МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Методические указания и варианты заданий
по курсу «Высшая математика» для студентов технических специальностей

Брест 2002

УДК 517.9
ББК 22.11

Функциональные ряды. Операционное исчисление. Методические указания и варианты заданий по курсу «Высшая математика» для студентов технических специальностей. – Брест: БГТУ, 2002. – 51 с. В соответствии с действующей программой для студентов второго курса технических специальностей подобраны индивидуальные задания к двум аттестационным работам, даны решения типовых вариантов к каждой из них, перечислены основные вопросы и задачи третьего семестра

Составитель: Т.А. Тузик, доцент

Рецензент: Зав. кафедрой алгебры и геометрии Брестского государственного университета им. А.С.Пушкина, канд. физ.-мат. наук, доцент Савчук В.Ф.

Вопросы учебной программы.

3-й семестр

1. Числовые ряды. Сумма ряда. Свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости.
2. Сравнение числовых знакоположительных рядов.
3. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов. Признак Даламбера. Радикальный признак Коши. Интегральный признак Коши-Маклорена. Сходимость ряда Дирихле.
4. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Оценка остатка r_n.
5. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.
6. Абсолютно и условно сходящиеся ряды, их свойства.
7. Функциональные ряды. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.
8. Степенные ряды. Теорема Абеля. Область сходимости степенного ряда.
9. Свойства степенных рядов.
10. Ряды Маклорена. Условие сходимости ряда Тейлора для функции $f(x)$ *к функции* $f(x)$.
11. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена.
12. Приложения степенных рядов к вычислению определенных интегралов и интегрированию дифференциальных уравнений.
13. Тригонометрический ряд Фурье для функций периода $T = 2\pi$ *и* $T = 2l$. Теорема Дирихле.
14. Неполные ряды Фурье для четных и нечетных функций периода 2π *и* $2l$.
15. Разложение в ряд Фурье для непериодической функции. Скорость сходимости ряда Фурье.
16. Множества C *и* $\overline{C}$, *окрестности точек* $z = a$ *и* $z = \infty$. Области и их границы в комплексной плоскости.
17. Определение функции $f(z)$, ее предела, непрерывности.
18. Основные элементарные функции комплексного переменного (ФКП).
19. Производная ФКП. Условия Коши-Римана.
20. Аналитические и гармонические функции.
21. Интеграл от непрерывной ФКП и его вычисление.
22. Теорема Коши для односвязной и многосвязной области.
23. Вычисление интеграла от аналитической функции.
24. Интегральная формула Коши для односвязной и многосвязной области. Формулы для производных.
25. Ряды Тейлора и Лорана в комплексной плоскости.
26. Нули и изолированные особые точки функции $f(z)$.
27. Определение вычета, формулы для его вычисления.
28. Основная теорема Коши о вычетах.

29. Вычисление определенных (собственных и несобственных) интегралов с помощью вычетов.
30. Преобразование Лапласа. Классы оригиналов и изображений.
31. Основные теоремы операционного исчисления.
32. Применение преобразования Лапласа к интегрированию линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений.
33. Обратное преобразование Лапласа. Нахождение оригинала по заданному изображению.
34. Ряды Фурье в комплексной плоскости. Интеграл Фурье. Понятие о спектрах.
35. Понятие о дифференциальных уравнениях в частных производных 1-го и 2-го порядков. Основные уравнения математической физики.
36. Решение уравнения колебаний бесконечной струны методом Даламбера.
37. Метод Фурье решения уравнения колебаний ограниченной струны.
38. Метод Фурье решения теплопроводности конечного стержня.
39. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности бесконечного стержня.
40. Основные понятия теории графов. Матрицы смежностей и инциденций.
41. Поток по сети. Разрез на сети. Задача о максимальном потоке. Теорема Форда-Фалкерсона.
42. Основные понятия сетевого графика. Расчет временных параметров. Построение критического пути.
43. Линейные разностные уравнения. Конечные разности n-го порядка.
44. Линейные однородные разностные уравнения. Свойства решений. Решение ЛОРУ с постоянными коэффициентами.
45. Решение ЛНРУ с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов.
46. Метод вариации произвольных постоянных для ЛНРУ с постоянными коэффициентами.
47. Системы ЛРУ с постоянными коэффициентами.
48. Приближенное решение скалярных уравнений (методы хорд, касательных, итераций).
49. Интерполирование функций. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона.
50. Методы Эйлера и Рунге-Кутта решения задачи Коши для ДУ первого порядка.
51. Метод Эйлера и Рунге-Кутта решения задачи для ДУ первого порядка.
52. Решение задачи Дирихле методом сеток.

Перечень основных задач по темам третьего семестра.

Исследовать сходимость следующих рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; 4. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^n}$; 7. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$.

Найти область сходимости функциональных (степенных) рядов:

8. $\sum_{n=0}^{\infty}2^n\cdot\sin\frac{x}{3^n}$; 9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+3)^n}{n^2}$; 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,x^n}{n^n}$.

Разложить функцию $f(x)$ по степеням $x-x_0$:

11. $f(x)=e^x$, $x_0=2$; 12. $f(x)=x^3-2x^2+5x-7$, $x_0=1$;

13. $f(x)=\ln x$, $x_0=1$; 14. $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x_0=-1$;

Вычислить определенные интегралы с точностью ε:

15. $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$, $\varepsilon=10^{-5}$; 16. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, $\varepsilon=10^{-4}$;

17. $\int_0^1\cos\sqrt{x}\cdot dx$, $\varepsilon=10^{-3}$; 18. $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx$, $\varepsilon=10^{-4}$.

Найти решение дифференциальных уравнений в виде степенного ряда:

19. $y''=xy$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$; 20. $y''+xy'+y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

21. $4xy''+2y'+y=0$, $y(1)=1$, $y'(1)=-1$; 22. $y'=x^2y^2-1$; $y(0)=1$.

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ в заданном интервале:

23. $f(x)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4}$, $x\in(-\pi;\ \pi)$; 24. $f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi+x}{2}, & -\pi\le x<0,\\ \frac{\pi-x}{2}, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\le 1\\ 2-x, & 1<x<2.\end{cases}$ *в интервале* $(0;2)$ *по: а) синусам; б) косинусам.*

Записать в алгебраической форме комплексные числа:

26. $Ln(1-\sqrt{3}\,i)$; 27. $sh(z-2)$; 28. $\sin(3z+i)$; 29. $tg\,2i$; 30. $Arc\sin 2$;
31. $Arctg(1+i)$.

Доказать, что:

32. $(\cos z)' = -\sin z$; 33. $(a^z)' = a^z Lna$; 34. $\left(\dfrac{1}{z}\right)' = -\dfrac{1}{z^2}$;

35. $(arctg\, z)' = \dfrac{1}{1+z^2}$.

Найти интегралы:

36. $\int\limits_{\gamma} \bar{z}^2 \operatorname{Re} z\, dz$, *где* γ: *дуга параболы* $y = x^2$ *от точки* $z_1 = 0$ *до точки* $z_2 = 2+4i$.

37. $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{dz}{z-1+3i}$, *где* γ: *а*) $|z| = 2$; *б*) $|z-1| = 6$.

38. $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{dz}{z^2}$; 39. $\int\limits_{|z|=3} (z^2+2z+1)\,dz$; 40. $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{e^{-z}}{z+1}dz$.

Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ в окрестности точки z_0:

41. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)^2}$, $z_0 = 1$; 42. $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$, $z_0 = 0$;

43. $f(z) = \cos\dfrac{1}{z-1}$, $z_0 = 1$; 44. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, *для областей* $0 < |z-1| < 1$; $|z| > 2$; $1 < |z| < 2$.

Найти вычеты функций в каждой из особых точек:

45. $f(z) = z^2 e^{1/z}$; 46. $f(z) = \dfrac{z^4}{(z-i)^2}$; 47. $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{z^2}$;

48. $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^3}$; 49. $f(z) = \dfrac{3z^2-5z+6}{z^3(z-i)}$.

Вычислить интегралы с помощью вычетов:

50. $\oint\limits_{|z+0,5|=3} \dfrac{z-2}{z^3(z+1)}dz$; 51. $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{\left(1+\frac{1}{2}\cos t\right)^2}$; 52. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)^3}$;

53. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos 3x\,dx}{x^2+1}$; 54. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2 e^{ix}}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx.$

Найти оригиналы для изображений:

55. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^4}$; 56. $F(p)=\dfrac{p+3}{p^2-2p+10}$; 57. $F(p)=\dfrac{3e^{-p}}{p^2+9}$;

58. $F(p)=\dfrac{3p+1}{(p^2-1)(p-3)(p-4)}$; 59. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$.

Операционным методом найти решения задач Коши:

60. $x''-3x'+2x=e^{5t}$, $x(0)=1$, $x'(0)=2$.

61. $\begin{cases} x''+y=1, & x(0)=0, \quad x'(0)=0, \\ y''+x=0, & y(0)=0, \quad y'(0)=0. \end{cases}$

62. Найти решение уравнения теплопроводности $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее граничным условиям $u(0,t)=u(l,t)=0,\ t\ge 0$ и начальному условию: $u(x,0)=\begin{cases} x & \textit{при} \quad 0\le x\le \dfrac{l}{2}, \\ l-x & \textit{при} \quad \dfrac{l}{2}\le x\le l. \end{cases}$

63. Доказать, что функция $u(x,y)=e^{-y}\sin x$ есть решение уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ в квадрате $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,$ удовлетворяющее условиям $u(0,y)=0,\quad u(1,y)=e^{-y}\sin 1,\quad u(x,\ 0)=\sin x,\ u(x,1)=e^{-1}\sin x$.

Найти общее решение следующих линейных разностных уравнений:

64. $f(n+3)-4f(n+2)+6f(n+1)-4f(n)=0$;

65. $f(n+2)-12f(n+1)+36f(n)=(2n+1)\cdot 5^n$;

66. $f(n+2)-6f(n+1)-7f(n)=n\cdot 3^n$.

Найти частное решение систем линейных разностных уравнений:

67. $\begin{cases} x(n+1)=2x(n)-y(n), \\ y(n+1)=2x(n)+5y(n), \end{cases}$ $x(0)=2;\ y(0)=4.$

68. $\begin{cases} x(n+1)=3x(n)+2y(n), \\ y(n+1)=4x(n)+y(n), \end{cases}$ $x(0)=2;\ y(0)=1.$

АТТЕСТАЦИОННАЯ РАБОТА № 5
«ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ»
Теоретические вопросы

1. Какой ряд называется функциональным (степенным, тригонометрическим)?
2. Дайте определение области сходимости функционального ряда.
3. Сформулируйте теорему Абеля. Как найти радиус и область сходимости степенного ряда?
4. Перечислите свойства степенных рядов.
5. Запишите формулу и ряд Тейлора для функции f(x) в окрестности точки x_0.
6. Оцените погрешность при замене суммы ряда ее n-ой частичной суммой.
7. Запишите основные разложения в ряд Маклорена.
8. Ряд Фурье для периодической функции периода 2π и периода *2l.* Теорема Дирихле.
9. Ряды Фурье для четных (нечетных) функций периода $T = 2\pi$ ($T = 2l$).

Практические задания

Задание 1. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$:

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**
$u_n(x)$	$\left(\frac{2x-1}{x+4}\right)^n$	$\frac{x^n\left(1-x^n\right)}{n}$	$\frac{x^n}{3+x^{2n}}$	$\frac{\left(x^2+x-6\right)^n}{2^n}$

Вариант	**5**	**6**	**7**	**8**
$u_n(x)$	$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^n$	$\frac{1}{n^n \cdot (x+2)^n}$	$\frac{1}{n+3}\cdot\left(\frac{x-3}{3x+1}\right)^n$	$\frac{n^2}{3^n(x-4)^n}$

Вариант	**9**	**10**	**11**	**12**
$u_n(x)$	$\frac{\sqrt{2n+7}}{3^n(x-5)^n}$	$x^n tg\frac{x}{2^n}$	$\frac{\left(x^2-5x+6\right)^n}{3n+5}$	$\frac{4^{2n}}{\left(x^2+3x\right)^n}$

Вариант	**13**	**14**	**15**	**16**
$u_n(x)$	$\frac{1}{5^n(x+n)^n}$	$2^n\sin\frac{x}{3^n}$	$\frac{1}{n+3}\left(\frac{x+1}{x-4}\right)^n$	$\frac{(x^2-4x+5)^n}{3^n}$

Вариант	17	18	19	20
$u_n(x)$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n 4^{nx}$	$\ln^n\left(1+x^2\right)$	$\left(\frac{x-3}{x+4}\right)^n$	$\frac{(x^2-6x+12)^n}{4^n}$

Вариант	21	22	23	24
$u_n(x)$	$\frac{(n+1)^2}{(x-2)^n}$	$\left(\frac{25-x^2}{4}\right)^n$	$\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$	$\ln^n(x+e)$

Вариант	25	26	27	28
$u_n(x)$	$\frac{(x^2-2)^{n-1}}{2n+3}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(x^2-4\right)^n$	$\frac{1}{2^n n^2 (x+2)^n}$	$\frac{1}{n}\left(\frac{x+3}{2x-4}\right)^n$

Вариант	29	30
$u_n(x)$	$\frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{2x-3}{4x+5}\right)^n$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n 3^{\frac{n}{x-1}}$

Задание 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$:

Вариант	1	2	3	4
a_n	$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$	$\frac{2n+3}{4^{n-1}}$	$\frac{1}{(2n+3)\cdot 6^n}$	$\frac{1}{6^n}\cdot\frac{n+1}{n+3}$
x_0	5	-1	-3	-4

Вариант	5	6	7	8
a_n	$\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$	$\frac{3^n}{(5n+1)\cdot n^2}$	$\frac{n!}{n^n}$	$\frac{n}{3n+1}$
x_0	-4	0	-1	3

Вариант	9	10	11	12
a_n	$\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$	$\frac{1}{n(4n+3)}$	$\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$	$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$
x_0	0	-6	-3	-2

Вариант	**13**	**14**	**15**	**16**
a_n	$\frac{2n}{n+4}$	$\frac{1}{(2n-1)(n+3)}$	$\frac{1}{3^n(2n-1)}$	$\frac{n^2+n}{2^{n-1}}$
x_0	3	-1	-5	0

Вариант	**17**	**18**	**19**	**20**
a_n	$\frac{4^n}{(3n-1)\sqrt{3^n}}$	$\frac{1}{(2n+1)4^n}$	$(n-1)\cdot 3^{n-1}$	$\frac{(-1)^n}{(2n+1)5^n}$
x_0	2	-6	-4	1

Вариант	**21**	**22**	**23**	**24**
a_n	$\frac{2n-1}{(n+3)4^n}$	$\frac{n+1}{(n^2+3)2^n}$	$\frac{1}{n\sqrt{n}}$	$\frac{(n-2)^3}{2n+3}$
x_0	-2	-1	2	-3

Вариант	**25**	**26**	**27**	**28**
a_n	$\frac{n}{n^2+1}$	$\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n$	$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$	$\left(\frac{2n+5}{4n+3}\right)^n$
x_0	5	5	6	3

Вариант	**29**	**30**
a_n	$\frac{n+3}{5^n(n^2+5)}$	$\frac{1}{(4n-1)\cdot(4n+3)}$
x_0	4	0

Задание 3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить определенный интеграл $\int_0^a f(x)dx$ с точностью до 0,001:

Вар.	a	$f(x)$	**Вар.**	a	$f(x)$
1	0,25	$\ln(1+\sqrt{x})$	**16**	0,4	$\sqrt{x}\,e^{-\frac{x}{4}}$
2	1	$arctg\left(\frac{x^2}{2}\right)$	**17**	0,3	$\frac{1-\cos x}{x^2}$

3	0,2	$\sqrt{x}\, e^{-x}$	**18**	0,5	$\dfrac{arctgx^2}{x^2}$
4	0,5	$\dfrac{arctgx}{x}$	**19**	0,8	$\dfrac{1-\cos x}{x}$
5	0,2	$\sqrt{x}\cos x$	**20**	1	$\sin(x^2)$
6	0,5	$\ln(1+x^3)$	**21**	0,1	$\dfrac{\ln(1+x)}{x}$
7	1	$x^2\sin x$	**22**	1	$\cos\sqrt[3]{x}$
8	1	$e^{-\frac{x^2}{2}}$	**23**	1	$\sqrt{x}\sin x$
9	0,5	$\sqrt{1+x^2}$	**24**	0,25	$\dfrac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}}$
10	0,5	$\dfrac{1}{1+x^5}$	**25**	1	$\cos\dfrac{x^2}{4}$
11	1	$\sqrt[3]{1+\dfrac{x^2}{4}}$	**26**	1	$arctg\dfrac{\sqrt{x}}{2}$
12	0,5	$\dfrac{\sin x^2}{x}$	**27**	0,5	$\dfrac{x-arctgx}{x^2}$
13	0,1	$\dfrac{e^x-1}{x}$	**28**	0,4	$\sqrt{1-x^2}$
14	0,5	$x^2\cos 3x$	**29**	0,5	e^{-x^2}
15	0,5	$\ln(1+x^2)$	**30**	0,5	$\sqrt{1+x^3}$

Задание 4. Найти первые 5 членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях:

1 а) $y' = x^2 + y, \quad y(0) = 1;$

б) $y' = xy + \ln(y + x), \quad y(1) = 0.$

2 а) $y' = x^2 + e^y, \quad y(0) = 0;$

б) $y'' + xy' - (2x^2 + 1)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

3 а) $y' = 2\sin x + xy, \quad y(0) = 0;$

б) $y'' = y^3 + 3xy', \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 1.$

4 а) $y' = ye^x, \quad y(0) = 1;$

б) $y'' = 2yy', \quad y(-1) = 1, \quad y'(-1) = 0{,}5.$

5 а) $y' = xy + e^x, \quad y(0) = 0;$

б) $y' = 3xy - \cos y, \quad y(2) = 0.$

6 а) $y' = xy + x^2 + y^2, \quad y(0) = 1;$

б) $27x^3 y''' - 10y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0{,}33, \quad y''(1) = -0{,}22.$

7 а) $y' = xe^x + 2y^2, \quad y(0) = 0;$

б) $y'' = \dfrac{y'}{y} - \dfrac{1}{x}, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$

8 а) $y' = x - 2y^2, \quad y(0) = 0{,}5;$

б) $4x^2 y'' + y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0{,}5.$

9 а) $y' = 2x^2 - xy, \quad y(0) = 0;$

б) $y'' = e^y \cdot \sin y', \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = \dfrac{\pi}{2}.$

10 а) $y' = x\sin x - y^2, \quad y(0) = 1;$

б) $y'' = x^2 + y^2, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 0{,}5.$

11 а) $y' = 2x + y^2 + e^x, \quad y(0) = 1;$

б) $y''\cdot(1 - x) + y = 0, \quad y(-1) = y'(-1) = 1.$

12 а) $y' = xy - y^2, \quad y(0) = 0{,}2;$

б) $y' = 2x^2 - y^3, \quad y(1) = 1.$

13 а) $y' = e^{\sin x} + x, \quad y(0) = 0;$

б) $y'' + xy' - (x^2 + 2)y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1.$

14 а) $y' = x^2 + xy + y^2, \quad y(0) = 0{,}5;$

б) $6x^2 y'' + y = 0, \quad y(-1) = -1, \quad y'(-1) = -0{,}5.$

15 а) $y' = x^2 + 2y^2, \quad y(0) = 0{,}2;$
б) $9x^2 y'' - 5y = 0, \quad y(-1) = 1, \quad y'(-1) = -1.$

16 а) $y' = y\cos x + 2\cos y, \quad y(0) = 0;$
б) $y'' = e^y + \sin y', \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = \dfrac{\pi}{2}.$

17 а) $y' = x + e^y, \quad y(0) = 0;$
б) $(3x + 4) \cdot y' + y^2 = 0, \quad y(-6) = 1.$

18 а) $y' = e^{3x} + 2xy^2, \quad y(0) = 1;$
б) $y' = \dfrac{1 - x^2}{y} + y, \quad y(1) = 2.$

19 а) $y' = 2y^2 + ye^x, \quad y(0) = 0{,}33;$
б) $y'' = \dfrac{y'}{y} - \dfrac{1}{x}, \quad y(-1) = -1, \quad y'(-1) = 0.$

20 а) $y' = x^2 y^2 + y\sin x, \quad y(0) = 0{,}5;$
б) $y'' - x^2 + 4y^3 = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1.$

21 а) $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1;$
б) $y'' + 3x^2 - y^2 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1.$

22 а) $y' = x + y + y^2, \quad y(0) = 1;$
б) $5x^2 y'' + y' + 2y = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 1.$

23 а) $y' = e^x - y^2, \quad y(0) = 0;$
б) $y'' = y\cos x + x^2, \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = 0.$

24 а) $y' = 2\cos x - xy^2, \quad y(0) = 1;$
б) $xy' + y^2 + 4 = 0, \quad y(1) = 2.$

25 а) $y' = x + x^2 + y^2, \quad y(0) = 1;$
б) $y'' = \dfrac{y'}{y} - \dfrac{1}{x}, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0.$

26 а) $y' = x + y^2, \quad y(0) = -1;$

б) $y'' = e^y \cdot \cos y', \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = \pi.$

27 а) $y' = x^3 + y^2, \quad y(0) = 0{,}5;$

б) $y'' + xy' - (x^2 - 4)y = 0, \quad y(-1) = 1, \quad y'(-1) = 0.$

28 а) $y' = x^2 - y^2, \quad y(0) = 0{,}5;$

б) $y'' = 2y^2 - 4x^2, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = -1.$

29 а) $y' = x^2 y^2 + 1, \quad y(0) = 1;$

б) $y'' = \dfrac{2y'}{y} - \dfrac{1}{x}, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$

30 а) $y' = xy + e^y, \quad y(0) = 0;$

б) $3x^2 y'' + y'^2 - 4y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1.$

Задание 5. Разложить в ряд Фурье в указанном интервале периодическую функцию f (x) с периодом T = 2*l*. Построить графики функции и суммы ряда Фурье.

1	$f(x) = \lvert x \rvert, \quad -1 < x < 1, \quad l = 1.$	**2**	$f(x) = 2x, \quad -1 < x < 1, \quad l = 1.$
3	$f(x) = \lvert x \rvert - 5; \quad -2 < x < 2, \quad l = 2.$	**4**	$f(x) = e^x, \quad -2 < x < 2, \quad l = 2.$
5	$f(x) = \begin{cases} 1, & если \quad -1 \le x < 0, \\ x, & если \quad 0 < x \le 1, \end{cases} \quad l = 1.$	**6**	$f(x) = x, \quad 1 < x < 3, \quad l = 1.$
7	$f(x) = \begin{cases} 0, & если \quad -2 \le x < 0, \\ x, & если \quad 0 \le x < 1, \\ 2 - x, & если \quad 1 \le x \le 2, \end{cases} \quad l =$	**8**	$f(x) = 10 - x, \quad 5 < x < 15, \quad l = 5.$
9	$f(x) = \begin{cases} 1, & если \quad -1 \le x < 0, \\ \dfrac{1}{2}, & если \quad x = 0, \\ x, & если \quad 0 < x \le 1, \end{cases} \quad l = 1.$	**10**	$f(x) = 5x - 1, \quad -5 < x < 5, \quad l = 5.$
11	$f(x) = \begin{cases} 0, & если \quad -3 < x \le 0, \\ x, & если \quad 0 < x < 3, \end{cases} \quad l = 3.$	**12**	$f(x) = 3 - x, \quad -2 < x < 2, \quad l = 2.$
13	$f(x) = \begin{cases} x, & если \quad 0 < x < 1, \\ -1, & если \quad 1 < x < 2, \end{cases}$ $l = 1.$	**14**	$f(x) = \begin{cases} 0, & если \quad -2 < x < 0, \\ 2x, & если \quad 0 \le x < 2, \end{cases}$ $l = 2.$

15	$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если} \quad 0\le x<1,\\ 1, & \text{если} \quad 1\le x<2,\\ 3-x, & \text{если} \quad 2\le x\le 3,\end{cases}$ $l=1{,}5.$	**16**	$f(x)=2x-3, \quad -3<x<3, \quad l=3.$
17	$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0<x<\dfrac{3}{2},\\ \dfrac{6-2x}{3}, & \text{если} \quad \dfrac{3}{2}<x<3,\end{cases}$ $l=1{,}5.$	**18**	$f(x)=3-\lvert x\rvert, \quad -5<x<5, \quad l=5.$
19	$f(x)=\begin{cases} -x, & \text{если} \quad -4<x<0,\\ 1, & \text{если} \quad x=0,\\ 2, & \text{если} \quad 0<x<4,\end{cases}$ $l=4.$	**20**	$f(x)=1+x, \quad -1<x<1, \quad l=1.$
21	$f(x)=\begin{cases} -1, & \text{если} \quad -2<x<0,\\ -\dfrac{1}{2}, & \text{если} \quad x=0,\\ \dfrac{x}{2}, & \text{если} \quad 0<x<2,\end{cases}$ $l=2.$	**22**	$f(x)=2x+2, \quad -1<x<3, l=2.$
23	$f(x)=\begin{cases} 3, & \text{если} \quad -3<x<0,\\ \dfrac{3}{2}, & \text{если} \quad x=0,\\ -x, & \text{если} \quad 0<x<3,\end{cases} \qquad l=3.$	**24**	$f(x)=1-\lvert x\rvert, \quad -3<x<3, \quad l=3.$
25	$f(x)=\begin{cases} -2, & \text{если} \quad -4<x<0,\\ -\dfrac{1}{2}, & \text{если} \quad x=0,\\ 1+x, & \text{если} \quad 0<x<4,\end{cases} \qquad l=4.$	**26**	$f(x)=4x-3, \quad -5<x<5, \quad l=5.$
27	$f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{если} \quad -2<x<-1,\\ 1, & \text{если} \quad -1\le x\le 1,\\ 2-x, & \text{если} \quad 1<x<2,\end{cases} \qquad l=2.$	**28**	$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}, & \text{если} \quad -6<x<0,\\ x, & \text{если} \quad 0<x<6,\end{cases} \qquad l=6.$
29	$f(x)=\begin{cases} -2x, & \text{если} \quad -2<x<0,\\ 2, & \text{если} \quad x=0,\\ 4, & \text{если} \quad 0<x<2,\end{cases} \qquad l=2.$	**30**	$f(x)=x-4\pi, \quad 4\pi<x<5\pi,$ $l=\pi/2.$

Решение типового варианта аттестационной работы № 5
« Функциональные ряды»

1. Найти область сходимости функционального ряда.

$a)\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x^2-6x)^n}{5^n\cdot(2n^2+1)}.\qquad\qquad (1)$

Последовательность функции $u_n(x)=\dfrac{(x^2-6x)^n}{5^n\cdot(2n^2+1)}$ определена для $\forall x\in R.$ Ряд (1) знакочередующийся. Если $x\in(-\infty,\ 0)\cup(6,\ +\infty),$ то $x^2-6x>0.$ *Если* $x\in(0{,}6),$ *то* $x^2-6x<0.$ Значит, ряд (1) может сходиться абсолютно и условно.

Составим ряд из абсолютных величин

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left|x^2-6x\right|^n}{5^n\left(2n^2+1\right)}.\qquad\qquad (2)$

Применим к ряду (2), например, радикальный признак Коши

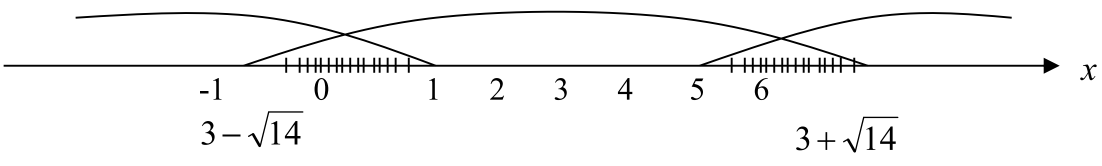
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|x^2-6x\right|}{\sqrt[n]{2n^2+1}}=\frac{\left|x^2-6x\right|}{5},\ т.к.\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n^2+1}=1.$$

Если $\dfrac{\left|x^2-6x\right|}{5}<1,$ то ряд (2) сходится, а ряд (1) сходится абсолютно.

Решаем неравенство $\left|x^2-6x\right|<5.$

$$\left(-5<x^2-6x<5\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-6x-5<0,\\ x^2-6x+5>0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)^2-14<0,\\ (x-3)^2-4>0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x-3|<\sqrt{14},\\ |x-3|>2.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-14<x-3<\sqrt{14},\\ \left[\begin{array}{l}x-3>2,\\ x-3<-2,\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-14<x<3+\sqrt{14},\\ \left[\begin{array}{l}x>5,\\ x<1.\end{array}\right.\end{cases}$$



Получаем интервалы абсолютной сходимости ряда (1)
$x\in(3\ -\sqrt{14};\ 1)\cup(5;\ 3+\sqrt{14}).$

Исследуем поведение ряда (1) в граничных точках интервалов, т.е. рассматриваем случай, когда

$$\frac{\left|x^2-6x\right|}{5}=1,\quad \left|x^2-6x\right|=5,\quad x_{1,2}=3\pm\sqrt{14},\quad x_3=1,\quad x_4=5.$$

Пусть $x_{1,2}=3\pm\sqrt{14},$ *тогда* $x^2-6x=?$

$$x_1^2-6x_1=\left(3-\sqrt{14}\right)^2-6\,(3-\sqrt{14})=9-6\sqrt{14}+14-18+6\sqrt{14}=5,$$

$$x_2^2-6x_2=\left(3+\sqrt{14}\right)^2-6\,(3+\sqrt{14})=9+6\sqrt{14}+14-18-6\sqrt{14}=5.$$

Подставляем $x_{1,2}$ в ряд (1). Получаем ряд вида

$$\sum_{n-1}^{\infty}\frac{5^n}{5^n\,(2n^2+1)}=\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{2n^2+1}\sim\int_1^{\infty}\frac{dx}{2x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^{\infty}\frac{d\left(\sqrt{2}\,x\right)}{\left(\sqrt{2}x\right)^2+1}=arctg\sqrt{2}x\Big|_1^{\infty}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-arctg\sqrt{2}\right)=0{,}43.$$

Отсюда следует сходимость данного ряда (1) при $x=3\pm\sqrt{14}.$

Пусть $x_3=1,\ x_4=5,\ x_3^2-6x_3=-5,\ x_4^2-6x_4=25-30=-5.$

Соответствующий ряд имеет вид $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{5^n\,(2n^2+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2+1}.$

Так как ряд из модулей сходится, то этот знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

Значит, область сходимости ряда (1): $x\in\left[3-\sqrt{14};\ 1\right]\cup\left[5;\ 3+\sqrt{14}\ \right]$

$$б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+4}\left(\frac{x+5}{4x-3}\right)^n \qquad (3)$$

Ряд (3) – знакочередующийся для всех $x\in\mathbf{R}$, кроме $x=\dfrac{3}{4}.$

Составим ряд из модулей (4) и применим признак Даламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+4}\cdot\left|\frac{x+5}{4x-3}\right|^n. \qquad (4)$$

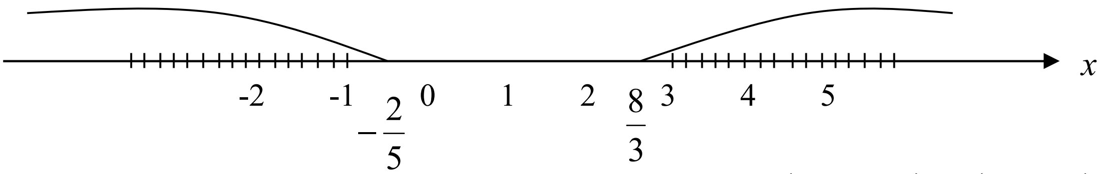
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{3n+7}\cdot\left|\dfrac{x+5}{4x-3}\right|^{n+1}}{\dfrac{1}{3n+4}\cdot\left|\dfrac{x+5}{4x-3}\right|^n}=\left|\frac{x+5}{4x-3}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{3n+7}=\left|\frac{x+5}{4x-3}\right|.$$

Если $\left|\dfrac{x+5}{4x-3}\right|<1,$ то ряд (4) сходится, а ряд (3) сходится абсолютно.

Решаем неравенство $-1<\dfrac{x+5}{4x-3}<1$.

$$\begin{cases}\dfrac{x+5}{4x-3}-1<0,\\ \dfrac{x+5}{4x-3}+1>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x+5-4x+3}{4x-3}<0,\\ \dfrac{x+5+4x-3}{4x-3}>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{-3x+8}{4x-3}<0,\\ \dfrac{5x+2}{4x-3}>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{3x-8}{4x-3}>0,\\ \dfrac{5x+2}{4x-3}>0,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x-3>0\\ 3x-8>0\\ 5x+2>0\end{cases}\\ \begin{cases}4x-3<0\\ 3x-8<0\\ 5x+2<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>\dfrac{8}{3}\\ x<-\dfrac{2}{5}\end{array}\right..$$



Область абсолютной сходимости ряда (1): $x\in\left(-\infty;\ -\dfrac{2}{5}\right)\cup\left(\dfrac{8}{3};\ +\infty\right)$.

Исследуем случай $\left|\dfrac{x+5}{4x-3}\right|=1,\quad |x+5|=|4x-3|$;

$$\left[\begin{array}{l}x+5=4x-3\\ x+5=-4x+3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{8}{3}\\ x_2=-\dfrac{2}{5}\end{array}\right..$$

Составим соответствующие числовые ряды.

При $x_1=\dfrac{8}{3}$ $\qquad \dfrac{x_1+5}{4x_1-3}=\dfrac{\frac{8}{3}+5}{4\cdot\frac{8}{3}-3}=\dfrac{8+15}{32-9}=\dfrac{23}{23}=1.$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+4}\sim\int_1^{\infty}\frac{dx}{3x+4}=\frac{1}{3}\ln(3x+4)\Big|_1^{\infty}=\infty.$$

Ряд (1) при $x=\dfrac{8}{3}$ расходящийся.

При $x_2=-\dfrac{2}{5}$ $\qquad \dfrac{x_2+5}{4x_2-3}=\dfrac{-\frac{2}{3}+5}{-4\cdot\frac{2}{5}-3}=\dfrac{-2+25}{-8-15}=-1.$

.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+4}=-\frac{1}{7}+\frac{1}{10}-\frac{1}{13}+\frac{1}{16}-\cdots+(-1)^n\,\frac{1}{3n+4}+\cdots$$

Этот знакочередующийся ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3n+4}=0,$

2. *члены ряда по абсолютной величине убывают*:

$\dfrac{1}{7}>\dfrac{1}{10}>\dfrac{1}{13}>\dfrac{1}{16}>\cdots>\dfrac{1}{3n+4}>\dfrac{1}{3n+7}>\cdots,$ *значит ряд сходится условно.*

Область сходимости функционального ряда (3):

$$x\in\left(-\infty,\ -\frac{2}{5}\right]\cup\left(\frac{8}{3};\ +\infty\right).$$

2. Найти область сходимости степенного ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x-3)^n \qquad (5)$$

Ряд (5) знакочередующийся для $\forall x\in R.$ Составим ряд из модулей и применим к нему признак Даламбера : $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}|x-3|^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,|x-3|^{n+1}\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!\,|x-3|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(n+1)\,|x-3|\cdot n^n}{(n+1)\cdot(n+1)^n}=$$

$$=|x-3|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{|x-3|}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{|x-3|}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{|x-3|}{e}.$$

Если $\dfrac{|x-3|}{e}<1,$ *т.е.* $-e<x-3<e,\ \ 3-e<x<3+e,$ то данный ряд сходится абсолютно.

Исследуем сходимость степенного ряда при $x=3\pm e$:

если $x=3-e,$ *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n!\,e^n}{n^n},$

если $x=3+e,$ *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!\,e^n}{n^n}$

Воспользуемся формулой Стирлинга

$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\Theta}{12n}}$, *где* $0 < \Theta < 1$; *Отсюда* $\frac{n!e^n}{n^n} \approx \sqrt{2\pi n}$. *Значит* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2\pi n} = \infty$, *т. е. нарушен необходимый признак сходимости и при* $x = 3 \pm e$ *соответствующие ряды расходятся*.

Область абсолютной сходимости исходного ряда $x \in (3-e;\ 3+e)$.

3. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$a)\quad \int\limits_0^{0,5}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{1+2x^2}}.$$

Выпишем подынтегральную функцию

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x^2}} = x^2\left(1+2x^2\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

Воспользуемся биномиальным разложением

$$(1+t)^\alpha = 1+\alpha t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}t^4+\cdots,$$

справедливым при $|t| < 1$.

Полагаем $t = 2x^2$, $\alpha = -\frac{1}{3}$, получим разложение в степенной ряд для функции $f(x)$:

$$f(x) = x^2\left(1-\frac{1}{3}\cdot 2x^2+\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}{2!}(2x^2)^2+\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)}{3!}(2x^2)^3+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)}{4!}(2x^2)^4+\cdots\right) = x^2\left(1-\frac{2}{3}x^2+\frac{1\cdot4\cdot2^2}{3^2\cdot2!}x^4-\frac{1\cdot4\cdot7\cdot2^3}{3^3\cdot3!}x^6+\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot4\cdot7\cdot10\cdot2^4}{3^4\cdot4!}x^8-\cdots\right) = x^2-\frac{2}{3}x^4+\frac{16}{9\cdot2}x^6-\frac{1\cdot4\cdot7\cdot10\cdot2^3}{3^3\cdot3!}x^8+\frac{1\cdot4\cdot7\cdot10\cdot2^4}{3^4\cdot4!}x^{10}-\cdots.$$

Полученный ряд сходится, если $2x^2 < 1$, т.е. $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Отрезок интегрирования $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ целиком лежит в интервале сходимости.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1+2x^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{8}{9}x^6 - \frac{112}{81}x^8 + \frac{560}{243}x^{10} - \cdots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2}{15}x^5 + \frac{8}{63}x^7 - \frac{112}{729}x^9 + \frac{560}{2673}x^{11} - \cdots \right)\Bigg|_0^{0,5} = \frac{(0,5)^3}{3} - \frac{2\cdot(0,5)^5}{15} + \frac{8\cdot(0,5)^7}{63} -$$

$$- \frac{112\cdot(0,5)^9}{2673} + \frac{560\cdot(0,5)^{11}}{2673} - \cdots \approx 0,0417 - 0,0042 + 0,0010 - 0,0003 + 0,0001 =$$
$$= 0,0383 \approx 0,038.$$

Вычисления проводим с одним запасным десятичным знаком, учитывая погрешность округления.

б) $\int_0^1 e^{x^2} dx.$

Используя разложение e^x, имеем

$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$, сходится абсолютно для $\forall x \in R$.

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \int_0^1 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots \right) dx =$$

$$= \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} + \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!} + \cdots \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} + \frac{1}{3!7} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)n!} + \cdots .$$

Чтобы выяснить, сколько членов полученного знакоположительного ряда надо взять для вычисления его суммы с точностью до $\varepsilon = 0,001$, оценим остаток ряда:

$$r_n = \frac{1}{(2n+1)\cdot n!} + \frac{1}{(2n+3)\cdot(n+1)!} + \frac{1}{(2n+5)\cdot(n+2)!} + \cdots < \frac{1}{(2n+1)\cdot n!} +$$

$$+ \frac{1}{(2n+1)\cdot(n+1)\cdot n!} + \frac{1}{(2n+1)\cdot(n+1)^2\cdot n!} + \cdots =$$

$$=\frac{1}{(2n+1)\cdot n!}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right)=\frac{1}{(2n+1)\cdot n!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{n+1}{(2n+1)\cdot n\cdot n!}$$

$$r_n<\frac{1}{(2n+1)\cdot n!}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Подставляя различные значения n, найдем наименьшее n, при котором $r_n<0{,}001$ или

$$\frac{(2n+1)\cdot n!\cdot n}{n+1}>1000.$$

При $n=4$ $\frac{9\cdot4\cdot24}{5}<1000;$ при $n=5$ $\frac{11\cdot5\cdot120}{6}=1100>1000.$

Значит, для вычисления данного интеграла с точностью до 0,001 достаточно вычислить частичную сумму S_5, т.е.

$$\int_0^1 e^{x^2}dx\approx1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot2!}+\frac{1}{7\cdot3!}+\frac{1}{9\cdot4!}\approx1+0{,}3333+0{,}1000+0{,}0238+0{,}0046=$$
$$=1{,}4617\approx1{,}462.$$

4. Найти в виде степенного ряда решение дифференциальных уравнений при указанных начальных условиях.

а) $y''=x\cdot y'+e^x$, $y(0)=2,\ y'(0)=0$.

б) $y''=2xy'+\cos y,\ y(0)=0, y'(0)=4$.

в) $x^2y'+xy^2+4=0,\ y(1)=-1$.

Искать решение задачи Коши можно методом неопределенных коэффициентов или в виде ряда Тейлора для искомой функции.

а) $y''=xy'+e^x$, $y'(0)=2,\ y'(0)=0.$

Имеем линейное ДУ 2-го порядка . Запишем искомую функцию $y(x)$ в виде ряда по степеням x, т.к. $x_0=0$.

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

$$y(0)=a_0=2.$$

Находим y' и y''

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots,$$

$$y'(0)=0,\ a_1=0.$$

$$y''=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots.$$

Подставляем разложения для функций y', y'', e^x в данное уравнение с учетом $a_0 = 2,\ a_1 = 0.$

$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots =$$
$$= x\left(2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots\right) +$$
$$+\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x

$$\begin{array}{c|l}
x^o & 2a_2 = 1,\ a_2 = 1/2, \\
x^1 & 6a_3 = 1,\ a_3 = 1/6, \\
x^2 & 12a_4 = 2a_2 + \dfrac{1}{2!},\ 12a_4 = \dfrac{3}{2},\ a_4 = \dfrac{3}{24} = \dfrac{1}{8}, \\
x^3 & 20a_5 = 3a_3 + \dfrac{1}{3!},\ \ 20a_5 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6};\ \ a_5 = \dfrac{1}{20}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{30}, \\
x^4 & 30a_6 = 4a_4 + \dfrac{1}{4!},\ \ 30a_6 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{24},\ \ a_6 = \dfrac{1}{30}\cdot\dfrac{13}{24} = \dfrac{13}{720}, \\
x^5 & 42a_7 = 5a_5 + \dfrac{1}{5!},\ \ 42a_7 = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{120},\ \ a_7 = \dfrac{21}{120\cdot 42} = \dfrac{1}{240}, \\
\cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\
x^n & (n+2)(n+1)a_{n+2} = na_n + \dfrac{1}{n!}.
\end{array}$$

Искомое решение задачи Коши имеет вид:

$$y(x) = 2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \frac{13}{720}x^6 + \frac{1}{240}x^7 + \cdots \ .$$

б) $y'' = 2xy' + \cos y,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 4.$

Решение данного *нелинейного* уравнения будем искать в виде ряда Маклорена $(x_0 = 0)$ для функции $y = y(x)$:

$$y(x) = y(0) + y'(0)\cdot x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots .$$

Из начальных условий $y(0) = 0,\ y'(0) = 4;$ из уравнения

$y''(0) = 2\cdot 0\cdot y'(0) + \cos y(0) = \cos 0 = 1.$

Последовательно дифференцируем уравнение, находим значения производных любого порядка:

$y'''(x) = 2y' + 2xy'' - \sin y \cdot y'$;

$y'''(0) = 2y'(0) + 2 \cdot 0 \cdot y''(0) - \sin y(0) \cdot y'(0) = 2 \cdot 4 = 8.$

$y^{(4)} = 2y'' + 2y'' + 2xy''' - \cos y \cdot (y')^2 - \sin y \cdot y''$; $y^{(4)}(0) = 4 \cdot 1 - 16 = -12.$

$y^{(5)} = 6y''' + 2xy^{(4)} + \sin y \cdot (y')^3 - 2y' \cdot y'' \cdot \cos y - \cos y \cdot y' \cdot y'' - \sin y \cdot y'''$,

$y^{(5)} = 6 \cdot 8 - 3 \cdot 4 \cdot 1 = 48 - 12 = 36$

и так далее.

Выписываем решение исходного дифференциального уравнения:

$$y(x) = 4x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{8}{3!}x^3 - \frac{12}{4!}x^4 + \frac{36}{5!}x^5 + \cdots = 4x + \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{10}x^5 + \cdots .$$

в) $x^2 y' + xy^2 + 4 = 0, \quad y(1) = -1.$

Дано нелинейное ДУ первого порядка , $x_0 = 1, \; y_0 = -1.$

Решение ищем в виде ряда Тейлора для функции $y(x)$:

$$y(x) = y(1) + y'(1) \cdot (x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{y^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \cdots .$$

ДУ дано в виде неразрешенном относительно y'. Подставим $y(1) = -1$ в уравнение: $1 \cdot y'(1) + 1 \cdot y^2(1) + 4 = 0, \; y'(1) = -(-1)^2 - 4 = -5.$

Дифференцируем последовательно само ДУ, затем подставляем значения $x_0 = 1, \; y_0 = -1$ и соответствующих производных.

$(x^2 y' + xy^2 + 4)' = 0.$

$2xy' + x^2 y'' + y^2 + 2xyy' = 0; \quad 2 \cdot 1 \cdot y'(1) + 1 \cdot y''(1) + y^2(1) + 2 \cdot y(1) y'(1) = 0$

$2 \cdot 1 \cdot (-5) + y''(1) + 1 + 2 \cdot (-1)(-5) = 0; \quad y''(1) = 10 - 1 - 10 = -1.$

$(2xy' + x^2 y'' + y^2 + 2xyy')' = 0$

$2y' + 2xy'' + 2xy'' + x^2 y''' + 2yy' + 2yy' + 2x \cdot (y')^2 + 2xyy'' = 0.$

$2y' + 4xy'' + x^2 y''' + 4yy' + 2xy'^2 + 2xyy'' = 0.$

$-10 - 4 + y'''(1) + 20 + 50 + 2 \cdot (-1)(-1) = 0, \quad y'''(1) = -72 + 14 = -58.$

и т.д.

Следовательно, искомое частное решение имеет вид:

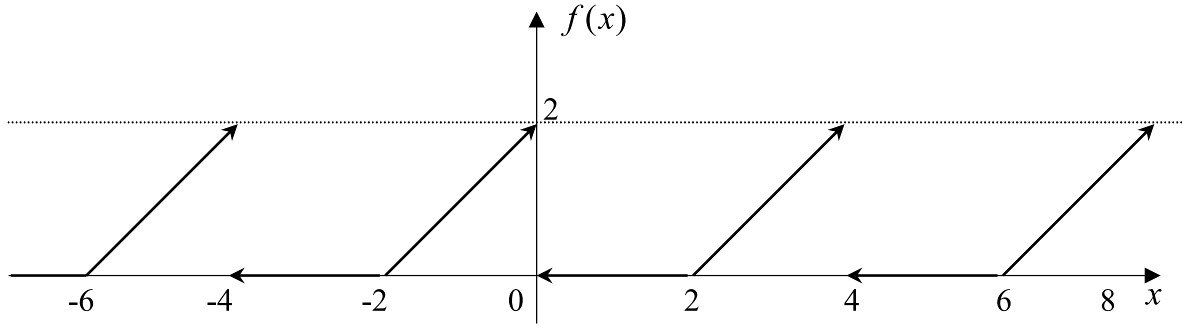
$$y(x) = -1 - 5(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{58}{6}(x-1)^3 + \cdots =$$

$$= -1 - 5(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{29}{3}(x-1)^3 + \cdots .$$

5. Разложить в ряд Фурье в указанном интервале периодическую функцию $f(x)$ с периодом $T = 2l$.

а) $f(x) = \begin{cases} x+2, \ \text{если} \ x \in [-2;0), \\ 0, \ \text{если} \ \ x \in [0,2), \end{cases}$ $T = 4, \, l = 2.$

Построим график периодической функции $f(x)$



Данная функция на интервале $(-2;2)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле (она кусочно-непрерывна, имеет одну точку конечного разрыва). Во всех точках непрерывности она разложима в ряд Фурье.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \, l = 2,$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \ \ n \geq 1.$$

Вычислим коэффициенты Фурье.

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(x+2)dx = \frac{1}{4}(x+2)^2\Bigg|_{-2}^{0} = \frac{4}{4} = 1.$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(x+2)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \left| \begin{array}{c} u = x+2, \\ dv = \cos\frac{n\pi x}{2}dx, \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\left(\frac{2(x+2)}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_{-2}^{0} - \frac{2}{n\pi}\int_{-2}^{0}\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\int_{-2}^{0}\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{2}{n^2\pi^2}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_{-2}^{0} = \frac{2}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi) = \frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2}.$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(x+2)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\left|\begin{aligned}u&=x+2,\\ dv&=\sin\frac{n\pi x}{2}dx,\end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned}&du=dx\\ &v=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\end{aligned}\right|=\frac{1}{2}\left(\frac{-2(x+2)}{n\pi}\cdot cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_{-2}^{0}+\frac{2}{n\pi}\int_{-2}^{0}\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{n\pi}+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_{-2}^{0}\right)=-\frac{2}{n\pi}.$$

Выписываем ряд Фурье функции $f(x)$:

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n\pi}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}=\frac{1}{2}+$$

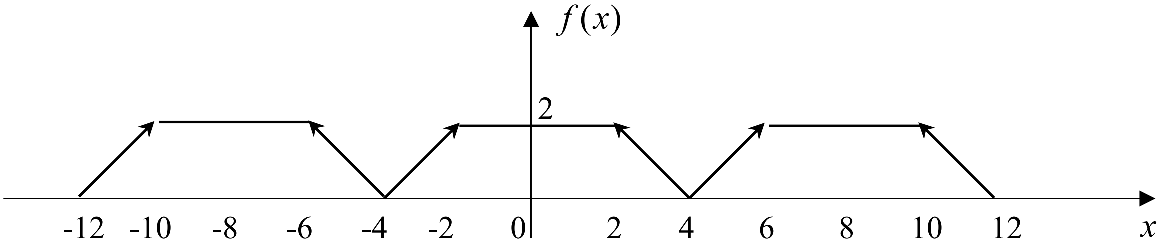
$$+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Этот ряд сходится к функции $f(x)$ во всех точках непрерывности. В точках разрыва функции

$x=2m,\ m\in \mathrm{Z}$ *сумма ряда* $S(x)=\dfrac{2+0}{2}=1.$

б) $f(x)=\begin{cases}4+x, & \text{если} \quad -4\le x\le -2,\\ 2, & \text{если} \quad -2<x\le 2,\\ 4-x, & \text{если} \quad 2<x\le 4.\end{cases}$

Построим график функции $f(x)$; *период* $T=8,\ l=4.$



Данная функция четная, $f(-x) = f(x)$. Она непрерывна на всей числовой оси. Значит, ее можно представить рядом Фурье по косинусам кратных дуг, причем $f(x) = S(x)$ *для* $\forall x \in R$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \ n \geq 0.$$

Вычисляем коэффициенты ряда

$$a_0 = \frac{2}{4}\int_0^4 f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 2dx + \int_2^4 (4-x)dx\right) = \frac{1}{2}\left(2x\Big|_0^2 - \frac{(4-x)^2}{2}\Big|_2^4\right) = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{4}{2}\right) = 3.$$

$$a_n = \frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi x}{4}dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 2\cos\frac{n\pi x}{4}dx + \int_2^4 (4-x)\cos\frac{n\pi x}{4}dx\right) = \int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{4}dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_2^4 (4-x)\cos\frac{n\pi x}{4}dx = \left|\begin{matrix} u = 4-x, \ du = -dx \\ dv = \cos\frac{n\pi x}{4}dx, \ v = \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{4}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{4}\Big|_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{4(4-x)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\Big|_2^4 + \frac{4}{n\pi}\int_2^4 \sin\frac{n\pi x}{4}dx\right) =$$

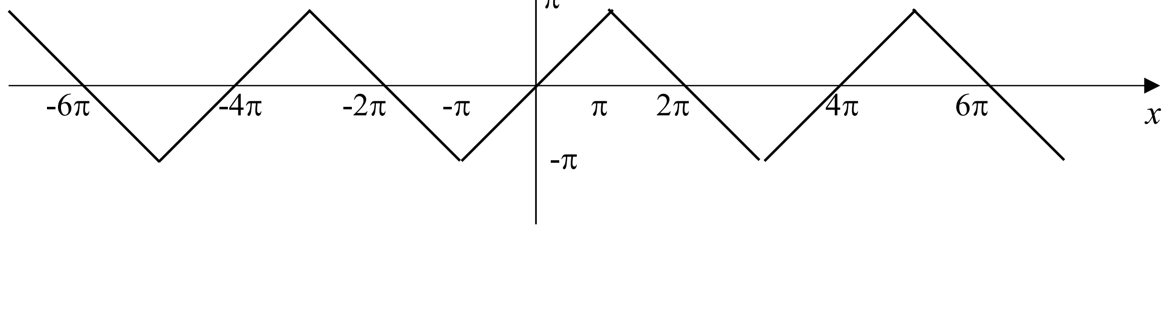
$$= \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{4\cdot 2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{n\pi}\cdot\left(-\frac{4}{n\pi}\right)\cdot\cos\frac{n\pi x}{4}\Big|_2^4 = \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} -$$

$$-\frac{8}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{8}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right).$$

Выписываем ряд Фурье для данной функции

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right)\cos\frac{n\pi x}{4}. \quad f(x) = S(x) \ \text{для} \ \forall x \in R.$$

в) Функция $f(x)$ задана графически



На интервале $(-2\pi;\ 2\pi)$ задана нечетная функция периода $T=4\pi$. Достаточно знать ее аналитическое выражение на интервале $(0;\ 2\pi)$. Так как функция непрерывна, то ее ряд Фурье (ряд по синусам кратных дуг) будет сходиться к этой функции для $\forall x \in R$.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},\quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ l=2\pi.$$

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если} \quad 0\le x\le \pi, \\ 2\pi - x, & \text{если} \quad \pi < x \le 2\pi. \end{cases}$$

Вычисляем коэффициенты b_n :

$$b_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} x\sin\frac{nx}{2}dx+\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi-x)\sin\frac{nx}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(I_1+I_2\right).$$

$$I_1=\int_0^{\pi} x\sin\frac{nx}{2}dx=\left|\begin{matrix} u=x, & du=dx \\ dv=\sin\frac{nx}{2}dx, & v=-\frac{2}{n}\cos\frac{nx}{2}\end{matrix}\right|=-\frac{2x}{n}\cos\frac{nx}{2}\Bigg|_0^{\pi}+$$

$$+\frac{2}{n}\int_0^{\pi}\cos\frac{nx}{2}dx=-\frac{2\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2}\sin\frac{nx}{2}\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{2\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2};$$

$$I_2=\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi-x)\sin\frac{nx}{2}dx=\left|\begin{matrix} u=2\pi-x, & du=-dx \\ dv=\sin\frac{nx}{2}dx, & v=-\frac{2}{n}\cos\frac{nx}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{2(2\pi-x)}{n}\cos\frac{nx}{2}\Bigg|_{\pi}^{2\pi}-\frac{2}{n}\cdot\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{nx}{2}dx=\frac{2\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2}\sin\frac{nx}{2}\Bigg|_{\pi}^{2\pi}=$$

$$=\frac{2\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{8}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad n=2k \\ \dfrac{8(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)^2}, & \text{если} \quad n=2k-1. \end{cases}$$

Получаем ряд Фурье

$$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)x}{2} \quad \text{для } \forall x\in R.$$

С помощью полученного разложения можно вычислять суммы некоторых числовых рядов.

На интервале $[0;\pi]$ справедливо равенство:

$$x=\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{1^2}-\frac{\sin\frac{3x}{2}}{3^2}+\frac{\sin\frac{5x}{2}}{5^2}-\frac{\sin\frac{7x}{2}}{7^2}+\frac{\sin\frac{9x}{2}}{9^2}-\cdots\right).$$

При $x=\pi$ получаем сходящийся числовой ряд. Определим его сумму:

$$\pi=\frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{(-1)}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{(-1)}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\cdots\right),\ \pi=\frac{8}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

При $x=\frac{\pi}{2}$ $\quad \sin\frac{(2k-1)\pi}{4}=\begin{cases}\sqrt{2}/2 & \textit{при}\quad k=1,\quad k=2,\\ -\sqrt{2}/2 & \textit{при}\quad k=3,\quad k=4.\end{cases}$

Подставим эти значения в ряд Фурье, получим:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{8}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7_2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}-\frac{1}{13^2}-\frac{1}{15^2}+\cdots\right)$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{8}{\sqrt{2}\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n-2}{2}}\cdot\frac{1}{(2n-1)^2};$$

Отсюда следует, что сумма ряда равна

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n-2}{2}}\cdot\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}.$$

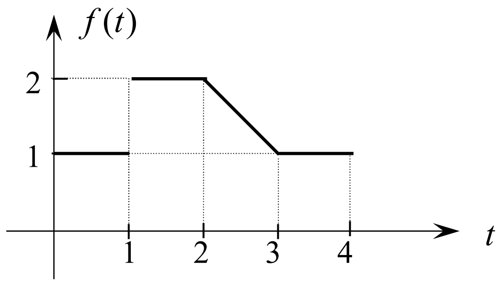
АТТЕСТАЦИОННАЯ РАБОТА № 6

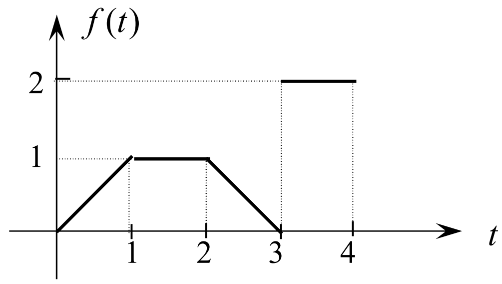
«Операционное исчисление и его приложения»
Теоретические вопросы

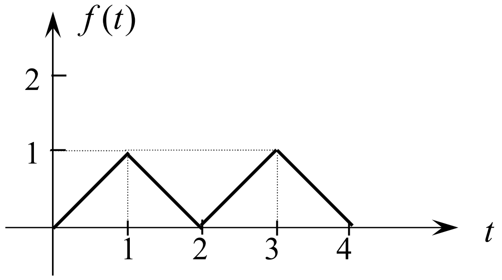
1. Какая функция $f(t)$ называется оригиналом ?
2. Дайте определение изображения $F(p)$.
3. Запишите таблицу основных операционных формул.
4. Теоремы подобия и запаздывания в оригинале.
5. Теорема смещения в изображении.
6. Теоремы о дифференцирование оригинала и изображения.
7. Свертка оригиналов. Теорема Бореля.
8. Перечислите способы нахождения оригинала по заданному изображению.
9. Схема решение задачи Коши для линейных ДУ и систем ДУ с постоянными коэффициентами операционным способом.

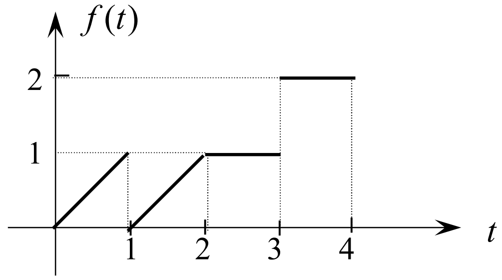
Практические задания

Задание 1. Найти изображение функции $f(t)$, возникающей при обработке графической информации, снимаемой с электронных осциллографов:

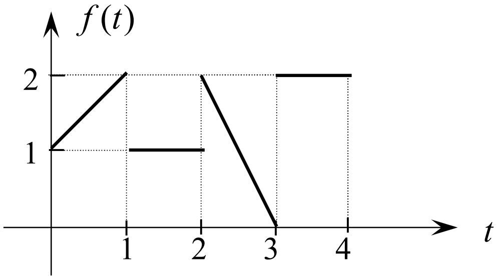
1.


2.


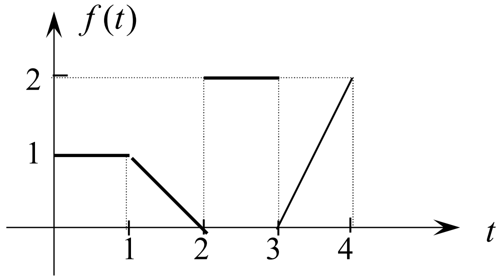
3.


4.


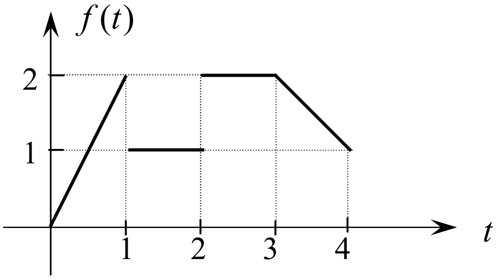
5.



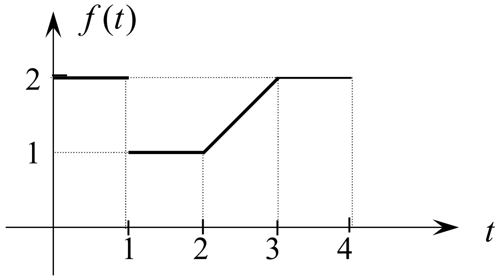
6.



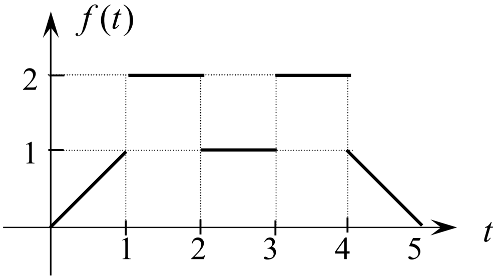
7.



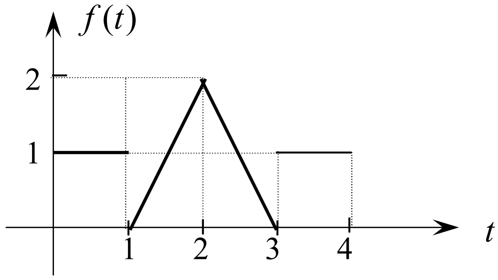
8.



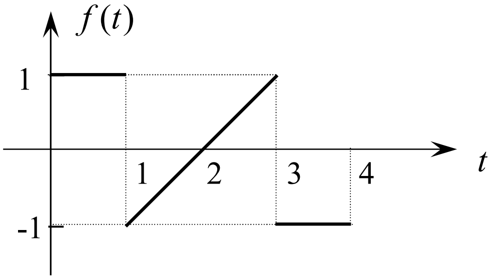
9.



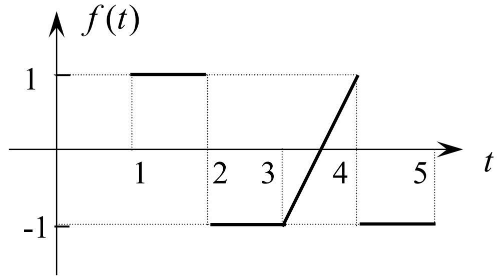
10.



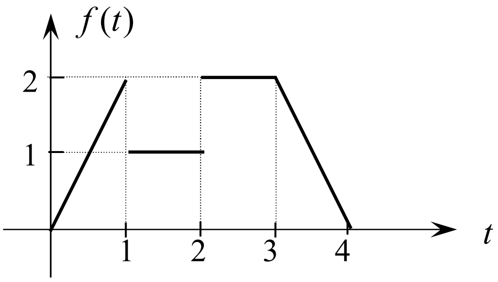
11.



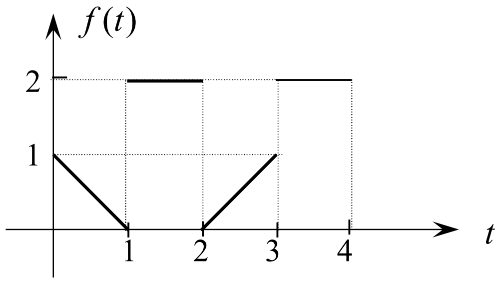
12.



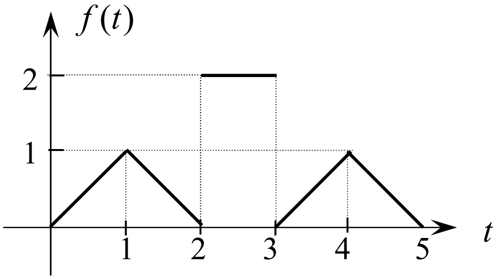
13.



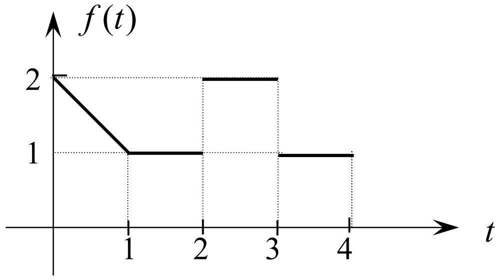
14.



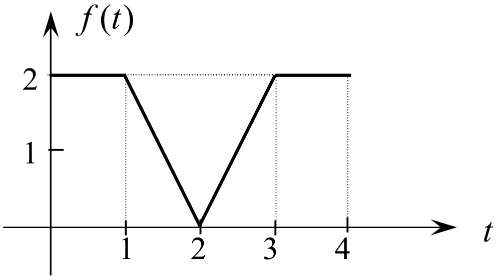
15.



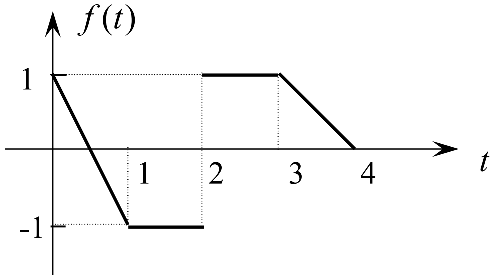
16.



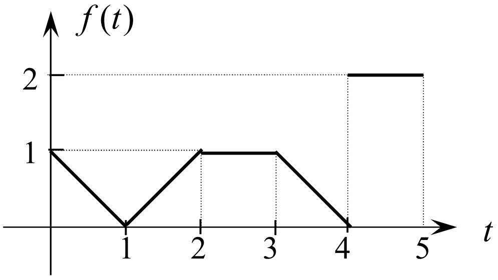
17.



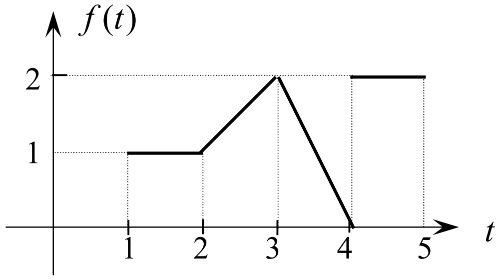
18.



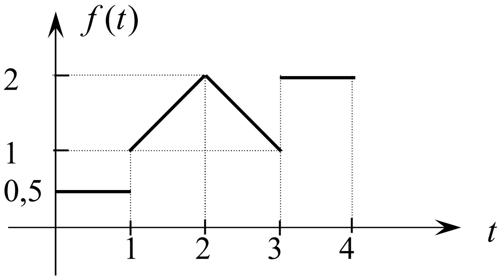
19.



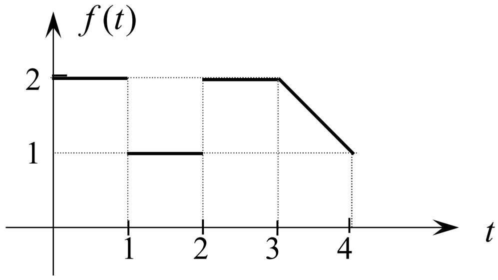
20.



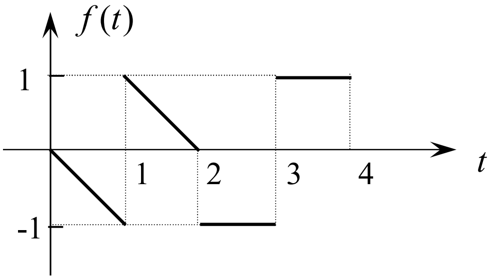
21.



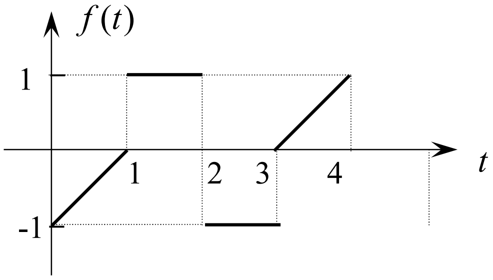
22.



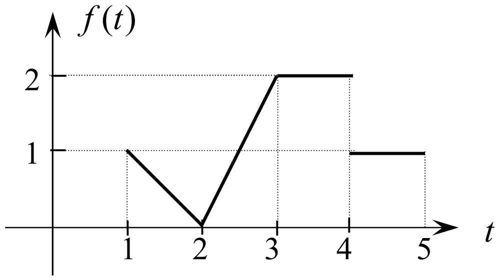
23.



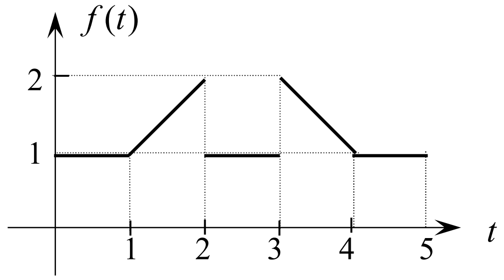
24.



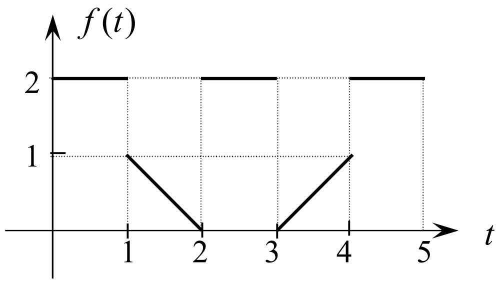
25.



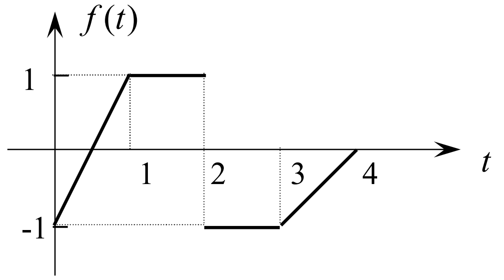
26.



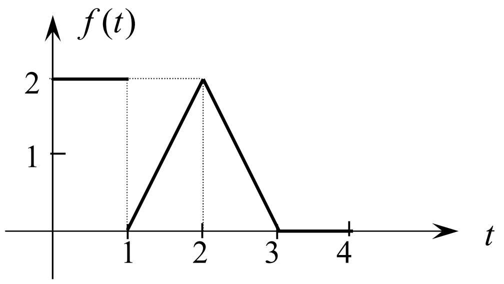
27.



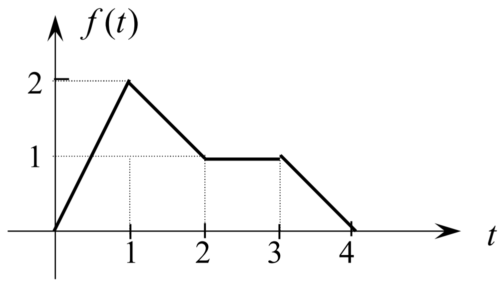
28.



29.



30.



Задание 2. Построить график и найти изображение функции $f(t) = \varphi(t) \cdot \eta(t - \tau)$. Пояснить, какой процесс описывает функция $f(t)$.

1	$\varphi(t) = t^2 - 6t + 11,\ \tau = 1.$	**2**	$\varphi(t) = t^2 - 2t + 3,\ \tau = 1.$
3	$f(t) = t - (t - 3) \cdot \eta(t - 1);$	**4**	$\varphi(t) = t^2 - 4t + 3,\ \tau = 3.$
5	$\varphi(t) = t^2 - 8t + 17,\ \tau = 3$	**6**	$f(x) = 5 - 2t \cdot \eta(t - 2) + \eta(t - 3).$
7	$\varphi(t) = 2t^2 + 4t + 5,\ \ \tau = 2$	**8**	$\varphi(t) = t^2 - 4t + 5,\ \tau = 4.$
9	$f(t) = \sin t \cdot \left(\eta(t - 2\pi) - \eta(t - 3\pi)\right)$	**10**	$\varphi(t) = 3t^2 + 12t - 1,\ \tau = 2.$
11	$\varphi(t) = 1 - 2t + t^2,\ \tau = 3.$	**12**	$f(t) = 2\left(1 - \eta\left(t - 0{,}5\right)\right) - \eta\left(t - 1{,}5\right) +$ $+ \sin 2\pi t \cdot \eta\left(t - 0{,}5\right) - \eta\left(t - 1{,}5\right).$

13	$\varphi(t)=t^2-8t+17,\ \tau=2.$	**14**	$\varphi(t)=t^2-2t+4,\ \tau=0{,}5.$
15	$f(t)=(t^2-5t+4)\cdot\eta(t-1)+$ $+(t^2-3t)\cdot\eta(t-3).$	**16**	$\varphi(t)=t^2-2t-3,\ \tau=2.$
17	$\varphi(t)=t^2+4t+5, \tau=3.$	**18**	$f(t)=\left(1+e^{-t}\right)\cdot\eta(t-1).$
19	$\varphi(t)=e^{-t},\ \ \tau=1{,}5.$	**20**	$f(t)=t-t\eta\left(t-1{,}5\right).$
21	$\varphi(t)=t^2-t+2,\ \tau=0{,}5.$	**22**	$\varphi(t)=\sin t,\ \tau=\frac{\pi}{3}.$
23	$f(t)=3-\frac{3}{2}(t-4)\eta(t-4)+$ $+\frac{3}{2}(t-6)\eta(t-6).$	**24**	$\varphi(t)=t^2-2t+3,\ \tau=4.$
25	$\varphi(t)=t^2-8t+15,\ \tau=2.$	**26**	$\varphi(t)=4-t^2,\ \tau=3.$
27	$\varphi(t)=t^2+t+\frac{3}{4}, \tau=0{,}5.$	**28**	$\varphi(t)=3t^2+4t-7,\ \tau=2.$
29	$\varphi(t)=4t^2-5t+8,\ \tau=1.$	**30**	$\varphi(t)=2t^2-6t-10,\ \tau=3.$

Задание 3. Найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p)$:

1	$\frac{1}{p^2+4p+5}.$	**2**	$\frac{1}{p^3+2p^2+p}.$
3	$\frac{1}{(p-1)^2\cdot(p+2)}.$	**4**	$\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}.$
5	$\frac{p^2+1}{p^2(p-1)^2}.$	**6**	$\frac{p^2-p+2}{p^3-p^2-6p}.$
7	$\frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}.$	**8**	$\frac{1}{(p-1)^2(p+2)^3}.$
9	$\frac{1}{(p-1)^2(p^3+1)}.$	**10**	$\frac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}.$
11	$\frac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}.$	**12**	$\frac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}.$
13	$\frac{p^2+2p-1}{p^3-2p^2+2p-1}.$	**14**	$\frac{2p+3}{p^3+1}.$

15	$\dfrac{p+1}{p^3-1}$.	**16**	$\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$.
17	$\dfrac{p^3}{(p^2-1)(p^2+1)}$	**18**	$\dfrac{p-1}{(p+1)(p^2+1)}$.
19	$\dfrac{p^2+p+1}{(p-1)(p+1)^2}$.	**20**	$\dfrac{2p^2-4p+8}{(p-2)^2(p^2+4)}$.
21	$\dfrac{5p^3+5p^2-11p+3}{p^3(p+3)}$.	**22**	$\dfrac{2p^2-4p+8}{(p-2)(p^2+4)}$.
23	$\dfrac{p+2}{(p-1)(p-2)(p^2+1)}$.	**24**	$\dfrac{p}{p^4-5p^2+4}$.
25	$\dfrac{p+3}{p^2+6p+11}$.	**26**	$\dfrac{3p+2}{p^2+4p+6}$.
27	$\dfrac{p}{p^4-3p^2+2}$.	**28**	$\dfrac{2-3p}{(p-2)(p^2-4p+5)}$
29	$\dfrac{4p^2+13p+27}{(p-3)(p^2+2p+5)}$	**30**	$\dfrac{3p+2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$

Задание 4. Решить операционным методом задачи Коши, возникающие при построении системы автоматического регулирования технологическим процессом:

1 а). $x''+3x'=e^{-3t}$, $x(0)=0;\ x'(0)=-1$.

б). $\begin{cases}\dot{x}=-y;\\ \dot{y}=2x+2y; \quad x(0)=y(0)=1.\end{cases}$

2 а). $x''-9x=sht;\ x(0)=-1;\ x'(0)=3;$

б). $\begin{cases}\dot{x}=3y-x;\\ \dot{y}=y+x+e^t; \quad x(0)=y(0)=1.\end{cases}$

3 а). $x'''+x'=1; \quad x''(0)=x'(0)=x(0)=0;$

б) $\begin{cases}\dot{x}=x-y;\\ \dot{y}=x+y;\ x(0)=1;\ y(0)=0.\end{cases}$.

4 а). $x'' - 2x' + 5x = 1 - t;\ x(0) = x'(0) = 0.$

б). $\begin{cases} \dot{x} + 4x - y = 0; \\ \dot{y} = -2x - y;\ x(0) = 2; y(0) = 3. \end{cases}$

5 а). $x'' + 2x' + x = 2\cos^2 t;\ \ x(0) = x'(0) = 0;$

б). $\begin{cases} \dot{x} + 7x - y = 0; \\ \dot{y} + 2x + 5y = 0;\ x(0) = 1;\ y(0) = 0. \end{cases}$

6 а). $x'' + x = 2\sin t;\ \ \ x(0) = 1;\ x'(0) = -1;$

б). $\begin{cases} \dot{x} - x + 2y = 3; \\ 3\dot{x} + \dot{y} - 4x + 2y = 0;\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

7 а). $x'' + 3x' + 2x = 1 + t + t^2;\ \ \ x(0) = 0;\ x'(0) = 1;$

б). $\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = 0; \\ \dot{x} - 2\dot{y} + x = 0;\ \ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

8 а). $x''' + 3x'' - 4x = 0;\ \ \ x(0) = x'(0) = 0; x''(0) = 2.$

б). $\begin{cases} \dot{x} + y = 0; \\ \dot{y} - 2x - 2y = 0;\ x(0) = y(0) = 1 \end{cases}$

9 а). $x'' + 4x = t;\ x(0) = 1;\ \ x'(0) = 0;$

б). $\begin{cases} \dot{x} = y + z; \\ \dot{y} = x + z; \\ \dot{z} = x + y;\ \ \ x(0) = 1;\ y(0) = z(0) = 0. \end{cases}$

10 а). $x''' + x = 0;\ \ \ x(0) = 1;\ \ x'(0) = -1;\ \ x''(0) = 2;$

б). $\begin{cases} \dot{x} - x - 2y = t; \\ \dot{y} - 2x - y = t;\ \ x(0) = 2;\ \ y(0) = 4. \end{cases}$

11 а). $x'' + 2x' + x = e^t;\ \ x(0) = 0;\ \ x'(0) = 1;$

б). $\begin{cases} 3\dot{x} + \dot{y} + 2x = 1; \\ \dot{x} + 4\dot{y} + 3y = 0;\ \ \ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

12 а). $x'' + 2x' + x = t^2; \quad x(0) = x'(0) = 1;$

б). $\begin{cases} \dot{x} = y - z; \\ \dot{y} = z - 2x; \\ \dot{z} = 2x - y;\ x(0) = 1;\ y(0) = z(0) = 1. \end{cases}$

13 а) $x'' + 2x' + 2x = 1; \quad x(0) = x'(0) = 0;.$

б). $\begin{cases} \dot{x} - x - 2y = t; \\ \dot{y} - 2x - y = t;\ x(0) = 2;\ y(0) = 4. \end{cases}$

14 а). $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1; \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0;$

б). $\begin{cases} 3\dot{x} + \dot{y} + 2x = 1; \\ \dot{x} + 4\dot{y} + 3y = 0;\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

15 а). $x'' + 2x' + x = t;\ x(0) = x'(0) = 0;$

б). $\begin{cases} \dot{x} + y + 3x = 0; \\ \dot{y} - x + y = 0; \quad x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

16 а). $x''' + x'' = t;\ x(0) = -3; \quad x'(0) = 1;\ x''(0) = 6;$

б). $\begin{cases} \dot{x} + y = 0; \\ \dot{y} - 2y - 2x = 0;\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

17 а). $x'' - x' + x = e^{-t}; \quad x(0) = 0;\ x'(0) = 1;$

б). $\begin{cases} \dot{x} + 4x + 4y = 0; \\ \dot{y} + 2x + 6y = 0; \quad x(0) = 3;\ y(0) = 15 \end{cases}$

18 а). $x'' + 2x' + 5x = 3;\ x(0) = 1;\ x'(0) = 0;$

б). $\begin{cases} \dot{x} = y + z; \\ \dot{y} = 3x + z; \\ \dot{z} = 3x + y; \quad x(0) = y(0) = z(0) = 1. \end{cases}$

19 а). $x'' - x' = \cos t; \quad x(0) = -1;\ x'(0) = 1;$

б). $\begin{cases} \dot{x} + 5x - 2y = e^t; \\ \dot{y} - x + 6y = e^{-2t}; \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

20 а). $x'' - x' = t \cdot e^{t}$; $x(0) = 1$; $x'(0) = 0$;

б). $\begin{cases} \dot{x} = -x + y + z; \\ \dot{y} = x - y + z; \\ \dot{z} = x + y - z; \ x(0) = y(0) = 2; \ z(0) = -1. \end{cases}$

21 а). $x''' + x' = e^{2t}$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$;

б). $\begin{cases} \dot{x} + x + 2y = 0; \\ \dot{y} + x + 4y = 0; \ \ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

22 а). $x'' + x' = t^2 + 2t$; $x(0) = 4$; $x'(0) = -2$;

б). $\begin{cases} \dot{x} - \dot{y} = -\sin t; \\ \dot{y} + \dot{x} = \cos t; \ x(0) = \dfrac{1}{2}; \ y(0) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

23 а). $x'' + 6x' + 9x = 9e^{3t}$; $x(0) = x'(0) = 0$;

б). $\begin{cases} \dot{x} = -y + z + 2x; \\ \dot{y} = x + z; \\ \dot{z} = -3x + y - 2z; \ \ x(0) = y(0) = 1; \ z(0) = 0; \end{cases}$

24 а). $x''' + 2x'' + 5x' = 0$; $x(0) = 1$; $x'(0) = 2$; $x''(0) = 0$;

б). $\begin{cases} \dot{x} + 2y = 3t; \\ \dot{y} - 2x = 4; \ x(0) = 2; \ y(0) = 3. \end{cases}$

25 а). $x'' + 9x' = \cos t$; $x(0) = x'(0) = 0$;

б). $\begin{cases} \dot{x} + 2x + 2y = 10e^{2t}; \\ \dot{y} - 2x + y = 7e^{2t}; \ \ x(0) = 1; \ y(0) = 3. \end{cases}$

26 а). $x''' + 4x' = 8\sin 2t$; $x(0) = 1$; $x'(0) = 0$;

б). $\begin{cases} \dot{x} + x = y + e^{t}; \\ \dot{y} = x - y + e^{t;} \ \ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

27 а). $x''' + x' = 1;\ \ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

б). $\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} - y = e^t; \\ 2\dot{x} + \dot{y} + 2y = \cos t; \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

28 а). $x'' - 3x' + 2x = 12e^{3t};\ \ x(0) = 2,\ x'(0) = 6$

б). $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y + 1, \\ \dot{y} = 3x + 4y, \quad x(0) = 2,\ y(0) = 1. \end{cases}$

29 а). $x'' - 3x' + 2x = 2e^t \cos\dfrac{t}{2},\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$

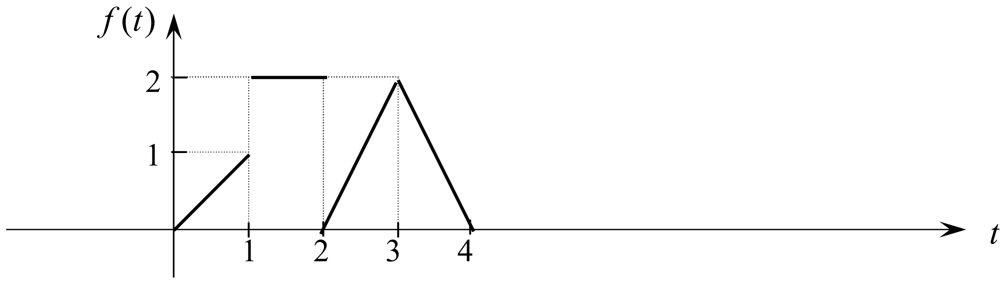
б). $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = 2x - y + 9, \quad x(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases}$

30 а). $x'' + 4x' + 29x = e^{-2t},\ \ x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$

б). $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 5y + 2, \\ \dot{y} = 3x + y + 1, \quad x(0) = 0,\ y(0) = 2. \end{cases}$

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА АТТЕСТАЦИОННОЙ РАБОТЫ №6

1. Найти изображение функции $f(t)$, возникающей при обработке графической информации, снимаемой с электронных осцилляторов:



Запишем функцию $f(t)$ *в виде* $f(t)=\begin{cases} 0, & \text{если } t<0, \\ t, & \text{если } 0\le t<1, \\ 2, & \text{если } 1<t<2, \\ 2(t-2), & \text{если } 2<t\le 3, \\ 2(4-t), & \text{если } 3<t\le 4, \\ 0, & \text{если } t>4. \end{cases}$

Представим эту функцию в виде единого аналитического выражения. В момент времени *t=0* «включается» функция $f(t)=t,$ которая при *t=1* «снимается» и «включается» $f(t)=2,\ при\ t=2$ она «снимается» и «включается» $f(t)=2(t-2),\ при\ t=3$ она «снимается» и «включается» $f(t)=2(4-t),$ ее «снимают» при *t=4*. Используем функцию сдвига $\eta(t-\tau),\ где\ \tau-$ момент или «включения», или «снятия».

$$f(t)=t\cdot\eta(t)-t\cdot\eta(t-1)+2\cdot\eta(t-1)-2\cdot\eta(t-2)+2(t-2)\cdot\eta(t-2)-2(t-2)\cdot\eta(t-3)+$$
$$+2(4-t)\cdot\eta(t-3)-2(4-t)\cdot\eta(t-4)=t\cdot\eta(t)+(2-t)\cdot\eta(t-1)+(2t-6)\cdot\eta(t-2)+$$
$$+(-2t+4+8-2t)\cdot\eta(t-3)+2(t-4)\cdot\eta(t-4)=t\cdot\eta(t)-(t-1-1)\cdot\eta(t-1)+$$
$$+2(t-2-1)\cdot\eta(t-2)-4(t-3)\cdot\eta(t-3)+2(t-4)\cdot\eta(t-4).$$

Чтобы найти изображение этой функции, надо представить ее в виде:

$$f(t)=\varphi_1(t)\cdot\eta(t)-\varphi_2(t-1)\cdot\eta(t-1)+\varphi_3(t-2)\cdot\eta(t-2)-\varphi_4(t-3)\cdot\eta(t-3)+$$
$$+\varphi_5(t-4)\cdot\eta(t-4).\qquad \varphi_1(t)=t,\ \varphi_2(t)=t-1,\ \varphi_3(t)=2(t-1),\ \varphi_4(t)=4t,\ \varphi_5(t)=2t.$$

Используем теорему линейности, теорему запаздывания в оригинале

$$L(\varphi(t-\tau)\cdot\eta(t-\tau))=e^{-p\tau}L(\varphi(t)),$$

получим

$$F(p)=L\,f(t)=L(t)-e^{-p}L(t-1)+2e^{-2p}L(t-2)-4e^{-3p}L(t)+2e^{-4p}L(t)=$$

$$= \frac{1}{p^2} - e^{-p}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}\right) + 2e^{-2p} \cdot \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}\right) - 4e^{-3p} \cdot \frac{1}{p^2} + 2e^{-4p}\ \frac{1}{p^2} =$$

$$= \frac{1}{p^2}\left(1 - e^{-p} + 2e^{-2p} - 4e^{-3p} + 2e^{-4p}\right) + \frac{1}{p}\left(e^{-p} - 2e^{-2p}\right) =$$

$$= \frac{\left(e^{-p} - 1\right)\left(2e^{-3p} - 2e^{-2p} - 1\right)}{p^2} + \frac{e^{-p}\left(1 - 2e^{-p}\right)}{p}.$$

2. Построить график и найти изображение функции

$$f(t) = (t^2 - 11t + 32) \cdot \eta(t-4).$$

Прежде, чем воспользоваться теоремой запаздывания, преобразуем данную функцию к виду: $f(t) = \varphi(t-4) \cdot \eta(t-4)$.

Для этого трехчлен $t^2 - 11t + 32$ раскладываем по степеням $t - 4$, используем при этом формулу Тейлора

$$f(t) = f(4) + f'(4) \cdot (t-4) + \frac{f''(4)}{2!}(t-4)^2$$

$$f(t) = t^2 - 11t + 32; \; f'(t) = 2t - 11; \; f''(t) = 2.$$

$$f(4) = 16 - 44 + 32 = 4; \; f'(4) = 8 - 11 = -3; \; f''(4) = 2.$$

Получим равенство:

$$t^2 - 11t + 32 = 4 - 3(t-4) + \frac{2}{2}(t-4)^2 = 4 - 3(t-4) + (t-4)^2.$$

Переходим к изображениям

$$F(p) = L(f(t)) = L(\varphi(t-4) \cdot \eta(t-4)) = e^{-4p} L(\varphi(t)) = e^{-4p} L(4 - 3t + t^2) =$$

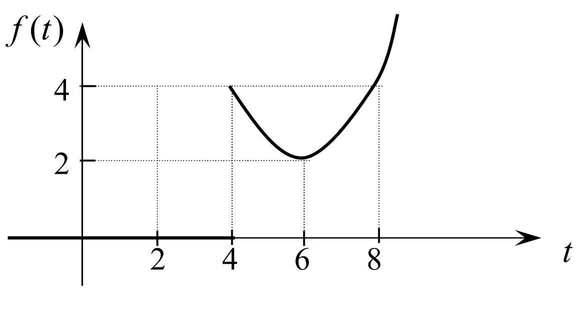
$$= e^{-4p}(L(4) - 3L(t) + L(t^2)) = e^{-4p}\left(\frac{4}{p} - \frac{3}{p^2} + \frac{2!}{p^3}\right) = e^{-4p}\left(\frac{4}{p} - \frac{3}{p^2} + \frac{2}{p^3}\right) =$$

$$= e^{-4p}\ \frac{4p^2 - 3p + 2}{p^3}.$$

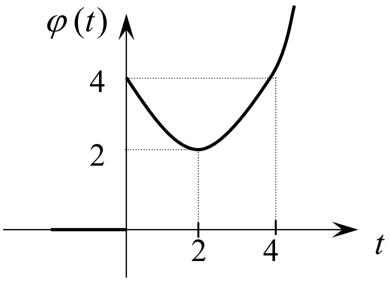
Построим график данной функции (оригинала) $f(t)$

$$f(t) = (t^2 - 11t + 32) \cdot \eta(t-4) = \begin{cases} t^2 - 11t + 32, \; если \;\; t \ge 4, \\ 0, \; если \;\; t < 4. \end{cases}$$

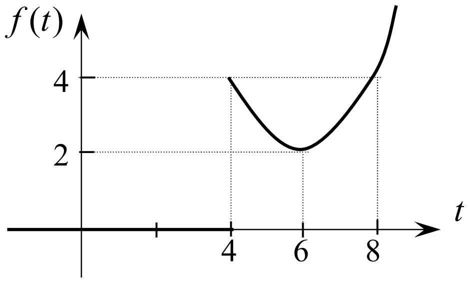
t	$f(t)$
4	$16 - 44 + 32 = 4$
5	$25 - 55 + 32 = 2$
6	$36 - 66 + 32 = 2$
7	$49 - 77 + 32 = 4$



Если учесть равенство $f(t)=\left(4-3(t-4)+(t-4)^2\right)\cdot\eta(t-4),$ то можно построить график функции $\varphi(t)=\begin{cases} t^2-3t+4, & \text{если } t\ge 0, \\ 0, & \text{если } t<0. \end{cases}$ а затем сместить его на 4 единицы вправо:



t	$\varphi(t)$
0	4
1	2
2	2
3	4



3. Найти оригинал по заданному изображению.

$$а)\quad F(p)=\frac{3p^2-10p-1}{p^3-2p^2-p+2};\quad в)\quad F(p)=\frac{4p}{(p^2+9)(p^2+16)};$$

$$б)\quad F(p)=\frac{p+2}{p^2-6p+34};\qquad г)\quad F(p)=\frac{p+2}{(p-1)^2\cdot p^3}.$$

При нахождении оригинала $f(t)$ по заданному изображению $F(p)$ будем использовать таблицу соответствия, теоремы операционного исчисления, вычеты:

а) $F(p)=\dfrac{3p^2-10p-1}{p^3-2p^2-p+2}.$

Разложим знаменатель дроби на множители

$p^3-2p^2-p+2=p^2(p-2)-(p-2)=(p-2)(p^2-1)=(p-2)(p-1)(p+1).$

Представим $F(p)$ в виде суммы простейших дробей

$$\frac{3p^2-10p-1}{p^3-2p^2-p+2}=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p-2}.$$

Находим коэффициенты A, B, C.

$3p^2-10p-1=A(p-1)(p-2)+B(p+1)(p-2)+C(p+1)(p-1)$

При $p=-1\qquad 3+10-1=A\cdot(-2)\cdot(-3);\quad 12=6A;\quad A=2.$

При $p=1\qquad 3-10-1=B(2)\cdot(-1);\qquad -8=-2B;\quad B=4.$

При $p=2\qquad 12-20-1=C\cdot 3\cdot 1;\qquad -9=3C;\qquad C=-3.$

Получим равенство: $F(p)=\dfrac{2}{p+1}+\dfrac{4}{p-1}-\dfrac{3}{p-2}.$

Переходим к оригиналам $f(t)=L^{-1}\left(F(p)\right)=2e^{-t}+4e^{t}-3e^{2t}.$

б) Выделим полный квадрат в знаменателе дроби

$$F(p)=\frac{p+2}{(p-3)^2+25}.$$

По таблице соответствия известно, что

$$L^{-1}\left(\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}\right)=e^{\lambda t}\cos\omega t;$$

$$L^{-1}\left(\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}\right)=e^{\lambda t}\sin\omega t.$$

$$\frac{p+2}{(p-3)^2+25}=\frac{(p-3)+5}{(p-3)^2+25}=\frac{p-3}{(p-3)^2+25}+\frac{5}{(p-3)^2+25}.$$

Переходим к оригиналам $f(t)=e^{3t}\cos 5t+e^{3t}\sin 5t.$

в) $F(p)=\dfrac{4p}{(p^2+9)(p^2+16)}$**.**

Для нахождения оригинала используем вычеты.

Известна формула $\quad f(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\underset{p=pk}{\operatorname{Re}s}\,F(p)\,e^{pt}.$

Функция $F(p)$ имеет полюсы первого порядка в точках $p_{1,2}=\pm 3i$ *и* $p_{3,4}=\pm 4i.$

Вычисляем вычеты функции $F(p)e^{pt}$ *в точках* $p_{1,2}$ *и* $p_{3,4}$.

$$\underset{p=-3i}{\operatorname{Re}s}\,F(p)\,e^{pt}=\lim_{p\to-3i}(p+3i)\cdot\frac{4p\cdot e^{pt}}{(p+3i)(p-3i)(p^2+16)}=\frac{-12i\,e^{-3it}}{(-6i)(16-9)}=\frac{2}{7}e^{-3it},$$

$$\underset{p=3i}{\operatorname{Re}s}\,F(p)\,e^{pt}=\lim_{p\to 3i}\frac{(p-3i)\cdot 4p\cdot e^{pt}}{(p-3i)(p+3i)(p^2+16)}=\frac{4\cdot 3i\,e^{-3it}}{6i\cdot(16-9)}=\frac{2}{7}e^{3it},$$

$$\underset{p=-4i}{\operatorname{Re}s}\,F(p)\,e^{pt}=\lim_{p\to-4i}\frac{(p+4i)\cdot 4p\cdot e^{pt}}{(p+4i)(p-4i)(p^2+9)}=\frac{-16i\,e^{-4it}}{(-8i)\cdot(9-16)}=-\frac{2}{7}e^{-4it},$$

$$\underset{p=4i}{\operatorname{Re}s}\,F(p)\,e^{pt}=\lim_{p\to 4i}\frac{(p-4i)\cdot 4p\cdot e^{pt}}{(p-4i)(p+4i)(p^2+9)}=\frac{16i\,e^{4it}}{8i\cdot(-7)}=-\frac{2}{7}e^{4it}.$$

Следовательно, оригиналом данной функции будет функция

$$f(t)=\frac{2}{7}\left(e^{-3it}+e^{3it}\right)-\frac{2}{7}\left(e^{-4it}+e^{4it}\right)=\frac{2}{7}\left(\cos 3t-i\sin 3t+\cos 3t+i\sin 3t\right)-$$

$$-\frac{2}{7}\cdot 2\cos 4t=\frac{4}{7}\left(\cos 3t-\cos 4t\right).$$

Проверим полученный результат с помощью теоремы Бореля

$$L^{-1}\left(F(p)\cdot\Phi(p)\right)=f(t)*\varphi(t)=\int_0^t f(u)\cdot\varphi(t-u)du.$$

Представим данную функцию $F(p)$ в виде произведения изображений для двух известных оригиналов

$$F(p)=\frac{p}{p^2+9}\cdot\frac{4}{p^2+16},\quad L^{-1}\left(\frac{p}{p^2+9}\right)=\cos 3t,\ L^{-1}\left(\frac{4}{p^2+16}\right)=\sin 4t.$$

$$f(t)=L^{-1}F(p)=\cos 3t*\sin 4t=\sin 4t*\cos 3t=\int_0^t \sin 4u\cdot\cos 3(t-u)du=$$

$$=\left|\sin\alpha\ \cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)\right|=\frac{1}{2}\int_0^t\sin(3t+u)du+\frac{1}{2}\int_0^t\sin(7u-3t)du=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos(3t+u)\Big|_0^t-\frac{1}{14}\cos(7u-3t)\Big|_0^t=-\frac{1}{2}(\cos 4t-\cos 3t)-\frac{1}{14}(\cos 4t-\cos(-3t))=$$

$$=\frac{1}{2}\cos 3t-\frac{1}{2}\cos 4t-\frac{1}{14}cos 4t+\frac{1}{14}\cos 3t=\frac{8}{14}\cos 3t-\frac{8}{14}\cos 4t=\frac{4}{7}(\cos 3t-\cos 4t).$$

$$L^{-1}\left(\frac{4p}{(p^2+9)(p^2+16)}\right)=\frac{4}{7}(\cos 3t-\cos 4t).$$

г) Пусть $F(p)=\dfrac{p+2}{(p-1)^2p^3}$, функция $F(p)$ имеет 2 полюса: p=0-полюс 3-го порядка; p=1 –полюс 2-го порядка.

Находим вычеты функции $F(p)e^{pt}$ в этих полюсах.

$$\operatorname*{Res}_{p=0} F(p)e^{pt}=\frac{1}{2!}\lim_{p\to 0}\left(p^3\cdot F(p)e^{pt}\right)''_{pp}=\frac{1}{2!}\lim_{p\to 0}\left(\frac{p+2}{(p-1)^2}e^{pt}\right)''=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\left(\frac{\left(e^{pt}+t(p+2)e^{pt}\right)(p-1)^2-2(p-1)(p+2)e^{pt}}{(p-1)^4}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\left(\frac{e^{pt}(p-1+t(p^2+p-2)-2p-4)}{(p-1)^3}\right)'=\frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\left(\frac{e^{pt}(t(p^2+p-2)-p-5)}{(p-1)^3}\right)'=$$

$$=\lim_{p\to 0}\frac{e^{pt}\left(\left(t^2(p^2+p-2)-t(p+5)+t(2p+1)-1\right)(p-1)-3\left(t(p^2+p-2)-p-5\right)\right)}{2(p-1)^4}=$$

$$= \frac{1}{2}\Big((-2t^2 - 5t + t - 1)(-1) - 3(-2t - 5)\Big) = \frac{1}{2}(2t^2 + 5t - t + 1 + 6t + 15) = \frac{1}{2}(2t^2 + 10t + 16) =$$
$$= t^2 + 5t + 8.$$

$$\operatorname*{Res}_{p=1} F(p)e^{pt} = \lim_{p\to1}\left(\frac{(p-1)^2(p+2)e^{pt}}{(p-1)^2 p^3}\right)' = \lim_{p\to1}\frac{\Big(e^{pt}(1 + t(p+2))\Big)\cdot p^3 - 3p^2(p+2)e^{pt}}{p^6} =$$
$$= \lim_{p\to1}\frac{\Big(e^{pt}(1 + tp + 2t)p\Big) - 3(p+2)e^{pt}}{p^4} = e^t(1 + t + 2t - 9) = (3t - 8)e^t.$$

Таким образом, функция $f(t)$ (оригинал) будет иметь вид

$f(t) = t^2 + 5t + 8 + (3t - 8)e^t$.

Проверим полученный результат. Разложим данную функцию $F(p)$ на простейшие дроби

$$\frac{p+2}{(p-1)^2\cdot p^3} = \frac{A}{(p-1)^2} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p^3} + \frac{D}{p^2} + \frac{E}{p}.$$

$$p + 2 = \big(A + B(p-1)\big)p^3 + \Big(C + Dp + Ep^2\Big)(p-1)^2 = \big(A + Bp - B\big)p^3 +$$
$$+ \Big(C + Dp + Ep^2\Big)(p^2 - 2p + 1).$$

Составляем систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов $A, B, C, D, E.$ Для этого приравняем коэффициенты при одинаковых степенях p.

$$\left.\begin{array}{l|l} p^4 & B + E = 0, \\ p^3 & A - B + D - 2E = 0, \\ p^2 & C - 2D + E = 0, \\ p & -2C + D = 1, \\ p^0 & C = 2. \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C = 2, \\ D = 1 + 2C = 1 + 4 = 5, \\ E = -C + 2D = -2 + 10 = 8, \\ B = -E = -8, \\ A = B - D + 2E = -8 - 5 + 16 = 3. \end{cases}$$

$$F(p) = \frac{3}{(p-1)^2} - \frac{8}{p-1} + \frac{2}{p^3} + \frac{5}{p^2} + \frac{8}{p},$$

$$f(t) = L^{-1}F(p) = 3t\cdot e^t - 8e^t + t^2 + 5t + 8.$$

Использовали формулы $L(t^n) = \dfrac{n!}{p^{n+1}};\ L^{-1}\left(\dfrac{n!}{p^{n+1}}\right) = t^n.$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p-a}\right)=e^{at};\ \ L(e^{at})=\frac{1}{p-a};\ \ L\left(-te^{at}\right)=\left(\frac{1}{p-a}\right)'=-\frac{1}{(p-a)^2};$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(p-a)^2}\right)=te^{at}.$$

4. Решить операционным методом задачи Коши, возникающие при построении системы автоматического регулирования технологическим процессом.

а) Найти решение дифференциального уравнения

$\ddot{x}+4\dot{x}+4x=t^3e^{-2t}$, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0)=1,\ \dot{x}(0)=2.$$

Пусть $L(x(t))=X(p);L(\dot{x}(t))=pX(p)-x(0)=pX(p)-1.$

$L(\ddot{x}(t))=p^2X(p)-p-\dot{x}(0)=p^2X(p)-p-2.$

$L\left(t^3e^{-2t}\right)=?\ \ L\left(t^3\right)=\dfrac{3!}{p^4}.$

По теореме смещения в изображении получим

$$L\left(e^{-2t}\cdot t^3\right)=F(p+2)=\frac{3!}{(p+2)^4}.$$

К данному уравнению применим преобразование Лапласа, получим операторное уравнение

$$p^2X(p)-p-2+4\left(pX(p)-1\right)+4X(p)=\frac{3!}{(p+2)^4},$$

$$\left(p^2+4p+4\right)X(p)=p+6+\frac{6}{(p+2)^4},$$

$$(p+2)^2X(p)=p+6+\frac{6}{(p+2)^4}.$$

Операторное решение имеет вид

$$X(p)=\frac{p+6}{(p+2)^2}+\frac{6}{(p+2)^6};\quad X(p)=\frac{(p+2)+4}{(p+2)^2}+\frac{6}{(p+2)^6};$$

$$X(p)=\frac{1}{(p+2)}+\frac{4}{(p+2)^2}+\frac{6}{(p+2)^6};\ \ L^{-1}\left(\frac{1}{p+2}\right)=e^{-2t};$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(p+2)^2}\right)=te^{-2t};\ \ L^{-1}\left(\frac{5!}{(p+2)^6}\right)=t^5e^{-2t}.$$

Переходим к оригиналам и выписываем решение задачи Коши

$$x(t) = e^{-2t} + 4te^{-2t} + \frac{6}{5!}t^5 e^{-2t} = e^{-2t}\left(1 + 4t + \frac{t^5}{20}\right).$$

б) Найти решение системы ДУ

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x - y + 1, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = -1,\ y(0) = 2.$

Пусть $\begin{matrix} L\,x(t) = X(p); L\,\dot{x}(t) = pX(p) - x(0) = pX(p) + 1;\ L\,y(t) = Y(p); \\ L\,\dot{y}(t) = pY(p) - y(0) = pY(p) - 2. \end{matrix}$

Система операторных уравнений примет вид

$$\begin{cases} pX(p) + 1 = X(p) + 3Y(p) + \dfrac{2}{p}, \\ pY(p) - 2 = X(p) - Y(p) + \dfrac{1}{p}, \end{cases}$$

или, после преобразований:

$$\begin{cases} (p-1)X(p) - 3Y(p) = \dfrac{2}{p} - 1, \\ -X(p) + (p+1)Y(p) = \dfrac{1}{p} + 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p-1)X(p) - 3Y(p) = \dfrac{2-p}{p}, \\ -X(p) + (p+1)Y(p) = \dfrac{2p+1}{p}. \end{cases}$$

Решаем систему алгебраических линейных уравнений относительно неизвестных изображений $X(p)\ и\ \ Y(p)$ методом определителей

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -3 \\ -1 & p+1 \end{vmatrix} = (p-1)(p+1) - 3 = p^2 - 4,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} {(2-p)}/{p} & -3 \\ {(2p+1)}/{p} & p+1 \end{vmatrix} = \frac{(2-p)(p+1)}{p} + \frac{3(2p+1)}{p} = \frac{-p^2 + 7p + 5}{p},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p-1 & {(2-p)}/{p} \\ -1 & {(2p+1)}/{p} \end{vmatrix} = \frac{(2p+1)(p-1)}{p} + \frac{2-p}{p} = \frac{2p^2 - 2p + 1}{p}.$$

Операторное решение системы имеет вид

$$X(p) = \frac{-p^2 + 7p + 5}{p(p^2 - 4)};\ \ Y(p) = \frac{2p^2 - 2p + 1}{p(p^2 - 4)}.$$

Функции $X(p)$ *и* $Y(p)$ *имеют в точках* $p_1 = 0,\ p_{2,3} = \pm 2$ простые полюсы. Находим соответствующие оригиналы с помощью вычетов.

$$x(t) = L^{-1}X(p) = \sum_{k=1}^{3} \underset{p=p_k}{\operatorname{Re}s} X(p)\cdot e^{pt} = \underset{p=0}{\operatorname{Re}s}\, X(p)\cdot e^{pt} + \underset{p=-2}{\operatorname{Re}s}\, X(p)\cdot e^{pt} +$$

$$+\underset{p=2}{\operatorname{Re}s}\, X(p)\cdot e^{pt} = \lim_{p\to 0}\frac{p(-p^2+7p+5)}{p(p^2-4)}e^{pt} + \lim_{p\to -2}\frac{(p+2)(-p^2+7p+5)}{p(p-2)(p+2)}e^{pt} +$$

$$+\lim_{p\to 2}\frac{(p-2)(-p^2+7p+5)}{p(p-2)(p+2)}e^{pt} = -\frac{5}{4} + \frac{-4-14+5}{(-2)(-4)}e^{-2t} + \frac{-4+14+5}{2\cdot 4}e^{2t} =$$

$$= -\frac{5}{4} - \frac{13}{8}e^{-2t} + \frac{15}{8}e^{2t};$$

$$y(t) = L^{-1}Y(p) = \sum_{k=1}^{3} \underset{p=p_k}{\operatorname{Re}s} Y(p)\cdot e^{pt} = \underset{p=0}{\operatorname{Re}s}\, Y(p)\cdot e^{pt} + \underset{p=-2}{\operatorname{Re}s}\, Y(p)\cdot e^{pt} +$$

$$+\underset{p=2}{\operatorname{Re}s}\, Y(p)\cdot e^{pt} = \lim_{p\to 0}\frac{p(2p^2-2p+1)}{p(p^2-4)}e^{pt} + \lim_{p\to -2}\frac{(p+2)(2p^2-2p+1)}{p(p-2)(p+2)}e^{pt} +$$

$$+\lim_{p\to 2}\frac{(p-2)(2p^2-2p+1)}{p(p-2)(p+2)}e^{pt} = \frac{-1}{4} + \frac{8+4+1}{(-2)(-4)}e^{-2pt} + \frac{8-4+1}{2\cdot 4}e^{2t} = \frac{-1}{4} + \frac{13}{8}e^{-2t} +$$

$$+\frac{5}{8}e^{2t}.$$

Решение задачи Коши для данной системы имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{5}{4} - \dfrac{13}{8}e^{-2t} + \dfrac{15}{8}e^{2t}, \\ y(t) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{13}{8}e^{-2t} + \dfrac{5}{8}e^{2t}. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.- М., Наука, 1998.
2. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Части III-V.- Минск, ВШ, 1985, 1987.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. II.- М., Наука, 1985.
4. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / Под редакцией А.П.Рябушко. -Минск, ВШ, 1991, ч. 3.
5. Сборник задач по математике для втузов / Под редакцией А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича.-М., Наука, 1981, ч.II.
6. Кузнецов А.В. и др. Высшая математика. Математическое программирование.- Минск, ВШ., 1994; 2001.
7. Кузнецов А.В. и др. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование.- Мн.; ВШ, 1995.
8. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики.- М., Наука, 1966.
9. Демидович Б.П. и др. Численные методы анализа.- М., Наука, 1967.
10. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах.- М., Наука, 1972.
11. Ершова В.В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление.- Мн., ВШ, 1976.
12. Гусак А.А., Гусак Г.М., Бричикова Е.А. Справочник по высшей математике.- Мн., Тетра Системс, 1999-2000.
13. Коршунов Е.И. Математические основы кибернетики.- М., Энергия, 1987.
14. Шахно К.У. Элементы функций комплексной переменной и операционного исчисления.- Мн., ВШ, 1975.
15. Гладкий И.И., Сидоревич М.П., Тузик Т.А. Элементы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления: методические указания для студентов технических специальностей. – Брест, БГТУ, 2000.- 88с.
16. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости.- М., Наука, 1981.
17. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М., Наука, 1968.

Содержание

Учебное издание

Составитель: Тузик Татьяна Александровна

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Методические указания и варианты заданий
по курсу «Высшая математика» для студентов технических
специальностей.

Ответственный за выпуск: Тузик Т.А.
Редактор: Строкач Т.В.
Компьютерный набор: Хвисевич Л.И.
Компьютерная графика: Гладкий И.И.
Технический редактор: Никитчик А.Д.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 14.12.01 г. Формат 60х84/16. Бумага «Чайка». Усл. п.л. 2,79. Уч. изд.. л. 3,0. Тираж 200 экз. Зак. № 237. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, Брест, ул. Московская, 267.