2.1. (ЭФ, 95) Решить неравенство
$$\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\cdot\log_5\left(\frac{x}{5}\right)+\frac{1}{x}\cdot\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right)\le 0.$$

1.2.2. (ЭФ, 95) Решить неравенство
$$\sqrt{x^2-5x+6}+x+\sqrt{10x-2x^2-12}+3\log_4\left(\frac{3}{x}\right)\ge 3.$$

1.2.3. (ЭФ, 95) Решить неравенство
$$\sqrt{x^2-7x+10}+9\log_4\left(\frac{x}{8}\right)\ge 2x+\sqrt{14x-20-2x^2}-13.$$

1.2.4. (ЭФ, 95) Решить неравенство
$$\left(2+\sqrt{x^2-7x+12}\right)\cdot\left(\frac{2}{x}-1\right)\le\left(\sqrt{14x-2x^2-24}+2\right)\cdot\log_x\left(\frac{2}{x}\right).$$

1.2.5. (ЭФ, 97) Решить неравенство
$$\cos^2(x+1)\cdot\lg\left(9-2x-x^2\right)\ge 1.$$

1.2.6. (ЭФ, 97) Решить неравенство
$$\left(4x-x^2-3\right)\cdot\log_2\left(\cos^2\pi x+1\right)\ge 1.$$

1.2.7. (ЭФ, 97) Решить неравенство
$$tg\frac{\pi}{x^2+4x+7}\ge\frac{\sqrt{3}}{\sin^2\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right)}.$$

1.2.8. (ЭФ, 97) Решить неравенство
$$\log_2\left(tg\frac{\pi x}{4}+ctg\frac{\pi x}{4}\right)\le\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi x}{2}-\cos\pi x\right).$$

1.2.9. (ЭФ, 97) Решить неравенство
$$\cos x-y^2\ge\sqrt{y-x^2-1}.$$

1.2.10. (ЭФ, 97) Решить неравенство
$$y-\sqrt{1-y-x^2}\ge\frac{1}{|\cos x|}.$$

1.2.11. (ЭФ, 97) Решить неравенство

$$1-tg\frac{\pi x}{4}+\arccos\left(x+\left|\sin y\right|\right)\le 0\,.$$

1.2.12. (ЭФ, 97) Решить неравенство

$$\pi y+2\arcsin\left(x^2+y\right)-2\pi\ge 0\,.$$

1.2.13. (ЭМФ, 98) Найти все значения параметра p, при каждом, из которых неравенство

$$\cos x-2\cdot\sqrt{x^2+9}\le -\frac{x^2+9}{p+\cos x}-p$$

имеет единственное решение.

1.2.14. (ЭМФ, 98) Найти все значения параметра p, при каждом, из которых неравенство

$$\cos 2x+p\le 2\cdot\sqrt{x^2+16}-\frac{x^2+16}{p+\cos 2x}$$

имеет единственное решение.

1.2.15. (ЭФ, 98) Решить неравенство

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\ge\cos\left(\pi\right)+\frac{tg\left(x\right)+1}{1-tg\left(x\right)}+\left|tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^{\sin(5x)}+\left(\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right)^{\cos\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

1.2.16. (ЭФ, 98) Найти наибольшее значение параметра p, при котором имеет решение неравенство

$$p\sqrt{p}\cdot\left(x^2-2x+1\right)+\frac{\sqrt{p}}{x^2-2x+1}\le\sqrt[4]{p^3}\cdot\left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right|.$$

1.2.17. (ЭФ, 98) Найти наибольшее значение величины b, при котором неравенство

$$\sqrt{b^5}\cdot\left(8x-x^2-16\right)+\frac{\sqrt{b}}{8x-x^2-16}\ge -\frac{2}{3}\cdot b\cdot\left|\cos\left(\pi x\right)\right|$$

имеет хотя бы одно решение.

1.2.18. (ЭФ, 99) Найти наибольшее значение суммы $x+2y$, если x и y удовлетворяют неравенству $x^2+xy+4y^2\le 3$.

1.2.19. (ЭФ, 99) Найти наименьшее значение суммы $x+5y$, если x и y положительны и удовлетворяют неравенству $x^2-6xy+y^2+21\le 0$.

1.2.20. (ЭФ, 99) Решить неравенство $(x^2-2x+4)\ge\sqrt{5+4x-x^2}$.

1.2.21. (ЭФ, 99) Решить неравенство $(2x-x^2)\sqrt{6x-x^2-5}\le 2$.

1.2.22. (ЭМФ, 99; ПО, 98) Найти все значения параметра p, при каждом из которых неравенство $36^x+p\cdot 6^x+p+8\le 0$ имеет хотя бы одно решение.

1.2.23. (ЭМФ, 99; ПО, 98) Найти все значения параметра p, при каждом из которых неравенство $25^x+3\le p+p\cdot 5^x$ имеет хотя бы одно решение.

1.3. Системы

1.3.1. (ЭФ, 95) Решить систему
$$\begin{cases} \sqrt{\sin x} \cdot \cos y = 0 \\ 2\sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0 \end{cases}.$$

1.3.2. (ЭФ, 95) Решить систему
$$\begin{cases} \sqrt{\cos x} \cdot \cos y = 0 \\ \cos 2x - 2\cos^2 y + 2 = 0 \end{cases}.$$

1.3.3. (ЭФ, 95) Решить систему
$$\begin{cases} \sqrt{\cos 2x} \cdot \cos x = 0 \\ 2\sin^2 x - \cos\left(2y - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases}.$$

1.3.4. (ЭФ, 95) Решить систему
$$\begin{cases} \sqrt{\sin 2y - 1} \cdot \sin y = 0 \\ \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - 2y\right) - 2\sin 3x = 0 \end{cases}.$$

1.3.5. (ЭМФ, 97) Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 8y + 10 = 0 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}.$$

1.3.6. (ЭМФ, 97) Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 5x^2 + 8xy + 5y^2 + 2x - 2y + 2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 3 \end{cases}.$$

1.3.7. (ЭМФ, 97) Решить систему уравнений
$$\begin{cases} xy + 24 = \dfrac{x^3}{y} \\ xy - 6 = \dfrac{y^3}{x} \end{cases}.$$

1.3.8. (ЭМФ, 97) Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 = 40y \\ y^3 + yx^2 = 10x \end{cases}.$$

1.3.9. (ПО, 97) Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y - 18 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + xy - 62 = 0 \end{cases}.$$

1.3.10. (ПО, 97) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-xy-3=0 \\ xy-x-y+1=0 \end{cases}.$$

1.3.11. (ПО, 97) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0 \\ x^2-xy-2x-3y-6=0 \end{cases}.$$

1.3.12. (ПО, 97) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+2xy+x+3y+1=0 \end{cases}.$$

1.3.13. (ЭФ, 98) При каких значениях параметра *p* система

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5\cdot|x|+4=3y+5x^2+3p \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

1.3.14. (ЭФ, 98) При каких значениях параметра *p* система

$$\begin{cases} 5\cdot 2^{|y|}+3\cdot|y|-2=5x+3y^2-5p \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

1.3.15. (ЭФ, 98) Найти все значения параметра *p*, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left(3-2\sqrt{2}\right)^y+\left(3+\sqrt{8}\right)^y-3p=x^2+6x+5 \\ y^2+\left(p^2-5p+6\right)\cdot x^2=0 \\ -6\le x\le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

1.3.16. (ЭФ, 98) Найти все значения параметра *p*, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x-3=p-2y+y^2 \\ x^2+\left(2-p-p^2\right)\cdot y^2=0 \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

1.3.17. (ЗФ, 98) При каких значениях параметра *p* система

$$\begin{cases} pxy+x-y+\dfrac{3}{2}=0 \\ x+2y+xy+1=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1.3.18. (ЗФ, 98) При каких значениях параметра *p* система

$$\begin{cases} 3y+2+xy=0 \\ x\cdot(y+1-p)+y\cdot(2p-3)+p+3=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1.4. Функции

1.4.1. (ЭФ, 95) Найдите область изменения функции
$$y = x - \sqrt{4x^2 - 12x + 9} - \sqrt{x^2 - 4x + 4}\,.$$
1.4.2. (ЭФ, 95) Найдите область изменения функции
$$y = \sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{4x^2 - 4x + 1} - x\,.$$
1.4.3. (ЭФ, 95) Найдите наименьшее значение функции
$$y = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} - 2x\,.$$
1.4.4. (ЭФ, 95) Найдите наибольшее значение функции
$$y = 3x - \sqrt{9x^2 - 6x + 1} - \sqrt{4x^2 - 12x + 9}\,.$$
1.4.5. (ЭФ, 95) Найти точку графика функции $y = x^2 + \frac{1}{2}$, ближайшую к точке $\left(\frac{1}{4};\ 1\right)$.

1.4.6. (ЭФ, 95) Найти точку графика функции $y = 1 - 2x^2$, ближайшую к точке $\left(1; \frac{3}{4}\right)$.

1.4.7. (ЭФ, 95) Найти точку графика функции $y = \frac{3}{4} + 2x^2$, ближайшую к точке $(1;\ 1)$.

1.4.8. (ЭФ, 95) Найти точку графика функции $y = 1 - x^2$, ближайшую к точке $\left(2; \frac{1}{2}\right)$.

1.4.9. (ЭФ, 97) Сравнить числа $\log_2 3$ и $\log_3 5$.

1.4.10. (ЭФ, 97) Сравнить числа $\log_3 6$ и $\log_4 7$.

1.4.11. (ЭМФ, 97) Вычислить $\arcsin(\sin 10)$.

1.4.12. (ЭМФ, 97) Вычислить $arctg(tg 5)$.

1.4.13. (ЭМФ, 99) Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$$y = 3\sin^2 x + 2\sin 2x + 6\cos^2 x\,.$$
1.4.14. (ЭМФ, 99) Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$$y = \cos^2 x + 5\sin^2 x + 3\sin x \cos x\,.$$
1.4.15. (ЭМФ, 99) Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$$y = \sqrt{11 - \sin 2x - 4\cos x - 4\sin x}\,.$$
1.4.16. (ЭМФ, 99) Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$$y = \sqrt{5(\cos x - \sin x) + 2\sin x \cdot \cos x + 23}\,.$$

1.4.17. (ЭФ, 99) Найти множество значений функции $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$.

1.4.18. (ЭФ, 99) Найти множество значений функции $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3}$.

1.5. Текстовые задачи

1.5.1. (ЭФ, 95) Мясокомбинат производит за день 9 тонн колбасных изделий трех сортов по цене 2 руб., 3 руб. и 8 руб. за 1 кг на общую сумму 30 тыс. руб. (по старому курсу рубля). Известно, что количество тонн производимых за день изделий соответственно первого, второго и третьего сортов образуют арифметическую прогрессию. Сколько тонн колбасных изделий каждого сорта производится комбинатом за день?

1.5.2. (ЭФ, 95) В магазине продано 12 тонн конфет трех сортов по цене соответственно 2 руб., 4 руб. и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 42 тыс. руб. (по старому курсу рубля). Известно, что количество тонн проданных конфет соответственно первого, второго и третьего сортов образуют арифметическую прогрессию. Сколько тонн конфет каждого сорта продано в магазине?

1.5.3. (ЭФ, 95) В магазине продано 10,5 тонн орехов трех сортов по цене соответственно 2 руб., 4 руб. и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 33 тыс. руб. (по старому курсу рубля). Известно, что количество тонн проданных орехов соответственно первого, второго и третьего сортов образуют геометрическую прогрессию. Сколько тонн орехов каждого сорта продано в магазине?

1.5.4. (ЭФ, 95) Мясокомбинат производит за день 3,5 тонн колбасных изделий трех сортов по цене 2 руб., 3 руб. и 4 руб. за 1 кг на общую сумму 9 тыс. руб. (по старому курсу рубля). Известно, что количество тонн производимых за день изделий соответственно первого, второго и третьего сортов образуют геометрическую прогрессию. Сколько тонн колбасных изделий каждого сорта производится на комбинате за день?

1.5.5. (ЭФ, 95) В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в три раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике, но не менее чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

1.5.6. (ЭФ, 95) В двух бригадах вместе более 27 человек. Число членов первой бригады более чем в два раза превышает число членов второй бригады, уменьшенное на 12. Число членов второй бригады более чем в 9 раз превышает число членов первой бригады, уменьшенное на 10. Сколько человек в каждой бригаде?

1.5.7. (ЭФ, 95) Число деталей, изготовленных за смену первой бригадой, составляет 115% от числа деталей, изготовленных за смену второй бригадой. Продукцию двух бригад упаковали в 2 ящика. В первом ящике оказалось $\frac{2}{3}$ деталей, изготовленных первой бригадой, и $\frac{1}{7}$ часть деталей второй бригадой (Следовательно, во втором ящике оказалось $\frac{1}{3}$ деталей, изготовленных первой бригадой, и $\frac{6}{7}$ часть деталей второй бригадой). Сколько деталей за смену изготавливала каждая бригада, если в первом ящике оказалось менее 1000 деталей, а во втором – более 1000 деталей?

1.5.8. (ЭФ, 95) Производительность первого автомобильного завода не превышает 960 машин в сутки. Производительность второго автомобильного завода первоначально составляла 95% от производительности первого завода. После ввода дополнительной линии второй завод увеличил производство машин в сутки на 23% от числа машин, выпускаемых в сутки на первом заводе, и стал выпускать более 1000 штук в сутки. Сколько автомобилей за сутки выпускал каждый завод до реконструкции второго завода? Предполагается, что каждый завод в сутки выпускает целое количество машин.

1.5.9. (ЭФ, 95) 0,5 кг лука, 3 кг картофеля и 1 кг огурцов стоят вместе 20500 руб., а 2 кг лука и 4кг огурцов стоят 46000 руб. Сколько стоят 1 кг лука, 2 кг картофеля и 2 кг огурцов вместе?

1.5.10. (ЭФ, 95) Один ящик гаек, один ящик гвоздей и два ящика шурупов весят вместе 100 кг, а три ящика гаек, три ящика гвоздей и один ящик шурупов весят вместе 200 кг. Сколько весят один ящик гаек и один ящик гвоздей вместе?

1.5.11. (ЭФ, 95) Если 3 км идти пешком, 7 км ехать верхом и 2 км – на велосипеде, то это займет 1 час 35 мин. Если 1 км идти пешком, 2 км ехать верхом и 1 км ехать на велосипеде, то придется потратить 31 мин. Сколько времени займет прогулка, во время которой 1 км идут пешком, 1 км едут верхом и 2 км – на велосипеде?

1.5.12. (ЭФ, 95) 2 кг колбасы, 1 кг масла и 3 кг сыра стоят вместе 179000 руб., а 2 кг колбасы, 3 кг масла и 3 кг сыра стоят вместе 241000 руб. Сколько стоят 2 кг колбасы, 4 кг масла и 3 кг сыра вместе?

1.5.13. (ЭФ, 95) Группа студентов решила купить магнитофон ценой от 170 до 195 руб. (имеется в виду старый курс рубля). Однако в последний момент двое отказались участвовать в покупке, поэтому каждому из оставшихся студентов пришлось внести на 1 руб. больше. Сколько стоил магнитофон?

1.5.14. (ЭФ, 95; ЭФ, 98) Для перевозки груза из одного места в другое затребовано некоторое количество одинаковых машин. В виду неисправности дороги на каждую машину пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, поэтому дополнительно были затребованы 4 такие машины. Вес перевезенного груза был больше 55 т, но не превосходил 64 т. Сколько тонн груза было перевезено на каждом грузовике?

1.5.15. (ЭФ, 95) Для перевозки кирпича от железнодорожной станции в колхоз затребовали некоторое количество одинаковых машин. В виду плохой сельской дороги на каждую машину пришлось грузить на 1 т кирпича меньше, чем предполагалось, поэтому дополнительно были затребованы 6 таких же машин. Вес перевезенного кирпича был больше 68 т, но не превосходил 74 т. Сколько тонн груза было перевезено на каждом грузовике?

1.5.16. (ЭМФ, 97) Из пунктов А и В вышли навстречу друг другу два поезда, причем второй поезд вышел на полчаса позже первого. Через два часа после выхода первого поезда расстояние между ними составляло $\frac{19}{30}$ расстояния между А и В. Поезда встретились в середине АВ. За сколько часов каждый поезд пройдет путь АВ?

1.5.17. (ЭМФ, 97) Два поезда одновременно выходят навстречу друг другу из пунктов А и В, расстояние между которыми 60 км. Первый поезд, пройдя 20 км, остановился на 30 минут, затем, пройдя 4 минуты, встретил второй поезд. Оба поезда прибыли одновременно в пункты А и В. Найти скорости поездов?

1.5.18. (ЭМФ, 97) Два пешехода одновременно выходят навстречу друг другу из пунктов А и В, и встречаются через 30 минут. Продолжая движение, первый пешеход прибывает в В на 11 минут раньше, чем второй пешеход в А. Определить время в пути каждого пешехода?

1.5.19. (ЭМФ, 97) Из пункта А в пункт В выехал грузовик. Через один час следом выехал второй грузовик. Оба прибыли в В одновременно. Если бы они выехали из А в В одновременно навстречу друг другу, то встретились бы через 1 час 12 минут. Определить время в пути первого грузовика?

1.5.20. (ЗФ, 97) Имеются два слитка сплавов меди и олова. Первый весит 3 кг и содержит 40% меди, второй весит 7 кг и содержит 30% меди. Какого веса нужно взять куски этих слитков, чтобы после переплавки получить 8 кг сплава, содержащего 32%?

1.5.21. (ЗФ, 97) Имеются два куска сплава меди и цинка с процентным содержанием меди 20% и 40% соответственно. В каком отношении нужно взять эти сплавы, чтобы, переплавив взятые куски вместе, получить сплав, содержащий 25% меди?

1.5.22. (ЗФ, 97) Имеется два раствора кислоты разной концентрации. Объем одного раствора – 4 л, другого – 6 л. Если их слить вместе, то получится 35%-ый раствор кислоты. Если же слить равные объемы этих растворов, то получится 36%-ый раствор кислоты. Сколько литров кислоты содержится в каждом из первоначальных растворов?

1.5.23. (ЗФ, 97) Имеется два раствора соли в воде, первый – 40%-ый, второй – 60%-ый. Их смешали, добавили 5 кг воды и получили 20%-ый раствор. Если бы вместо 5 кг воды добавили 5 кг 80%-ного раствора, то получили бы 70%-ый раствор. Сколько было 40%-ого и 60% растворов?

1.5.24. (ЭФ, 97) Бассейн наполняется двумя трубами за 6 часов. Одна первая труба наполняет его на 5 часов быстрее, чем одна вторая. За какое время каждая труба, действуя отдельно, может наполнить бассейн?

1.5.25. (ЭФ, 97) Первая труба наполняет бак на 2 часа дольше, а вторая на 4,5 часа дольше, чем наполняют этот бак обе трубы, открытые одновременно. За какое время можно наполнить бак через одну первую трубу?

1.5.26. (ЭФ, 97) Двое мастеров, работая вместе, выполняют некоторое задание за 30 дней. После шестидневной совместной работы один из них, работая отдельно, может закончить это задание за 40 дней. За сколько дней каждый из них, работая отдельно, может выполнить задание?

1.5.27. (ЭФ, 97) Если одновременно открыть два крана, то бассейн наполнится за 4,5 часа. Если же наполнить половину бассейна через один кран, а другую половину – через другой кран, то для наполнения бассейна потребуется 12 часов. За какое время наполняет бассейн каждый кран в отдельности?

1.5.28. (ЭМФ, 98) Пять человек выполняют некоторую работу. Первый, второй и третий, работая вместе, могут выполнить всю работу за $7{,}5$ ч; первый, третий и пятый вместе – за 5 ч; первый, третий и четвертый вместе – за 6 ч, а второй, четвертый и пятый вместе – за 4 ч. За какой промежуток времени выполнят эту работу все 5 человек вместе?

1.5.29. (ЭМФ, 98) В бассейне имеется некоторое количество воды. Вода в бассейн начинает прибывать непрерывно и равномерно. Включают испарители воды, которые также работают непрерывно. Известно, что 17 испарителей могут выпарить воду за 8 часов, а 13 испарителей – за 12 часов. Сколько потребуется испарителей, чтобы выпарить воду за 16 часов?

1.5.30. (ЭМФ, 98) Партия одинаковых деталей обрабатывалась на трех станках разных конструкций в такой последовательности: сначала действовал только первый станок столько часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на втором и третьем станках; затем действовал только второй станок столько часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на первом и третьем станках. Остальная часть партии деталей была обработана на третьем станке в течение стольких часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на первом и втором станках. Во сколько раз быстрее была бы выполнена эта работа, если бы действовали совместно три станка?

1.5.31. (ЭМФ, 98) Несколько рабочих выполняют работу за 14 дней. Если бы их было на 4 человека больше и каждый работал в день на 1 час дольше, то та же работа была бы сделана за 10 дней. Если бы их было ещё на 6 человек больше и каждый работал бы ещё на 1 час в день дольше, то эта работа была бы сделана за 7 дней. Сколько было рабочих и сколько часов в день они работали?

1.5.32. (ЭМФ, 98) Два человека одновременно начали спускаться по движущемуся вниз эскалатору метро, причем один шел вдвое быстрее другого. Один из них насчитал 60 ступенек, а второй - 40. Сколько ступенек пришлось бы им отшагать по неподвижному эскалатору?

1.5.33. (ЭМФ, 98) Колона автомобилей, движущихся равномерно с одной и той же скоростью, имеет длину 5 км. В последнем автомобиле находится начальник колонны, а рядом мотоциклист. По приказу начальника мотоциклист увеличил скорость, поравнялся с головной машиной, передал пакет, мгновенно развернулся и стой же скоростью, с какой ехал вперёд, поехал обратно на своё место. Пока мотоциклист выполнял поручение, колонна продвинулась вперёд на 5 км. Сколько километров проехал мотоциклист?

1.5.34. (ЭМФ, 98) Из пунктов A в B одновременно выезжают два автомобиля и встречаются в 12 часов дня. Если скорость первого удвоить, а скорость второго оставить первоначальной, то встреча произойдёт на 56 минут раньше. Если же скорость второго удвоить, а скорость первого оставить первоначальной, то они встретятся на 65 минут раньше. Определить время встречи в том случае, когда скорость обоих была бы удвоенной.

1.5.35. (ЭМФ, 98) Из A в B и из B в A одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму до конца пути осталось пройти 24 км, а когда второй прошел половину пути, первому до конца пути осталось пройти 15 км. Сколько километров останется пройти второму пешеходу после того, как первый закончит переход?

1.5.36. (ЭФ, 98) Из бутылки, наполненной 12%-ным (по массе) раствором соли, отлили $1 л$ и налили $1 л$ воды. Затем отлили ещё один литр и опять долили водой. В бутыли оказался 3%-ный (по массе) раствор соли. Какова вместительность бутыли?

1.5.37. (ЭФ, 98) Из сосуда, наполненного 96%-ным раствором кислоты, отлили $2{,}5\,л$ и долили $2{,}5\,л$ 80%-го раствора той же кислоты, затем ещё раз отлили $2{,}5\,л$ и снова долили $2{,}5\,л$ 80%-го раствора кислоты. После этого в сосуде получился 89%-ный раствор кислоты. Определить вместительность сосуда.

1.5.38. (ЭФ, 98) Сосуд вместимостью $20\,л$ наполнен кислотой. Из него переливают некоторое количество кислоты во второй сосуд такой же вместимости. Доливают водой второй сосуд и полученной смесью доливают первый сосуд. Затем из первого сосуда во второй отливают $6\frac{2}{3}\,л$ смеси, и после этого в обоих сосудах кислоты оказалось одинаковое количество. Сколько литров кислоты отлили первоначально из первого сосуда?

1.5.39. (ЭФ, 98) В двух сосудах, вместимостью каждый по $30\,л$, вместе налито $30\,л$ спирта. Первый сосуд долили водой и полученной смесью долили второй сосуд. Перелив $12\,л$ смеси из второго сосуда в первый, получили, что во втором сосуде оказалось на $2\,л$ спирта меньше, чем в первом. Сколько литров спирта было первоначально в каждом сосуде?

1.5.40. (ЭФ, 98; ЭФ, 95) Несколько человек должны были принять участие в экскурсии. Однако в последний момент два человека от участия в ней отказались, поэтому каждому из оставшихся экскурсантов пришлось уплатить за участие в экскурсии на $3\,р$. больше, чем планировалось первоначально (все участники должны были заплатить поровну). Сколько должен был заплатить каждый экскурсант первоначально, если стоимость экскурсии больше $70\,р$., но не больше $75\,р$.?

1.5.41. (ЭФ, 98) Для размещения комплекта журналов достаточно купить 13 стандартных полок. Однако в продаже оказались полки, на которых умещается на 7 журналов меньше, чем на стандартных, поэтому пришлось купить 27 полок, в результате осталось свободное место для 3 журналов. Сколько журналов в комплекте?

1.5.42. (ЭФ, 98) Груз вначале погрузили в вагоны вместимостью по 80 т, но один вагон оказался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 т, однако, понадобилось на восемь вагонов больше и при этом всё равно один вагон остался не полностью загруженным. Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 т, однако понадобилось ещё на пять вагонов больше, при этом все такие вагоны были загружены полностью. Сколько тонн груза было?

Глава 2. Решения, указания, ответы

2.1. Уравнения

1.1.1. Решить уравнение
$$\left(x^2-2\right)\cdot|\sin x|=\sin x.$$
Решение. Уравнение равносильно совокупности
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x\ge 0\\ \left(x^2-2\right)\cdot\sin x=\sin x\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x<0\\ -\left(x^2-2\right)\cdot\sin x=\sin x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x\ge 0\\ \sin x\cdot\left(x^2-3\right)=0\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x<0\\ \sin x\cdot\left(x^2-1\right)=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ x^2-3=0\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x<0\\ x^2-1=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ x=\sqrt{3}\\ x=-\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x<0\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right..$$
Так как $\sin\sqrt{3}>0,\ \sin\left(-\sqrt{3}\right)<0,\ \sin 1>0,\ \sin(-1)<0$, то решениями уравнения будут: $x=\sqrt{3},\ x=-1,\ x=\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $x=\sqrt{3},\ x=-1,\ x=\pi n,\ n\in Z$.

1.1.2. *Ответ:* $x=1,\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

1.1.3. Решить уравнение
$$\left(x^2+2\right)\cdot\cos x=3x\cdot|\cos x|.$$
Решение. Уравнение равносильно совокупности
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x\ge 0\\ \left(x^2+2\right)\cdot\cos x=3x\cdot\cos x\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x<0\\ \left(x^2+2\right)\cdot\cos x=-3x\cdot\cos x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x\ge 0\\ \cos x\cdot\left(x^2-3x+2\right)=0\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x<0\\ \cos x\cdot\left(x^2+3x+2\right)=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ x^2-3x+2=0\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x<0\\ x^2+3x+2=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ x=1\\ x=2\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x<0\\ \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$
Так как $\cos 1>0,\ \cos 2<0,\ \cos(-1)>0,\ \cos(-2)<0$, то решениями уравнения будут: $x=1,\ x=-2,\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $x=1,\ x=-2,\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

1.1.4. *Ответ:* $x=1,\ x=-4,\ x=\pi n,\ n\in Z$.

1.1.5. Решить уравнение
$$\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x.$$

Решение. Способ 1. Уравнение определено при всех x>0. Тогда получаем следующие равенства

$\log_2^2 x + x\log_2 x - \log_2 x = 6 - 2x$,

$\left(\log_2^2 x - \log_2 x - 6\right) + x\left(\log_2 x + 2\right) = 0$,

$\left(\log_2 x + 2\right)\cdot\left(\log_2 x - 3\right) + x\left(\log_2 x + 2\right) = 0$,

$\left(\log_2 x + 2\right)\cdot\left(\log_2 x + x - 3\right) = 0$.

Последнее уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}\log_2 x = -2\\ \log_2 x = 3 - x\end{array}\right.$.

Первое уравнение имеет корень $x = \frac{1}{4}$. Уравнению $\log_2 x = 3 - x$ удовлетворяет значение $x = 2$. Покажем, что корень $x = 2$ единственный. В самом деле, функция $y = \log_2 x$ возрастающая на множестве $x > 0$, а функция $y = 3 - x$ – убывающая на *R*. Следовательно, уравнение $\log_2 x = 3 - x$ имеет единственный корень $x = 2$.

Способ 2. Положим $t = \log_2 x$, тогда получим $t^2 + (x-1)\cdot t - (6-2x) = 0$. Будем решать это уравнение относительно t:

$$t = \frac{-(x-1) \pm \sqrt{(x-1)^2 + 4(6-2x)}}{2} = \frac{-(x-1) \pm (x-5)}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}t_1 = -2\\ t_2 = 3 - x\end{array}\right..$$

Тем самым, приходим к совокупности $\left[\begin{array}{l}\log_2 x = -2\\ \log_2 x = 3 - x\end{array}\right.$.

Ответ: $x = \frac{1}{4},\ x = 2$.

1.1.6. *Ответ:* $x = 2,\ x = 4$.

1.1.7. Решить уравнение

$$4^x + (x-13)\cdot 2^x - 2x + 22 = 0.$$

Решение. Способ 1. Получим следующие равенства

$4^x + (x-11)\cdot 2^x - 2\cdot 2^x - 2x + 22 = 0$,

$2^x\left(2^x + x - 11\right) - 2\left(2^x + x - 11\right) = 0$,

$\left(2^x - 2\right)\cdot\left(2^x + x - 11\right) = 0$.

Последнее уравнение равносильно совокупности

$\left[\begin{array}{l}2^x = 2\\ 2^x = 11 - x\end{array}\right.$.

Первое уравнение имеет корень $x = 1$. Уравнению $2^x = 11 - x$ удовлетворяет значение $x = 3$. Покажем, что корень $x = 3$ единственный. В самом деле, функция $y = 2^x$ возрастающая на *R*, а функция $y = 11 - x$ – убывающая на *R*. Следовательно, уравнение $2^x = 11 - x$ имеет единственный корень $x = 3$.

Способ 2. Положим $t = 2^x$, тогда получим $t^2 + (x-13)\cdot t - (2x-22) = 0$. Будем решать это уравнение относительно t:

$$t=\frac{-(x-13)\pm\sqrt{(x-13)^2+4(2x-22)}}{2}=\frac{-(x-13)\pm(x-9)}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=2\\t_2=11-x\end{array}\right..$$

Тем самым, приходим к совокупности $\left[\begin{array}{l}2^x=2\\2^x=11-x\end{array}\right.$.

Ответ: $x=1,\ \ x=3$.

1.1.8. *Ответ:* $x=0,\ \ x=1$.

1.1.9. Решить уравнение

$$\sin\frac{\pi x}{2}+\sin\frac{5\pi x}{2}+2x=x^2+3.$$

Решение. Приведем уравнение к виду

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\sin\frac{5\pi x}{2}+2x=x^2+3\right)\Leftrightarrow\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\sin\frac{5\pi x}{2}=x^2-2x+3\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\sin\frac{5\pi x}{2}=(x-1)^2+2\right).$$

Заметим, что для любого x выполняются соотношения:

$\sin\frac{\pi x}{2}+\sin\frac{5\pi x}{2}\le 2$ и $(x-1)^2+2\ge 2$.

Следовательно, решения уравнения должны удовлетворять системе:

$$\begin{cases}(x-1)^2+2=2\\ \sin\frac{\pi x}{2}+\sin\frac{5\pi x}{2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ \sin\frac{\pi x}{2}=1\\ \sin\frac{5\pi x}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ \sin\frac{\pi}{2}=1\\ \sin\frac{5\pi}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow(x=1).$$

Легко проверить подстановкой в исходное уравнение, что *x=1* является его решением.

Ответ: x=1.

1.1.10. *Ответ: x=1.*

1.1.11. Решить уравнение

$$2^{\cos^2 2x}=\frac{\sin 3x-\cos 3x}{\sqrt{2}}.$$

Решение. Преобразуем правую часть уравнения

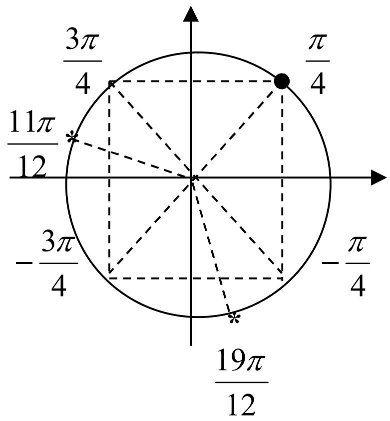
$$\frac{\sin 3x-\cos 3x}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x=\sin 3x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos 3x=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Следовательно, $2^{\cos^2 2x}=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$. Так как $0\le\cos^2 2x\le 1$, то $2^{\cos^2 2x}\ge 1$ при любых x. С другой стороны, $\left|\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\le 1$. Следовательно, решения уравнения должны удовлетворять системе:

$$\begin{cases} 2^{\cos^2 2x} = 1 \\ \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2}, \ m \in Z \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi n}{3}, \ n \in Z \end{cases} \qquad (*)$$

Найдем значения x, удовлетворяющие и первому и второму уравнениям системы. Тогда для некоторых целых значений m и n должно выполняться условие $\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi n}{3}\right) \Rightarrow (3m = 4n)$. Поэтому n делится на 3, т. е. $n=3k$, $(k \in Z)$ и $m=4k$. Следовательно, $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in Z$. Легко проверить подстановкой в исходное уравнение, что $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in Z$ является решением.

Решим систему (*) геометрически. Для этого, решения первого уравнения системы (*) на единичной окружности изобразим точками, а решения второго уравнения – звездочками.



Из рисунка видно, что $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in Z$.

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in Z\right\}$.

1.1.12. *Ответ:* $\left\{\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in Z\right\}$.

1.1.13. Решить уравнение

$$\sqrt{x - 3 - 2\sqrt{x-4}} - \sqrt{x + 5 - 6\sqrt{x-4}} = 2.$$

Решение. Введем новую переменную $y = \sqrt{x-4} \ge 0$, тогда $x = y^2 + 4$. Уравнение запишется в виде

$$\left(\sqrt{y^2 + 4 - 3 - 2y} - \sqrt{y^2 + 4 + 5 - 6y} = 2\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{y^2 - 2y + 1} - \sqrt{y^2 - 6y + 9} = 2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{(y-1)^2}-\sqrt{(y-3)^2}=2\right)\Leftrightarrow\left(|y-1|^2-|y-3|^2=2\right).$$

Решаем уравнение методом интервалов:

1). $\begin{cases}0\le y\le 1\\ -(y-1)+(y-3)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le y\le 1\\ -2=2\end{cases}\Rightarrow\varnothing.$

2). $\begin{cases}1< y\le 3\\ (y-1)+(y-3)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1< y\le 3\\ 2y=6\end{cases}\Rightarrow(y=3).$

3). $\begin{cases}y>3\\ (y-1)-(y-3)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y>3\\ 2=2\end{cases}\Rightarrow(y>3).$

Следовательно, $\left(y=\sqrt{x-4}\ge 3\right)\Rightarrow(x-4\ge 9)\Leftrightarrow(x\ge 13)$.

Ответ: $x\in[13;\ +\infty)$.

1.1.14. *Ответ:* $x\in[26;\ +\infty)$.

1.1.15. Решить уравнение

$$\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{4x^2-4x+1}.$$

Решение. Запишем уравнение в виде:

$$\left(\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{4x^2-4x+1}\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{(2x-1)^2}\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt{1-4x}+2=|2x-1|\right).$$

Тогда

$$\begin{cases}2x-1\ge 0\\ \sqrt{1-4x}+2=2x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1\ge 0\\ \sqrt{1-4x}=2x-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1\ge 0\\ 2x-3\ge 0\\ 1-4x=4x^2-12x+9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3\ge 0\\ 4x^2-8x+8=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{3}{2}\\ x^2-2x+2=0\end{cases}\Rightarrow(\textit{нет решений}).$$

$$\begin{cases}2x-1<0\\ \sqrt{1-4x}+2=-(2x-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1<0\\ \sqrt{1-4x}=-1-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1<0\\ -1-2x\ge 0\\ 1-4x=4x^2+4x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\dfrac{1}{2}\\ x\le-\dfrac{1}{2}\\ 4x^2+8x=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le-\dfrac{1}{2}\\ x(x+2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le-\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow(x=-2).$$

Ответ: x=-2.

1.1.16. *Ответ: x=-1.*

1.1.17. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1.$$

Решение. Способ 1. Запишем уравнение в виде $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$ и возведем в куб обе части уравнения:

$$\left(\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^3=\left(1-\sqrt{x-1}\right)^3\right)\Leftrightarrow\left(2-x=1-3\sqrt{x-1}+3(x-1)-(x-1)\sqrt{x-1}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}\cdot(x+2)=4(x-1)\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}\cdot\left(x+2-4\sqrt{x-1}\right)=0\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\x+2-4\sqrt{x-1}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x+2=4\sqrt{x-1}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\\begin{cases}x+2\geq 0\\x^2+4x+4=16x-16\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\\begin{cases}x\geq -2\\x^2-12x+20=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\\begin{cases}x\geq -2\\(x-2)(x-10)=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=10\end{array}\right..$$

Способ 2. Пусть

$$\begin{cases}\sqrt[3]{2-x}=a\\\sqrt{x-1}=b\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2-x=a^3\\x-1=b^2\end{cases}\Rightarrow\left(a^3+b^2=1\right).$$

Тогда, учитывая, что $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$, получим следующую систему:

$$\begin{cases}a^3+b^2=1\\a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^3+(1-a)^2=1\\b=1-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^3+a^2-2a=0\\b=1-a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\left(a^2+a-2\right)=0\\b=1-a\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a(a-1)(a+2)=0\\b=1-a\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}\\\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}\\\begin{cases}a=-2\\b=3\end{cases}\end{array}\right..$$

Учитывая, что решения исходного уравнения удовлетворяют системе $\begin{cases}\sqrt[3]{2-x}=a\\\sqrt{x-1}=b\end{cases}$, получим: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=10$.

Ответ: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=10$.

1.1.18. *Ответ: $x_1=-15$, $x_2=12$, $x_3=76$.*

1.1.19. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1.$$

Решение. Произведем замену $x-16=y^3$. Тогда

$$\left(\sqrt[3]{y^3+61}=1+y\right)\Leftrightarrow\left(y^3+61=(y+1)^3\right)\Leftrightarrow\left(y^3+61=y^3+3y^2+3y+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(3y^2+3y-60=0\right)\Leftrightarrow\left(y^2+y-20=0\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-5\\y=4\end{array}\right..$$

Учитывая, что $x-16=y^3$, имеем $x=80$ или $x=-109$.

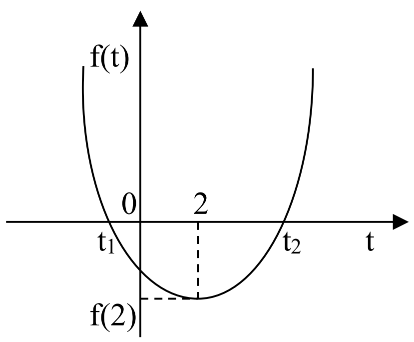
Ответ: x=80, x=-109.
1.1.20. *Ответ: x=1.*
1.1.21. При каких значениях параметра p найдутся такие значения x, что числа

$$5^{1+x}+5^{1-x}; \quad \frac{p}{2}; \quad 25^{x}+25^{-x},$$

взятые в указанном порядке, составляют арифметическую прогрессию?
Решение. Способ 1. Обозначим $t=5^{x}+5^{-x}$. Тогда $25^{x}+25^{-x}=5^{2x}+5^{-2x}=\left(5^{x}+5^{-x}\right)^{2}-2=t^{2}-2$. А так как заданные числа должны составлять арифметическую прогрессию, то $\frac{p}{2}=\frac{t^{2}+5t-2}{2}$, т.е.

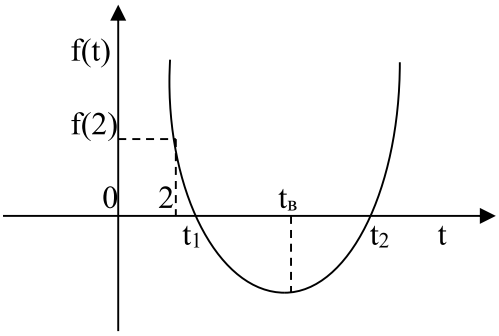
$$t^{2}+5t-p-2=0 \qquad (*)$$

откуда $p=t^{2}+5t-2$.
Замечая теперь, что при любом x значение $t\geq 2$, находим, что $p\geq 12$. С другой стороны, дискриминант уравнения (*) должен быть неотрицательным, т.е. $D=25+4\cdot(p+2)\geq 0$.
Отсюда находим, что $p\geq -\frac{33}{4}$. Учитывая тогда предыдущее неравенство $p\geq 12$, окончательно получаем $p\geq 12$.
Способ 2. Получив (*), обозначим $f(t)=t^{2}+5t-p-2$. Так как $t\geq 2$, то задачу можно сформулировать так: найти значения параметра *p*, при каждом из которых уравнение (*) имеет хотя бы одно решение на множестве $t\geq 2$.
Заметим, что при $t=2$ из (*) следует $p=12$.
Случай 1. Только один из корней t_1 и t_2 уравнения (*) лежит на промежутке $(2;+\infty)$, или, что то же, корни этого уравнения лежат по разные стороны от числа 2. Тогда



$$\begin{cases} D>0 \\ f(2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25+4(p+2)>0 \\ -p+12<0 \end{cases} \Leftrightarrow (p>12).$$

Случай 2. Оба корня t_1 и t_2 уравнения (*) принадлежат промежутку $(2;+\infty)$. Тогда



$$\begin{cases} D > 0 \\ t_в > 2 \\ f(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 + 4(p+2) > 0 \\ -\dfrac{5}{2} > 2 \\ -p + 12 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (p \in \{\varnothing\}).$$

Ответ: $p \ge 12$.

1.1.22. *Ответ:* $p \ge 5$.

1.1.23. Решить уравнение

$$\frac{4}{3} \cdot \log_3^2 (5x-6)^3 - 2 \cdot \log_3 (5x-6)^3 \cdot \log_3 x^6 = -24 \cdot \log_3^2 \frac{1}{x}.$$

Решение. Используя свойство логарифма степени $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$, преобразуем уравнение к виду

$12 \cdot \log_3^2 (5x-6) - 36 \cdot \log_3 (5x-6) \cdot \log_3 x + 24 \cdot \log_3^2 x = 0$.

Обозначим $\log_3 (5x-6) = a$ и $\log_3 x = b$. Тогда $a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно a, получим $a = 2b$ и $a = b$.

Следовательно, исходное уравнение равносильно системе

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 (5x-6) = 2 \cdot \log_3 x \\ \log_3 (5x-6) = \log_3 x \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 6 > 0 \\ \left[\begin{array}{l} 5x - 6 = x^2 \\ 5x - 6 = x \end{array}\right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \\ x = 1{,}5 \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 1{,}5$; $x = 2$; $x = 3$.

1.1.24. *Ответ:* $x = 3$, $x = 2{,}25$.

1.1.25. Решить уравнение

$$\frac{x}{18} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x 12}.$$

Решение. Используя формулу перехода к новому основанию, формулы логарифма степени, частного и произведения, получим:

$$\left(\frac{x}{18} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x 12}\right) \Leftrightarrow \left(\log_2 x - \log_2 18 = \log_x 12 \cdot (\log_2 2 - \log_2 3)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_2 x - 1 - 2\log_2 3 = \frac{\log_2 12}{\log_2 x} \cdot (1 - \log_2 3)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2^2 x - (2\log_2 3 + 1) \cdot \log_2 x + (2 + \log_2 3) \cdot (\log_2 3 - 1) = 0 \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2^2 x - (2\log_2 3 + 1)\cdot \log_2 x + \log_2^2 3 + \log_2 3 - 2 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

Введем обозначения $y = \log_2 x$ и $a = \log_2 3$. Тогда уравнение примет вид $y^2 - (2a+1)y + a^2 + a - 2 = 0$. Решая это уравнение, как квадратное относительно y, получим:

$$\left(y^2 - (2a+1)y + a^2 + a - 2 = 0\right) \Leftrightarrow \left(y = \frac{2a+1 \pm \sqrt{(2a+1)^2 - 4(a^2 + a - 2)}}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(y = \frac{2a+1 \pm 3}{2} \right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = a - 1 \\ y = a + 2 \end{array} \right..$$

Тогда

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_2 x = \log_2 3 - 1 = \log_2 \frac{3}{2} \\ \log_2 x = \log_2 3 + 2 = \log_2 12 \end{array} \right. \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1{,}5 \\ x = 12 \end{array} \right. \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1{,}5 \\ x = 12 \end{array} \right..$$

Ответ: $x = 1{,}5$, $x = 12$.

1.1.26. *Ответ:* $x = 6$, $x = \frac{2}{27}$.

1.1.27. Решить уравнение

$$\left| -1 + \cos\left(\pi\sqrt[3]{x}\right) \right| + \left| x^2 - 16x + 55 \right| = 16x - x^2 + \cos\left(\pi\sqrt[3]{x}\right) - 56.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$\left| x^2 - 16x + 55 \right| + \left(x^2 - 16x + 55\right) + \left| -1 + \cos\left(\pi\sqrt[3]{x}\right) \right| - \cos\left(\pi\sqrt[3]{x}\right) + 1 = 0.$$

Так как $1 - \cos\left(\pi\sqrt[3]{x}\right) \le 0$, то уравнение примет вид

$$\left| x^2 - 16x + 55 \right| + \left(x^2 - 16x + 55\right) - 2\cos\left(\pi\sqrt[3]{x}\right) + 2 = 0.$$

Рассмотрим случаи:

1). $\begin{cases} x^2 - 16x + 55 \ge 0 \\ 2\left(x^2 - 16x + 55\right) - 2\cos\left(\pi\sqrt[3]{x}\right) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16x + 55 \ge 0 \\ x^2 - 16x + 55 = \cos\left(\pi\sqrt[3]{x}\right) - 1 \end{cases}.$

Откуда

$$\begin{cases} x^2 - 16x + 55 \ge 0 \\ x^2 - 16x + 55 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x^2 - 16x + 55 = 0\right) \Leftrightarrow \left((x-5)(x-11) = 0\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = 11 \end{array} \right..$$

Учитывая, что $\cos\left(\pi\sqrt[3]{5}\right) - 1 \neq 0$ и $\cos\left(\pi\sqrt[3]{11}\right) - 1 \neq 0$, получаем, что найденные значения не являются корнями исходного уравнения.

2). $\begin{cases} x^2 - 16x + 55 < 0 \\ -2\cos\left(\pi\sqrt[3]{x}\right) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16x + 55 < 0 \\ \cos\left(\pi\sqrt[3]{x}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(x-11) < 0 \\ \pi\sqrt[3]{x} = 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 < x < 11 \\ x = (2n)^3,\ n \in Z \end{cases}.$

Откуда $\left(5 < 8n^3 < 11,\ n \in Z\right) \Leftrightarrow (n = 1) \Rightarrow \left(x = 8n^2 = 8\right)$.

Проверкой убеждаемся, что x=8 – корень уравнения.

Ответ: $x = 8$.

1.1.28. Найти все значения параметра p, при каждом из которых уравнение

$$(x-p)^2\cdot\left(p\cdot(x-p)^2-p-1\right)=-1$$

имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

Решение. Имеем $p\cdot(x-p)^4-(p+1)\cdot(x-p)^2+1=0$.

Если $p=0$, уравнение примет вид $-x^2=-1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x_1=1>0$, $x_2=-1<0$. То есть, $p=0$ не удовлетворяет условию задачи.

Пусть $p\neq 0$. Обозначим $(x-p)^2=y$, тогда $py^2-(p+1)\cdot y+1=0$. Найдём дискриминант: $D=(p+1)^2-4p=(p-1)^2$.

1). Если $p=1$, то $y^2-2y+1=0 \Rightarrow y=1$, или $(x-1)^2=1 \Rightarrow x-1=1$, $x_1=1$ или $x-1=-1 \Rightarrow x_2=0$. В этом случае имеется один положительный корень, и нет отрицательных корней.

2). Если $p\neq 1$, и $p\neq 0$, то $y_1=\dfrac{p+1-(p-1)}{2p}=\dfrac{1}{p}$; $y_2=\dfrac{p+1+(p-1)}{2p}=1$. Отсюда

$(x-p)^2=\dfrac{1}{p}$ и $(x-p)^2=1$.

Если $p<0$, то остаётся $(x-p)^2=1 \Rightarrow x-p=\pm 1$; $x_1=p+1$, $x_2=p-1<0$. По крайней мере, один из двух корней отрицателен.

Если $p>0$, то имеем четыре корня: $x_1=p+1$, $x_2=p-1$, $x_3=p+\dfrac{1}{\sqrt{p}}$, $x_4=p-\dfrac{1}{\sqrt{p}}$. Здесь, если $0<p<1$, то $x_2<0$ и $x_4<0$, следовательно, положительных корней будет не больше, чем отрицательных. Если же $p>1$, то все четыре корня будут положительными.

Ответ: $p\geq 1$.

1.1.29. *Ответ:* $p\leq -1$.

1.1.30. Найти все целые значения параметра *p*, при каждом из которых уравнение $2-2\cos 2x=3p+4\sin x$ имеет решения.

Решение. Решим уравнение $\left(2-2\left(1-2\sin^2 x\right)=3p+4\sin x\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(4\sin^2 x-4\sin x-3p=0\right)\Leftrightarrow\left(\sin x=\frac{4\pm\sqrt{16+48p}}{8}\right)\Leftrightarrow\left(\sin x=\frac{1\pm\sqrt{1+3p}}{2}\right).$$

Тогда исходное уравнение имеет решения, если параметр *p* удовлетворяет совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} -1\leq\dfrac{1-\sqrt{1+3p}}{2}\leq 1\\ -1\leq\dfrac{1+\sqrt{1+3p}}{2}\leq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} -2\leq 1-\sqrt{1+3p}\leq 2\\ -2\leq 1+\sqrt{1+3p}\leq 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} -3\leq -\sqrt{1+3p}\leq 1\\ -3\leq\sqrt{1+3p}\leq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le \sqrt{1+3p} \le 3 \\ -3 \le \sqrt{1+3p} \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le 1+3p \le 9 \\ 0 \le 1+3p \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le 3p \le 8 \\ -1 \le 3p \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{3} \le p \le \frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} \le p \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3} \le p \le \frac{8}{3}\right).$$

Поэтому целыми значениями параметра *p*, при каждом из которых уравнение имеет решения, будут p=0, p=1, p=2.

Ответ: p=0, p=1, p=2.

1.1.31. Найти все целые значения параметра *p*, при каждом из которых уравнение $5-4\sin^2 x-8\cos^2\frac{x}{2}=3p$ имеет решения.

Решение. Способ 1. Решим уравнение

$$\left(5-4\left(1-\cos^2 x\right)-8\cdot\frac{\cos x+1}{2}=3p\right) \Leftrightarrow \left(4\cos^2 x-4\cos x-3-3p=0\right) \Leftrightarrow .$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x=\frac{4\pm\sqrt{64+48p}}{8}\right) \Leftrightarrow \left(\cos x=\frac{1\pm\sqrt{4+3p}}{2}\right).$$

Тогда исходное уравнение имеет решения, если параметр *p* удовлетворяет совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} -1 \le \frac{1-\sqrt{4+3p}}{2} \le 1 \\ -1 \le \frac{1+\sqrt{4+3p}}{2} \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \le 1-\sqrt{4+3p} \le 2 \\ -2 \le 1+\sqrt{4+3p} \le 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \le -\sqrt{4+3p} \le 1 \\ -3 \le \sqrt{4+3p} \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le \sqrt{4+3p} \le 3 \\ -3 \le \sqrt{4+3p} \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le 4+3p \le 9 \\ 0 \le 4+3p \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 \le 3p \le 5 \\ -4 \le 3p \le -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{4}{3} \le p \le \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \le p \le -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(-\frac{4}{3} \le p \le \frac{5}{3}\right).$$

Поэтому целыми значениями параметра *p*, при каждом из которых уравнение имеет решения, будут *p=-1, p=0, p=1.*

Способ 2.

Имеем $5-4\left(1-\cos^2 x\right)-8\cdot\frac{\cos x+1}{2}=3p$, откуда $4\cos^2 x-4\cos x-3-3p=0$.

Полагая в этом уравнении $\cos x=t,\ (-1\le t\le 1)$, получим

$$f(t)=4t^2-4t-3-3p=0. \qquad (*)$$

Теперь задачу можно сформулировать так: найти все значения параметра *p*, при каждом из которых уравнение (*) имеет решения на отрезке [-1;1].

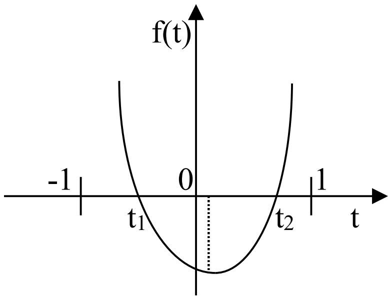
Заметим, что из (*) следует: значениям *t=-1*, *t=1* отвечают значения $p=\frac{5}{3}$, $p=-1$ соответственно.

Случай 1. Один и только один из корней t_1 и t_2 уравнения (*) принадлежит интервалу (-1; 1). Тогда *f(-1)f(1)<0* или

$((5-3p)(-3-3p)<0) \Leftrightarrow (3(3p-5)(p+1)<0)$, откуда $p \in \left(-1;\frac{5}{3}\right)$.

На промежутке $\left(-1;\frac{5}{3}\right)$ целыми значениями параметра p будут $p=0$, $p=1$.

Случай 2. Оба корня t_1 и t_2 уравнения (*) принадлежат интервалу (-1; 1). Тогда



$$\begin{cases} D>0 \\ -1<t_в>1 \\ f(-1)>0 \\ f(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+3p>0 \\ -1<\frac{1}{2}<1 \\ 5-3p>0 \\ -3-3p>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p>-\frac{4}{3} \\ p<\frac{5}{3} \\ p<-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left(-\frac{4}{3}<p<1\right).$$

Но на интервале $\left(-\frac{4}{3};-1\right)$ нет целых значений параметра p.

Ответ: p=-1, p=0, p=1.

1.1.32. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x-5}+x\sqrt{x+1}+5=4\sqrt{x+1}+2\sqrt{2x-5}+2x.$$

Решение. Способ 1. Преобразуем уравнение:

$$\left(\sqrt{2x^2-3x-5}+x\sqrt{x+1}+5=4\sqrt{x+1}+2\sqrt{2x-5}+2x\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{(2x-5)(x+1)}-(2x-5)+x\sqrt{x+1}-6\sqrt{x+1}+2\sqrt{x+1}-2\sqrt{2x-5}=0\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x-5}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}\right)+(x-6)\sqrt{x+1}+2\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}\right)=0\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}\right)\left(\sqrt{2x-5}+2\right)+(x-6)\sqrt{x+1}=0\right).$$

Заметим, что имеет место соотношение: $\left(x-6=\left(\sqrt{2x-5}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2\right)$. Тогда

$$\left(\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}\right)\left(\sqrt{2x-5}+2\right)-\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}\right)\sqrt{x+1}=0\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}\right)\left(\sqrt{2x-5}+2-\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}\right)\sqrt{x+1}\right)=0\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}\right)\left(\sqrt{2x-5}-x+1-\sqrt{2x-5}\cdot\sqrt{x+1}\right)=0\right).$$

Откуда $\left(\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-5}\right)\Leftrightarrow(x+1=2x-5)\Leftrightarrow(x=6)$.

Докажем, что других корней нет. Действительно:

$$\sqrt{2x-5}-x+1-\sqrt{2x-5}\cdot\sqrt{x+1}=\frac{-2x+5+2\sqrt{2x-5}-1}{2}-1-\sqrt{2x-5}\cdot\sqrt{x+1}=$$
$$=-\frac{\left(\sqrt{2x-5}-1\right)^2}{2}-1-\sqrt{2x-5}\cdot\sqrt{x+1}<0.$$

Способ 2. Преобразуем уравнение:

$$\left(\sqrt{2x^2-3x-5}+x\sqrt{x+1}+5=4\sqrt{x+1}+2\sqrt{2x-5}+2x\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{(2x-5)(x+1)}-2\sqrt{2x-5}+x\sqrt{x+1}-2x-4\sqrt{x+1}+8-3=0\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{(2x-5)}\left(\sqrt{x+1}-2\right)+x\left(\sqrt{x+1}-2\right)-4\left(\sqrt{x+1}-2\right)=3\right)\Leftrightarrow\left(\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{2x-5}+x-4\right)=3\right).$$

Рассмотрим функции: $f(x)=\sqrt{x+1}-2,\ g(x)=\sqrt{2x-5}+x-4,\ h(x)=3.$ Заметим, что на ОДЗ: $\begin{cases} x+1\ge 0 \\ 2x-5\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x\ge \frac{5}{2}\right),$ функции f(x) и g(x) являются возрастающими. Действительно: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}>0,\ g'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-5}}+1>0$ на интервале (2,5;+∞). Так как f(x), g(x)>0 на (3;+∞), и f(x), g(x)<0 на (2,5;3), то f(x)g(x) – возрастает на (3;+∞) и убывает на (2,5;3). Учитывая, что $f(2{,}5)g(2{,}5)=\left(\sqrt{3{,}5}-2\right)\left(-1{,}5\right)=3-1{,}5\sqrt{3{,}5}<3$, то полученное уравнение может иметь на ОДЗ не более одного решения. Подбором находим его: x=6.

Ответ: x=6.

1.1.33. *Ответ: x=7.*

1.1.34. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}\,.$$

Решение. Способ 1. Выполним преобразования:

$$\left(\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2+2x+3}=\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{x^2-3x-2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{aligned} &\frac{\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2+2x+3}\right)\left(\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}\right)}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}= \\ &=\frac{\left(\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{x^2-3x-2}\right)\left(\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}\right)}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}} \end{aligned}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{-2x-4}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}=\frac{2x+4}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left((2x+4)\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+2x+3}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-3x-2}}\right)=0\right)\Leftrightarrow(x=-2).$$

Способ 2. Решим уравнение:

$$\left(\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2-x+2}=\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-3x-2}\right).$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\begin{aligned} &2x^2-1-2\sqrt{\left(2x^2-1\right)\left(x^2-x+2\right)}+x^2-x+2= \\ &=2x^2+2x+3-2\sqrt{\left(2x^2+2x+3\right)\left(x^2-3x-2\right)}+x^2-3x-2 \end{aligned}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{\left(2x^2-1\right)\left(x^2-x+2\right)}=\sqrt{\left(2x^2+2x+3\right)\left(x^2-3x-2\right)}\right).$$

Корни последнего уравнения будут являться и корнями уравнения:

$$\left(\left(2x^2-1\right)\left(x^2-x+2\right)=\left(2x^2+2x+3\right)\left(x^2-3x-2\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^4-2x^3+4x^2-x^2+x-2=2x^4-6x^3-4x^2+2x^3-6x^2-4x+3x^2-9x-6\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^3+10x^2+14x+4=0\right)\Leftrightarrow\left(x^3+5x^2+7x+2=0\right)\Leftrightarrow\left(x^3+2x^2+3x^2+6x+x+2=0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((x+2)(x^2+3x+1)=0\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Заметим, что если $x^2+3x+1=0$, то исходное уравнение принимает вид:

$$\left(\begin{array}{l} \sqrt{2(x^2+3x+1)-6x-3}+\sqrt{(x^2+3x+1)-6x-3}= \\ =\sqrt{2(x^2+3x+1)-4x+1}+\sqrt{(x^2+3x+1)-4x+1} \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{-6x-3}+\sqrt{-6x-3}=\sqrt{-4x+1}+\sqrt{-4x+1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{-6x-3}=\sqrt{-4x+1}\right) \Leftrightarrow (-6x-4=-4x+1) \Leftrightarrow (x=-2).$$

Таким образом, $\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ не являются корнями исходного уравнения.

Легко проверить, что x=-2 – корень уравнения.

Ответ: x=-2.

1.1.35. *Ответ: x=2.*

1.1.36. Решить уравнение $x^2+\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{3x^2-6x+7}=2+2x$.

Решение. Способ 1. Преобразуем данное уравнение:

$$\left(x^2+\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{3x^2-6x+7}=2+2x\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{3x^2-6x+7}=2+2x-x^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-1)^2+1}+\sqrt{3(x-1)^2+4}=3-(x-1)^2\right).$$

Учитывая, что $\sqrt{(x-1)^2+1}\ge 1$, $\sqrt{3(x-1)^2+4}\ge 2$, получим следующую оценку: $\sqrt{(x-1)^2+1}+\sqrt{3(x-1)^2+4}\ge 3$.

Так как $3-(x-1)^2\le 3$, то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+1}+\sqrt{3(x-1)^2+4}=3 \\ 3-(x-1)^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+1}+\sqrt{3(x-1)^2+4}=3 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow (x=1).$$

Способ 2. Пусть $t=(x-1)^2+1$. Тогда

$$\left(x^2+\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{3x^2-6x+7}=2+2x\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{3x^2-6x+7}=2+2x-x^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-1)^2+1}+\sqrt{3(x-1)^2+4}=3-(x-1)^2\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{t}+\sqrt{3t+1}=4-t\right).$$

Функция $f(t)=\sqrt{t}+\sqrt{3t+1}$ - возрастающая, так как $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}+\dfrac{3}{2\sqrt{3t+1}}>0$.

G(t)=4-t – убывающая функция. Следовательно, уравнение $\sqrt{t}+\sqrt{3t+1}=4-t$ не может иметь более одного решения. Легко подобрать это решение: t=1. Поэтому единственно возможным решением исходного уравнения может быть только x=1. Проверкой убеждаемся в этом.

Ответ: x=1.

1.1.37. *Ответ: x=2.*

1.1.38. Решить уравнение $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6$.

Решение. Способ 1. Преобразуем данное уравнение:

$$\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=(x-2)^2+2\right).$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$. Найдем наибольшее и наименьшее значение функции на D(f)=[1;3]:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}=\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{3-x}}\Rightarrow\begin{cases}3-x=x-1\\1<x<3\end{cases}\Leftrightarrow(x=2).$$

Вычислим значения функции f(x) в точках: 1; 2; 3: f(1)=f(3)=$\sqrt{2}$; f(2)=2. Следовательно $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\le 2$. Так как $(x-2)^2+2\ge 2$, то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=2\\(x-2)^2+2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=2\\x=2\end{cases}\Leftrightarrow(x=2).$$

Способ 2.

$$\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6\right)\Leftrightarrow\left(x^2-4x+4+2-\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}=0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-4x+4+\frac{x-1-2\sqrt{x-1}+1+3-x-2\sqrt{3-x}+1}{2}=0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left((x-2)^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{3-x}-1\right)^2=0\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=0\\\sqrt{x-1}-1=0\\\sqrt{3-x}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow(x=2)$$

Ответ: x=2.

1.1.39. *Ответ: x=3.*

1.1.40. Найти все значения параметра *p*, при каждом из которых уравнение $p\cdot 9^x-4\cdot 3^x+1=0$ имеет единственное решение.

Решение. Способ 1. 1). Рассмотрим *p=0*. Тогда получаем уравнение $3^x=\frac{1}{4}$, которое имеет единственное решение $x=\log_3\frac{1}{4}$.

2). Пусть p≠0. Тогда данное уравнение будет квадратным относительно некоторой переменной t=3^x: pt^2-4t+1=0.

Найдем, при каких значениях параметра уравнение может иметь решения:

$$\left(\frac{D}{4}=4-p\right)\Rightarrow(4-p\ge 0)\Leftrightarrow(p\le 4).$$

Исходное уравнение будет иметь единственное решение при D=0, т.е. p=4 $\left(x=\log_3\frac{1}{2}\right)$, и в случае, когда корни квадратного уравнения будут разных знаков, т.к. $3^x>0$ при ∀x. Тогда, применяя теорему Виета, получаем $x_1x_2=\frac{1}{p}<0$, т.е. p<0.

Способ 2. Решим уравнение:

$$\left(p\cdot 9^x-4\cdot 3^x+1=0\right)\Leftrightarrow\left(p=\frac{4\cdot 3^x-1}{3^{2x}}\right)\Leftrightarrow\left(4\cdot\frac{1}{3^x}-\frac{1}{3^{2x}}=p\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3^{2x}}-4\cdot\frac{1}{3^x}+4=4-p\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(\frac{1}{3^x}-2\right)^2=4-p\right)\Leftrightarrow\left(\left|\frac{1}{3^x}-2\right|=\sqrt{4-p}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{1}{3^x}=2+\sqrt{4-p}\\ \frac{1}{3^x}=2-\sqrt{4-p}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=\frac{1}{2+\sqrt{4-p}}\\ 3^x=\frac{1}{2-\sqrt{4-p}}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\log_3\frac{1}{2+\sqrt{4-p}}\\ x=\log_3\frac{1}{2-\sqrt{4-p}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\log_3\left(2+\sqrt{4-p}\right)\\ x=-\log_3\left(2-\sqrt{4-p}\right)\end{array}\right..$$

Тогда исходное уравнение имеет единственное решение если:

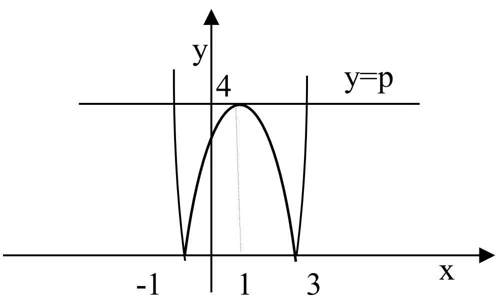
$$\begin{cases}2+\sqrt{4-p}>0\\ \left[\begin{array}{l}2+\sqrt{4-p}=2-\sqrt{4-p}\\ 2-\sqrt{4-p}\le 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{4-p}>-2\\ \left[\begin{array}{l}2\sqrt{4-p}=0\\ \sqrt{4-p}\ge 2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-p\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}4-p=0\\ 4-p\ge 4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p\le 4\\ \left[\begin{array}{l}p=4\\ p\le 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}p=4\\ p\le 0.\end{array}\right.$$

Ответ: (-∞;0]∪{4}.

1.1.41. *Ответ: (-∞;0)∪{1}.*

1.1.42. Определить, при каких значениях параметра p уравнение $\left|x^2-2x-3\right|=p$ имеет ровно три различных действительных корня.

Решение. Способ 1.



Рассмотрим функции $y=\left|x^2-2x-3\right|$ и $y=p$.

Построим графики этих функций. Тогда, нетрудно видеть, что исходное уравнение будет иметь ровно три различных действительных корня, когда прямая $y=p$ будет иметь три точки пересечения с графиком функции $y=\left|x^2-2x-3\right|$, т. е. при $x=1$. Тогда $p=4$.

Способ 2. Решим уравнение:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}p\ge 0\\ x^2-2x-3\ge 0\\ x^2-2x-3-p=0\end{cases}\\ \begin{cases}p\ge 0\\ x^2-2x-3<0\\ x^2-2x-3+p=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}p\ge 0\\ 4+p\ge 0\\ x=1\pm\sqrt{4+p}\end{cases}\\ \begin{cases}p>0\\ 4-p\ge 0\\ x=1\pm\sqrt{4-p}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}p\ge 0\\ x=1\pm\sqrt{4+p}\end{cases}\\ \begin{cases}0<p\le 4\\ x=1\pm\sqrt{4-p}\end{cases}\end{array}\right..$$

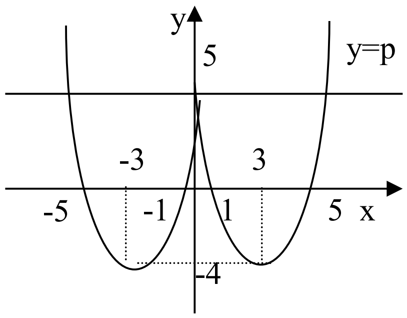
Следовательно, первая система при *p≥0* всегда имеет два решения. Вторая система при *0<p<4* имеет два решения, а при *p=4* одно решение. Таким образом, исходное уравнение имеет 4 решения, если $p\in(0;4)$; 3 решения при *p=4*; 2 решения, если $p\in\{0\}\cup(4;+\infty)$, и не имеет решений при *p<0*.

Ответ: p=4.

1.1.43. *Ответ: p=0,25.*

1.1.44. Определить, при каких значениях параметра *p* уравнение $x^2+5=6|x|+p$ имеет ровно три различных действительных корня.

Решение.



Способ 1. Рассмотрим функции

$$y=x^2-6|x|+5=\begin{cases}x^2-6x+5, & \text{если } x\ge 0\\ x^2+6x+5, & \text{если } x<0\end{cases}$$ и *y=p*.

Построив графики этих функций, нетрудно видеть, что исходное уравнение будет иметь ровно три различных действительных корня, когда прямая *y=p* будет иметь три точки пересечения с графиком функции $y=x^2-6|x|+5$, т. е. при *x=0*. Тогда *p=5*.

Способ 2. $\left(x^2-6|x|+5-p=0\right)\Leftrightarrow\left(|x|^2-6|x|+5-p=0\right)\Leftrightarrow\left(|x|=3\pm\sqrt{4+p}\right)$, если *p≥-4*.

Уравнение будет иметь 3 корня, если $\left(3-\sqrt{4+p}=0\right)\Leftrightarrow(4+p=9)\Leftrightarrow(p=5)$.

Ответ: p=5.

1.1.45. *Ответ: p=12.*

1.1.46. При каких значениях параметра *p* сумма квадратов корней уравнения $x^2+2px+2p^2+4p+3=0$ является наибольшей?

Решение.

Найдем, при каких значениях параметра *p* уравнение имеет действительные решения:

$$\left(\frac{D}{4}=-p^2-4p-3\right)\Rightarrow(-p^2-4p-3\ge 0)\Leftrightarrow\left((p+3)(p+1)\le 0\right)\Leftrightarrow(-3\le p\le -1).$$

Используя теорему Виета, получим:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-2p)^2-2(2p^2+4p+3)=-2(4p+3)=-8p-6.$$

Так как функция *y(p)=-8p-6* убывает на отрезке [-3;-1], то наибольшее значение суммы квадратов корней достигается при *p=-3*.

Ответ: p=-3.

1.1.47. *Ответ: p=2.*

1.1.48. При каких значениях параметра *p* сумма корней уравнения $x^2+2(p^2-3p)x-6p^3+12p^2+4=0$ является наибольшей?

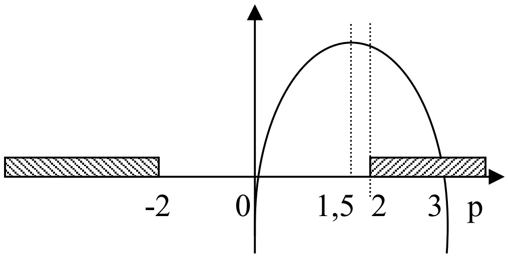
Решение. Найдем, при каких значениях параметра *p* уравнение имеет действительные решения:

$\frac{D}{4}=\left(p^2-3p\right)^2+6p^3-12p^2-4=p^4-3p^2-4$;

$\left(p^4-3p^2-4\geq 0\right)\Leftrightarrow\left(\left(p^2-4\right)\left(p^2+1\right)\geq 0\right)\Leftrightarrow\left(\left(p+2\right)\left(p-2\right)\geq 0\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}p\leq -2\\ p\geq 2\end{array}\right.$.

Используя теорему Виета, получим: $x_1+x_2=-2p(p-3)=-2p^2+6p$.

Из рисунка нетрудно видеть, что наибольшее значение суммы корней достигается при *p=2*.



Ответ: p=2.

1.1.49. *Ответ: p=-3.*

1.1.50. Найти значения параметра *p*, при которых отношение корней уравнения $2x^2+(p-10)x+6=0$ равно 12.

Решение. Найдем корни уравнения $2x^2+(p-10)x+6=0$ при условии, что их отношение равно 12. Учитывая, что по теореме Виета $x_1x_2=3$, получим:

$$\begin{cases}x_1x_2=3\\ \frac{x_1}{x_2}=12\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=6\\ x_2=\frac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x_1=-6\\ x_2=-\frac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right..$$

Откуда, используя то, что по теореме Виета $\frac{p-10}{2}=-(x_1+x_2)$, имеем $\left[\begin{array}{l}p=23\\ p=-3\end{array}\right.$.

Ответ: p=–3; p=23.

1.1.51. *Ответ: p=46,5.*

2.2. Неравенства

1.2.1. Решить неравенство

$$\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\cdot\log_5\left(\frac{x}{5}\right)+\frac{1}{x}\cdot\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right)\le 0.$$

Решение. Решения неравенства должны удовлетворять системе:

$$\begin{cases}x>0\\ x^2-4x+3\ge 0\\ 8x-2x^2-6\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x^2-4x+3\ge 0\\ -2\left(x^2-4x+3\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x^2-4x+3\ge 0\\ x^2-4x+3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x^2-4x+3=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ (x-1)(x-3)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\end{array}\right..$$

Осталось проверить подстановкой, будут ли эти значения решениями исходного неравенства.

Значение *x=1* является решением неравенства, так как $\left(\log_5\left(\frac{1}{5}\right)+1\le 0\right)\Leftrightarrow\left(\log_5\left(\frac{1}{5}\right)\le -1\right)\Leftrightarrow(-1=-1)$, а *x=3* не является решением. Действительно,

$$\left(\log_5\left(\frac{3}{5}\right)+\frac{1}{3}>0\right)\Leftrightarrow\left(\log_5 3-1+\frac{1}{3}>0\right)\Leftrightarrow\left(\log_5 3>\frac{2}{3}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{\ln 3}{\ln 5}>\frac{2}{3}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(3\ln 3>2\ln 5)\Leftrightarrow(\ln 27>\ln 25).$$

Ответ: x=1.

1.2.2. *Ответ: x=3.*

1.2.3. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-7x+10}+9\log_4\left(\frac{x}{8}\right)\ge 2x+\sqrt{14x-20-2x^2}-13.$$

Решение. Решения неравенства должны удовлетворять системе:

$$\begin{cases}x>0\\ x^2-7x+10\ge 0\\ 14x-20-2x^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x^2-7x+10\ge 0\\ -2\left(x^2-7x+10\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x^2-7x+10\ge 0\\ x^2-7x+10\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x^2-7x+10=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ (x-2)(x-5)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=5\end{array}\right..$$

Проверим подстановкой, будут ли эти значения решениями исходного неравенства.

Значение *x=2* является решением неравенства, так как

$\left(9\log_4\left(\frac{2}{8}\right) \ge 4-13\right) \Leftrightarrow \left(9\log_4\left(\frac{1}{4}\right) \le -9\right) \Leftrightarrow (-9=-9)$, а $x=5$ не является решением. Действительно,

$\left(9\log_4\left(\frac{5}{8}\right) < 10-13\right) \Leftrightarrow (9\log_4 5 - 9\log_4 8 < -3) \Leftrightarrow \left(9\log_4 5 - \frac{27}{2} < -3\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\ln 5}{\ln 4} < \frac{7}{6}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (6\ln 5 < 7\ln 4) \Leftrightarrow (\ln 15625 < \ln 16384)$.

Ответ: x=2.

1.2.4. *Ответ: x=4.*

1.2.5. Решить неравенство

$$\cos^2(x+1)\cdot\lg(9-2x-x^2) \ge 1\,.$$

Решение. Так как $0 \le \cos^2(x+1) \le 1$, то решения исходного неравенства должны удовлетворять условию: $\lg(9-2x-x^2) \ge 1$. Тогда

$(9-2x-x^2 \ge 10) \Leftrightarrow (x^2+2x+1 \le 0) \Leftrightarrow ((x+1)^2 \le 0) \Leftrightarrow (x=-1)$.

Легко проверить подстановкой в исходное неравенство, что x=-1 является его решением.

Ответ: x=-1.

1.2.6. *Ответ: x=2.*

1.2.7. Решить неравенство

$$tg\frac{\pi}{x^2+4x+7} \ge \frac{\sqrt{3}}{\sin^2\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right)}\,.$$

Решение. Так как $\sin^2\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right) \ne 0$, то $0 < \sin^2\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right) \le 1$. Поэтому

$\frac{\sqrt{3}}{\sin^2\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right)} \ge \sqrt{3}$.

Учитывая, что $x^2+4x+7=(x+2)^2+3 \ge 3$, получим: $0 < \frac{\pi}{x^2+4x+7} \le \frac{\pi}{3}$. Так как функция $f(y)=tgy$ возрастает на интервале $\left(0;\frac{\pi}{3}\right]$, то $tg\frac{\pi}{x^2+4x+7} \le tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$. Следовательно, решения неравенства должны удовлетворять системе:

$$\begin{cases} tg\frac{\pi}{x^2+4x+7}=\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sin^2\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right)}=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\frac{\pi}{(x+2)^2+3}=\sqrt{3} \\ \sin^2\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{(x+2)^2+3}=\frac{\pi}{3} \\ \sin^2\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ \sin^2\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x=-2)$.

Легко проверить подстановкой в исходное неравенство, что x=-2 является его решением.

Ответ: x=-2.

1.2.8. *Ответ:* $\{x = 4n+1 \mid n \in N\}$.

1.2.9. Решить неравенство

$$\cos x - y^2 \geq \sqrt{y - x^2 - 1}\,.$$

Решение. Так как $\sqrt{y - x^2 - 1} \geq 0$ и $\cos x \leq 1$, то должны выполнятся неравенства:

$\left(\cos x - y^2 \geq \sqrt{y - x^2 - 1}\right) \Rightarrow \left(\cos x - y^2 \geq 0\right) \Rightarrow \left(y^2 \leq \cos x \leq 1\right) \Rightarrow \left(0 \leq y^2 \leq 1\right) \Leftrightarrow \left(-1 \leq y \leq 1\right)$.

Учитывая, что $\left(y - x^2 - 1 \geq 0\right) \Rightarrow \left(y \geq x^2 + 1 \geq 1\right) \Rightarrow \left(y \geq 1\right)$, получим: *y=1*. Тогда исходное неравенство примет вид $\left(\cos x - 1 \geq \sqrt{-x^2}\right) \Rightarrow \left(-x^2 \geq 0\right) \Leftrightarrow \left(x = 0\right)$. Следовательно, исходное неравенство может выполняться только при *x=0* и *y=1*. Проверкой убеждаемся в этом.

Ответ: (0; 1).

1.2.10. *Ответ: (0; 1).*

1.2.11. Решить неравенство

$$1 - tg\frac{\pi x}{4} + \arccos\left(x + \left|\sin y\right|\right) \leq 0\,.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде:

$$\arccos\left(x + \left|\sin y\right|\right) \leq tg\frac{\pi x}{4} - 1$$

Заметим, что $-1 \leq x + \left|\sin y\right| \leq 1$. Тогда $-2 \leq -1 - \left|\sin y\right| \leq x \leq 1 - \left|\sin y\right| \leq 1$, т.е. $-2 \leq x \leq 1$.

Функция $f(x) = tg\frac{\pi x}{4}$ возрастает на интервале $(-2;1]$ $\left(f'(x) = \dfrac{\pi}{4\cos^2\frac{\pi x}{4}} > 0\right)$ и принимает наибольшее значение $\max f(x) = f(1) = tg\frac{\pi}{4} = 1$. Поэтому $tg\frac{\pi x}{4} \leq 1$.

Так как $0 \leq \arccos\left(x + \left|\sin y\right|\right) \leq \pi$, то $\left(tg\frac{\pi x}{4} - 1 \geq 0\right) \Leftrightarrow \left(tg\frac{\pi x}{4} \geq 1\right)$. Следовательно, решения неравенства удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} tg\frac{\pi x}{4} = 1 \\ -2 < x \leq 1 \\ \arccos\left(x + \left|\sin y\right|\right) \leq tg\frac{\pi x}{4} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in Z \\ -2 \leq x \leq 1 \\ \arccos\left(x + \left|\sin y\right|\right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4n + 1, \ n \in Z \\ -2 \leq x \leq 1 \\ x + \left|\sin y\right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x + \left|\sin y\right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \left|\sin y\right| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pi k, \ k \in Z \end{cases}.$$

Проверкой убеждаемся, что $\begin{cases} x = 1 \\ y = \pi k, \ \ k \in Z \end{cases}$ решение неравенства.

Ответ: $(1;\ \pi k),\ k \in Z$.

1.2.12. *Ответ: (0; 1).*

1.2.13. Найти все значения параметра p, при каждом, из которых неравенство

$$\cos x - 2 \cdot \sqrt{x^2 + 9} \le -\frac{x^2 + 9}{p + \cos x} - p$$

имеет единственное решение.

Решение. Перенося, все в левую часть, и приводя, к общему знаменателю, получим:

$$\frac{\left(p + \cos x - \sqrt{x^2 + 9}\right)^2}{p + \cos x} \le 0.$$

Решениями полученного неравенства будут решения уравнения $p + \cos x = \sqrt{x^2 + 9}$ или решения неравенства $p + \cos x < 0$. Последнее неравенство не может иметь единственного решения, ни при каком значении p. Следовательно, чтобы выполнялось условие задачи, необходимо, чтобы неравенство $p + \cos x < 0$ не имело решений, а это будет выполнено, если $p \ge 1$. Кроме того, необходимо, чтобы уравнение $p + \cos x = \sqrt{x^2 + 9}$ имело одно решение.

Заметим, что x входит в уравнение чётным образом, т.е. если x_0 – решение уравнения, то и $(-x_0)$ является решением. Следовательно, для того, чтобы решение было единственно, необходимо, чтобы $x = 0$ было решением. А это выполнено при $p = 2$. Тогда уравнение выглядит так: $2 + \cos x = \sqrt{x^2 + 9}$. Его левая часть не превосходит число 3, а правая – не меньше 3.

Следовательно, решение $x = 0$ – единственное решение уравнения. Вспоминая, что при $p = 2$ неравенство $p + \cos x < 0$ не имеет решений, получаем ответ: $p = 2$.

Ответ: $p = 2$.

1.2.14. *Ответ:* $p = 3$.

1.2.15. Решить неравенство

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \ge \cos(\pi) + \frac{tg(x) + 1}{1 - tg(x)} + \left| tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right| + \left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^{\sin(5x)} + \left(\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)\right)^{\cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Решение. Преобразуем неравенство. Так как

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\quad \cos(\pi) = -1,\ \frac{tg(x) + 1}{1 - tg(x)} = tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right),\ \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right),$

$\cos\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(5x)$, то неравенство примет вид:

$$2\ge tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\left|tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^{\sin(5x)}+\frac{1}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^{\sin(5x)}}.$$

Сумма двух последних слагаемых представляет собой сумму двух взаимно обратных положительных чисел, и потому не меньше двух. С другой стороны $tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\left|tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\ge 0$. Следовательно, неравенство может быть выполнено только в том случае, когда $tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\left|tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|=0$ (т.е. $tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 0$) и $\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^{\sin(5x)}=1$ (т.е. $\sin(5x)=0$). Тогда имеем систему

$$\begin{cases} tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 0 \\ \sin(5x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{3\pi}{4}+\pi n\right] \\ x=\frac{\pi k}{5} \end{cases},\ n,k\in Z.$$

Точки $x=\frac{\pi k}{5}$ принадлежат промежуткам $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{3\pi}{4}+\pi n\right]$ только при $k=2+5l$ и $k=3+5l$. Действительно

$$\left(\frac{\pi}{4}+\pi n<\frac{\pi k}{5}\le\frac{3\pi}{4}+\pi n\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{4}+n<\frac{k}{5}\le\frac{3}{4}+n\right)\Leftrightarrow\left(\frac{5}{4}+5n<k\le\frac{15}{4}+5n\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(1\frac{1}{4}+5n<k\le 3\frac{3}{4}+5n\right)\Leftrightarrow\left(2+5n\le k\le 3+5n\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} k=2+5l \\ k=3+5l \end{array}\right..$$

Таким образом, $x=\frac{2\pi}{5}+\pi l$ и $x=\frac{3\pi}{5}+\pi l$, $l\in Z$.

Ответ: $x=\frac{2\pi}{5}+\pi l$, $x=\frac{3\pi}{5}+\pi l$, $l\in Z$.

1.2.16. Найти наибольшее значение параметра p, при котором имеет решение неравенство

$$p\sqrt{p}\cdot\left(x^2-2x+1\right)+\frac{\sqrt{p}}{x^2-2x+1}\le\sqrt[4]{p^3}\cdot\left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right|.$$

Решение. При $p=0$ неравенство очевидно выполняется. Считая теперь p положительным, разделим обе части неравенства на p. Получим

$$\sqrt{p}\cdot(x-1)^2+\frac{1}{\sqrt{p}\cdot(x-1)^2}\le\frac{1}{\sqrt[4]{p}}\cdot\left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right|.$$

Учитывая, что $a+\frac{1}{a}\geq 2$ для положительных a и $\left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right|\leq 1$ приходим к неравенству

$$2\leq\sqrt{p}\cdot(x-1)^2+\frac{1}{\sqrt{p}\cdot(x-1)^2}\leq\frac{1}{\sqrt[4]{p}}\cdot\left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right|\leq\frac{1}{\sqrt[4]{p}}.$$

Следовательно $2\leq\frac{1}{\sqrt[4]{p}}$. Решая это неравенство, получаем, что $p\leq\frac{1}{16}$.

Наибольшим здесь является $p=\frac{1}{16}$.

Проверим, что при $p=\frac{1}{16}$ исходное неравенство имеет решения. Действительно, при $p=\frac{1}{16}$, получим:

$$\left(\frac{1}{64}(x-1)^2+\frac{1}{4(x-1)^2}\leq\frac{1}{8}\cdot\left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right|\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{4}{(x-1)^2}\leq 2\cdot\left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right|\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(\frac{x-1}{2}-\frac{2}{x-1}\right)^2\leq 2\cdot\left(\left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right|-1\right)\right).$$

Учитывая, что $\left(\frac{x-1}{2}-\frac{2}{x-1}\right)^2\geq 0$ и $\left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right|-1\leq 0$, заключаем, что решения неравенства удовлетворяют системе:

$$\begin{cases}\frac{x-1}{2}-\frac{2}{x-1}=0\\ \left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2=4\\ \left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3\end{array}\right.\\ \left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right|=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3\end{array}\right..$$

Легко проверить, что при $p=\frac{1}{16}$ найденные значения x являются решениями исходного неравенства.

Ответ: $p=\frac{1}{16}$.

1.2.17. *Ответ:* $b=\frac{1}{9}$.

1.2.18. Найти наибольшее значение суммы $x+2y$, если x и y удовлетворяют неравенству $x^2+xy+4y^2\leq 3$.

Решение. Способ 1. Пусть m=x+2y. Тогда

$$\left(x^2+xy+4y^2\leq 3\right)\Leftrightarrow\left((m-2y)^2+(m-2y)y+4y^2\leq 3\right)\Leftrightarrow\left(6y^2-3my+m^2-3\leq 0\right).$$

Неравенство имеет решение, если дискриминант соответствующего квадратного уравнения относительно y удовлетворяет условию:

$\left(D = 9m^2 - 24m^2 + 72 \geq 0\right) \Leftrightarrow \left(15m^2 \leq 72\right) \Leftrightarrow \left(m^2 \leq \frac{24}{5}\right) \Leftrightarrow \left(|m| \leq \sqrt{\frac{24}{5}}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(-\sqrt{4{,}8} \leq m \leq \sqrt{4{,}8}\right)$. Наибольшим значением m=x+2y, которое удовлетворяет последнему соотношению, является $m = \sqrt{4{,}8}$.

Ответ: $\sqrt{4{,}8}$.

Способ 2. Преобразуем исходное неравенство, используя тождество $ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$:

$\left(x^2 + xy + 4y^2 \leq 3\right) \Leftrightarrow \left((x+2y)^2 - 3xy \leq 3\right) \Leftrightarrow \left((x+2y)^2 - 3 \cdot \frac{(x+2y)^2 - (x-2y)^2}{8} \leq 3\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(5(x+2y)^2 + 3(x-2y)^2 \leq 24\right) \Leftrightarrow \left((x+2y)^2 \leq \frac{24}{5} - \frac{3}{5} \cdot (x-2y)^2\right)$.

Тогда x+2y принимает наибольшее значение $\sqrt{4{,}8}$, если x=2y.

Ответ: $\sqrt{4{,}8}$.

1.2.19. *Ответ:* $7\sqrt{3}$.

1.2.20. Решить неравенство $(x^2 - 2x + 4) \geq \sqrt{5 + 4x - x^2}$.

Решение. $\left((x^2 - 2x + 4) \geq \sqrt{5 + 4x - x^2}\right) \Leftrightarrow \left((x-1)^2 + 3 \geq \sqrt{9 - (x-2)^2}\right)$.

Учитывая $\begin{cases} (x-1)^2 + 3 \geq 3 \\ \sqrt{9 - (x-2)^2} \leq 3 \end{cases}$, получим, что $(x-1)^2 + 3 \geq \sqrt{9 - (x-2)^2}$ при $\forall$x$\in$ОДЗ, т.е. $\left(9 - (x-2)^2 \geq 0\right) \Leftrightarrow \left(|x-2| \leq 3\right) \Leftrightarrow \left(-1 \leq x \leq 5\right)$.

Ответ: [-1;5].

1.2.21. *Ответ: [1;5].*

1.2.22. Найти все значения параметра *p*, при каждом из которых неравенство $36^x + p \cdot 6^x + p + 8 \leq 0$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Способ 1. $\left(36^x + p \cdot 6^x + p + 8 \leq 0\right) \Leftrightarrow \left(6^{2x} + p \cdot 6^x + p + 8 \leq 0\right)$

Обозначим через $y=6^x>0$. Тогда $y^2+py+p+8\leq 0$.

Найдем, при каких значениях параметра *p* полученное неравенство имеет решения:

$\left(D = p^2 - 4p - 32 \geq 0\right) \Rightarrow \left((p+4)(p-8) \geq 0\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p \leq -4 \\ p \geq 8 \end{array}\right.$.

Для того, чтобы исходное неравенство имело хотя бы одно решение, нужно, чтобы неравенство $y^2+py+p+8\leq 0$ имело по крайней мере одно положительное решение. Для этого достаточно, чтобы наибольший корень соответствующего уравнения являлся положительным числом:

$$\left(\frac{-p+\sqrt{p^2-4p-32}}{2}>0\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt{p^2-4p-32}>p\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}p\le -4\\ p\ge 8\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}p<0\\ \begin{cases}p\ge 0\\ p^2-4p-32>p^2\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}p\le -4\\ p\ge 8\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}p<0\\ \begin{cases}p\ge 0\\ p<-8\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow(p\le -4).$$

Способ 2. $\left(36^x+p\cdot 6^x+p+8\le 0\right)\Leftrightarrow\left(6^{2x}+p\cdot 6^x+p+8\le 0\right)$

Сделаем замену $t=6^x>0$. Тогда требуется найти значения p, при которых неравенство $t^2+pt+p+8\le 0$ выполняется хотя бы при одном положительном значении y. Это выполняется, если парабола $f(t)=t^2+pt+p+8$ имеет хотя бы один положительный корень. Последнее выполнено, если

$$\left[\begin{array}{l}f(0)<0\\ \begin{cases}D\ge 0\\ t_в=-\dfrac{p}{2}>0\end{cases}\end{array}\right.$$, где $t_в$ – абсцисса вершины параболы.

$$\left[\begin{array}{l}p+8<0\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}p\le -4\\ p\ge 8\end{array}\right.\\ p<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}p<-8\\ p\le -4\end{array}\right.\Leftrightarrow(p\le -4).$$

Ответ: (-∞;-4].

1.2.23. *Ответ: [2;+∞).*

2.3. Системы

1.3.1. Решить систему

$$\begin{cases}\sqrt{\sin x}\cdot\cos y=0\\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0\end{cases}.$$

Решение. Система равносильна совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=0\\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0\end{cases}\\ \begin{cases}\cos y=0\\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=0\\ -\cos 2y-2=0\end{cases}\\ \begin{cases}y=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z\\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=0\\ \cos 2y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\{\varnothing\}\\ \begin{cases}y=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z\\ 2\sin^2 x-\cos(\pi+2\pi k)-2=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z\\ 2\sin^2 x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z\\ \sin x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z\end{cases}.$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z;\ y=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$.

1.3.2. Решить систему

$$\begin{cases}\sqrt{\cos x}\cdot\cos y=0\\ \cos 2x-2\cos^2 y+2=0\end{cases}.$$

Решение. Система равносильна совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos y=0\\ \cos 2x-2\cos^2 y+2=0\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x=0\\ \cos 2x-2\cos^2 y+2=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos y=0\\ \cos 2x+2=0\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x=0\\ 2\cos^2 x-1-2\cos^2 y+2=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos y=0\\ \cos 2x=-2\end{cases}\Leftrightarrow\{\varnothing\}\\ \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\\ -2\cos^2 y+1=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\\ \cos^2 y=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\\ \cos y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\\ y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z\end{cases}.$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\ y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z$.

1.3.3. Решить систему

$$\begin{cases}\sqrt{\cos 2x}\cdot\cos x=0\\ 2\sin^2 x-\cos\left(2y-\dfrac{\pi}{3}\right)=0\end{cases}.$$

Решение. Система равносильна совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 2x=0\\ 2\sin^2 x-\cos\left(2y-\frac{\pi}{3}\right)=0\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x=0\\ \cos 2x\ge 0\\ 2\sin^2 x-\cos\left(2y-\frac{\pi}{3}\right)=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 2x=0\\ 2\sin^2 x-1+1-\cos\left(2y-\frac{\pi}{3}\right)=0\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x=0\\ 2\cos^2 x-1\ge 0\\ 2\left(1-\cos^2 x\right)-\cos\left(2y-\frac{\pi}{3}\right)=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 2x=0\\ \cos\left(2y-\frac{\pi}{3}\right)=1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x=0\\ -1\ge 0\\ \cos\left(2y-\frac{\pi}{3}\right)=2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\\ 2y-\frac{\pi}{3}=2\pi k,\ k\in Z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z\\ 2y=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z\\ y=\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z\end{cases}.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z;\ y=\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$.

1.3.4. Решить систему

$$\begin{cases}\sqrt{\sin 2y-1}\cdot\sin y=0\\ \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)-2\sin 3x=0\end{cases}.$$

Решение. Система равносильна совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 2y=1\\ \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)-2\sin 3x=0\end{cases}\\ \begin{cases}\sin y=0\\ \sin 2y-1\ge 0\\ \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)-2\sin 3x=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2y=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z\\ \cos^2 2\pi k=2\sin 3x\end{cases}\\ \begin{cases}\sin y=0\\ 2\sin y\cos y-1\ge 0\\ \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)=2\sin 3x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z\\ 2\sin 3x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin y=0\\ -1\ge 0\\ \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)=2\sin 3x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z\\ \sin 3x=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z\\ 3x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z\\ x=(-1)^n\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z\end{cases}.$$

Ответ: $x=(-1)^n\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z;\ y=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$.

1.3.5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x^2-2xy+2y^2+2x-8y+10=0\\ x^2+y^2=13\end{cases}$$

Решение. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2-2xy+2y^2+2x-8y+10=0 \\ x^2+y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x(y-1)+2y^2-8y+10=0 \\ x^2+y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x(y-1)+(y-1)^2-(y-1)^2+2y^2-8y+10=0 \\ x^2+y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x(y-1)+(y-1)^2-y^2+2y-1+2y^2-8y+10=0 \\ x^2+y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x(y-1)+(y-1)^2+y^2-6y+9=0 \\ x^2+y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y+1)^2+(y-3)^2=0 \\ x^2+y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-y+1=0 \\ y=3 \end{cases} \\ x^2+y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ x^2+y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}.$$

Ответ: (2; 3).

1.3.6. *Ответ: (-1; 1).*

1.3.7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy+24=\dfrac{x^3}{y} \\ xy-6=\dfrac{y^3}{x} \end{cases}$$

Решение. Для решений системы должны выполняться соотношения:

$$\begin{cases} xy+24=\dfrac{x^3}{y} \\ xy-6=\dfrac{y^3}{x} \end{cases} \Rightarrow \left((xy+24)(xy-6)=\frac{x^3}{y}\cdot\frac{y^3}{x} \right) \Rightarrow \left((xy+24)(xy-6)=x^2y^2 \right).$$

Обозначая через $z=xy$, получим: $\left((z+24)(z-6)=z^2\right) \Leftrightarrow (18z-144=0) \Leftrightarrow (z=8)$.

Тогда исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} x=\dfrac{8}{y} \\ xy-6=\dfrac{y^3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{8}{y} \\ 8-6=\dfrac{y^4}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{8}{y} \\ y^4=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{8}{y} \\ \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Ответ: (-4; -2), (4; 2).

1.3.8. *Ответ: (-4; -2), (0; 0), (4; 2).*

1.3.9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-x-y-18=0 \\ 2x^2+2y^2+xy-62=0 \end{cases}$$

Решение. Преобразуем уравнения системы

$$\begin{cases} x^2+y^2-x-y-18=0 \\ 2x^2+2y^2+xy-62=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy-(x+y)-18=0 \\ 2(x+y)^2-3xy-62=0 \end{cases}.$$

Произведем замену переменных: $\begin{cases} u=x+y \\ v=xy \end{cases}$. Тогда

$$\begin{cases} u^2-2v-u-18=0 \\ 2u^2-3v-62=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2-2v-u-18=0 \\ v=\dfrac{2u^2-62}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2-2\cdot\dfrac{2u^2-62}{3}-u-18=0 \\ v=\dfrac{2u^2-62}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3u^2-4u^2+124-3u-54}{3}=0 \\ v=\dfrac{2u^2-62}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+3u-70=0 \\ v=\dfrac{2u^2-62}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u=7 \\ u=-10 \end{array}\right. \\ v=\dfrac{2u^2-62}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=7 \\ v=12 \end{cases} \\ \begin{cases} u=-10 \\ v=46 \end{cases} \end{array}\right..$$

Учитывая замену переменных, имеем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-10 \\ xy=46 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=7-y \\ (7-y)y=12 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-y-10 \\ (-10-y)y=46 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=7-y \\ y^2-7y+12=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-y-10 \\ y^2+10y+46=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=7-y \\ \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right..$$

Ответ: (3; 4), (4;3).

1.3.10. *Ответ: (-1; 1), (1; -1), (1; 2), (2; 1).*

1.3.11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0 \\ x^2-xy-2x-3y-6=0 \end{cases}$$

Решение. Преобразуем первое уравнение системы:

$(x^2-2xy-3y^2=0) \Leftrightarrow (x^2+xy-3xy-3y^2=0) \Leftrightarrow (x(x+y)-3y(x+y)=0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ((x+y)(x-3y)=0)$. Тогда исходная система распадается на две:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-y \\ x^2-xy-2x-3y-6=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3y \\ x^2-xy-2x-3y-6=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-y \\ 2y^2-y-6=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3y \\ 2y^2-3y-2=0 \end{cases} \end{array}\right..$$

Решим полученные системы:

$$1).\ \begin{cases} x=-y \\ \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right. \quad 2).\ \begin{cases} x=3y \\ \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $(-2;\ 2)$, $\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$, $(6;\ 2)$.

1.3.12. *Ответ:* $(-1;\ -1)$, $\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

1.3.13. При каких значениях параметра p система

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5\cdot|x|+4=3y+5x^2+3p \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение. Заметим, что если пара $(x_0; y_0)$ является решением системы, то и пара $(-x_0; y_0)$ – также будет её решением. Поэтому из того, что система имеет единственное решение, необходимо вытекает, что $x=0$. При этом система принимает вид

$$\begin{cases} 3+4=3y+3p \\ y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=\dfrac{7-3y}{3} \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-1 \end{array}\right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} p=\dfrac{4}{3} \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} p=\dfrac{10}{3} \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right..$$

Таким образом, возможными значениями p, при которых система имеет единственное решение, являются только $p=\frac{4}{3}$ и $p=\frac{10}{3}$. Заметим, что при этих значениях p решением системы являются $(0;\ 1)$ и $(0;\ -1)$ соответственно.

Проверим достаточность найденных значений p.

При $p=\frac{4}{3}$ система принимает вид

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5\cdot|x|=3y+5x^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

На множестве x и y, удовлетворяющих второму уравнению этой системы, выполнены неравенства $2^{|x|}\ge 1\ge y$, $|x|\ge x^2$.

Следовательно, $3\cdot 2^{|x|}+5\cdot|x|\ge 3y+5x^2$, причем равенство достигается только при $x=0$, $y=1$. Поэтому значение $p=\frac{4}{3}$ удовлетворяет условию задачи.

Доказать единственность решения последней системы можно иначе. Первое уравнение запишем в виде $3\cdot\left(2^{|x|}-y\right)+5\cdot\left(|x|-x^2\right)=0$. Так как оба выражения в скобках неотрицательны, то

$$\begin{cases} 2^{|x|} = y \\ |x| - x^2 = 0 \end{cases}.$$

С учетом неравенств $2^{|x|} \ge 1 \ge y$, первое уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2^{|x|} = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Пара (0; 1) удовлетворяет и второму уравнению системы.

При $p = \dfrac{10}{3}$ исходная система имеет вид

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5 \cdot |x| = 3y + 5x^2 + 6 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

Для последней системы доказать единственность решения не удается. Поэтому можно попробовать найти хотя бы ещё одно решение. Легко проверить, что пары $x = 1$, $y = 0$ и $x = -1$, $y = 0$ также являются решениями системы, как и найденное ранее решение $x = 0$, $y = -1$. Следовательно, значение $p = \dfrac{10}{3}$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $p = \dfrac{4}{3}$.

1.3.14. *Ответ:* $p = \dfrac{2}{5}$.

1.3.15. Найти все значения параметра p, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^y + \left(3 + \sqrt{8}\right)^y - 3p = x^2 + 6x + 5 \\ y^2 + \left(p^2 - 5p + 6\right) \cdot x^2 = 0 \\ -6 \le x \le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение. Заметим, что $\left(3 + \sqrt{8}\right)^y = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{-y}$. Тогда, если $(x_0; y_0)$ является решением системы, то $(x_0; -y_0)$ – также её решение. Поэтому из условия единственности решения необходимо вытекает, что $y = 0$ и система принимает вид:

$$\begin{cases} 2 - 3p = x^2 + 6x + 5 \\ x^2 \cdot \left(p^2 - 5p + 6\right) = 0 \\ -6 \le x \le 0 \end{cases}.$$

Тогда

$$\begin{cases}2-3p=x^2+6x+5\\ x^2\cdot\left(p^2-5p+6\right)=0\\ -6\le x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-3p=x^2+6x+5\\ \left[\begin{array}{l}p=2\\ p=3\\ x=0\end{array}\right.\\ -6\le x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}p=2\\ x^2+6x+5=-4\\ -6\le x\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}p=3\\ x^2+6x+5=-7\\ -6\le x\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x=0\\ 2-3p=5\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}p=2\\ x=-3\end{cases}\\ \begin{cases}p=3\\ x^2+6x+12=0\\ -6\le x\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x=0\\ p=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}p=2\\ x=-3\end{cases}\\ \begin{cases}p=-1\\ x=0\end{cases}\end{array}\right.$, так как уравнение $x^2+6x+12=0$ решений не имеет (D=-12<0).

Таким образом, возможными значениями *p*, при которых исходная система имеет единственное решение, являются только *p=2* и *p=-1*. Заметим, что при этих значениях *p* решением системы являются $(-3;0)$ и $(0;0)$ соответственно. Покажем, что при найденных значениях *p* система имеет единственное решение.

Подставим эти значения *p* в исходную систему. Тогда, при $p=2$

$$\begin{cases}\left(3-2\sqrt{2}\right)^y+\left(3+\sqrt{8}\right)^y-6=x^2+6x+5\\ y^2=0\\ -6\le x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\ x^2+6x+9=0\\ -6\le x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\ y=0\end{cases}$$

система имеет единственное решение $(-3;0)$.

При $p=-1$:

$$\begin{cases}\left(3-2\sqrt{2}\right)^y+\left(3+\sqrt{8}\right)^y+3=x^2+6x+5\\ y^2+12x^2=0\\ -6\le x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(3-2\sqrt{2}\right)^y+\left(3+\sqrt{8}\right)^y+3=x^2+6x+5\\ x=0\\ y=0\\ -6\le x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases},$$

т.е. система имеет единственное решение $(0;0)$.

Ответ: $p=-1$, $p=2$.

1.3.16. *Ответ:* $p=-3$, $p=-2$.

1.3.17. При каких значениях параметра p система

$$\begin{cases}pxy+x-y+\dfrac{3}{2}=0\\ x+2y+xy+1=0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Из второго уравнения получаем $(y+1)x=-2y-1$. Отсюда $y\neq-1$ (проверьте подстановкой). Тогда $x=\dfrac{-2y-1}{y+1}$. Подставляя x в первое уравнение, получим:

$$\left(p\cdot\left(\frac{-2y-1}{y+1}\right)\cdot y+\frac{-2y-1}{y+1}-y+\frac{3}{2}=0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2py(-2y-1)+2(-2y-1)-2y(y+1)+3(y+1)}{2(y+1)}=0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{-4py^2-2py-4y-2-2y^2-2y+3y+3}{2(y+1)}=0\right)\Leftrightarrow\left(\frac{(-4p-2)y^2-(2p+3)y+1}{2(y+1)}=0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2(2p+1)y^2+(2p+3)y+1}{2(y+1)}=0\right)\text{, откуда}$$

$$2(2p+1)y^2+(2p+3)y-1=0\ \ (y\neq-1). \qquad (*)$$

При $p=-\dfrac{1}{2}$ получим уравнение $2y-1=0,\ y=-\dfrac{1}{2}\ \left(x=-\dfrac{4}{3}\right)$.

При $p\neq-\dfrac{1}{2}$ найдем дискриминант уравнения (*):

$$D=(2p+3)^2+8(2p+1)=4p^2+28p+17,$$

который равен нулю при

$$p=\frac{-28\pm\sqrt{28^2-16\cdot17}}{8}=\frac{-28\pm4\sqrt{7^2-17}}{8}=\frac{-7\pm\sqrt{32}}{2}=\frac{-7\pm4\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда у квадратного уравнения (*) будет единственный корень

$$y=-\frac{2p+3}{4(2p+1)}=-\frac{-7\pm4\sqrt{2}+3}{4\left(-7\pm4\sqrt{2}+1\right)}=-\frac{-4\pm4\sqrt{2}}{4\left(-6\pm4\sqrt{2}\right)}=-\frac{-1\pm\sqrt{2}}{-6\pm4\sqrt{2}}=$$

$$=-\frac{\left(-1\pm\sqrt{2}\right)\cdot\left(-6\mp4\sqrt{2}\right)}{\left(-6\pm4\sqrt{2}\right)\cdot\left(-6\mp4\sqrt{2}\right)}=-\frac{6\pm4\sqrt{2}\mp6\sqrt{2}-8}{4}=-\frac{-2\mp2\sqrt{2}}{4}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}\neq-1.$$

Возможен случай, когда один из корней уравнения (*) равен –1. Подставив в это уравнение *y=-1,* получим *p=1.* А так как для исходной системы $y\neq-1$, то в этом случае система имеет единственное решение.

Ответ: $\dfrac{-7-4\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{-7+4\sqrt{2}}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$, *1.*

1.3.18. При каких значениях параметра *p* система

$$\begin{cases}3y+2+xy=0\\ x\cdot(y+1-p)+y\cdot(2p-3)+p+3=0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Выразим из первого уравнения *x* и подставим его во второе уравнение:

$x=\frac{-3y-2}{y}\ \ (y\neq 0);$

$$\left(\frac{-3y-2}{y}(y+1+p)+y\cdot(2p-3)+p+3=0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{(-3y-2)(y+1-p)+y^2(2p-3)+y(p+3)}{y}=0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{-3y^2-2y-3y-2+3py+2p+2py^2-3y^2+py+3y}{y}=0\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{(2p-6)y^2+(4p-2)y+2p-2}{y}=0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{(p-3)y^2+(2p-1)y+p-1}{y}=0\right),\text{ откуда}$$

$$(p-3)y^2+(2p-1)y+p-1=0\ \ (y\neq 0). \qquad (*)$$

При $p=3$ получим $5y+2=0,\ y=-\frac{2}{5}\ \left(x=\frac{-3y-2}{y}=\frac{1{,}2-2}{-0{,}4}=2\right)$.

При $p\neq -3$ найдем дискриминант уравнения (*):

$D=(2p-1)^2-4(p-3)(p-1)=4p^2-4p+1-4(p^2-4p+3)=12p-11$,

равный нулю при $p=\frac{11}{12}$, тогда у квадратного уравнения (*) будет единственный корень

$$y=-\frac{2p-1}{2(p-3)}=-\frac{2\frac{11}{12}-1}{2\left(\frac{11}{12}-3\right)}=-\frac{22-12}{2(11-12)}=-\frac{10}{-2}=5\ \left(x=\frac{-3y-2}{y}=-\frac{17}{5}=3{,}4\right).$$

Возможен случай, когда один из корней уравнения (*) равен нулю. Подставив в это уравнение *y=0,* получим *p=1.* А так как для исходной системы $y\neq 0$, то в этом случае система имеет единственное решение. Или по теореме Виета: $y_1\cdot y_2=\frac{p-1}{p-3}=0\Rightarrow p=1$.

Ответ: $\frac{11}{12}$*; 1; 3.*

2.4. Функции

1.4.1. Найдите область изменения функции

$$y = x - \sqrt{4x^2 - 12x + 9} - \sqrt{x^2 - 4x + 4}.$$

Решение. Запишем функцию в виде

$$y = x - \sqrt{(2x-3)^2} - \sqrt{(x-2)^2} = x - |2x-3| - |x-2|.$$

Методом интервалов освободимся от абсолютных величин

$$\begin{cases} x \le 1{,}5 \\ y = x + (2x-3) + (x-2) = 4x - 5 \end{cases};$$

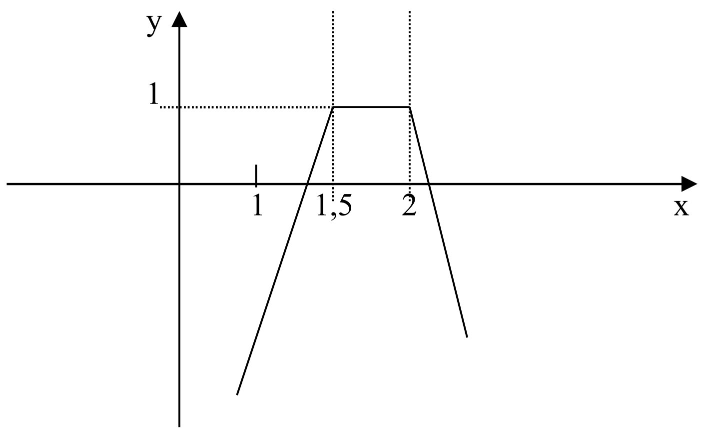
$$\begin{cases} 1{,}5 < x \le 2 \\ y = x - (2x-3) + (x-2) = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ y = x - (2x-3) - (x-2) = 5 - 2x \end{cases}.$$

Таким образом, функцию можно записать в виде:

$$y = \begin{cases} 4x - 5, \ \textit{если} \ x \le 1{,}5, \\ 1, \ \textit{если} \ 1{,}5 < x \le 2, \\ 5 - 2x, \ \textit{если} \ x > 2. \end{cases}$$

Строим график этой функции



Ответ: $y \in (-\infty;\ 1]$.

1.4.2. *Ответ:* $y \in (3;\ +\infty]$.

1.4.3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} - 2x.$$

Решение. Запишем функцию в виде

$$y = \sqrt{(2x-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2} - 2x = |2x-1| + |x-3| - 2x.$$

Методом интервалов освободимся от абсолютных величин

$$\begin{cases} x \le 0{,}5 \\ y = -(2x-2)-(x-3)-2x = -5x+4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 0{,}5 < x \le 3 \\ y = (2x-1)-(x-3)-2x = 2-x \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > 3 \\ y = (2x-1)+(x-3)-2x = x-4 \end{cases}.$$

Таким образом, функцию можно записать в виде:

$$y = \begin{cases} -5x+4, \ \text{если } x \le 0{,}5, \\ 2-x, \ \text{если } 0{,}5 < x \le 3, \\ x-4, \ \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Учитывая, что функции $f(x) = -5x+4$ убывает на $(-\infty;\ 0{,}5)$, $g(x) = 2-x$ убывает на $(0{,}5;\ 3)$, $h(x) = x-4$ - возрастает на $(3;+\infty)$, и $\min f(x) = f(0{,}5) = 1{,}5$, $\min g(x) = g(3) = -1$, $\min\ h(x) = h(3) = -1$, получим, что $\min\ y(x) = y(3) = -1$

Ответ: $\min\ y(x) = y(3) = -1$.

1.4.4. *Ответ:* $\max\ y(x) = y\left(\frac{3}{2}\right) = 1$.

1.4.5. Найти точку графика функции $y = x^2 + \frac{1}{2}$, ближайшую к точке $\left(\frac{1}{4};\ 1\right)$.

Решение. Расстояние между точкой $(x;\ y)$ графика функции и точкой $\left(\frac{1}{4};\ 1\right)$ определяется выражением: $\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2 = x^4 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = x^4 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{16}$.

Учитывая, что

$$f'(x) = 4x^3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(8x^3-1) = \frac{1}{2}(2x-1)(4x^2+2x+1),$$

получим: $x_{\min} = \frac{1}{2}$. Тогда $\min f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{5}{16} = \frac{1-4+5}{16} = \frac{1}{8}$.

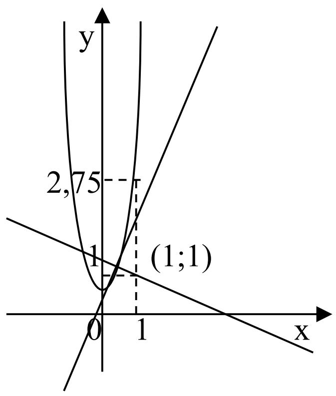
Так как при $x = \frac{1}{2}$ $y = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, то ближайшей точкой $(x;\ y)$ графика функции к точке $\left(\frac{1}{4};\ 1\right)$ является точка $\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{4}\right)$, а кратчайшее расстояние будет равно $\sqrt{\min f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{4}\right)$.

1.4.6. *Ответ:* $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

1.4.7. Найти точку графика функции $y=\frac{3}{4}+2x^2$, ближайшую к точке $(1;\ 1)$.

Решение.



Прямая, перпендикулярная касательной функции $y(x)=\frac{3}{4}+2x^2$ в точке $(x;\ y)$, имеет угловой коэффициент равный $k=-\frac{1}{y'(x)}=-\frac{1}{4x}$.

Если эта прямая будет совпадать с прямой, проходящей через точки $(x;\ y)$ и $(1;\ 1)$, то должно выполнятся следующее условие для угловых коэффициентов этих прямых: $tg\alpha=\frac{y-1}{x-1}=-\frac{1}{y'(x)}=-\frac{1}{4x}$.

Тогда получим $\left(4x\left(2x^2-\frac{1}{4}\right)=-x+1\right)\Leftrightarrow\left(8x^3-x+x=1\right)\Leftrightarrow\left(x^3=\frac{1}{8}\right)\Leftrightarrow\left(x=\frac{1}{2}\right)$ и $y=y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$. Заметим, что график функции $y(x)=\frac{3}{4}+2x^2$ расположен выше касательной к данной кривой в точке $\left(\frac{1}{2};\ \frac{5}{4}\right)$, определяемой уравнением

$$\left(y-\frac{5}{4}=y'\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\Leftrightarrow\left(y-\frac{5}{4}=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\Leftrightarrow\left(y=2x+\frac{1}{4}\right).$$

Действительно,

$$\left(\frac{3}{4}+2x^2\geq 2x+\frac{1}{4}\right)\Leftrightarrow\left(2x^2-2x+\frac{1}{2}\geq 0\right)\Leftrightarrow\left(4x^2-4x+1\geq 0\right)\Leftrightarrow\left((2x-1)^2\geq 0\right).$$

Поэтому ближайшей точкой $(x;\ y)$ графика функции к точке $(1;\ 1)$ является точка $\left(\frac{1}{2};\ \frac{5}{4}\right)$, расстояние между которыми равно

$$\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{5}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\ \frac{5}{4}\right)$.

1.4.8. *Ответ:* $(1;\ 0)$.

1.4.9. Сравнить числа $\log_2 3$ и $\log_3 5$.

Решение. Докажем, что $\log_3 5<\frac{3}{2}<\log_2 3$. Действительно,

$\left(\log_2 3 > \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\ln 3}{\ln 2} > \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow (2\ln 3 > 3\ln 2) \Leftrightarrow (\ln 3^2 > \ln 2^3) \Leftrightarrow (\ln 9 > \ln 8) \Leftrightarrow (9 > 8)$, и

$\left(\log_3 5 < \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{\ln 5}{\ln 3} < \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow (2\ln 5 < 3\ln 3) \Leftrightarrow (\ln 5^2 < \ln 3^3) \Leftrightarrow (\ln 25 < \ln 27) \Leftrightarrow (25 < 27)$.

Следовательно $\log_3 5 < \log_2 3$.

Ответ: $\log_3 5 < \log_2 3$.

1.4.10. *Ответ:* $\log_4 7 < \log_3 6$

1.4.11. Вычислить $\arcsin(\sin 10)$.

Решение. Используя формулы приведения, и то, что область значений функции $y = \arcsin x$: $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, получим

$\arcsin(\sin 10) = \arcsin(\sin(10 - 2\pi)) = \arcsin(\sin(\pi - (10 - 2\pi))) =$

$= \arcsin(\sin(3\pi - 10)) = 3\pi - 10$.

Ответ: $\arcsin(\sin 10) = 3\pi - 10$.

1.4.12. *Ответ:* $arctg(tg 5) = 5 - 2\pi$.

1.4.13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 3\sin^2 x + 2\sin 2x + 6\cos^2 x$$

Решение. Способ 1. Преобразуем данную функцию:

$y=3\sin^2x+2\sin 2x+6\cos^2x=\sin^2x+4\sin x\cdot\cos x+4\cos^2x+2=(\sin x+2\cos x)^2+2$.

Учитывая, что период функции $y(x)$ $T=\pi$ (так как $y(x+\pi)=(\sin(x+\pi)+2\cos(x+\pi))^2+2=(-\sin x-2\cos x)^2+2=(\sin x+2\cos x)^2+2=y(x)$), найдем ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[0; \pi]$:

$y'(x) = 2(\sin x + 2\cos x)(\cos x - 2\sin x) \Rightarrow$

$$(2(\sin x + 2\cos x)(\cos x - 2\sin x) = 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = \frac{1}{2} \\ tgx = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = arctg\frac{1}{2} + \pi k, k \in Z \\ x = arctg(-2) + \pi n, n \in Z \end{array}\right..$$

Вычислим значения функции $y(x)$ в точках 0; $arctg(1/2)$; $arctg(-2)+\pi$; π.

$y(0)=6$; $y(\pi)=6$. Используя формулы $\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2x}$, $\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2x}$ и учитывая, что в первой четверти $\sin x \geq 0$ и $\cos x \geq 0$, находим $y(arctg(1/2))=7$. $y(arctg(-2)+\pi)=2$, т.к. $\sin x \geq 0$ и $\cos x \leq 0$ во второй четверти или учитывая, что: $(x = arctg(-2) + \pi n, n \in Z) \Leftrightarrow (tgx = -2) \Leftrightarrow (\sin x + 2\cos x = 0)$.

Следовательно: $\min y(x)=y(arctg(-2)+\pi n)=2$; $\max y(x)=y(arctg(1/2)+\pi k)=7$.

Способ 2. Преобразуем данную функцию:

$y=3\sin^2x+2\sin 2x+6\cos^2x=\sin^2x+4\sin x\cdot\cos x+4\cos^2x+2=(\sin x+2\cos x)^2+2=$

$=5\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin x\right)^2 + 2 = 5(\cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha)^2 + 2 = 5\cos^2(x-\alpha) + 2$, где

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Учитывая, что $0 \le \cos^2(x-\alpha) \le 1$ получим, $2 \le y(x) \le 7$. Следовательно: min y(x)=2; max y(x)=7.

Ответ: min y=2; max y=7.

1.4.14. *Ответ: min y=0,5; max y=5,5.*

1.4.15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \sqrt{11 - \sin 2x - 4\cos x - 4\sin x}$$

Решение. Способ 1. Преобразуем данную функцию:

$$y = \sqrt{11 - \sin 2x - 4\cos x - 4\sin x} = \sqrt{12 - \cos^2 x - 2\cos x \sin x - \sin^2 x - 4(\cos x + \sin x)} =$$
$$= \sqrt{12 - (\cos x + \sin x)^2 - 4(\cos x + \sin x)}$$

Введем обозначение:

$$t = \cos x + \sin x = \cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Заметим, что $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Рассмотрим функцию $z(t)=12-t^2-4t$ и найдем ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$: $(z'=-2t-4) \Rightarrow (-2t-4=0) \Rightarrow (t=-2 \notin [-\sqrt{2}; \sqrt{2}])$. Вычисляя значения функции z(t) на концах отрезка: $z(-\sqrt{2}) = 10 + 4\sqrt{2}$; $z(\sqrt{2}) = 10 - 4\sqrt{2}$, получим, что $\max z = z(-\sqrt{2}) = 10 + 4\sqrt{2}$; $\min z = z(\sqrt{2}) = 10 - 4\sqrt{2}$.

Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции y(x) равны:

$\max y = \sqrt{z(-\sqrt{2})} = \sqrt{10 + 4\sqrt{2}}$; $\min y = \sqrt{z(\sqrt{2})} = \sqrt{10 - 4\sqrt{2}}$.

Способ 2. Рассмотрим функцию: $z(x) = 11 - \sin 2x - 4\cos x - 4\sin x$.

Учитывая, что период функции z(x) T=2π, найдем ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке [0; 2π]:

$$z'(x) = -2\cos 2x + 4\sin x - 4\cos x = 2(\sin^2 x - \cos^2 x) + 4(\sin x - \cos x) =$$
$$= 2(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x + 2) \Rightarrow$$

$$(2(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x + 2) = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 \\ \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tgx = 1 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z\right).$$

Вычислим значения функции z(x) в точках 0; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; 2π:

$z(0)=z(2\pi)=7$; $z(\frac{\pi}{4})=10 - 4\sqrt{2}$; $z(\frac{5\pi}{4})=10 + 4\sqrt{2}$.

Тогда $\max z = 10 + 4\sqrt{2}$, $\min z = 10 - 4\sqrt{2}$.

Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции y(x) равны:

$\max y = \sqrt{10 + 4\sqrt{2}}$; $\min y = \sqrt{10 - 4\sqrt{2}}$.

Ответ: $\max y = \sqrt{10+4\sqrt{2}}$; $\min y = \sqrt{10-4\sqrt{2}}$.

1.4.16. *Ответ:* $\min y = \sqrt{22-5\sqrt{2}}$; $\max y = \sqrt{22+5\sqrt{2}}$.

1.4.17. Найти множество значений функции $y = \dfrac{x^2-3x+1}{x^2+1}$

Решение. Способ 1. Найдем экстремумы функции $y(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{x^2+1}$:

$$y'(x) = \frac{(2x-3)(x^2+1)-2x(x^2-3x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3-3x^2+2x-3-2x^3+6x^2-2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{3x^2-3}{(x^2+1)^2} = \frac{3(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow (x_{\min}=1; x_{\max}=-1).$$

Вычислим значения функции в точках экстремума: $y(-1)=\dfrac{5}{2}$, $y(1)=-\dfrac{1}{2}$.

Докажем, что $-\dfrac{1}{2} \le y(x) \le \dfrac{5}{2}$:

$$\left(y(x) \le \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x^2-3x+1}{x^2+1} \le \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow \left(2(x^2-3x+1) \le 5(x^2+1)\right) \Leftrightarrow \left(3x^2+6x+3 \ge 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((x+1)^2 \ge 0,\ \forall x \in R\right).$$

$$\left(y(x) \ge -\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x^2-3x+1}{x^2+1} \le -\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(2(x^2-3x+1) \le -(x^2+1)\right) \Leftrightarrow \left(3x^2-6x+3 \ge 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((x-1)^2 \ge 0,\ \forall x \in R\right).$$

Способ 2. $\left(y = \dfrac{x^2-3x+1}{x^2+1}\right) \Leftrightarrow \left(y(x^2+1) = x^2-3x+1\right) \Leftrightarrow \left((y-1)x^2+3x+(y-1)=0\right).$.

Если y=1, то x=0. Пусть y≠1. Тогда уравнение относительно x имеет решение, если:

$$\left(D = 9-4(y-1)^2 = 5+8y-4y^2 \ge 0\right) \Leftrightarrow \left((2y+1)(2y-5) \le 0\right) \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2} \le y \le \frac{5}{2}\right).$$

Ответ: $[-0{,}5;2{,}5]$.

1.4.18. *Ответ:* $\left[0;\dfrac{4}{3}\right]$.

2.5. Текстовые задачи

1.5.1. Мясокомбинат производит за день 9 тонн колбасных изделий трех сортов по цене 2 руб., 3 руб. и 8 руб. за 1 кг на общую сумму 30 тыс. руб. (по старому курсу рубля). Известно, что количество тонн производимых за день изделий соответственно первого, второго и третьего сортов образуют арифметическую прогрессию. Сколько тонн колбасных изделий каждого сорта производится комбинатом за день?

Решение. Пусть x, y, z – количество (в тоннах) колбасных изделий первого, второго и третьего сорта, соответственно, производимых мясокомбинатом за день. Тогда

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ 2x+3y+8z=30 \\ x+z=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x+z=6 \\ 2x+8z=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4{,}5 \\ y=3 \\ z=1{,}5 \end{cases}.$$

Ответ: 4,5 т, 3 т, 1,5 т.

1.5.2. *Ответ: 5,5 т; 4 т; 2,5 т..*

1.5.3. В магазине продано 10,5 тонн орехов трех сортов по цене соответственно 2 руб., 4 руб. и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 33 тыс. руб. (по старому курсу рубля). Известно, что количество тонн проданных орехов соответственно первого, второго и третьего сортов образуют геометрическую прогрессию. Сколько тонн орехов каждого сорта продано в магазине?

Решение. Пусть x, y, z – количество (в тоннах) орехов первого, второго и третьего сорта, соответственно, проданных магазином. Тогда

$$\begin{cases} x+y+z=10{,}5 \\ 2x+4y+6z=33 \\ xz=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=10{,}5 \\ 2y+4z=12 \\ xz=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4{,}5+z \\ y=6-2z \\ (4{,}5+z)z=(6-2z)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4{,}5+z \\ y=6-2z \\ 4z^2-24z+36=4{,}5z+z^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4{,}5+z \\ y=6-2z \\ 3z^2-28{,}5z+36=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4{,}5+z \\ y=6-2z \\ 2z^2-19z+24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4{,}5+z \\ y=6-2z \\ z=\dfrac{19\pm\sqrt{169}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4{,}5+z \\ y=6-2z \\ \left[\begin{array}{l} z=1{,}5 \\ z=8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6 \\ y=3 \\ z=1{,}5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=12{,}5 \\ y=-10 \\ z=8 \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение (6; 3; 1,5) удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 6 т; 3 т; 1,5 т.

1.5.4. *Ответ: 2 т; 1 т; 0,5 т.*

1.5.5. В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в три раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике, но не менее чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

Решение. Пусть x – число деталей в первом ящике, y – число деталей во втором ящике. По условию задачи x, y – целые неотрицательные числа, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} x+y>29 \\ x-2>3y \\ 3x-2y<60 \end{cases}$$

Решим систему аналитическим и графическим способом.

Система представляет собой систему линейных неравенств с двумя переменными. Будем для её решения использовать свойство транзитивности: если a>b, a b>c, то a>c.

$$\begin{cases} x>29-y \\ x>3y+2 \\ x<\dfrac{60+2y}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{60+2y}{3}>29-y \\ \dfrac{60+2y}{3}>3y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y>27 \\ 7y<54 \end{cases} \Leftrightarrow \left(5\frac{2}{5}<y<7\frac{5}{7}\right).$$

Следовательно, $y\in\left(5\frac{2}{5};7\frac{5}{7}\right)$. Но на множестве $\left(5\frac{2}{5};7\frac{5}{7}\right)$ содержится только два целых числа: 6 и 7. Если y=6, то получаем систему неравенств

$$\begin{cases} x>23 \\ x>20 \Leftrightarrow (23<y<24), \\ x<24 \end{cases}$$

которая не имеет решений в целых числах. Если y=7, то система примет вид:

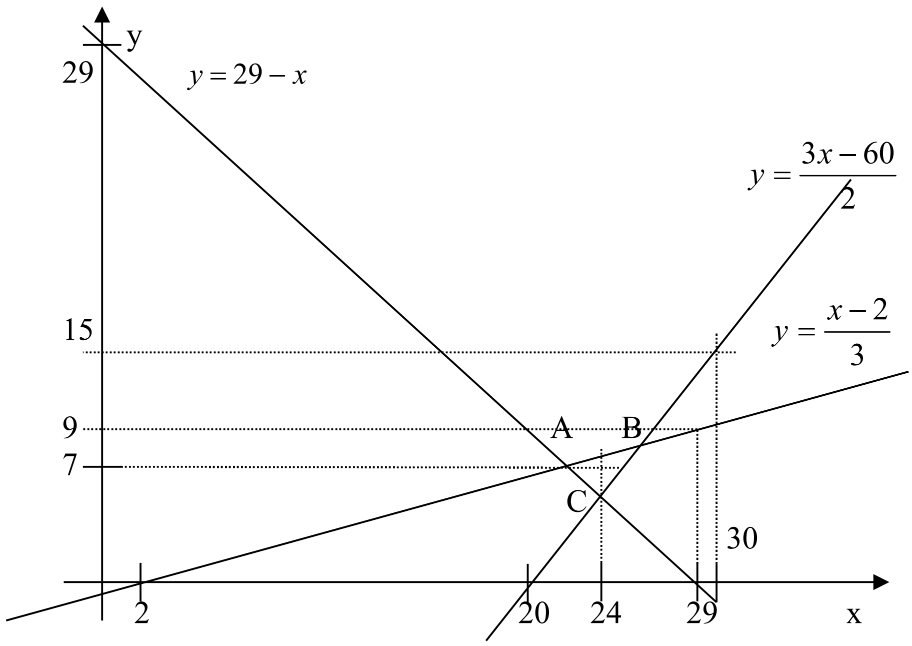
$$\begin{cases} x>22 \\ x>23 \Leftrightarrow \left(23<x<24\dfrac{2}{3}\right). \\ x<\dfrac{74}{3} \end{cases}$$

На множестве $\left(23;\ 24\frac{2}{3}\right)$ содержится только целое число x=24.

Окончательно получим: x=24, y=7.

Дадим геометрическую интерпретацию решений системы. Изобразим на координатной плоскости множество точек, которые удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} y > 29 - x \\ y < \dfrac{x-2}{3} \\ y > \dfrac{3x-60}{2} \end{cases}.$$



Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе, есть множество точек плоскости, расположенных внутри ΔABC. Из этого множества нужно отобрать те, координаты которых целые числа.

Найдем координаты точек A, B, C, для чего решаем следующие системы:

$\begin{cases} x + y = 29 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow A\ \left(\dfrac{89}{4}; \dfrac{27}{4}\right); \begin{cases} 3x - 2y = 60 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow B\ \left(\dfrac{176}{7}; \dfrac{54}{7}\right); \begin{cases} x + y = 29 \\ 3x - 2y = 60 \end{cases} \Rightarrow C\ \left(\dfrac{118}{5}; \dfrac{27}{5}\right).$

Для точек в пределах ΔABC должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} \dfrac{89}{4} < x < \dfrac{176}{7} \\ \dfrac{27}{5} < y < \dfrac{54}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 22\dfrac{1}{4} < x < 25\dfrac{1}{7} \\ 5\dfrac{2}{5} < y < 7\dfrac{5}{7} \end{cases}.$$

Этой системе неравенств удовлетворяют следующие точки с целыми координатами: (23; 6), (23; 7), (24; 6), (24; 7), (25; 6), (25; 7). Внутри ΔABC находится единственная точка (24; 7) с целыми координатами.

Ответ: x=24, y=7.

1.5.6. В двух бригадах вместе более 27 человек. Число членов первой бригады более чем в два раза превышает число членов второй бригады, уменьшенное на 12. Число членов второй бригады более чем в 9 раз превышает число членов первой бригады, уменьшенное на 10. Сколько человек в каждой бригаде?

Решение. Пусть x – человек в первой бригаде, y – человек во второй бригаде. По условию задачи x, y – целые неотрицательные числа, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} x+y>27 \\ x>2(y-12) \\ y>9(x-10) \end{cases}$$

Решим систему аналитическим и графическим способом.

Система представляет собой систему линейных неравенств с двумя переменными. Будем для её решения использовать свойство транзитивности: если a>b, a b>c, то a>c.

$$\begin{cases} x>27-y \\ x>2y-24 \\ x<\dfrac{y}{9}+10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27-y<\dfrac{y}{9}+10 \\ 2y-24<\dfrac{y}{9}+10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{10}{9}y>17 \\ \dfrac{17}{9}y<34 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{153}{10}<y<\frac{306}{17}\right).$$

Следовательно, $y\in\left(15\frac{3}{10};\ 18\right)$. Но на множестве $\left(15\frac{3}{10};\ 18\right)$ содержится только два целых числа: 16 и 17. Если y=6, то получаем систему неравенств

$$\begin{cases} x>11 \\ x>8 \\ x<11\dfrac{7}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \left(11<x<11\frac{7}{9}\right),$$

которая не имеет решений в целых числах. Если y=17, то система примет вид:

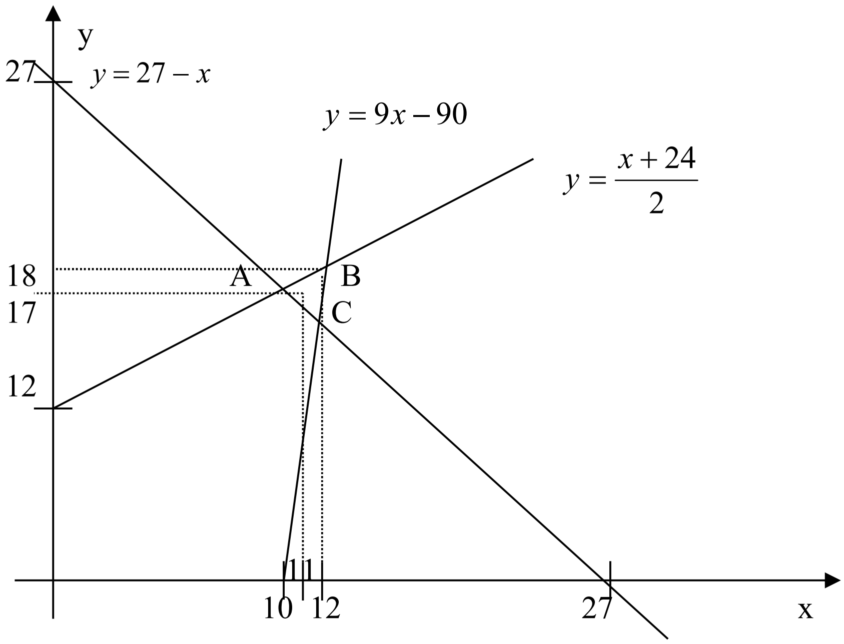
$$\begin{cases} x>10 \\ x>10 \\ x<11\dfrac{8}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \left(10<x<11\frac{8}{9}\right).$$

На множестве $\left(10;\ 11\frac{8}{9}\right)$ содержится только целое число x=11.

Окончательно получим: x=11, y=17.

Дадим геометрическую интерпретацию решений системы. Изобразим на координатной плоскости множество точек, которые удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} y > 27 - x \\ y < \dfrac{x+24}{2} \\ y > 9x - 90 \end{cases}.$$



Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе, есть множество точек плоскости, расположенных внутри ΔABC. Из этого множества нужно отобрать те, координаты которых целые числа.

Найдем координаты точек A, B, C, для чего решаем следующие системы:

$\begin{cases} x + y = 27 \\ x - 2y = -24 \end{cases} \Rightarrow A\ (10;\ 17);\ \begin{cases} x - 2y = -24 \\ 9x - y = 90 \end{cases} \Rightarrow B\ (12;\ 18);\ \begin{cases} x + y = 27 \\ 9x - y = 90 \end{cases} \Rightarrow C\ \left(\dfrac{117}{10}; \dfrac{153}{10}\right).$

Для точек в пределах ΔABC будут выполняться неравенства:

$$\begin{cases} 10 < x < 12 \\ \dfrac{153}{10} < y < 18 \end{cases}.$$

Этой системе неравенств удовлетворяют следующие точки с целыми координатами: (11; 16), (11; 17). Внутри ΔABC находится единственная точка (11; 17) с целыми координатами.

Ответ: В первой бригаде – 11 человек, во второй бригаде – 17 человек,

1.5.7. Число деталей, изготовленных за смену первой бригадой, составляет 115% от числа деталей, изготовленных за смену второй бригадой. Продукцию двух бригад упаковали в 2 ящика. В первом ящике оказалось $\frac{2}{3}$ деталей, изготовленных первой бригадой, и $\frac{1}{7}$ часть деталей второй бригадой (Следовательно, во втором ящике оказалось $\frac{1}{3}$ деталей, изготовленных первой бригадой, и $\frac{6}{7}$ часть деталей второй бригадой). Сколько деталей за смену изготавливала каждая бригада, если в первом ящике оказалось менее 1000 деталей, а во втором – более 1000 деталей?

Решение. Пусть x - число деталей, изготовленных за смену первой бригадой; y - число деталей, изготовленных за смену второй бригадой. Тогда

$$\begin{cases} x = 1{,}15y \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{7}y < 1000 \\ \frac{1}{3}x + \frac{6}{7}y > 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{23}{20}y \\ \frac{23}{30}y + \frac{1}{7}y < 1000 \\ \frac{23}{60}y + \frac{6}{7}y > 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{23}{20}y \\ \frac{161+30}{210}y < 1000 \\ \frac{161+360}{420}y > 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{23}{20}y \\ \frac{191}{210}y < 1000 \\ \frac{521}{420}y > 1000 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{23}{20}y \\ \frac{420000}{521} < y < \frac{210000}{191} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{23}{20}y \\ 806\frac{74}{521} < y < 1099\frac{91}{191} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{23}{20}y \\ 807 \le y \le 1099 \end{cases}$$

По условию задачи y натуральное число, которое делится нацело на 7 и 20, а, следовательно, и на 140. На отрезке [807; 1099] таких чисел два: 840 и 980. Если $y = 840$, то $x = \frac{23}{20}y = 23 \cdot 42 = 966$. Если $y = 980$, то $x = \frac{23}{20}y = 23 \cdot 49 = 1127$.

Заметим, что x делится нацело на 3 и 23, а поэтому делится и на 69. Но 1127 не делится на 69, так как не делится на 3. Отсюда заключаем, что решением является $x = 966$ и $y = 840$, которое удовлетворяет условия задачи.

Заметим, что аналогично, можно получить границы для x из системы:

$$\begin{cases} y = \frac{20}{23}x \\ \frac{420000}{521} < y < \frac{210000}{191} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{20}{23}x \\ \frac{23 \cdot 21000}{521} < x < \frac{23 \cdot 10500}{191} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{20}{23}x \\ \frac{23 \cdot 21000}{521} < x < \frac{23 \cdot 10500}{191} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{20}{23}x \\ \frac{483000}{521} < x < \frac{241500}{191} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{20}{23}x \\ 927\frac{33}{521} < x < 1264\frac{76}{191} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{20}{23}x \\ 928 \le x \le 1264 \end{cases}.$$

Тогда, по условию задачи, x натуральное число, которое делится нацело на 3 и 23, а, следовательно, и на 69. На отрезке [928; 1264] таких чисел пять: 966, 1035, 1104, 1173, 1242, каждому из которых соответствует возможное значение x: 840, 900, 960, 1020, 1080. Но среди этих значений только одно делится на 140. Откуда заключаем, что решение задачи: $x = 966$ и $y = 840$.

Ответ: 966 дет.; 840 дет.

1.5.8. *Ответ: 900 машин выпускал первый завод, 855 машин – второй.*

1.5.9. 0,5 кг лука, 3 кг картофеля и 1 кг огурцов стоят вместе 20500 руб., а 2 кг лука и 4кг огурцов стоят 46000 руб. Сколько стоят 1 кг лука, 2 кг картофеля и 2 кг огурцов вместе?

Решение. Пусть x – стоимость 1 кг лука, y – стоимость 1 кг картофеля, z – стоимость 1 кг огурцов. Тогда

$$\begin{cases} 0{,}5x + 3y + z = 20500 \\ 2x + 4z = 46000 \end{cases}.$$

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} 0{,}5x + 3y + z = 20500 \\ 2x + 4z = 46000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5x + 3y + z = 20500 \\ x = 23000 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5(23000 - 2z) + 3y + z = 20500 \\ x = 23000 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 9000 \\ x = 23000 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3000 \\ x = 23000 - 2z \end{cases}.$$

Учитывая последнюю систему, получим:

$x + 2y + 2z = (23000 - 2z) + 2 \cdot 3000 + 2z = 29000$, что и требовалось найти.

Ответ: 29000 руб.

1.5.10. *Ответ: 60 кг.*

1.5.11. Если 3 км идти пешком, 7 км ехать верхом и 2 км – на велосипеде, то это займет 1 час 35 мин. Если 1 км идти пешком, 2 км ехать верхом и 1 км ехать на велосипеде, то придется потратить 31 мин. Сколько времени займет прогулка, во время которой 1 км идут пешком, 1 км едут верхом и 2 км – на велосипеде?

Решение. Пусть x – время, затраченное на 1 км пути пешком, y – время, затраченное на 1 км пути верхом, z – время, затраченное на 1 км пути на велосипеде. Тогда

$$\begin{cases} 3x + 7y + 2z = 95 \\ x + 2y + z = 31 \end{cases}.$$

Умножим, обе части второго уравнения системы на 4. Тогда получим:

$$\begin{cases} 3x + 7y + 2z = 95 \\ 4x + 8y + 4z = 124 \end{cases}.$$

Вычитая из левой и правой частей второго уравнения системы соответствующие части первого уравнения, имеем $x + y + 2z = 29$, что и требовалось найти.

Ответ: 29 мин.

1.5.12. *Ответ: 272000 рублей.*

1.5.13. Группа студентов решила купить магнитофон ценой от 170 до 195 руб. (имеется в виду старый курс рубля). Однако в последний момент двое отказались участвовать в покупке, поэтому каждому из оставшихся студентов пришлось внести на 1 руб. больше. Сколько стоил магнитофон?

Решение. Пусть n – количество студентов первоначально, участвовавших в покупке магнитофона, x – сумма, которую планировал внести каждый из них. Тогда

$$\begin{cases} 170 \le nx \le 195 \\ nx = (n-2)(x+1) \end{cases}.$$

Произведем преобразования для этой системы:

$$\begin{cases} 170 \le nx \le 195 \\ nx = nx - 2x + n - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 170 \le nx \le 195 \\ 2x = n - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 170 \le nx \le 195 \\ x = \dfrac{n-2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 170 \le n \cdot \dfrac{n-2}{2} \le 195 \\ x = \dfrac{n-2}{2} \end{cases}.$$

Следовательно, для целых *n* должна выполнятся система неравенств:

$$\begin{cases} 170 \le n \cdot \dfrac{n-2}{2} \\ n \cdot \dfrac{n-2}{2} \le 195 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - 2n - 340 \ge 0 \\ n^2 - 2n - 390 \le 0 \end{cases}.$$

Поэтому

$$\begin{cases} n \ge \dfrac{2+\sqrt{4+4\cdot 340}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{1364}}{2} > \dfrac{2+\sqrt{1269}}{2} = \dfrac{2+36}{2} = 19 \\ n \le \dfrac{2+\sqrt{4+4\cdot 390}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{1564}}{2} < \dfrac{2+\sqrt{1600}}{2} = \dfrac{2+40}{2} = 21 \end{cases} \Rightarrow (19 < n < 21) \Rightarrow (n = 20).$$

Тогда стоимость магнитофона:

$$nx = n \cdot \frac{n-2}{2} = \frac{20 \cdot 18}{2} = 180 \ \ (руб.).$$

Ответ: 180 руб.

1.5.14. Для перевозки груза из одного места в другое затребовано некоторое количество одинаковых машин. В виду неисправности дороги на каждую машину пришлось грузить на 0,5т меньше, чем предполагалось, поэтому дополнительно были затребованы 4 такие машины. Вес перевезенного груза был больше 55т, но не превосходил 64т. Сколько тонн груза было перевезено на каждом грузовике?

Решение. Пусть n – количество машин, которые предполагалось затребовать для перевозки груза первоначально, x (т) – количество груза, которое планировалось перевозить на одной машине первоначально. Тогда

$$\begin{cases} 55 < nx \le 64 \\ nx = (n+4)(x-0{,}5) \end{cases}.$$

Произведем преобразования для этой системы:

$$\begin{cases} 55 < nx \le 64 \\ nx = (n+4)(x-0{,}5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 55 < nx \le 64 \\ nx = nx + 4x - 0{,}5n - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 55 < nx \le 64 \\ 4x = 0{,}5n + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 55 < nx \le 64 \\ x = \dfrac{0{,}5n+2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 55 < n \cdot \dfrac{0{,}5n+2}{4} \le 64 \\ x = \dfrac{0{,}5n+2}{4} \end{cases}.$$

Следовательно, для целых *n* должна выполнятся система неравенств:

$$\begin{cases} 0{,}5n^2 + 2n - 220 > 0 \\ 0{,}5n^2 + 2n - 256 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 + 4n - 440 > 0 \\ n^2 + 4n - 512 \le 0 \end{cases}.$$

Поэтому

$$\begin{cases} n > \dfrac{-4+\sqrt{16+1760}}{2} = \dfrac{-4+\sqrt{1776}}{2} > \dfrac{-4+42}{2} = 19 \\ n \le \dfrac{-4+\sqrt{16+2048}}{2} = \dfrac{-4+\sqrt{2064}}{2} < \dfrac{-4+46}{2} = 21 \end{cases} \Rightarrow (19 < n < 21) \Rightarrow (n = 20).$$

Тогда, количество груза, которое было перевезено на каждом грузовике:

$$x - 0{,}5 = \frac{0{,}5n+2}{4} - 0{,}5 = \frac{n}{8} = 2{,}5 \ (\textit{тонн}).$$

Ответ: 2,5 т.

1.5.15. *Ответ: 3 т.*

1.5.16. Из пунктов А и В вышли навстречу друг другу два поезда, причем второй поезд вышел на полчаса позже первого. Через два часа после выхода первого поезда расстояние между ними составляло $\frac{19}{30}$ расстояния между А и В. Поезда встретились в середине АВ. За сколько часов каждый поезд пройдет путь АВ?

Решение. Пусть t_1 – время движения из А в В первого поезда; t_2 – время движения из В в А второго поезда; S – расстояние между пунктами А и В. Так как первый поезд пройдет расстояние $\frac{S}{2}$ за $\frac{t_1}{2}$ часов, а второй – за $\left(\frac{t_1}{2} - \frac{1}{2}\right)$ часов, то приходим к системе:

$$\begin{cases} 2 \cdot \dfrac{S}{t_1} + \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{S}{t_2} = \dfrac{11}{30} S \\ \dfrac{t_1}{2} \cdot \dfrac{S}{t_1} = \left(\dfrac{t_1}{2} - \dfrac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{S}{t_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{t_1} + \dfrac{3}{2t_2} = \dfrac{11}{30} \\ t_2 = t_1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{t_1} + \dfrac{3}{2(t_1-1)} - \dfrac{11}{30} = 0 \\ t_2 = t_1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-11t_1^2 + 116t_1 - 60}{30t_1(t_1-1)} = 0 \\ t_2 = t_1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11t_1^2 - 116t_1 + 60 = 0 \\ t_2 = t_1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (11t_1 - 6)(t_1 - 10) = 0 \\ t_2 = t_1 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 10 \\ t_2 = 9 \end{cases}$$

Ответ: 10 часов, 9 часов.

1.5.17. *Ответ: 60 км в час; 40 км в час.*

1.5.18. Два пешехода одновременно выходят навстречу друг другу из пунктов А и В, и встречаются через 30 минут. Продолжая движение, первый пешеход прибывает в В на 11 минут раньше, чем второй пешеход в А. Определить время в пути каждого пешехода?

Решение. Пусть t_1 – время в пути из А в В первого пешехода; t_2 – время в пути из В в А второго пешехода; S – расстояние между пунктами А и В. Тогда:

$$\begin{cases} 30\cdot\dfrac{S}{t_1}+30\cdot\dfrac{S}{t_2}=S \\ t_2=t_1+11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{30(t_1+t_2)}{t_1t_2}=1 \\ t_2=t_1+11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{30(2t_1+11)}{t_1(t_1+11)}=1 \\ t_2=t_1+11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1^2-49t_1-330=0 \\ t_2=t_1+11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t_1+6)(t_1-55)=0 \\ t_2=t_1+11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1=55 \\ t_2=66 \end{cases}$$

Ответ: 55 минут, 66 минут.

1.5.19. *Ответ: 3 часа.*

1.5.20. Имеются два слитка сплавов меди и олова. Первый весит 3 кг и содержит 40% меди, второй весит 7 кг и содержит 30% меди. Какого веса нужно взять куски этих слитков, чтобы после переплавки получить 8 кг сплава, содержащего 32%?

Решение. Пусть первого слитка надо взять x кг, а второго – y кг, тогда вес нового слитка: x+y=8. Так как в первом содержание меди 40%, то x кг сплава первого слитка содержит (x·0,4) кг меди; аналогично y кг сплава второго слитка будет содержать (y·0,3) кг меди. В новом сплаве весом (x+y) кг должно содержаться 32% меди, следовательно: (x+y)·0,32=0,4x+0,3y. Таким образом,

$$\begin{cases} x+y=8 \\ (x+y)\cdot 0{,}32=0{,}4x+0{,}3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ 0{,}08x-0{,}02y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ y=4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1{,}6 \\ y=6{,}4 \end{cases}.$$

Ответ: 1,6 кг, 6,4 кг.

1.5.21. *Ответ: 11:1.*

1.5.22. Имеется два раствора кислоты разной концентрации. Объем одного раствора – 4 л, другого – 6 л. Если их слить вместе, то получится 35%-ый раствор кислоты. Если же слить равные объемы этих растворов, то получится 36%-ый раствор кислоты. Сколько литров кислоты содержится в каждом из первоначальных растворов?

Решение. Пусть x л. – кислоты содержится в первом растворе, а y л. – во втором. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{4+6}=\dfrac{35}{100} \\ \dfrac{x+4\cdot\dfrac{y}{6}}{4+4}=\dfrac{36}{100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=7 \\ x+\dfrac{2y}{3}=\dfrac{72}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=7 \\ 75x+50y=216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 150x+150y=525 \\ 150x+100y=432 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7-2y}{2} \\ 50y=93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{41}{25} \\ y=\dfrac{93}{50} \end{cases}.$$

Ответ: 1,64 л.; 1,86 л.

1.5.23. *Ответ: 1 кг; 2 кг.*

1.5.24. Бассейн наполняется двумя трубами за 6 часов. Одна первая труба наполняет его на 5 часов быстрее, чем одна вторая. За какое время каждая труба, действуя отдельно, может наполнить бассейн?

Решение. Пусть t_1 – время, за которое первая труба, действуя отдельно, наполняет бассейн; t_2 – время, за которое вторая труба, действуя отдельно, наполняет бассейн; V – объем бассейна. Тогда:

$$\begin{cases} 6\left(\frac{V}{t_1}+\frac{V}{t_2}\right)=V \\ t_2=t_1+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)=1 \\ t_2=t_1+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6(t_1+t_2)}{t_1t_2}=1 \\ t_2=t_1+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1(t_1+5)=6(2t_1+5) \\ t_2=t_1+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1^2-7t_1-30=0 \\ t_2=t_1+11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t_1+3)(t_1-10)=0 \\ t_2=t_1+11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1=10 \\ t_2=15 \end{cases}$$

Ответ: 10 часов, 15 часов.

1.5.25. *Ответ: 5 часов.*

1.5.26. Двое мастеров, работая вместе, выполняют некоторое задание за 30 дней. После шестидневной совместной работы один из них, работая отдельно, может закончить это задание за 40 дней. За сколько дней каждый из них, работая отдельно, может выполнить задание?

Решение. Пусть x – количество дней необходимых только первому для выполнения задания; y – количество дней необходимых второму мастеру для выполнения задания. Тогда $x>0$, $y>0$. Примем величину работы (в данном случае это выполнение некоторого задания) за единицу. Следовательно, $\frac{1}{x}$ – производительность первого мастера (его дневная выработка), $\frac{1}{y}$ – производительность второго мастера. При совместной работе мастеров выполняется $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ часть работы за день. Так как всё задание выполняется ими за 30 дней, то $30\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1$. За 6 дней совместной работы мастера выполнят $6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ часть задания, оставшуюся же часть работы выполняет один из мастеров, скажем, первый, работая отдельно, за 40 дней.

Значит, $6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{40}{x}=1$.

Таким образом, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 30\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=1 \\ 6\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)+\dfrac{40}{x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{30}{x}+\dfrac{30}{y}=1 \\ \dfrac{46}{x}+\dfrac{6}{y}=1 \end{cases}.$$

Выполняя элементарные преобразования, получим

$$\begin{cases} 30x+30y=xy \\ 6x+46y=xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30x+30y=6x+46y \\ 30x+30y=xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1{,}5x \\ 30x+45x=1{,}5x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1{,}5x \\ 3x(x-50)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=50 \\ y=75 \end{cases}$$

Ответ: 50 дней, 75 дней.

1.5.27. *Ответ: 6 часов, 18 часов.*

1.5.28. Пять человек выполняют некоторую работу. Первый, второй и третий, работая вместе, могут выполнить всю работу за 7,5 ч; первый, третий и пятый вместе – за 5 ч; первый, третий и четвертый вместе – за 6 ч, а второй, четвертый и пятый вместе – за 4 ч. За какой промежуток времени выполнят эту работу все 5 человек вместе?

Решение. Пусть x_i - производительность i-го рабочего, y - объём работы. Тогда по условию задачи

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\dfrac{y}{7{,}5} \\ x_1+x_3+x_5=\dfrac{y}{5} \\ x_1+x_3+x_4=\dfrac{y}{6} \\ x_2+x_4+x_5=\dfrac{y}{4} \end{cases}$$

Умножив последнее уравнение на 2, и сложив затем все четыре уравнения, получаем:

$$3\cdot(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=y\cdot\left(\frac{1}{7{,}5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{y}{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}=3.$$

Ответ: за 3 часа.

1.5.29. *Ответ: 11испарителей.*

1.5.30. Партия одинаковых деталей обрабатывалась на трех станках разных конструкций в такой последовательности: сначала действовал только первый станок столько часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на втором и третьем станках; затем действовал только второй станок столько часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на первом и третьем станках. Остальная часть партии деталей была обработана на третьем станке в течение стольких часов, сколько потребовалось бы для совместного выполнения всей работы на первом и втором станках. Во сколько раз быстрее была бы выполнена эта работа, если бы действовали совместно три станка?

Решение. Пусть x, y и z - производительность станков, V - объём работы. По условию, $\dfrac{V}{y+z}$ - время работы первого станка, $\dfrac{V}{x+z}$ - второго, $\dfrac{V}{x+y}$ - третьего. Отсюда

$$\frac{Vx}{y+z}+\frac{Vy}{x+z}+\frac{Vz}{x+y}=V \;\Rightarrow\; \frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}=1.$$

Далее, $\dfrac{V}{x+y+z}$ - время, за которое была выполнена работа при одновременной работе всех трёх станков. По условию, необходимо определить следующую величину t:

$$t=\frac{\dfrac{V}{x+y}+\dfrac{V}{x+z}+\dfrac{V}{z+y}}{\dfrac{V}{x+y+z}}=\frac{x+y+z}{x+y}+\frac{x+y+z}{x+z}+\frac{x+y+z}{y+z}=$$

$$=\left(1+\frac{z}{x+y}\right)+\left(1+\frac{y}{x+z}\right)+\left(1+\frac{z}{y+z}\right)=3+\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)=4.$$

Ответ: в 4 раза.

1.5.31. *Ответ: рабочих было 20 чел., в день они работали 6 часов.*

1.5.32. Два человека одновременно начали спускаться по движущемуся вниз эскалатору метро, причем один шел вдвое быстрее другого. Один из них насчитал 60 ступенек, а второй - 40. Сколько ступенек пришлось бы им отшагать по неподвижному эскалатору?

Решение. Пусть x и y - скорости движения (число ступенек в минуту) второго человека по неподвижному эскалатору и эскалатора соответственно, z - расстояние (в ступеньках), которое надо пройти по неподвижному эскалатору. Тогда $\dfrac{z}{2x+y}$ и $\dfrac{z}{x+y}$ - время спуска первого и второго (по движущемуся эскалатору). По условию, за время спуска первого "ушло" $z-60$ ступенек. Откуда $\dfrac{z}{2x+y}\cdot y=z-60$. Аналогично, $\dfrac{z}{x+y}\cdot y=z-40$. Итак,

$$\left.\begin{aligned} z&=\frac{30\cdot(2x+y)}{x}\\ z&=\frac{40\cdot(x+y)}{x}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned} z&=60+30\cdot\frac{y}{x}\\ z&=40+40\cdot\frac{y}{x}\end{aligned}\right\}\Rightarrow z=120.$$

Ответ: 120 ступенек.

1.5.33. *Ответ:* $5+2\sqrt{5}$ *км.*

1.5.34. Из пунктов A в B одновременно выезжают два автомобиля и встречаются в 12 ч дня. Если скорость первого удвоить, а скорость второго оставить первоначальной, то встреча произойдёт на 56 мин раньше. Если же скорость второго удвоить, а скорость первого оставить первоначальной, то они встретятся на 65 мин раньше. Определить время встречи в том случае, когда скорость обоих была бы удвоенной.

Решение. Пусть v_1, v_2 - скорости первого и второго автомобиля соответственно, а S – расстояние между пунктами A и B. Тогда по условию задачи:

$$\begin{cases} S=\left(\dfrac{S}{v_1+v_2}-56\right)\cdot(2v_1+v_2) \\ S=\left(\dfrac{S}{v_1+v_2}-65\right)\cdot(v_1+2v_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{S(2v_1+v_2)}{v_1+v_2}-S=56(2v_1+v_2) \\ \dfrac{S(v_1+2v_2)}{v_1+v_2}-S=65(v_1+2v_2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{Sv_1}{v_1+v_2}=112v_1+56v_2 \\ \dfrac{Sv_2}{v_1+v_2}=65v_1+130v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{S}{v_1+v_2}=112+56\cdot\dfrac{v_2}{v_1} \\ \dfrac{S}{v_1+v_2}=65\cdot\dfrac{v_1}{v_2}+130 \end{cases}.$$

Отсюда

$$\left(112+56\frac{v_2}{v_1}=\frac{65}{\frac{v_2}{v_1}}+130\right) \Leftrightarrow \left(56\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2-18\frac{v_2}{v_1}-65=0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{v_2}{v_1}=\frac{18\pm\sqrt{18^2+4\cdot56\cdot65}}{112}=\frac{18\pm122}{112}\right) \Rightarrow \left(\frac{v_2}{v_1}=\frac{140}{112}=\frac{5}{4}\right).$$

Следовательно, $\dfrac{S}{2v_1+2v_2}=56+28\cdot\dfrac{v_2}{v_1}=56+28\cdot\dfrac{5}{4}=56+35=91$ мин.

Поэтому встреча автомобилей в том случае, когда скорость обоих была бы удвоенной, произойдет раньше на 91 минуту, чем 12 часов дня, т. е. в 10 часов 29 минут.

Ответ: в 10 часов 29 минут.

1.5.35. *Ответ: 8 км.*

1.5.36. Из бутылки, наполненной 12%-ным (по массе) раствором соли, отлили $1л$ и налили $1л$ воды. Затем отлили ещё один литр и опять долили водой. В бутыли оказался 3%-ный (по массе) раствор соли. Какова вместительность бутыли?

Решение. Пусть вместимость бутыли равна x. Первоначально соль составляла $0{,}12x$. После того, как отлили $1л$, соль составляет уже

$0{,}12\cdot(x-1)$, т.е. $\dfrac{0{,}12\cdot(x-1)}{x}$ часть начального объёма. После того, как отлили ещё $1л$, соль стала занимать уже $\dfrac{0{,}12\cdot(x-1)^2}{x}$, а как долили $1л$ воды, то $\dfrac{0{,}12\cdot(x-1)^2}{x^2}$ часть начального объёма и это составляет 3%.

Отсюда $\dfrac{0{,}12\cdot(x-1)^2}{x^2}=0{,}03 \Rightarrow x=2л$.

Ответ: 2 л.

1.5.37. *Ответ: 10 литров.*

1.5.38. Сосуд вместимостью $20л$ наполнен кислотой. Из него переливают некоторое количество кислоты во второй сосуд такой же вместимости. Доливают водой второй сосуд и полученной смесью доливают первый сосуд. Затем из первого сосуда во второй отливают $6\dfrac{2}{3}л$ смеси, и после этого в обоих сосудах кислоты оказалось одинаковое количество. Сколько литров кислоты отлили первоначально из первого сосуда?

Решение. Пусть первоначально из первого сосуда отливают $x\ л$ кислоты. После того, как дольют воды во второй сосуд, концентрация кислоты там станет $\dfrac{x}{20}$.

Из второго сосуда отливают $x\ л$ смеси (т.е. $x\cdot\dfrac{x}{20}=\dfrac{x^2}{20}$ кислоты) и доливают первый сосуд; в нём станет кислоты $20-x+\dfrac{x^2}{20}$. Концентрация её в первом сосуде станет $\dfrac{1}{20}\cdot\left(20-x+\dfrac{x^2}{20}\right)$. Во втором сосуде кислоты будет $x-\dfrac{x^2}{20}$. Из первого сосуда отливают $6\dfrac{2}{3}=\dfrac{20}{3}л$ смеси, т.е. $\dfrac{20}{3}\cdot\dfrac{1}{20}\cdot\left(20-x+\dfrac{x^2}{20}\right)л$ кислоты и доливают ею второй сосуд.

Т.к. кислоты теперь в обоих сосудах одинаково, то имеем

$$20-x+\frac{x^2}{20}-\frac{20}{3}\cdot\frac{1}{20}\cdot\left(20-x+\frac{x^2}{20}\right)=x-\frac{x^2}{20}+\frac{20}{3}\cdot\frac{1}{20}\cdot\left(20-x+\frac{x^2}{20}\right).$$

Решая это уравнение, получим $x=10$.

Ответ: 10 л.

1.5.39. *Ответ: в первом сосуде было 20 л спирта, во втором - 10 л.*

1.5.40. Несколько человек должны были принять участие в экскурсии. Однако в последний момент два человека от участия в ней отказались, поэтому каждому из оставшихся экскурсантов пришлось уплатить за участие в экскурсии на $3\,р$. больше, чем планировалось первоначально (все участники должны были заплатить поровну). Сколько должен был заплатить каждый экскурсант первоначально, если стоимость экскурсии больше $70\ p.$, но не больше $75\ p.$?

Решение. Пусть n - первоначальное число участников, x - первоначальная стоимость для одного человека. Тогда

$$\begin{cases} 70 < n \cdot x \le 75 \\ n \cdot x = (n-2)\cdot(x+3) \\ n \in N - (\textit{натуральное число}) \end{cases}$$

Из второго условия выразим $x = \frac{3n-6}{2}$ и подставим в первое условие:

$$140 < 3n^2 - 6n \le 150\text{, т.е. } 143 < 3\cdot(n-1)^2 \le 153\text{; т.е. } 47\frac{2}{3} < (n-1)^2 \le 51.$$

Т.к. $(n-1)^2$- натуральное число, то, очевидно $(n-1)^2 = 49$. Следовательно $n = 8$. Тогда $x = 9$.

Ответ: 9 руб.

1.5.41. Для размещения комплекта журналов достаточно купить 13 стандартных полок. Однако в продаже оказались полки, на которых умещается на 7 журналов меньше, чем на стандартных, поэтому пришлось купить 27 полок, в результате осталось свободное место для 3 журналов. Сколько журналов в комплекте.

Решение. Пусть n - количество мест на стандартной полке. Тогда количество журналов равно $27\cdot(n-7)-3$. Следовательно:

$$12n \le 27\cdot(n-7)-3 \le 13n$$

$$12n \le 27n - 192 \le 13n$$

$$\frac{192}{15} \le n \le \frac{192}{14}$$

$$12\frac{4}{5} \le n \le 13\frac{5}{7}.$$

Учитывая, что n - целое число, получим $n = 13$, а количество журналов равно $27\cdot(n-7)-3 = 27\cdot 6 - 3 = 159$.

Ответ: 159 *журналов.*

1.5.42. *Ответ:* 1750 *т.*

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: Махнист Леонид Петрович
Рубанов Владимир Степанович
Сидоревич Михаил Павлович

МАТЕМАТИКА

Избранные задачи вступительных экзаменов по математике в Брестский политехнический институт в 1995-1999 г. г.

Ответственный за выпуск: Рубанов В. С.
Редактор: Строкач Т. В.

Подписано к печати 26.04.99 г. Формат 60x84 1/16. Бумага писч. Усл. п. л. 4.42. Уч. изд. л. 4.75. Тираж 50 экз. Заказ № 300. Отпечатано на ризографе Брестского политехнического института. 224017, Брест, ул. Московская, 267.