Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики

Дифференциальные уравнения в частных производных.
Элементы теории графов.
Линейные разностные уравнения.
Приближенные методы решения уравнений

Задачи и упражнения

Брест 2004

УДК (517.9+519) (07)
ББК 22. 11р 30

В настоящей разработке рассматриваются задачи и упражнения по темам «Дифференциальные уравнения в частных производных», «Линейные разностные уравнения», «Приближенные методы решения скалярных и дифференциальных уравнений». Часть задач сопровождаются решениями, задачи для индивидуальной работы – ответами. В начале каждого параграфа приводятся краткие теоретические сведения. Предназначается для студентов инженерно-технических специальностей.

Составители: Тузик Т.А., доцент,
Журавель М.Г., ассистент.

Рецензент: заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина, к.ф. – м.н., доцент А.В. Чичурин.

Содержание

I. Дифференциальные уравнения в частных производных

1.1. Решение некоторых дифференциальных уравнений в частных производных. Метод Даламбера решения задачи Коши для уравнения колебания струны.

Пусть функция $u = u(x, y)$ или $z = z(x, y)$ дифференцируема по x и y нужное число раз. Общий вид ДУ в частных производных первого порядка $F\left(x, y, z, z'_x, z'_y\right) = 0$,

а ДУ второго порядка – $F\left(x, y, z, z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}\right) = 0.$

Решением таких ДУ называется функция $z = \varphi\left(x, y\right)$, обращающая уравнение в верное равенство.

Общее решение этих уравнений содержит произвольные функции.

Задания 1-8 для аудиторной работы.

1. Найти общее решение уравнений, если $u = u(x, y)$

а) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 6y;$ б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x + 12y^2;$ в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6xy^2.$

2. Найти решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y^2$, удовлетворяющее условию $u(x,0) = x^2$.

3. Проверить, что функция $z = x \cdot \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, где φ - дифференцируемая функция, является решением уравнения $x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial z} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = z.$

Записать различные частные решения данного уравнения.

Известно ДУ I порядка линейное относительно частных производных
$X\left(x, y, z\right) \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + Y\left(x, y, z\right)\dfrac{\partial z}{\partial y} = Z\left(x, y, z\right)$, где $z = z(x, y)$.

Чтобы найти его общее решение, составим систему обыкновенных ДУ вида

$$\frac{dx}{X\left(x, y, z\right)} = \frac{dy}{Y\left(x, y, z\right)} = \frac{dx}{Z\left(x, y, z\right)}.$$

Пусть решение этой системы определяется равенством

$$\begin{cases} \omega_1(x,y,z) = c_1, \\ \omega_2(x,y,z) = c_2. \end{cases}$$

Тогда общий интеграл исходного ДУ имеет вид $\Phi\big(\omega_1(x,y,z),\ \omega_2(x,y,z)\big) = 0,$ где $\Phi(\omega_1,\ \omega_2)$ - произвольная непрерывная дифференцируемая функция.

4. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$x \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

5. Найти поверхность, удовлетворяющую ДУ $yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} + 2xy = 0$ и проходящую через окружность $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ z = 3. \end{cases}$

Основными уравнениями математической физики являются ДУ в частных производных второго порядка вида:

а) уравнение колебания струны (волновое уравнение)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u = u(x,t),\ a^2 = const;$$

б) уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\ u = u(x,t),\ a^2 = const;$$

в) уравнение Лапласа

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = u(x,y)$ - гармоническая функция.

Их общие решения содержат произвольные функции.

6. Проверить, что функция $u(x,t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at),$ где φ и ψ - дважды непрерывно дифференцируемые функции, является общим решением волнового уравнения.

Задача Коши для уравнения колебаний бесконечной струны

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad где \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t'(x,0) = F(x),$

$f(x)$ *и* $F(x)$ – заданные функции, решается методом Даламбера или методом бегущих волн.

Решение получаем в виде $u(x,t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} F(z)dz.$

7. Найти решение задачи Коши для волнового уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u(x,0) = x, \quad u_t'(x,0) = \cos x.$
8. Найти форму струны, определяемой уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, в момент $t = \frac{\pi}{6}$, если $u(x,0) = x^2, \quad u_t'(x,0) = \cos x.$

Задания для индивидуальной работы.

1. Найдите общее решение данных дифференциальных уравнений.
2. Проверьте, что заданная функция $z(x, y)$ удовлетворяет уравнению.
3. Методом Даламбера найдите решение задачи Коши для бесконечной струны.

I

$1a)\frac{\partial u}{\partial y} = e^{xy}; \quad 1б)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 24xy^2 + 3x^2.$

$2. \ z = \sin\left(x + \ln^2 y\right)$

$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$

$3. \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \textit{если} \ u(x,0) = 0,01x^4,$
$u_t'(x,0) = \cos 3x.$

II

$1a)\frac{\partial u}{\partial x} = \sin^2 x; \quad 1б)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y^2 + 4x^3.$

$2. \ z = \exp(xy)$

$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} +$
$+ 2xyz = 0.$

$3. \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \textit{если} \ u(x,0) = 0,1x^2,$
$u_t'(x,0) = 6\sin x.$

III

$1a)\frac{\partial u}{\partial x} = tg\ y; \quad 1б)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6y^2 \sin 3x.$

$2. \ z = x \cdot \arcsin\frac{y}{x}$

$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

$3. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \textit{если} \ u(x,0) =$
$= 0,01x^2,$
$u_t'(x,0) = \cos 5x.$

IV

$1a)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\ln x}{x}; \quad 1б)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 3y^2 \sin x.$

$2. \ z = \frac{y^2}{3x} + ctg(xy)$

$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$

$3. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \textit{если} \ u(x,0) =$
$= \sin 2x,$
$u_t'(x,0) = 0,1x^2.$

1.2. Метод Фурье решения уравнения колебания струны и уравнения теплопроводности.

Требуется найти решение колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

удовлетворяющее граничным условиям $u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0$ (2)
и начальным условиям

$$u(x,0) = f(x) \quad и \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x). \qquad (3)$$

По методу разделения переменных (методу Фурье) ищем ненулевое решение задачи (1) – (3) в виде

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t). \qquad (4)$$

Подставляем (4) в уравнение (1).

$$X(x) \cdot T''(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t) \qquad \Big|: a^2 X(x)\, T(t).$$

Получаем равенство

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = const = -\lambda^2 .$$

Вместо одного ДУ в частных производных будем решать два обыкновенных ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0. \end{cases}$$

Выписываем их общие решения
$X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x, \quad T(t) = C_3 \cos\lambda at + C_4 \sin\lambda at,$ где $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ и\ \lambda$ пока неопределенные числа.

Потребуем, чтобы функция (4) удовлетворяла нулевым граничным условиям (2).

$$u(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 0, \quad u(l,t) = X(l)T(t) = 0.$$

Так как $T(t) \neq 0$ для $t \geq 0$, то $X(0) = 0$ и $X(l) = 0$.
Получим $\quad X(0) = C_1 \cdot 1 = 0, \quad C_1 = 0, \quad X(l) = C_2 \cdot \sin\lambda l = 0, \quad C_2 \neq 0,$

значит $\sin\lambda l = 0, \quad \lambda l = n\pi, \quad \lambda_n = \dfrac{n\pi}{l}$ - собственные числа уравнения (1).

Тогда $X_n(x) = C_{2n} \sin\dfrac{n\pi x}{l}, \quad T_n(t) = C_{3n} \cos\dfrac{n\pi t}{l} + C_{4n} \sin\dfrac{n\pi t}{l}.$

$u_n(x,t) = X_n(x)T(t), \quad n \geq 1 -$собственные функции уравнения (1).

Решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), получим в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (5)$$

где $a_n=C_{3n}\cdot C_{2n}$, $b_n=C_{4n}\cdot C_{2n}$ - некоторые постоянные.

Подберем их так, чтобы функция (5) удовлетворяла условиям (3).

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad u'_t(x,0)=F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Из этих равенств следует, что

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad и \quad b_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \qquad (6)$$

Подставляем коэффициенты (6) в (5), получим решение задачи о колебаниях ограниченной струны.

Задания для аудиторной работы

1. Струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$, в начальный момент имеет форму $u(x,0)=8\sin\frac{\pi x}{l}$. Определить смещение точек струны от оси абсцисс, если начальные скорости отсутствуют.
2. В начальный момент времени $t=0$ точкам прямолинейной струны сообщена скорость $u'_t(x,0)=1$. Найти форму струны в любой момент времени t, если ее концы $x=0$ и $x=l$ закреплены.
3. Струна длиной $l=100$ см, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$, в начальный момент оттянута в точке $x=50$ см на расстояние $h=2$ см, а затем отпущена без толчка. Определить форму струны для любого t.

Требуется найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u=u(x,t), \qquad a^2=const, \qquad (7)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0,t)=0, \qquad u(l,t)=0, \qquad 0\le x\le l, \qquad t\ge 0 \qquad (8)$$

и начальному условию

$$u(x,0)=f(x) \qquad (9)$$

По методу Фурье ищем ненулевые решения задачи (7) – (9) в виде

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t) \qquad (10)$$

Подставляем (4) в уравнение (7)

$$X(x)\cdot T'(t)=a^2X''(x)T(t),$$

разделяем функции

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2,$$

получаем систему из двух обыкновенных ДУ с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda^2X(x)=0, \\ T'(t)+a^2\lambda^2T(t)=0. \end{cases}$$

Выписываем общие решения этих уравнений

$X(x)=C_1 cos\lambda x+C_2\sin\lambda x; \qquad T(t)=C_3\exp(-a^2\lambda^2 t).$

Функция (10) должна удовлетворять граничным условиям (8):

$u(0,t)=X(0)T(t)=0$ и $u(l,t)=X(l)\cdot T(t)=0.$

$T(t)\neq 0,$ значит, $X(0)=0$ и $X(l)=0.$

Как и в случае уравнения колебания струны, имеем

$C_1=0, \quad C_2\neq 0, \quad \sin\lambda l=0 \quad \lambda_n=\dfrac{n\pi}{l}, \quad n\in N.$

$\lambda_n -$ собственные числа уравнения (7).

Решение уравнения (7), удовлетворяющее граничным условиям (8), запишем в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\cdot T_n(t),$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_2\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot C_{3n}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t\right),$$

$$C_{2n}\cdot C_{3n}=a_n,$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\exp\left(-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t\right). \qquad (11)$$

Коэффициенты a_n определяем из условия (9):

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}=f(x).$$

Отсюда следует, что $a_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$ (12)

Подставляем коэффициенты (12) в формулу(11), получаем решение задачи о распространении тепла в однородном стержне длины l.

Задания для аудиторной работы

Записать решение уравнения теплопроводности, если

4. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u(0,t)=u(1,t)=0,\quad u(x,0)=\sin 3\pi x.$

5. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u(0,t)=u(2,t)=0,\quad u(x,0)=\begin{cases}x,\ \textit{если}\ 0\le x\le 1,\\ 2-x,\ \textit{если}\ 1<x\le 2.\end{cases}$

Задания для индивидуальной работы

Запишите частное решение $u(x,t)$ следующих уравнений математической физики:

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u(0,t)=u(l,t)=0,\quad u(x,0)=f(x)\quad u'_t(x,0)=F(x).$

2. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u(0,t)=u(l,t)=0,\quad u(x,0)=f(x).$

I.

1. $a=6,\ l=3,\ f(x)=\sin 2\pi x,$
   $F(x)=\sin 6\pi x.$
2. $a=1,\ l=6,$
   $f(x)=\begin{cases}0{,}5x,\ \textit{если}\ 0\le x\le 3,\\ 0{,}5(6-x),\ \textit{если}\ 3<x\le 6.\end{cases}$

Отв.:

1. $u(x,t)=\cos 12\pi t\cdot\sin 2\pi x+$
   $+\dfrac{1}{36\pi}\sin 36\pi t\cdot\sin 6\pi x;$
2. $u(x,t)=\dfrac{12}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{2}\sin\dfrac{n\pi x}{6}\cdot$
   $\cdot\exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2 t}{36}\right).$

II.

1. $a=4,\ l=2,\ f(x)=\sin 2\pi x,$
   $F(x)=\sin 6\pi x.$
2. $a=2,\ l=4,$
   $f(x)=\begin{cases}0{,}5x,\ \textit{если}\ 0\le x\le 2,\\ 0{,}5(4-x),\ \textit{если}\ 2<x\le 4.\end{cases}$

Отв.:

1. $u(x,t)=\cos 8\pi t\cdot\sin 2\pi x+$
   $+\dfrac{1}{24\pi}\sin 24\pi t\cdot\sin 6\pi x;$
2. $u(x,t)=\dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{2}\sin\dfrac{n\pi x}{4}\cdot$
   $\cdot\exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2}{4}t\right).$

III.

1. $a=2,\ l=1,\ f(x)=\sin 2\pi x,$
$F(x)=\sin 6\pi x.$

2. $a=3,\ l=2,$
$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } 0\le x\le 1,\\ 2-x, & \text{если } 1\le x<2.\end{cases}$$

Отв.:

1. $u(x,t)=\sin 2\pi x\cdot\cos 4\pi t+$
$+\dfrac{1}{12\pi}\sin 6\pi x\cdot\sin 12\pi t;$

2. $u(x,t)=\dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{2}\sin\dfrac{n\pi x}{2}\cdot$
$\cdot\exp\left(-\dfrac{9n^2\pi^2}{4}t\right).$

IV.

1. $a=8,\ l=4,\ f(x)=\sin 2\pi x,$
$F(x)=\sin 6\pi x.$

2. $a=4,\ l=8,$
$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } 0\le x\le 4,\\ 8-x, & \text{если } 4<x\le 8.\end{cases}$$

Отв.:

1. $u(x,t)=\sin 2\pi x\cdot\cos 16\pi t+$
$+\dfrac{1}{48\pi}\sin 6\pi x\cdot\sin 48\pi t;$

2. $u(x,t)=\dfrac{32}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{2}\sin\dfrac{n\pi x}{8}\cdot$
$\cdot\exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2}{4}t\right).$

1.3. Метод Фурье решения уравнения Лапласа

Задания для аудиторной работы

1. Найти частное решение уравнения Лапласа
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$
в полосе $0\le x\le\pi,\quad 0\le y<+\infty,$ если $u(0,y)=0,\quad u(\pi,y)=0,$
$$u(x,0)=f(x),\quad \lim_{y\to+\infty}u(x,y)=0.$$

2. Найти решение следующих задач математической физики методом разделения переменных.

I.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u'_x(0,t)=u(2,t)=0,\quad u(x,0)=0,\quad u'_t(x,0)=\cos\frac{9\pi x}{4}.$$

II.
$$\frac{\partial u}{\partial t}=36\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u(0,t)=u'_t(3,t)=0,\quad u(x,0)=x(6-x).$$

III.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u(0,t)=u'_x(1,t)=0,\quad u(x,0)=2x-x^2,\quad u'_t(x,0)=0.$$

IV.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u'_x(0,t) = u(5,t) = 0, \quad u(x,0) = \cos\frac{11\pi x}{10}.$$

V.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u'_x(0,t) = 0, \quad u(2,t) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = 4 - x^2.$$

VI.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 36\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,t) = u'_x(3,t) = 0, \quad u(x,0) = \sin\frac{3\pi x}{2}.$$

II. Элементы теории графов

2.1. Понятие о графах. Матричное предоставление графов. Операции над графами.

Граф представляет собой непустое множество точек и множество отрезков, соединяющих эти точки.

$G(X,U)$, $X-$множество вершин, $U-$ множество ребер. Графы бывают ориентированные и неориентированные. В орграфе ребро называют дугой, а вершину – узлом. Ребра, имеющие общую вершину, называются *смежными*. Ребро и любая из его вершин называются *инцидентными*. Графы могут быть заданы в виде матриц.

Матрицей смежностей вершин графа $G(X,U)$ называется квадратная матрица A, каждый элемент который a_{ij} численно равен количеству дуг, идущих из вершины $x_i \in X$ в вершину $x_j \in X$.

Если граф неориентированный, ему соответствует симметричная матрица смежностей вершин, $a_{ij} = a_{ji}$. Верно и обратное. Любая симметричная матрица с целыми неотрицательными элементами может быть интерпретирована как граф.

Если граф не имеет петель, то его можно представить матрицей инциденций.

Матрицей инциденций орграфа (неориентированного графа) называется прямоугольная матрица B, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы – ребрам и элементы b_{ij} равны

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i - \text{начальная точка дуги } u_j, \\ 0, & \text{если } x_i \text{ и } u_j \text{ не инцидентны}, \\ -1, & \text{если } x_i - \text{конечная точка дуги } u_j. \end{cases}$$

$$\left(b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \text{ и } u_j \text{ инцидентны}, \\ 0, & \text{если } x_i \text{ и } u_j \text{ не инцидентны}. \end{cases} \right)$$

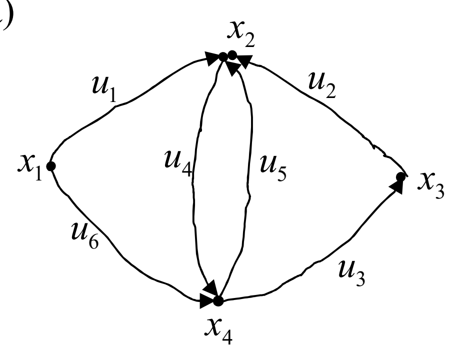
Задания для аудиторной работы.

1. По матрице смежностей постройте граф.

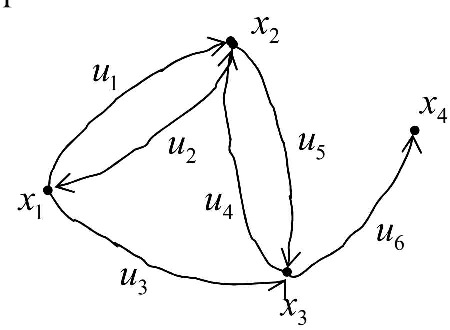
а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Составьте матрицу инциденций графа:

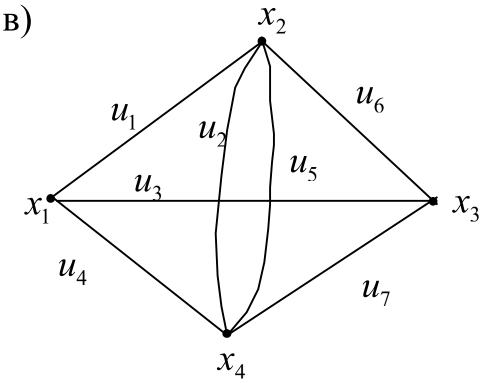
а)



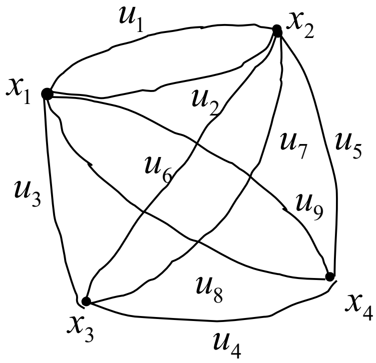
б)



в)



г)



3. По матрице инциденций постройте граф.

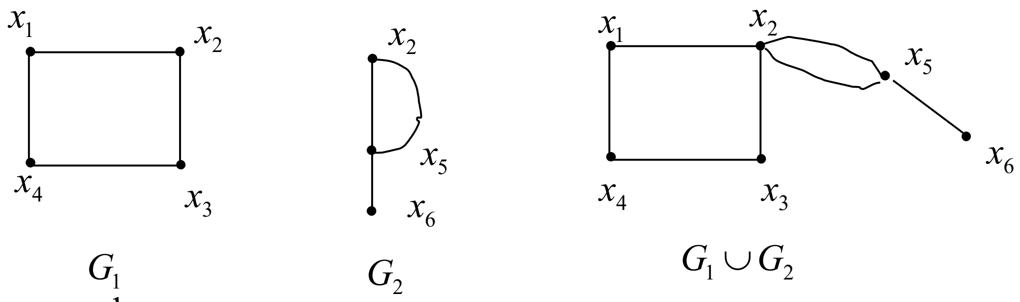
а) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Операции над графами

а) Объединение графов.

Объединением двух графов $G_1 = (X_1, U_1)$ *и* $G_2 = (X_2, U_2)$ называется граф $G = (X, U)$ *где* $X = X_1 \cup X_2$, $U = U_1 \cup U_2$.

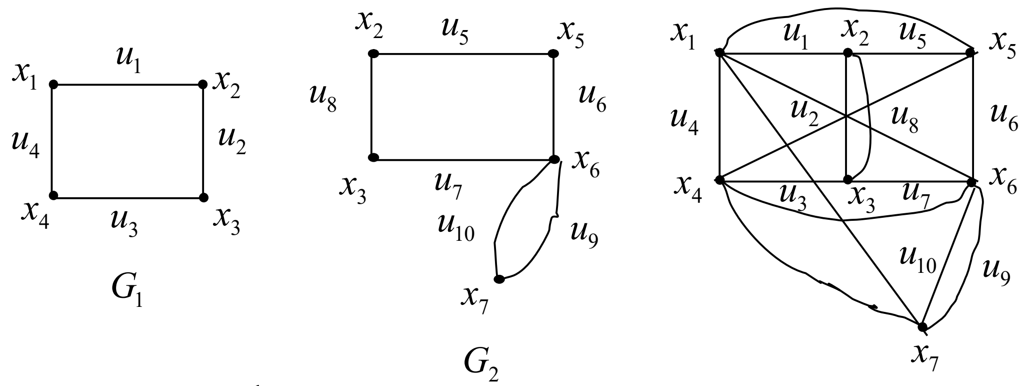
Пример. Найти объединение графов



б) Сумма графов.

Суммой графов $G_1 = (X_1, U_1)$ *и* $G_2 = (X_2, U_2)$ называется граф $G = G_1 + G_2 = (X, U)$, где $X = X_1 \cup X_2$, $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$, где $U_3 = (x, y)$ множество дуг таких, что $x \in X_1 / X_2$, *а* $y \in X_2 / X_1$.

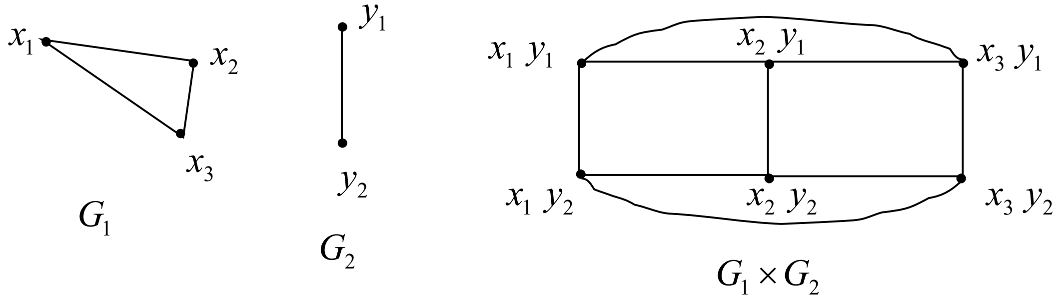
Пример. Найти сумму графов.



в) Произведение графов

Произведением графов $G_1 = (X_1, U_1)$ *и* $G_2 = (X_2, U_2)$ называется граф $G = G_1 \times G_2 = (X_1, U_1)$, где $X = X_1 \times X_2$, т.е. если $x \in X_1$, $x_2 \in X_2$, то $x = (x_1, x_2) \in X$; множество ребер U определяется по правилу: две вершины (x_1', x_2'), (x_1'', x_2'') смежны, если $x_1' = x''$, $x_2' = x_2''$ смежны.

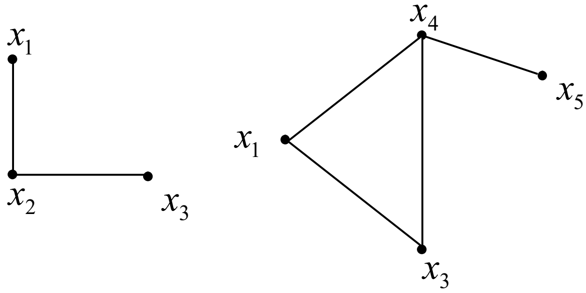
Пример. Найти произведение графов.



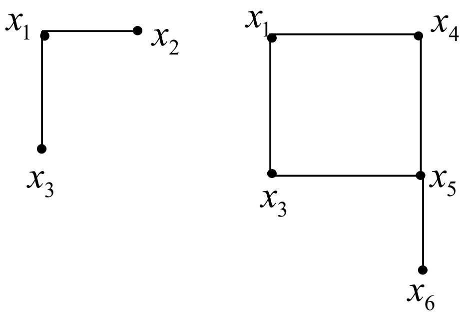
Задания для аудиторной работы

4. Постройте объединение и сумму графов.

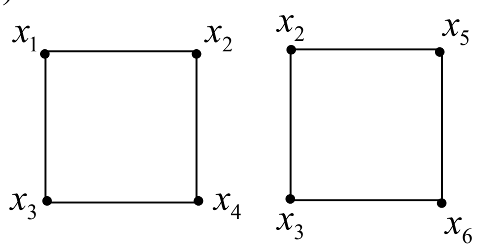
а)



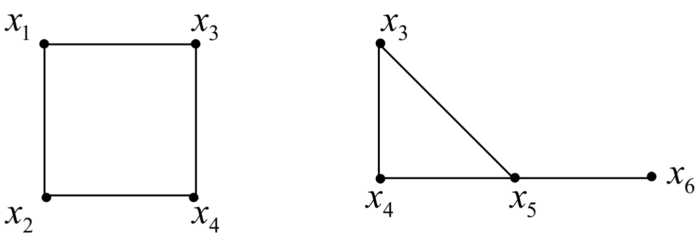
б)



в)

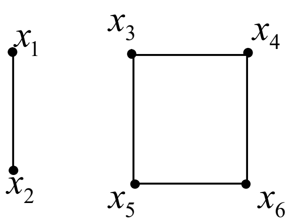


г)

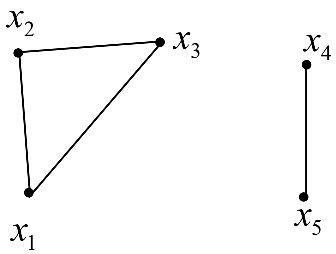


5. Постройте произведение графов.

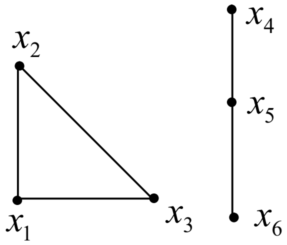
а)



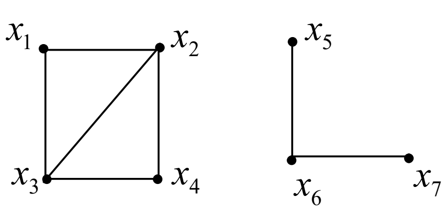
б)



в)



г)



2.2. Задача о максимальном потоке на сети

Сетью называется взвешенный конечный граф без петель и циклов, ориентированный в общем направлении от вершины I (вход) к вершине S (выход, сток).

Путь в графе – это последовательность ребер от начальной вершины к конечной, в которой два соседних ребра имеют общую вершину, никакое ребро не проходится более одного раза.

Цикл – это путь, в котором совпадают начальная и конечная вершины.

Теорема Форда-Фалкерсона:

На любой сети максимальная величина потока равна минимальной пропускной способности разреза, отделяющего источник I от стока S

Алгоритм построения максимального потока:

1. для заданной сети составляем матрицу-таблицу R пропускных способностей ребер;
2. формируем начальный поток X^0 по сети, записываем его в виде матрицы-таблицы;
3. составляем матрицу $R-X^0$, ее элементы $r_{ij}-x_{ij}$ позволяют судить о насыщенности ребер сети, если

$$r_{ij}-x_{ij}^0=\begin{cases}0, & \text{ребро } (i;j) \text{ насыщенное},\\ \neq 0, & \text{ребро } (i;j) \text{ ненасыщенное};\end{cases}$$

4. рассматриваем возможность пройти по ненасыщенным ребрам из вершины 1 в вершину S . Если такой путь отсутствует, то поток X^0 максимален – задача решена. Если такой путь есть, строим новый поток X^1, более мощный. Причем для потока X^1

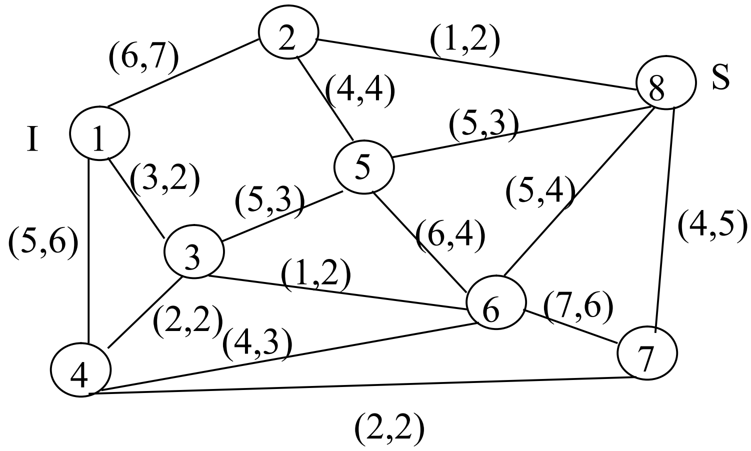
$f_1=f_0+\Delta,\quad x_{ij}^{(1)}=x_{ij}^{(0)}+\Delta,\quad где\quad \Delta=\min\limits_{(i,j)}\left(r_{ij}-x_{ij}^0\right),\quad (i,j)-$ненасыщенные ребра;

5.проверяем поток X^1 на оптимальность (переходим к пункту 3 и т.д.).

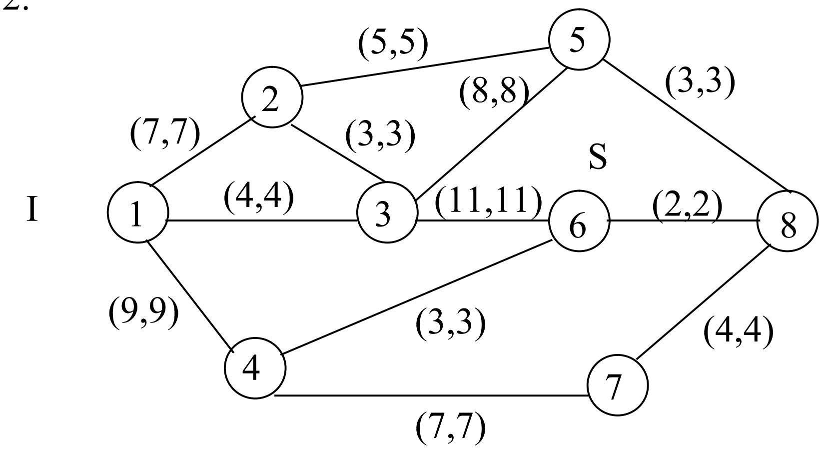
Задания для аудиторной работы

Для данной сети постройте максимальный поток

1.



2.



Выпишите ребра, образующие разрез минимальной пропускной способности.

2.3. Элементы сетевого планирования

Сетевым графиком называется взвешенный ориентированный граф без петель и параллельных дуг, имеющих одну исходную и одну конечную вершину.

Ориентированное ребро соответствует работе, каждый этап в проекте – вершина графа. Каждому ребру приписывают вес – время, необходимое для выполнения данной работы.

К основным временным характеристикам сетевого графика относят:

1. ранние сроки свершения событий:

$$t_p(j) = \max_{(i,j)\in U_j^+} \left(t_p(i) + t(i,j)\right),$$

где U_j^+ – множество работ, входящих в j-тое событие,

$t_p(i)$ – ранний срок свершения i – го события,

$t(i,j)$ – продолжительность работы (i,j);

2. поздние сроки свершения событий (расчет ведем от конечного события к начальному):

$$t_n\left(S\right) = t_p\left(S\right) = t_{крит.};$$

$$t_n(i) = \min_{(i,j)\in U_i^-} \left(t_n(j) - t(i,j)\right),$$

где U_j^- – множество работ, начинающихся i событием,

$t_n(j)$ – поздний срок свершения j – го события;

3. резерв времени события

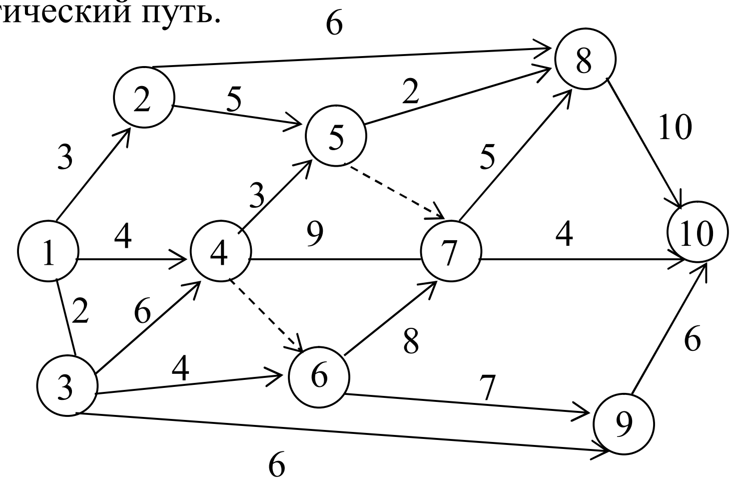
$$R(i) = t_n(i) - t_p(i);$$

4. у критических событий резерв времени равен 0.

Составляем критический путь.

Задание для аудиторной работы

По сетевому графику определите ранние и поздние сроки наступления событий, резерв времени событий, время выполнения комплекса работ, критический путь.

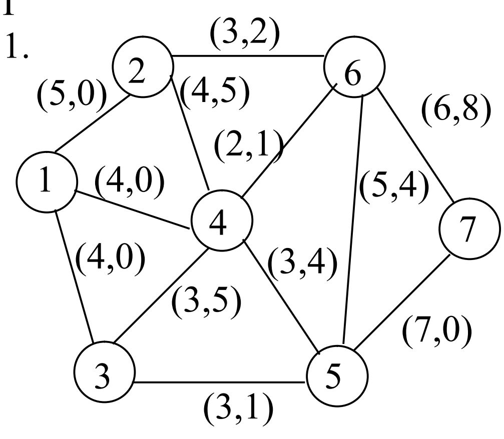


Задания для индивидуальной работы

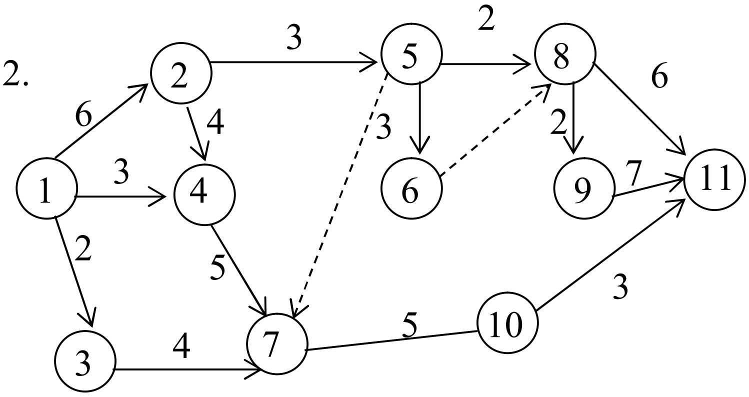
1. Для данной сети, пропускные способности ребер которой известны, найти максимальный поток, построить разрез, проверить теорему Форда-Фалкерсона.
2. На сетевом графике отменить $t_p(j)$, $t_n(i)$, $R(i)$. Найти критическое время и критический путь комплекса работ.

I

1.



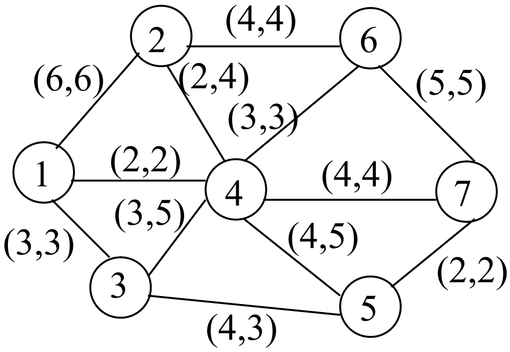
2.



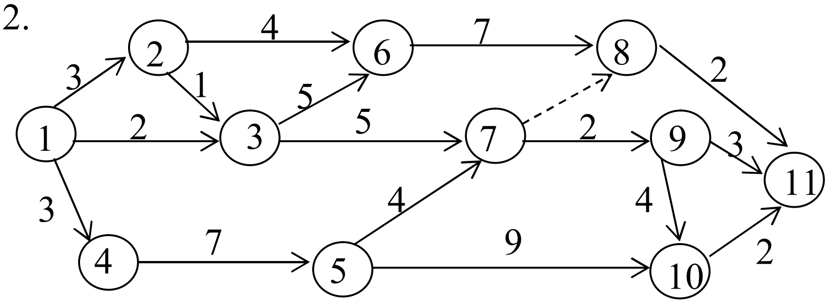
Ответ: 1. $f_{\max} = 11$; 2. $t_{крит} = 23$.

II

1.



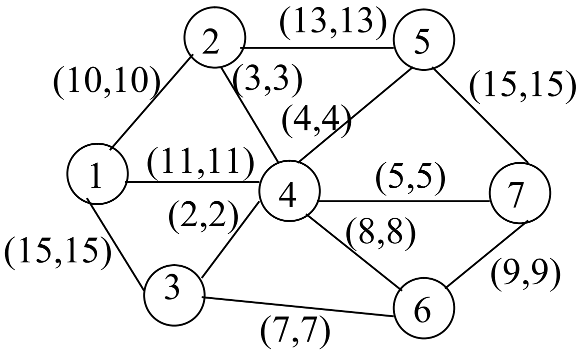
2.



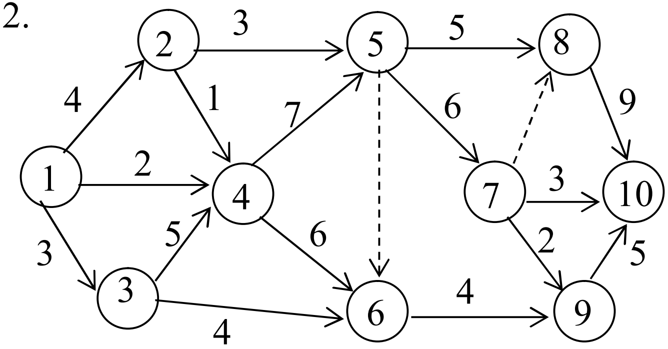
Ответ: 1. $f_{\max} = 11$; 2. $t_{крит.} = 22$

III

1.



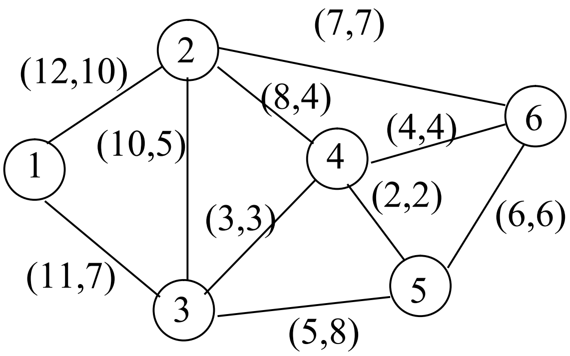
2.



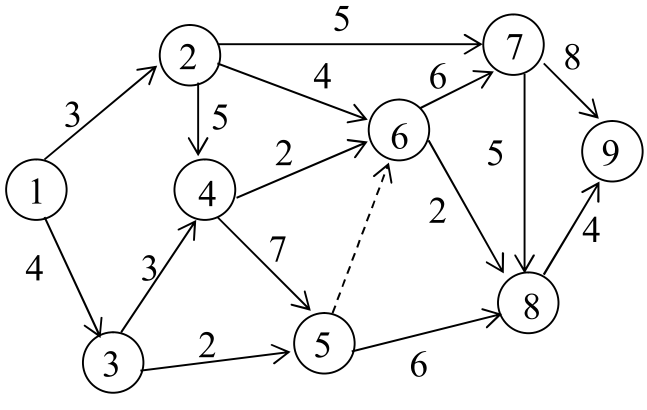
Ответ: 1. $f_{\max} = 29$; 2. $t_{крит} = 30$.

IV

1.



2.



Ответ: 1. $f_{\max} = 17$; 2. $t_{крит} = 30$.

III Линейные разностные уравнения

3.1. Конечные разности решетчатых функций. Решение линейных однородных разностных уравнений к-ого порядка с постоянными коэффициентами

Разностные уравнения описывают процессы, происходящие в дискретные моменты времени. Поэтому они широко используются в теории автоматического регулирования и управления при анализе работы дискретных динамических систем.

Для решетчатых функций $f(n)$, $n \geq 0$, определим *конечные разности:*

$$\begin{aligned} &\textit{первого порядка}: \ \Delta f(n) = f(n+1) - f(n), \\ &\textit{второго порядка}: \ \Delta^2 f(n) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\textit{к-ого порядка}: \ \Delta^k f(n) = \Delta^{k-1} f(n+1) - \Delta^{k-1} f(n).$$

Из соотношений (1) можно получить формулу:

$$\Delta^k f(n) = f(n+k) - C_k^1 f(n+k-1) + C_k^2 f(n+k-2) - \\ -...(-1)^m C_k^m f(n+1-m) + ... + (-1)^k f(n), \qquad (2)$$

где C_k^m – биномиальные коэффициенты,

$$C_k^m = \frac{k(k-1)...(k-m+1)}{m!} = \frac{k!}{m!(k-m)!}.$$

Значения решетчатой функции в целых точках получаются так

$$f(n+k) = f(n) + C_k^1 \cdot \Delta f(n) + C_k^2 \cdot \Delta^2 f(n) + ... + C_k^m \cdot \Delta^m f(n) + ... + \Delta^k f(n). \quad (3)$$

Линейное разностное уравнение (ЛРУ) имеет вид

$$a_0 x(n+k) + a_1 x(n+k+1) + ... + a_{k-1} x(n+1) + a_k x(n) = f(n), \qquad (4)$$

где $a_0 \neq 0,\ a_k \neq 0,\ a_0, a_1, ..., a_k = const \in R,\ f(n)$ – заданная решетчатая функция. Если $f(n) \neq 0,$ уравнение (4) неоднородное; если $f(n) = 0,$ то (4) – ЛОРУ.

Порядок ЛРУ (4) равен разности наибольшего и наименьшего аргументов искомой функции $x(n)$: $(n+k) - n = k.$

Если воспользоваться формулами (3), то уравнение (4) примет вид

$$b_0 \Delta^k x(n) + b_1 \Delta^{k-1} x(n) + b_2 \Delta^{k-2} x(n) + ... + b_k x(n) = f(n). \qquad (5)$$

Порядок разностного уравнения может не совпадать с порядком наивысшей конечной разности, входящей в уравнение (5).

Пример 1. Определить порядок разностного уравнения

$$\Delta^3 x(n) + 4 \cdot \Delta^2 x(n) + 5\Delta x(n) + 2x(n) = 0.$$

Используем соотношения:

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n), \quad \Delta^2 x(n) = x(n+2) - 2x(n+1) + x(n), \quad \Delta^3 x(n) = \\ = x(n+3) - 3x(n+2) + 3x(n+1) - x(n).$$

Подставляем в уравнение выражения для конечных разностей.

$$x(n+3) + x(n+2) \cdot (-3+4) + x(n+1) \cdot (3-8+5) + x(n) \cdot (-1+4-5+2) = 0.$$

$$x(n+3) + x(n+2) = 0.$$

Порядок этого разностного уравнения $k = n+3-n-2 = 1.$

Общее решение ЛОРУ к-ого порядка

$$a_0 x(n+k) + a_1 x(n+k-1) + ... + a_k x(n) = 0 \qquad (6)$$

имеет вид

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i(n),$$

где c_i – любые $const \in R$, $x_i(n)$ $(i=\overline{1,k})$ – частные линейно независимые решения уравнения (6). Их ищем в виде $x(n)=\lambda^n$, приходим к характеристическому уравнению

$$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k = 0. \qquad (7)$$

Решения $x_i(n)$ выписываем по принципу:

а) каждому однократному действительному λ_i соответствует решение разностного уравнения $x_i = \lambda_i^n$;

б) действительному корню λ_i кратности r соответствует r линейно независимых решетчатых функций

$x_1(n)=\lambda_i^n$; $x_2(n)=n\cdot\lambda_i^n$; $x_3(n)=n^2\cdot\lambda_i^n$;... ; $x_r(n)=n^{r-1}\lambda_i^n$;

в) каждой паре комплексного сопряженных чисел $\lambda=\alpha\pm i\beta$ соответствует пара действительных решетчатых функций $x_1(n)$ *и* $x_2(n)$. $\lambda=\alpha+i\beta$ записываем в тригонометрической форме

$\lambda=|\lambda|(\cos(\arg\lambda)+i\sin(\arg\lambda))$, тогда $\lambda^n=|\lambda|^n(\cos(n\arg\lambda)+i\sin(n\arg\lambda))$,

$$x_1(n)=|\lambda|^n\cos(n\arg\lambda);\quad x_2(n)=|\lambda|^n\sin(n\arg\lambda);$$

г) если $\lambda=\alpha+i\beta$ и $\lambda=\alpha-i\beta$ - корни кратности m,

то им соответствует $2m$ частных линейно независимых решений уравнения (6) вида

$|\lambda|^n\cos(n\arg\lambda)$; $|\lambda|^n\cdot n\cos(n\arg\lambda)$;......; $|\lambda|^n\cdot n^{m-1}\cos(n\arg\lambda)$;

$|\lambda|^n\sin(n\arg\lambda)$; $|\lambda|^n\cdot n\sin(n\arg\lambda)$;......; $|\lambda|^n\cdot n^{m-1}\sin(n\arg\lambda)$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$x(n+2)+4x(n+1)+x(n)=0.$$

Составляем характеристическое уравнение

$\lambda^2+4\lambda+1=0$, $(\lambda+2)^2-3=0$, $\lambda+2=\pm\sqrt{3}$, $\lambda_1=-2-\sqrt{3}$; $\lambda_2=-2+\sqrt{3}$

Общее решение

$x(n)=c_1(-2-\sqrt{3})^n+c_2(-2+\sqrt{3})^n$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$x(n+4)-4x(n+3)+6x(n+2)-4x(n+1)+x(n)=0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^4+4\lambda^3+6\lambda^2+4\lambda+1=0$ или $(\lambda+1)^4=0$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=-1$.

Общее решение имеет вид

$$x(n)=c_1(-1)^n+c_2n(-1)^n+c_3n^2(-1)^n+c_4n^3(-1)^n.$$

$$x(n)=(-1)^n\cdot(c_1+c_2n+c_3n^2+c_4n^3).$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$x(n+2)-2x(n+1)+4x(n)=0.$$

$\lambda^2-2\lambda-4=0, \quad (\lambda-1)^2+3=0, \quad \lambda-1=\pm\sqrt{3}i, \quad \lambda_1=1+\sqrt{3}i, \quad \lambda_2=1-\sqrt{3}i.$

Напишем λ_1 в тригонометрической форме

$$|\lambda_1|=\sqrt{1+3}=2, \quad tg\varphi=\frac{\sqrt{3}}{1}, \quad \varphi=\arg\lambda_1=\frac{\pi}{3}, \quad \lambda_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\lambda^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right).$$

Соответствующие частные линейно независимые решения разностного уравнения имеют вид

$$x_1(n)=2^n\cos\frac{n\pi}{3}, \quad x_2(n)=2^n\sin\frac{n\pi}{3}$$

Общее решение $x(n)=2^n\left(c_1\cos\frac{n\pi}{3}+c_2\sin\frac{n\pi}{3}\right).$

Пример 5. Найти частное решение ЛОРУ $x(n+4)-x(n+2)+2x(n+1)+2x(n)=0,$ удовлетворяющее условиям $x(0)=3; \ \ x(1)=-3; \ \ x(2)=2; \ \ x(3)=-9.$

Составляем характеристическое уравнение

$\lambda^4-\lambda^2+2\lambda+2=0, \quad \lambda^2\left(\lambda^2-1\right)+2\left(\lambda+1\right)=0, \quad (\lambda+1)(\lambda^2(\lambda-1)+2)=0.$

$\lambda_1=-1, \quad \lambda^3-\lambda^2+2=0. \quad \lambda_2=-1$ (подбором определяем).

$$\begin{array}{l|l}
-\ \lambda^3-\lambda^2+2 & \lambda+1 \\
\quad \underline{\lambda^3+\lambda^2} & \lambda^2-2\lambda+2 \\
\quad -\ -2\lambda^2+2 & \\
\quad \quad \underline{-2\lambda^2-2\lambda} & \\
\quad \quad -\ 2\lambda+2 & \\
\quad \quad \quad \underline{2\lambda+2} & \\
\quad \quad \quad \quad 0 &
\end{array}$$

$$\lambda^2-2\lambda+2=0,$$
$$(\lambda-1)^2+1=0,$$
$$\lambda_{3,4}=1\pm i.$$

$\lambda_1=-1 \ \Rightarrow \ x_1(n)=(-1)^n; \qquad \lambda_2=-1 \ \Rightarrow \ x_2(n)=n\cdot(-1)^n;$

$$\lambda_3=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad \lambda_3^n=\sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

$$\lambda_4=1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad \lambda_4^n=\sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

$$\lambda_{3,4} \ \Rightarrow \ x_3(n)=\sqrt{2}^n\cos\frac{n\pi}{4},$$

$$x_4(n)=\sqrt{2}^n\sin\frac{n\pi}{4}.$$

Общее решение $x(n)=(-1)^n(c_1+c_2n)+\sqrt{2}^n\left(c_3\cos\frac{n\pi}{4}+c_4\sin\frac{n\pi}{4}\right)$.

Подберем c_1, c_2, c_3, c_4 так, чтобы выполнялись заданные условия.

$$\begin{cases} x(0)=3,\\ x(1)=-3,\\ x(2)=2\\ x(3)=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=c_1+c_3,\\ -3=-(c_1+c_2)+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(c_3+c_4),\\ 2=c_1+2c_2+2\left(c_3\cdot\cos\frac{\pi}{2}+c_4\sin\frac{\pi}{2}\right),\\ -9=-(c_1+3c_2)+2\sqrt{2}\left(c_3\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+c_4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1+c_3=3\\ c_1+c_2-c_3-c_4=3,\\ c_1+2c_2+2c_4=2,\\ c_1+3c_2+2c_3-2c_4=9 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 2 & -2 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 7 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 25 & -25 \end{array}\right) \sim \begin{cases} c_1+c_3=2\\ c_2-2c_3-c_4=0\\ 3c_3+4c_4=-1\\ c_4=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1=2\\ c_2=1\\ c_3=1\\ c_4=-1 \end{cases}$$

Ответ: $x(n)=(-1)^n(n+2)+\sqrt{2}^n\left(\cos\frac{\pi n}{4}-\sin\frac{\pi n}{4}\right)$.

Задания для аудиторной работы

Определить порядок следующих разностных уравнений:

1. $\Delta^4 f(n)+4\Delta^3 f(n)+6\Delta^2 f(n)+5\Delta f(n)+2f(n)=\sin\frac{n\pi}{6}$;
2. $\Delta^3 f(n)+3\Delta^2 f(n)+3\Delta f(x)+f(n)=n^3+1$;
3. $\Delta^3 f(n)+2\Delta^2 f(n)+\Delta f(n)=2^n$.

Составить уравнения в конечных разностях:

4. $f(n+4)-f(n)=2n+3$;

5. $f(n+3)+5f(n+2)-6f(n+1)=2^n$.

Найти общее (или частное) решение ЛОРУ:

6. $3x(n+2)-2x(n+1)-8x(n)=0$;

7. $x(n+2)+2x(n+1)+x(n)=0$, $x(0)=1$, $x(1)=0$;

8. $x(n+3)-3x(n+2)+4x(n+1)-2x(n)=0$;

9. $x(n+3)-8x(n)=0$;

10. $x(n+4)+x(n)=0$, $x(0)=0$, $x(1)=1$, $x(2)=0$, $x(3)=0$.

Задания для индивидуальной работы

1. Определите порядок разностного уравнения.

2-4. Найдите общее или частное решение ЛОР уравнений.

I.

1. $\Delta^4 f(n)+4\Delta^3 f(n)+4\Delta^2 f(n)-f(n)=0$.
2. $x(n+2)-x(n+1)-2x(n)=0$, $x(0)=1$, $x(1)=2$.
3. $x(n+3)+2x(n+2)-16x(n)=0$.
4. $x(n+4)-81x(n)=0$.

Ответы: 1. $k=2$; 2. 2^{n+1}; 3. $c_1\cdot 2^n+\sqrt{8}^n\left(c_2\cos\frac{3n\pi}{4}+c_3\sin\frac{3n\pi}{4}\right)$;

4. $3^n\left(c_1+c_2(-1)^n+c_3\cos\frac{n\pi}{2}+c_4\sin\frac{n\pi}{2}\right)$.

II.

1. $\Delta^3 f(n)+3\Delta^2 f(n)-4\Delta f(n)+5f(n)=n^2+1$.
2. $x(n+2)-3x(n+1)-10x(n)=0$, $x(0)=3$, $x(1)=-1$.
3. $x(n+3)+3x(n+2)+9x(n+1)+27x(n)=0$.
4. $x(n+4)-16x(n)=0$.

Ответы: 1. $k=3$; 2. $\frac{1}{7}\left(5^{n+1}+(-1)^n 2^{n+4}\right)$;

3. $c_1\cdot(-3)^n+3^n\left(c_2\cos\frac{n\pi}{2}+c_3\sin\frac{n\pi}{2}\right)$;

4. $2^n\left(c_1+c_2(-1)^n+c_3\cos\frac{n\pi}{2}+c_4\sin\frac{n\pi}{2}\right)$.

III.

1. $\Delta^3 f(n)+2\Delta^2 f(n)-\Delta f(n)+4f(n)=n^2$.
2. $x(n+2)-2x(n+1)-3x(n)=0$, $x(0)=0$, $x(1)=2$.
3. $x(n+3)-3x(n+2)+4x(n+1)-12x(n)=0$.
4. $x(n+4)-256x(n)=0$.

Ответ: 1. $k=3$; 2. $0{,}5\left(3^n+\left(-1\right)^{n+1}\right)$; 3. $c_1\cdot 3^n+2^n\left(c_2\cos\frac{n\pi}{2}+c_3\sin\frac{n\pi}{2}\right)$;

4. $4^n\left(c_1+c_2\left(-1\right)^n+c_3\cos\frac{n\pi}{2}+c_4\sin\frac{n\pi}{2}\right)$.

IV.

1. $\Delta^4 f(n)+3\Delta^3 f(n)+4\Delta^2 f(n)-3\Delta f(n)-f(n)=3^n$.
2. $x(n+2)+5x(n+1)+6x(n)=0$, $x(0)=1$, $x(1)=-1$
3. $x(n+3)-6x(n+2)+16x(n+1)-16x(n)=0$.
4. $x(n+4)-625x(n)=0$.

Ответы: 1. $k=4$; 2. $(-1)^n\left(2^{n+1}-3^n\right)$; 3. $c_1\cdot 2^n+\sqrt{8}^n\left(c_2\cos\frac{n\pi}{4}+c_3\sin\frac{n\pi}{4}\right)$;

4. $5^n\left(c_1+c_2\left(-1\right)^n+c_3\cos\frac{n\pi}{2}+c_4\sin\frac{n\pi}{2}\right)$.

3.1. Решение ЛНРУ с постоянными коэффициентами

Дано ЛНРУ к-го порядка с постоянными коэффициентами $a_0x(n+k)+a_1x(n+k-1)+a_2x\left(n+k-2\right)+...+a_kx(n)=f(n)$, (1)
где $a_0\neq 0$, $a_k\neq 0$, a_0, a_1, …, $a_k=const\in R$, $f(n)$ - известная решетчатая функция.

Общее решение уравнения (1) представляет собой сумму общего решения $\overline{x}(n)$ соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения $x*(n)$ уравнения (1):

$$x(n)=\overline{x}(n)+x*(n). \tag{2}$$

Если функция f(n) имеет специальный вид, то $x*(n)$ отыскивается *методом неопределенных коэффициентов*.

а) Пусть $f(n)=\mu^nQ_m(n)$, где $Q_m(n)$ - известный многочлен степени m (решетчатая функция), μ - действительное число.

Частное решение уравнения (1) будем искать в виде

$$x*(n)=\mu^n\cdot n^rR_m(n), \tag{3}$$

где r = кратности числа μ по отношению к корням характеристического уравнения для уравнения (1).

$R_m(n)$ - многочлен степени m с пока неизвестными коэффициентами. Их определим при подстановке (3) в уравнение (1).

б) Пусть правая часть f(n) имеет вид $f(n)=Q_{m_1}(n)\cos\alpha n+R_{m_2}(n)\sin\alpha n$.

Тогда $x^*(n)=\left(M(n)\cos\alpha n+N(n)\sin\alpha n\right)n^r$, где степень многочленов M(n) и N(n) равна $\max\left(m_1,m_2\right)$, число r совпадает с кратностью функций $\cos\alpha n$

и $\sin\alpha n$ в формуле общего решения $\overline{x}(n)$ соответствующего (1) однородного уравнения.

Пример 1. Найти общее решение ЛНРУ

$$x(n+2)-x(n+1)-12x(n)=(5n+1)\cdot 2^n.$$

$x(n)=\overline{x}(n)+x^*(n)$

$\overline{x}(n)=?$ $\qquad x(n+2)-x(n+1)-12x(n)=0$

Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2-\lambda-12=0$, его корни $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=4$.

Общее решение однородного уравнения имеет вид $\overline{x}(n)=c_1\cdot(-3)^n+c_2\cdot 4^n$.

Ищем частное решение данного уравнения $x^*(n)$. Правая часть $f(n)=(5n+1)\cdot 2^n$, причем 2 не является корнем характеристического уравнения, $r=0$.

$x^*(n)=(an+b)\cdot 2^n$, a и b – пока неопределенные коэффициенты.

$x^*(n+1)=(an+b+a)\cdot 2^{n+1}=(2a\cdot n+2b+2a)\cdot 2^n$,

$x^*(n+2)=(a(n+2)+b)\cdot 2^{n+2}=(an+2a+b)\cdot 4\cdot 2^n=(4an+8a+4b)\cdot 2^n$.

Подставим $x^*(n)$, $x^*(n+1)$ и $x^*(n+2)$ в данное уравнение.

$(4an+8a+4b)\cdot 2^n-(2an+2b+2a)\cdot 2^n-12(an+b)\cdot 2^n=(5n+1)\cdot 2^n$.

$\underline{4an}+8a+4b-\underline{2an}-2b-2a-\underline{12an}-12b=5n+1$.

$-10an+6a-10b=5n+1$.

$$\begin{array}{c|l} n & -10a=5, \qquad a=-\dfrac{1}{2}=-0{,}5, \\ n^0 & 6a-10b=1, \quad 10b=6a-1=-3-1=-4, \quad b=-0{,}4 \end{array}$$

$$x^*(n)=-(0{,}5n+0{,}4)\cdot 2^n.$$

Общее решение ЛНРУ $x(n)=c_1\cdot(-3)^n+c_2\cdot 4^n-(0{,}5n+0{,}4)\cdot 2^n$.

Пример 2. Найти частное решение ЛНРУ

$$x(n+2)+x(n)=\sin 2n,\ x(0)=0,\ x(1)=1.$$

$$x(n)=\overline{x}(n)+x^*(n).$$

$\overline{x}(n)=?$ $\quad x(n+2)+x(n)=0$, $\quad \lambda^2+1=0$, $\quad \lambda_{1,2}=\pm i$

$\lambda_1=i=1\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\quad \lambda_2=-i=1\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{2}-i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$(\lambda_{1,2})^n=\cos\dfrac{n\pi}{2}\pm i\sin\dfrac{n\pi}{2}$, $\ x_1(n)=\cos\dfrac{n\pi}{2}$; $\ x_2(n)=\sin\dfrac{n\pi}{2}$,

общее решение однородного уравнения $\overline{x}(n)=c_1\cdot\cos\dfrac{n\pi}{2}+c_2\cdot\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

Ищем частное решение $x^*(n)$ данного уравнения. Так как $f(n)=\sin 2n$ и такой функции *в* $\overline{x}(n)$ нет, то

$$x^*(n)=a\sin 2n+b\cos 2n,$$
$$x^*(n+1)=a\sin 2(n+1)+b\cos 2(n+1),$$
$$x^*(n+2)=a\sin 2(n+2)+b\cos 2(n+2).$$

Подставляем в исходное уравнение $x^*(n)$ *и* $x^*(n+2)$:

$a\sin(2n+4)+b\cos(2n+4)+a\sin 2n+b\cos 2n=\sin 2n$,

$a\left(\sin\left(2n+4\right)+\sin 2n\right)+b\left(\cos\left(2n+4\right)+\cos 2n\right)=\sin 2n$,

$2a\sin\left(2n+2\right)\cos 2+2b\cos\left(2n+2\right)\cos 2=\sin 2n$,

$2a\cos 2\left(\sin 2n\cdot\cos 2+\cos 2n\cdot\sin 2\right)+2b\cos 2\left(\cos 2n\cdot\cos 2-\sin 2n\cdot\sin 2\right)=$
$=\sin 2n$,

$2a\left(\sin 2n\cdot\cos^2 2+\cos 2n\cdot\sin 2\cdot\cos 2\right)+2b\left(\cos 2n\cdot\cos^2 2-\sin 2n\cdot\sin 2\cos 2\right)=$
$=\sin 2n$.

$$\begin{array}{l|l}\sin 2n & 2a\cos^2 2-2b\sin 2\cos 2=1,\\ \cos 2n & 2a\sin 2\cos 2+2b\cos^2 2=0.\end{array}$$

$$\begin{cases}2a\cos^2 2-2b\sin 2\cos 2=1,\\ a\sin 2+b\cos 2=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}-2b\dfrac{\cos^2 2\cdot\cos 2}{\sin 2}-2b\sin 2\cos 2=1\\ a=-b\dfrac{\cos 2}{\sin 2}\end{cases}$$

$$-2b\frac{\cos^3 2+\sin^2 2\cos 2}{\sin 2}=1,\quad b=-\frac{\sin 2}{2\cos 2}=-\frac{1}{2}tg2;\quad a=\frac{1}{2}.$$

Частное решение данного уравнения получено $x^*(n)=\frac{1}{2}\sin 2n-\frac{1}{2}tg2\cdot\cos 2n$.

Общее решение $x(n)=c_1\cos\frac{n\pi}{2}+c_2\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 2n-\frac{1}{2}tg2\cos 2n$.

Находим c_1 и c_2, используя начальные условия $x(0)=0$, $x(1)=1$.

$$x(0)=c_1-\frac{1}{2}tg2=0\qquad c_1=\frac{1}{2}tg2.$$

$$x(1)=c_2+\frac{1}{2}\sin 2-\frac{1}{2}tg2\cdot\cos 2=1,$$

$$c_2=-\frac{1}{2}\sin 2+\frac{1}{2}\frac{\sin 2}{\cos 2}\cdot\cos 2+1=1.$$

Частное решение имеет вид

$$x(n)=\frac{1}{2}tg2\cdot\cos\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 2n-\frac{1}{2}tg2\cdot\cos 2n=$$

$$=\frac{1}{2}tg2\cdot\cos\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{2\cos 2}\left(\sin 2n\cdot\cos 2-\cos 2n\cdot\sin 2\right)=$$
$$=\frac{1}{2}tg2\cdot\cos\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{\sin 2\left(n-1\right)}{2\cos 2}.$$

Если правая часть уравнения (1) не имеет специального вида , то $x^*(n)$ отыскивают по <u>методу вариации произвольных постоянных</u>.

Пусть дано ЛНРУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0x(n+2)+a_1x(n+1)+a_2x(n)=f(n), \qquad (4)$$

a_0, a_1, $a_2=const\in R$, $a_0\neq 0$, $a_2\neq 0$, f(n) – известная решетчатая функция общего вида.

Находим общее решение однородного уравнения $\left(f(n)=0\right)$

$$\overline{x}(n)=c_1\cdot x_1(n)+c_2x_2(n),$$

где c_1 и $c_2-\forall const$, $x_{1,2}(n)$ - частные линейно независимые решения однородного уравнения.

Частное решение $x^*(n)$ уравнения (4) будем искать в виде

$$x^*(n)=c_1(n)\cdot x_1(n)+c_2(n)\cdot x_2(n),$$

Обозначим $\begin{array}{l} c_1(n+1)-c_1(n)=\Delta c_1(n)=\alpha_n, \\ c_2(n+1)-c_2(n)=\Delta c_2(n)=\beta_n. \end{array}$ (5)

Последовательности α_n и β_n определим из системы

$$\begin{cases} \alpha_n\cdot x_1\left(n+1\right)+\beta_n\cdot x_2(n+1)=0, \\ \alpha_n\cdot x_1(n+2)+\beta_n\cdot x_2(n+2)=\dfrac{f(n)}{a_0}. \end{cases}$$

Зная α_n и β_n, из (5) находим $c_1(n)$ и $c_2(n)$ и составляем общее решение исходного уравнения.

Пример. Найти частное решение ЛНРУ по методу вариации произвольных постоянных.

$x(n+2)-3x(n+1)+2x(n)=n$.

$x(n)=\overline{x}(n)+x^*(n)$,

$\overline{x}(n)=?$ $\quad x(n+2)-3x(n+1)+2x(n)=0$, $\quad \lambda^2-3\lambda+2=0$, $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=2$.

Общее решение однородного разностного уравнения

$\overline{x}(n)=c_1\cdot 1^n+c_2\cdot 2^n$, $\quad x_1(n)=1$, $x_2(n)=2^n$.

Будем искать частное решение неоднородного разностного уравнения в виде

$x^*(n)=c_1(n)\cdot 1^n+c_2(n)\cdot 2^n$

Обозначим $c_1(n+1)-c_1(n)=\Delta c_1(n)=\alpha_n$, $\quad c_2(n+1)-c_2(n)=\Delta c_2(n)=\beta_n$.
Последовательности α_n и β_n определим из системы

$$\begin{cases}\alpha_n\cdot 1+\beta_n\cdot 2^{n+1}=0,\\ \alpha_n\cdot 1+\beta_n\cdot 2^{n+2}=n.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_n=-\beta_n\cdot 2^{n+1},\\ \beta_n\left(2^{n+2}-2^{n+1}\right)=n,\end{cases} \quad \beta_n=\frac{n}{2^{n+1}};\quad \alpha_n=-n.$$

Определим $c_1(n)$ и $c_2(n)$ из условий $\begin{cases}c_1(n)-c_1(n)=\alpha_n,\\ c_2(n+1)-c_2(n)=\beta_n,\end{cases}$

$$\begin{cases}c_1(n+1)-c_1(n)=-n,\\ c_2(n+1)-c_2(n)=\dfrac{n}{2^{n+1}}.\end{cases}$$

Для решения этих ЛРУ первого порядка не будем использовать метод неопределенных коэффициентов.
Рассмотрим первое разностное уравнение первого порядка

$$c_1(n+1)=c_1(n)-n.$$

Пусть $c_1(0)=c_1$, тогда $c_1(1)=c_1(0)-0=c_1$; $c_1(2)=c_1(1)-1=c_1-1$; $c_1(3)=c_1(2)-2=c_1-1-2=c_1-3$; $c_1(4)=c_1-3-3=c_1-6$; $c_1(5)=c_1-10$, $c_1(6)=c_1-15$, $c_1(7)=c_1-21$; …; $c_1(n)=?$

$$c_1(n)=c_1-1-2-3-4-...-(n-1)=c_1-\frac{1+(n-1)}{2}\cdot(n-1)=c_1-\frac{n(n-1)}{2}.$$

Решаем уравнение $c_2(n+1)=c_2(n)+\dfrac{n}{2^{n+1}}$. (6)

$c_2(0)=c_2$, $\quad c_2(1)=c_2+0$, $\quad c_2(2)=c_2+\dfrac{1}{2^2}$; $\quad c_2(3)=c_2+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}$;

$c_2(4)=c_2+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\dfrac{3}{2^4}$; $\quad c_2(5)=c_2+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\dfrac{3}{2^4}+\dfrac{4}{2^5}$; …;

$$c_2(n)=c_2+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{4}{2^5}+...+\frac{n-1}{2^n}=$$

$$=c_2+\frac{1}{2^2}\left(1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2^2}+4\cdot\frac{1}{2^3}+...+(n-1)\cdot\frac{1}{2^{n-2}}\right)=c_2+\frac{1}{2^n}\cdot c_3\left(n,\frac{1}{2}\right),,$$

где $c_3(n,\frac{1}{2})=1+2\cdot\dfrac{1}{2}+3\cdot\dfrac{1}{2^2}+...+(n-1)\cdot\dfrac{1}{2^{n-2}}$.

Обозначим $x=\dfrac{1}{2}$, тогда $c_3(n,x)=1+2x+3x^2+...+(n-1)x^{n-2}$;

$$\int c_3(n,x)dx=x+x^2+x^3+...+x^{n-1}=\frac{x-x\cdot x^{n-1}}{1-x}=\frac{x-x^n}{1-x}.$$

Тогда $c_3(n,x)=\left(\dfrac{x-x^n}{1-x}\right)_x^1=\dfrac{\left(1-nx^{n-1}\right)(1-x)+x-x^n}{(1-x)^2}=$

$$=\frac{1-nx^{n-1}-x+nx^n+x-x^n}{(1-x)^2}=\frac{1-nx^{n-1}+(n-1)x^n}{(1-x)^2}.$$

Подставим $x=\dfrac{1}{2}$, тогда

$$c_3(n,\frac{1}{2})=4\left(1-\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{n-1}{2^n}\right)=\frac{2^n-2n+n-1}{2^{n-2}}=\frac{2^n-n-1}{2^{n-2}}.$$

Таким образом общее решение уравнения (6) получено

$$c_2(n)=c_2+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{2^n-n-1}{2^{n-2}}=c_2+1-\frac{n+1}{2^n}.$$

Общее решение исходного уравнения

$$x(n)=c_1(n)\cdot 1^n+c_2(n)\cdot 2^n,\qquad x(n)=c_1-\frac{n(n-1)}{2}+\left(c_2+1-\frac{n+1}{2^n}\right)\cdot 2^n;$$

$$x(n)=c_1+c_2\cdot 2^n+2^n-(n+1)-\frac{n(n-1)}{2};$$

$$x(n)=c_1+c_2\cdot 2^n+2^n-\frac{2n+2+n^2-n}{2};$$

$$x(n)=c_1+c_2\cdot 2^2+2^n-\frac{n^2+n+2}{2}.$$

Задания для аудиторной работы

Решить следующие ЛНРУ методом неопределенных коэффициентов:

1. $x(n+2)-4x(n)=4^n.$
2. $x(n+2)-6x(n+1)+9x(n)=n\cdot 3^n,\quad x(0)=0,\ x(1)=0.$
3. $x(n+3)-3x(n+2)+3x(n+1)-x(n)=n^2.$
4. $x(n+3)+3x(n+2)+3x(n+1)+x(n)=\cos n\pi,\quad x(0)=x(1)=x(2)=0.$
5. $x(n+3)+8x(n)=2^n.$

Найти решение ЛНР уравнений методом вариации произвольных постоянных

6. $x(n+2)+4(n+1)+4x(n)=3^n.$
7. $x(n+2)-x(n+1)-2x(n)=n.$

Задания для индивидуальной работы

Решите следующие линейные неоднородные разностные уравнения

I.

1. $x(n+2)-6x(n+1)-7x(n)=8n\cdot 3^n.$
2. $x(n+2)-2x(n+1)+x(n)=3n+5.$
3. $x(n+3)+8x(n)=(-2)^n\cdot 48.$

Отв.:

1. $c_1\cdot 7^n+c_2(-1)^n-0,5n\cdot 3^n;$
2. $c_1+c_2n+0,5n^3+n^2;$
3. $(-2)^n(c_1-2n)+$
$+2^n\left(c_2\cos\dfrac{n\pi}{3}+c_3\sin\dfrac{n\pi}{3}\right).$

II.

1. $x(n+2)-10x(n+1)+25x(n)=$
$=(2n-6)\cdot 3^n.$
2. $x(n+2)-5x(n+1)+6x(n)=24\cdot 3^n.$
3. $x(n+2)+2x(n+1)+x(n)=\cos n\pi.$

Отв.:

1. $(c_1+c_2n)\cdot 5^n+0,5n\cdot 3^n;$
2. $c_1\cdot 3^n+c_2\cdot 2^n+8n\cdot 3^n;$
3. $(-1)^n(c_1+c_2n-0,5n^2).$

III.

1. $x(n+2)+2x(n+1)+x(n)=32n\cdot 3^n.$
2. $x(n+2)-3x(n+1)-10x(n)=2\cdot 5^n.$
3. $x(n+3)+27x(n)=(-3)^n\cdot 162.$

Отв.:

1. $(-1)^n(c_1+c_2n)+(2n-3)\cdot 3^n;$
2. $c_1\cdot 5^n+c_2(-2)^n+\dfrac{4n}{7}\cdot 5^n;$
3. $(-3)^n(c_1-2n)+$
$+3^n\left(c_2\cos\dfrac{n\pi}{3}+c_3\sin\dfrac{n\pi}{3}\right).$

IV.

1. $x(n+2)-4x(n+1)+3x(n)=$
$=(n+3)\cdot 2^n.$
2. $x(n+2)-3x(n+1)+2x(n)=$
$=(2n+5)\cdot 2^n.$
3. $x(n+3)-64x(n)=4^n\cdot 24.$

Отв.:

1. $c_1+c_2\cdot 3^n-(n+3)\cdot 2^n;$
2. $c_1+2^n(c_2+0,5n^2);$
3. $4^n\left(c_1+\dfrac{n}{8}+c_2\cos\dfrac{2n\pi}{3}+c_3\sin\dfrac{2n\pi}{3}\right).$

3.3 Решение систем ЛРУ с постоянными коэффициентами

Дана система двух линейных неоднородных разностных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами вида

$$\begin{cases} x(n+1) = a_{11}x(n) + a_{12}y(n) + f_1(n), \\ y(n+1) = a_{21}x(n) + a_{22}y(n) + f_2(n), \end{cases} \qquad (1)$$

где $a_{ij} = const \in R$, $i, j = 1,2$; $f_i(n)$ $(i = 1,2)$ - заданные решетчатые функции.

Требуется найти решетчатые функции $x(n)$ и $y(n)$, удовлетворяющие системе (1) и , если они заданы, начальным условиям $x(n_0) = x_0$, $y(n_0) = y_0$.

Систему (1) можно свести к одному разностному уравнению второго порядка относительно одной из искомых функций (метод исключения неизвестных).

$$\begin{cases} x(n+2) = a_{11}x(n+1) + a_{12}y(n+1) + f_1(n+1), \\ y(n+1) = a_{21}x(n) + a_{22}y(n) + f_2(n). \end{cases} \qquad (2)$$

Подставляем $y(n+1)$ в первое уравнение системы (2)

$$\begin{cases} x(n+2) = a_{11}x(n+1) + a_{12}(a_{21}x(n) + a_{22}y(n) + f_2(n)) + f_1(n+1), \\ y(n) = \dfrac{1}{a_{12}}\left(x(n+1) - a_{11}x(n) - f_1(n)\right). \end{cases} \qquad (3)$$

После подстановки $y(n)$, взятого из первого уравнения системы (1), в первое уравнение системы(3), получим ЛНРУ второго порядка относительно функции $x(n)$. Решив это уравнение, находим $y(n)$ и выписываем общее решение системы (1).

Пример 1. Найти общее решение системы РУ

$$\begin{cases} x(n+1) = -x(n) + 5y(n), \\ y(n+1) = -x(n) + y(n). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(n+2) = -x(n+1) + 5y(n+1), \\ y(n+1) = -x(n) + y(n). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(n+2) = -x(n+1) + 5(-x(n) + y(n)), \\ 5y(n) = x(n+1) + x(n). \end{cases}$$

$$x(n+2) = -x(n+1) - 5x(n) + x(n+1) + x(n)$$

Получаем ЛОРУ 2 порядка относительно функции $x(n)$.

$$x(n+2) + 4x(n) = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0, \qquad \lambda = \pm 2i, \qquad \lambda = 2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\lambda^n = 2^n \cos\frac{n\pi}{2} + i2^n \sin\frac{n\pi}{2},\ x(n) = c_1 \cdot 2^n \cos\frac{n\pi}{2} + c_2 \cdot 2^n \sin\frac{n\pi}{2}.$$

Найдем функцию $y(n)$.

$$5y(n) = x(n+1) + x(n) = c_1 \cdot 2^{n+1} \cos\frac{(n+1)\pi}{2} + c_2 \cdot 2^{n+1} \sin\frac{(n+1)\pi}{2} +$$

$$+c_1 \cdot 2^n \cos\frac{n\pi}{2} + c_2 \cdot 2^n \sin\frac{n\pi}{2} = 2c_1 \cdot 2^n \left(-\sin\frac{n\pi}{2}\right) + 2c_2 \cdot 2^n \cos\frac{n\pi}{2} +$$

$$+c_1 \cdot 2^n \cos\frac{n\pi}{2} + c_2 \cdot 2^n \sin\frac{n\pi}{2} = 2^n \left(-2c_1 + c_2\right)\sin\frac{n\pi}{2} + \left(c_1 + 2c_2\right)\cdot 2^n \cos\frac{n\pi}{2}.$$

Общее решение системы $\begin{cases} x(n) = 2^n \left(c_1 \cos\frac{n\pi}{2} + c_2 \sin\frac{n\pi}{2}\right), \\ y(n) = \frac{2^n}{5}\left(\left(c_1 + 2c_2\right)\cos\frac{n\pi}{2} - \left(2c_1 - c_2\right)\sin\frac{n\pi}{2}\right). \end{cases}$

Рассмотрим случай системы ЛОРУ с постоянными коэффициентами.

$$\begin{cases} x_1(n+1) = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \ldots + a_{1m}x(n), \\ x_2(n+1) = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \ldots + a_{2m}x_m(n), \\ \ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots \quad \ldots\ldots \\ x_m(n+1) = a_{m1}x_1(n) + a_{m2}x_2(n) + \ldots + a_{mm}x_m(n), \end{cases} \tag{4}$$

$a_{ij} = const \in R \ \left(i, j = \overline{1,m}\right)$

Будем искать нетривиальные решения системы (4) в виде

$$x_i(n) = \alpha_i \cdot \lambda^n \tag{5}$$

где α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$, λ пока неизвестные числа.

Подставим (5) в систему (4), после сокращения на λ^n и группировки слагаемых получим систему (6):

$$\begin{cases} \left(a_{11} - \lambda\right)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1m}\alpha_m = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + \left(a_{22} - \lambda\right)\alpha_2 + \ldots + a_{2m}\alpha_m = 0, \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots - + \left(a_{mm} - \lambda\right)\alpha_m = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Относительно α_1, α_2, …, α_m (6) – линейная однородная алгебраическая система.

Она имеет нетривиальные решения, если ее определитель равен 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

Уравнение (7) называется характеристическим уравнением системы (4).
Из уравнения (7) находим все его решения λ_1, λ_2, …, λ_m, для каждого λ_i составляем систему (6), определяем соответствующие значения $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_m^{(i)}$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$.
Выписываем m частных линейно независимых решений системы (4)

$$\begin{array}{llll} x_1^{(1)}(n), & x_1^{(2)}(n), & \dots, & x_1^{(m)}(n), \\ x_2^{(1)}(n), & x_2^{(2)}(n), & \dots, & x_2^{(m)}(n), \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ x_m^{(1)}(n), & x_m^{(2)}(n), & \dots, & x_m^{(m)}(n) \end{array}$$

и составляем общее решение системы (4)

$$\begin{cases} x_1(n) = \sum\limits_{j=1}^{m} c_j x_1^{(j)}(n), \\ x_2(n) = \sum\limits_{j=1}^{m} c_j x_2^{(j)}(n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m(n) = \sum\limits_{j=1}^{m} c_j x_m^{(j)}(n), \end{cases}$$

где c_1, c_2, …, c_m - $\forall$ const $\in R$.

Пример 2. Найти общее решение системы ЛОРУ с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x(n+1) = 3x(n) - y(n) + z(n), \\ y(n+1) = -x(n) + 5y(n) - z(n), \\ z(n+1) = x(n) - y(n) + 3z(n). \end{cases}$$

Ищем решение в виде $x(n) = \alpha \cdot \lambda^n$, $y(n) = \beta\lambda^n$, $z(n) = \gamma\lambda^n$, где α, β, γ и λ пока неизвестные числа.
Составляем систему вида (6)

$$\begin{cases} (3-\lambda)\alpha - \beta + \lambda = 0, \\ -\alpha + \left(5-\lambda\right)\beta - \gamma = 0, \\ \alpha - \beta + \left(3-\lambda\right)\gamma = 0, \end{cases} \qquad (8)$$

и характеристическое уравнение данной системы

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$(3-\lambda)^2(5-\lambda)+1+1-(5-\lambda)-(3-\lambda)-(3-\lambda)=0,$

$(3-\lambda)^2(5-\lambda)+2-11+3\lambda=0,\quad (3-\lambda)^2(5-\lambda)-3(3-\lambda)=0,$

$3-\lambda=0\quad (3-\lambda)(5-\lambda)-3=0,\qquad \lambda^2-8\lambda+12=0,\ (\lambda-2)(\lambda-6)=0.$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=6$.

Для $\lambda_1=2$ составляем систему (8)

$$\begin{cases} \alpha-\beta+\gamma=0, \\ -\alpha+3\beta-\gamma=0, \\ \alpha-\beta+\gamma=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha-\beta+\gamma=0, \\ -\alpha+3\beta-\gamma=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\beta=0, \\ \alpha+\gamma=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=0, \\ \alpha=-\gamma. \end{cases}$$

Пусть $\alpha_1=1$, $\beta_1=0$, $\gamma_1=-1$, тогда $x_1(n)=1\cdot 2^n$, $y_1(n)=0\cdot 2^n$, $z_1(n)=-1\cdot 2^n$.

Для $\lambda_2=3$ система (8) имеет вид

$$\begin{cases} -\beta+\gamma=0, \\ -\alpha+2\beta-\gamma=0, \\ \alpha-\beta=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=\gamma, \\ \alpha=\beta, \end{cases}$$

Если $\alpha_2=1$, $\beta_2=1$, $\gamma_2=1$, то $x_2(n)=3^n$, $y_2(n)=3^n$, $z_2(n)=3^n$.

$$\lambda_3=6\quad \begin{cases} -3\alpha-\beta+\gamma=0, \\ -\alpha-\beta-\gamma=0, \\ \alpha-\beta-3\gamma=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha+2\gamma=0, \\ -2\beta-4\gamma=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\gamma, \\ \beta=-2\gamma, \end{cases}$$

Если $\alpha_3=1$, $\beta_3=-2$, $\gamma_3=1$, то $x_3(n)=6^n$, $y_3(n)=-2\cdot 6^n$, $z_3(n)=6^n$.

Общее решение системы ЛОРУ

$$\begin{cases} x(n)=c_1\cdot 2^n+c_2\cdot 3^n+c_3\cdot 6^n, \\ y(n)=c_1\cdot 0+c_2\cdot 3^n-2c_3\cdot 6^n, \\ z(n)=-c_1\cdot 2^n+c_2\cdot 3^n+c_3\cdot 6^n. \end{cases}$$

Задания для аудиторной работы.

Решить следующие системы ЛРУ методом исключения неизвестных.

1. $\begin{cases} x(n+1)=-x(n)-2y(n), \\ y(n+1)=3x(n)+4y(n). \end{cases}$

2. $\begin{cases} x(n+1) - x(n) + y(n) = 3^n, \\ y(n+1) + 2x(n) = -3^n, \end{cases}$ $x(0) = 3$, $y(0) = 0$.

3. $\begin{cases} x(n+1) = -5x(n) + 2y(n) + 1, \\ y(n+1) = x(n) - 6y(n) + (-2)^n. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x(n+1) = x(n) - 3y(n), \\ y(n+1) = 3x(n) + y(n). \end{cases}$

5. $\begin{cases} x(n+1) = 3x(n) - y(n) + z(n), \\ y(n+1) = x(n) + y(n) + z(n), \\ z(n+1) = 4x(n) - y(n) + 4z(n), \end{cases}$ $x(0) = 9$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

Задания для индивидуальной работы

Решить системы линейных разностных уравнений

I.

1. $\begin{cases} x(n+1) = 4x(n) - y(n), \\ y(n+1) = x(n) + 2y(n), \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x(n+1) = 5x(n) + y(n) + 30n \cdot 2^n, \\ y(n+1) = 12x(n) + y(n) - 2^{n+1}. \end{cases}$

$x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Ответ: 1. $\begin{cases} x(n) = 3^{n-1}(n+3), \\ y(n) = n \cdot 3^{n-1}; \end{cases}$

2. $\begin{cases} x(n) = c_1 \cdot 7^n + c_2(-1)^n - \left(2n + \dfrac{10}{3}\right) \cdot 2^n, \\ y(n) = 2c_1 7^n - 6c_2(-1)^n + (-24n + 6) \cdot 2^n. \end{cases}$

II.

1. $\begin{cases} x(n+1) = 3x(n) + 4y(n), \\ y(n+1) = x(n) + 3y(n), \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x(n+1) = 2x(n) - y(n) + 12n + 3, \\ y(n+1) = x(n) + 4y(n) + 1. \end{cases}$

$x(0) = 2$, $y(0) = 1$.

Ответ: 1. $x(n) = 2 \cdot 5^n$, $y(n) = 5^n$;

2. $\begin{cases} x(n) = 3^n(c_1 + c_2 n) - 9n - 8{,}5; \\ y(n) = 3^n(-c_1 - (n+3)c_2) + 3n + 3{,}5. \end{cases}$

III.

1. $\begin{cases} x(n+1) = 3x(n) + y(n), \\ y(n+1) = -5x(n) - y(n), \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x(n+1) = 6x(n) + 5y(n) + 9n \cdot 2^n, \\ y(n+1) = 5x(n) + 6y(n) - 11 \cdot 2^n. \end{cases}$

$x(0)=2$, $y(0)=4$.

Ответ: 1. $\begin{cases} x(n)=\sqrt{2}^{n+2}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}+5\sin\dfrac{n\pi}{4}\right), \\ y(n)=\sqrt{2}^{n+2}\left(3\cos\dfrac{n\pi}{4}-11\sin\dfrac{n\pi}{4}\right); \end{cases}$

2. $\begin{cases} x(n)=c_1+c_2\cdot 11^n+(4n-3)\cdot 2^n, \\ y(n)=-c_1+c_2\cdot 11^n-(5n-4)\cdot 2^n. \end{cases}$

IV.

1. $\begin{cases} x(n+1)=5x(n)+y(n), \\ y(n+1)=-x(n)+3y(n), \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x(n+1)=x(n)+4y(n)+2n-1, \\ y(n+1)=2x(n)+3y(n)+5n-4. \end{cases}$

$x(0)=2$, $y(0)=4$.

Ответ: 1. $\begin{cases} x(n)=4^n\cdot(c_1+c_2 n), \\ y(n)=4^n\cdot(4c_2-c_1-c_2 n); \end{cases}$

2. $\begin{cases} x(n)=c_1\cdot 5^n+c_2(-1)^n-2n+2, \\ y(n)=c_1\cdot 5^n-0{,}5c_2(-1)^n-0{,}5n-0{,}25. \end{cases}$

IV. Численные методы анализа.

4.1. Приближенные методы решения скалярных уравнений. Метод хорд

Нахождение приближенных корней уравнения включает два этапа: 1) отделение корней; 2) уточнение корней до заданной точности.

Отделить корень ξ уравнения $f(x)=0$ - значит найти такой конечный промежуток, внутри которого имеется единственный корень данного уравнения.

Для отделения корней уравнения $f(x)=0$ применяют следующий критерий: если на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ непрерывна и монотонна, а ее значения на концах отрезка имеют разные знаки, то на этом отрезке имеется один и только один корень уравнения. Достаточным признаком монотонности функции $f(x)$ на отрезке является сохранение знака ее первой производной (если $f'(x)>0,$ то функция возрастает, если $f'(x)<0,$ функция убывает).

Отделение корней уравнения $f(x)=0$ можно выполнить графически, построив график функции $y=f(x),$ по которому можно судить о том, в каких промежутках находятся точки пересечения его с осью ox.

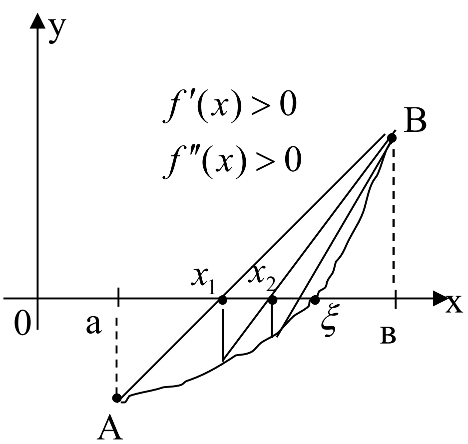
В некоторых случаях целесообразно представить уравнение $f(x)=0$ в эквивалентном виде $f_1(x)=f_2(x).$ Корень последнего уравнения представляет собой абсциссу точки пересечения графиков $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x).$

Метод хорд. Пусть дано уравнение $f(x)=0,$ причем корень ξ отделен и находится на $[a;b]$.

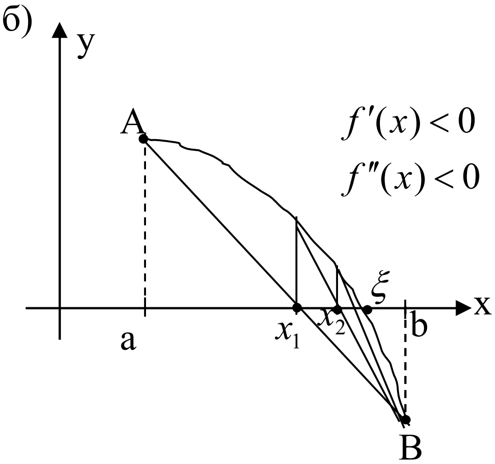
Суть метода состоит в том, что на достаточно малом отрезке $[a;b]$ дуга кривой $y=f(x)$ заменяется стягивающей ее хордой и в качестве приближенного значения корня берется точка пересечения хорды с осью x.

Рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ возрастающая ($f'(x)>0$) и вогнутая ($f'(x)>0$), т.е. $f'(x)\cdot f''(x)>0.$ (см. рис.1а)

а)



б)



Составляем уравнение хорды, проходящей через точки

$$A(a; f(a)) \quad и \quad B(b; f(b)):$$

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

Приравняв здесь y к нулю, найдем точку $x = x_1$ пересечения хорды AB с осью x: $x_1 = a - \dfrac{f(a)(b-a)}{f(b) - f(a)}$.

Это и есть первое приближение корня. Находим $f(x_1)$. Если $f(x_1) < 0$, то корень находится на отрезке $[x_1; b]$. Рассуждая аналогично, получим второе приближение :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)} \text{ и т.д.}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(b - x_n)}{f(b) - f(x_n)}\ , \quad n = 0,1,..., \quad x_0 = a \qquad (1)$$

Уточнение корня по методу хорд продолжается до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность ξ корня, т.е. пока не будет выполнено условие

$$|\xi - x_n| < |x_{n+1} x_n| \le \varepsilon.$$

Заметим, что при выводе формулы (1) правый конец $x = b$ отрезка $[a; b]$ неподвижен. Знак $f(b)$ совпадает со знаком $f''(b)$.

Формула (1) имеет место и когда

$f(a) > 0, f'(x) < 0, f''(x) < 0,$ *т.е.* $f'(x) \cdot f''(x) > 0 \quad \forall \ x \in [a; b]$.

И в этом случае неподвижной точкой является точка $x = b$ (см. рис. 1б), причем знаки $f(b)$ *и* $f''(b)$ совпадают.

Если функция $f(x)$ убывающая ($f'(x) < 0$) и вогнутая ($f''(x) > 0$) или возрастающая ($f'(x) > 0$) и выпуклая ($f''(x) < 0$), т.е. $f'(x) \cdot f''(x) < 0. \quad \forall \quad x \in [a; b]$ (см. рис. 2а. и б.),

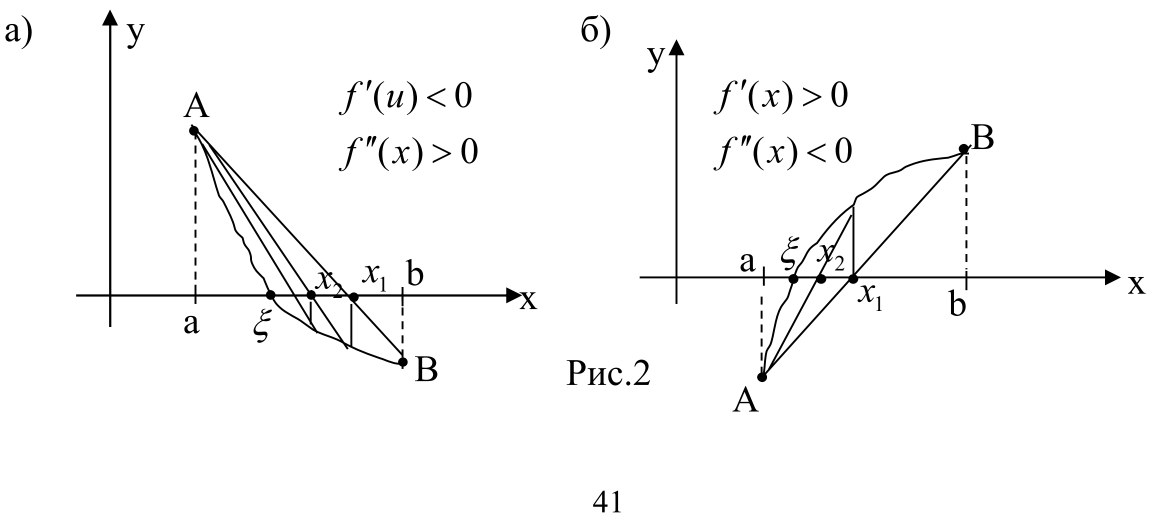


Рис.2

приближенные значения корня уравнения $f(x)=0$ получим в виде

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(x_n-a)}{f(x_n)-f(a)}, \qquad (2)$$

$n=0,1,..., \quad x_0=b.$

Теперь неподвижной является точка $x=a$, причем знаки $f(a)$ и $f''(a)$ совпадают.

Таким образом, выбор формулы (1) или (2) для уточнения корня уравнения $f(x)=0$ по методу хорд осуществляется по следующему правилу: неподвижным является тот конец отрезка $[a;b]$, для которого знак функции совпадает со знаком второй производной. Оценка абсолютной погрешности определяется формулой

$$|\xi-x_{n+1}|\le\frac{f(x_{n+1})}{\min\limits_{a\le x\le b}|f'(x)|}, \quad f'(x)\ne 0. \qquad (3)$$

Пример 1. Методом хорд найти действительный корень уравнения $x^3+3x-1=0$ с точностью до $\varepsilon=0,001$.

Решение. Легко убедиться, что единственный корень уравнения принадлежит отрезку $[0;1]$: $f(x)=x^3+3x-1, \quad f(0)=-1, \quad f(1)=3$ и $f'(x)=3x^2+3>0 \quad \text{для} \ \forall \ x.$

Уменьшим длину отрезка, содержащий корень:
$f(0,5)=0,125+1,5-1=0,625>0$ и $f(0,2)=0,008+0,6-1=-0,392<0.$

Значит, $\xi\in[0,2;0,5]$. $f(0,5)>0, \quad f''(x)=6x, \quad f''(0,5)=3>0,$ поэтому неподвижным является правый конец $b=0,5$ и уточнения корня будем проводить по формуле (1), т.е.

$$x_1=0,2-\frac{f(0,2)(0,5-0,2)}{f(0,5)-f(0,2)}=0,2+\frac{0,392\cdot 0,3}{0,625+0,392}=0,3156.$$

Находим $f(0,3156)=0,3156^3+3\cdot 0,3156-1=-0,0218,$ значит, $\xi\in[0,3156;0,5]$.

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)(b-x_1)}{f(b)-f(x_1)}=0,3156+\frac{0,0218(0,5-0,3156)}{0,625+0,0218}=0,3218.$$

$$f(0,3218)=0,3218^3+3\cdot 0,3218-1=-0,0013=f(x_2),$$

$$x_3=0,3218-\frac{-0,0013(0,5-0,3218)}{0,625+0,0013}=0,3218+\frac{0,00023}{0,6263}=0,3222.$$

Следовательно, с точностью до $\varepsilon=0,001$ получено значение корня $\xi=0,322.$

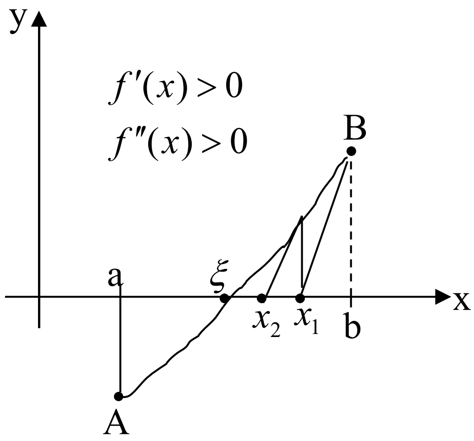
Для оценки погрешности приближенного значения корня $x_3=0,3222$ воспользуемся формулой (3).

$$f(x_3) = f(0,3222) = 0,0000485, \quad \min f'(x) = \min_{0,2 \le x \le 0,5} (3x^2 + 3) = 3,12,$$

$$|x_3 - \xi| \le \frac{0,0000485}{3,12} = 0,000016 < 0,001.$$

<u>Метод касательных.</u> Пусть корень ξ уравнения $f(x) = 0$ отделен и находится на $[a;b]$. Суть метода Ньютона состоит в том, что дуга кривой $y = f(x)$ заменяется касательной к ней и за приближение корня берется абсцисса точки пересечения касательной с осью x, при этом на отрезке $[a;b]$ у кривой $y = f(x)$ нет точек перегиба графика.

Рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ возрастающая $(f'(x) > 0)$ и вогнутая $(f''(x) > 0)$ ', т.е. $f'(x) \cdot f''(x) > 0, \quad f(a) < 0; \quad f(b) > 0.$



Уравнение касательной к графику $f(x)$ в точке $B(b; f(b))$ имеет вид $y - f(b) = f'(b)(x - b)$. При $y = 0$ получаем точку пресечения касательной с осью x, т.е. первое приближение корня: $x_1 = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$. Если $f(x_1) > 0$, искомый корень находится на отрезке $[a; x_1]$. Повторим рассуждения для этого отрезка, получим последующие приближение к корню:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}, \ldots, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (4)$$

Формула (4) имеет место и тогда, когда $f(a) > 0,\ f(b) < 0,\ f'(x) < 0, f''(x) < 0,$ т.е. $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ (начальная точка $x_0 = b$).

В случае, когда $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ для $\forall \ x \in [a;b]$, последовательные приближения к корню ξ находятся по формуле (4), но начальной точкой является $x_0 = a$, знаки $f(a)$ *и* $f''(a)$ совпадают.

Пример 2. Методом касательных найти действительный корень уравнения $xe^x-1=0$ с точностью $\varepsilon=0,0001$.

Решение. $f(x)=xe^x-1$.

$f(0)=-1,\quad f(1)=e-1>0,\quad f(0,5)=0,5\sqrt{e}-1=-0,697<0,$

$f(0,8)=0,8e^{0,8}-1=0,78>0.$

Корень уравнения $\zeta\in[0,5;0,8]$.

$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1),\quad f''(x)=e^x(x+2),$

$f'(0,8)=e^{0,8}\cdot 1,8=4,00597;\quad f''(0,8)=e^{0,8}\cdot 2,8=6,23151.$

Так как $f(0,8)>0$ и $f''(0,8)>0$, то $x_0=b=0,8$ и воспользуемся формулой (4).

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=b-\frac{f(b)}{f'(b)}=0,8-\frac{f(0,8)}{f'(0,8)}=0,8-\frac{0,78043}{4,00597}=0,60518;$$

$f(0,60518)=0,10844,\quad f'(0,60518)=2,94002,$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=0,60518-\frac{0,10844}{2,94002}=0,56830;$$

$f(0,56830)=0,00320;\quad f'(0,56830)=2,76846,$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=0,56830-\frac{0,00320}{2,76846}=0,56714;$$

$f(0,56714)=0,56714e^{0,56714}-1=-0,000009092,$

$f'(0,56714)=2,76321,$

$$x_4=0,56714+\frac{0,000009092}{2,76321}=0,56714.$$

Следовательно, с точностью $\varepsilon=0,0001$ корень получен $\xi=0,5671$.

Комбинированный метод.

Чтобы последовательные приближения к корню не были односторонними, на практике обычно комбинируют метод хорд и метод касательных.

Пример 3. Найти приближенное значение корня уравнения $2^x-\dfrac{1}{x^2}=0$ с точностью $\varepsilon=0,01$, используя комбинированный метод.

Решение. $f(x)=2^x-\dfrac{1}{x^2}$.

Отделим корень: $f(1)=2-1=1>0,\quad f(0,5)=\sqrt{2}-4=-2,586<0.$

$\xi \in (0,5;1).$

$f'(x) = 2^x \ln 2 + \dfrac{2}{x^3},\quad f''(x) = 2^x \ln^2 2 - \dfrac{6}{x^4}.$

$f'(x) > 0,\quad f''(x) < 0,\quad x \in (0,5;1).$

Так как $f'(x)\cdot f''(x) < 0,$ то слева будем применять метод касательных, а справа – метод хорд

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\ x_0 = 0,5; \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})(b - x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1{}' = 0,5 - \dfrac{f(0,5)}{f'(0,5)} = 0,5 + \dfrac{2,586}{16,98} = 0,652;\quad f(0,652) = -0,779. \\ x_2{}' = 1 - \dfrac{f(1)(1-0,5)}{f'(1) - f(0,5)} = 1 - \dfrac{0,5}{1 + 2,586} = 0,861;\quad f(0,861) = 0,465. \end{cases}$$

$$\xi \in (0,652;\ \ 0,861).$$

$$\begin{cases} x_1{}'' = 0,652 - \dfrac{-0,779}{f'(0,652)} = 0,652 + \dfrac{0,779}{8,305} = 0,746;\quad f(0,746) = -0,121. \\ x_2{}'' = 0,861 - \dfrac{0,465(0,861 - 0,652)}{0,465 + 2,586} = 0,829;\quad f(0,829) = 0,322. \end{cases}$$

$$\xi \in (0,746;0,829).$$

$$x_1{}''' = 0,746 + \frac{0,121}{f''(0,746)} = 0,746 + \frac{0,121}{5,980} = 0,766;\quad f(0,766) = -0,002$$

$$x_1{}''' = 0,829 - \frac{0,322\cdot 0,083}{0,322 + 0,121} = 0,769;\quad f(0,769) = 0,001$$

Итак, с точностью $\varepsilon = 0,01$ получено значение корня $\xi = 0,77.$

Метод простых итераций

Требуется найти действительный корень уравнения $f(x) = 0.$ Любым способом находим начальное приближение x_0 корня, уравнение записываем в виде $x = \varphi(x),$ где $|\varphi'(x)| < r < 1$ $(r = const).$ Тогда последовательные приближения к корню получают так:

$$x_1 = \varphi(x_0),\ x_2 = \varphi(x_1),\ldots,\ \ x_n = \varphi(x_{n-1})\ldots.$$

Если $x_n \in [a;b,],$ $n \in N,$ то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ является единственным корнем уравнения на отрезке $[a;b].$ Скорость сходимости последовательности $\{x_n\}$ к корню тем выше, чем меньше число $r.$ Погрешность приближенного значения x_n корня ξ, найденного методом итераций, оценивается неравенством

$$\left|\xi - x_n\right| \le \frac{1}{1-r}\left|x_{n+1} - x_n\right|.$$

На практике обычно вычисляют последовательные приближения до тех пор, пока $\left|x_{n+1} - x_n\right| \le \varepsilon$, $\varepsilon -$заданная точность.

Уравнение $f(x)=0$ приводится к виду $x=\varphi(x)$, например, так: $x = x + \lambda f(x)$, где $\lambda = const \ne 0$ выбирается так, чтобы $\left(x + f(x)\right)' = 1 + \lambda f'(x)$ была малой по абсолютной величине в окрестности x_0. Можно положить $1 + \lambda f'(x_0) = 0$.

Метод простых итераций имеет хорошую геометрическую интерпретацию. Построим графики функций $y = x$ и $y = \varphi(x)$.

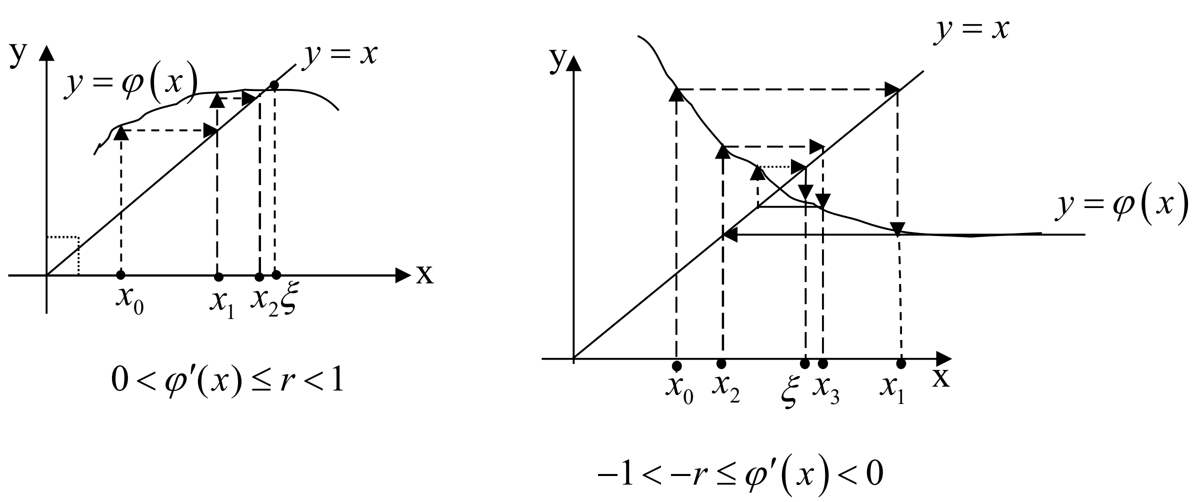


Рис.3

Корнем ξ уравнения $x=\varphi(x)$ является абсцисса точки пересечения линии $y=\varphi(x)$ с прямой $y=x$ (рис. 3).

Взяв в качестве начальной произвольную точку $x_0 \in [a;b]$, строим ломаную линию. Абсциссы вершин этой ломаной представляют собой последовательные приближения корня ξ. Из рисунка видно, что если в окрестности корня ξ имеет место условие $0<\varphi'(x)\le r<1$, то последовательность $\{x_n\}$ монотонно сходится к корню, причем с той стороны, с которой расположено начальное приближение x_0, а в случае $-1<-r\le\varphi'(x)<0$ последовательные приближения расположены поочередно с разных сторон от точки ξ. В последнем случае по двум последовательным приближениям корня можно судить о достигнутой точности на каждом шаге, т.к. отклонение x_n от ξ не более $|x_n - x_{n-1}|$.

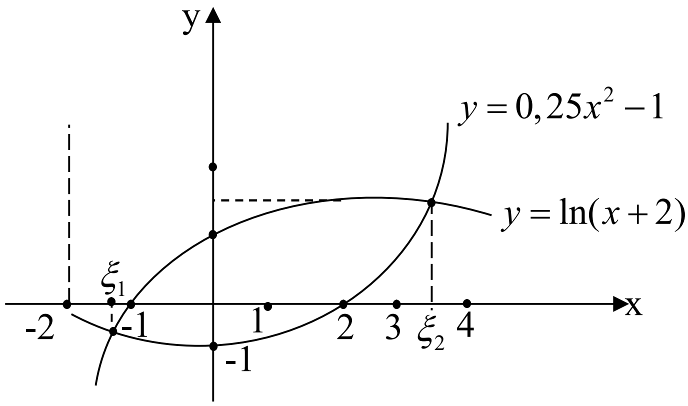
Пример 4. Методом итераций найти положительный корень уравнения $0,25x^2 - \ln(x+2) - 1 = 0$ с точностью до 10^{-4}.

Решение. Областью определения функции $f(x) = 0,25x^2 - \ln(x+2) - 1$ является промежуток $(-2;+\infty)$. Построив графики функций $y = \ln(x+2)$ *и* $y = 0,25x^2 - 1$, находим, что уравнение имеет два действительных корня, один из которых находится на отрезке $[-1,8;-1]$, а второй – на отрезке $[3;3,5]$. Действительно,

$f(-1,8) = 1,41944 > 0, \quad f(-1) = -0,75 < 0.$

$f(3) = -3,5944 < 0, \quad f(3,5) = 0,35775 > 0.$

$$f'(x) = 0,5x - \frac{1}{x+2}$$



Уточним второй корень. За начальное приближение примем $x_0 = 3,2$. Тогда $f'(x_0) = f'(3,2) = 0,5 \cdot 3,2 - \dfrac{1}{3,2+2} = 1,41$ и $1 + 1,41\lambda = 0$. Отсюда $\lambda = -\dfrac{1}{1,41} = -0,7.$

Исходное уравнение приводится к виду:

$$x = x - 0,7(0,25x^2 - \ln(x+2) - 1).$$

$x_1 = x_0 - 0,7(0,25 \cdot x_0^2 - \ln(x_0+2) - 1) = 3,2 - 0,7(0,25 \cdot 3,2^2 - \ln(3,2+2) - 1) =$
$= 3,262062;$

$x_2 = x_1 - 0,7(0,25 \cdot x_1^2 - \ln(x_1+2) - 1) = 3,262062 - 0,7(0,25 \cdot 3,262062^2 -$
$-\ln(3,262062+2) - 1) = 3,262243;$

$x_3 = x_2 - 0,7(0,25 \cdot x_2^2 - \ln(x_2+2) - 1) = 3,262243 - 0,7(0,25 \cdot 3,262243^2 -$
$-\ln(3,262243+2) - 1) = 3,262245.$

Итак, $\xi = 3,2622$ (процесс дальнейших приближений можно прекратить).

Проведем оценку погрешности по формуле $\Delta = \dfrac{\varepsilon}{1-r}$.

$\varphi(x) = x - 0,7(0,25x^2 - \ln(x+2) - 1)$.

$\varphi'(x) = 1 - 0,7\left(0,5x - \dfrac{1}{x+2}\right)$.

$r = \max|\varphi'(x)| = 1 - 0,7\left(0,5\cdot 3,1 - \dfrac{1}{3,1+2}\right) = 0,052, \quad 3,1 \le x \le 3,2.$

Следовательно, предельная абсолютная погрешность приближения x_3 равна:

$$\Delta = \frac{0,0001}{1-0,052} = 0,000105 = 0,0001.$$

Задания для аудиторной работы

Найти действительные корни уравнений с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ методом:
а) итераций;
б) хорд;
в) касательных;
г) комбинированным методом хорд и касательных.

1. $x^3 + 1,4x + 8,7 = 0.$
2. $\cos x - x^2 = 0.$
3. $2 - x - \ln x = 0.$
4. $e^x - 6x - 3 = 0.$

Задания для индивидуальной работы

Найдите действительные корни уравнений с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$:
г) комбинированным методом хорд и касательных;
а) методом итераций.

I

1. $2^x - 4x = 0$
2. $x^3 + 4,7x + 5,5 = 0.$

Отв.: 1. $0,310$; 2. $-0,974$.

II

1. $x - \sin x - 0,25 = 0.$
2. $x^3 + 5,3x + 3,9 = 0.$

Отв.: 1. $1,171$; 2. $-0,677$.

III

1. $2x - \ln x - 7 = 0,$
2. $x^3 + 6,8x + 1,2 = 0.$

Отв.: 1. $4,220$; 2. $-0,1755$.

IV

1. $(x-1)^2 - \dfrac{1}{2}e^x = 0.$
2. $x^3 + 7,4x + 7,2 = 0.$

отв.: 1. $0,213$; 2. $-0,8805$.

V

1. $e^{-2x}-2x+1=0,$

2. $x^3+8,9x+3,9=0.$

Отв.: 1. $0,639$; 2. $-0,429$.

VI

1. $3x-\cos x-1=0.$

2. $x^3+9,5x-3,6=0.$

Отв.: 1. $0,607$; 2. $0,3735$.

4.2. Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка. Метод Эйлера

Требуется решить задачу Коши для ДУ 1-порядка $y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$ на отрезке $[x_0,b]$ с шагом h.

Отрезок $[x_0,b]$ разбиваем на n равных частей с шагом h: $\quad h=\dfrac{b-x_0}{n}$.

Координаты точек деления

$x_0, x_1=x_0+h,\quad x_2=x_0+2h,\ldots,\quad x_k=x_0+kh,\ldots,\quad x_n=x_0+nh=b.$

Искомая функция $y=y(x)$ в точках деления

$y_k=y(x_k)=y(x_0+kh),\quad k=\overline{1,n}.$

В методе Эйлера производную $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ заменяем отношением конечных разностей в точках $M_k(x_k,y_k)$.Вместо одного ДУ 1-порядка для $\forall\ x\in[x_0,b]$ получим систему алгебраических уравнений относительно y_k:

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{M_k}=f\left(M_k\right),\ k=\overline{0,n-1}.$$

В развернутом виде

$$\begin{cases} y_1-y_0=hf(x_0,y_0),\\ y_2-y_1=hf(x_1,y_1),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n-y_{n-1}=hf(x_{n-1},y_{n-1}) \end{cases} \tag{1}$$

Пример 1. Методом Эйлера найти значения решения дифференциального уравнения $y'=y+3x$, для которого $y(0)=-1$, в пяти точках отрезка $[0;0,5]$, приняв $h=0,1$.

Решение. $f(x,y)=y+3x$

Определяем точки:

$x_0=0;\quad x_1=x_0+h=0,1;\quad x_2=x_1+h=0,2;\quad x_3=x_3+h=0,3;\quad x_4=0,4$

$x_5=0,5.$

Используя формулу (1), найдем
$y_1 = y_0 + 0,1(y_0 + 3x_0);\quad y_1 = -1 + 0,1(-1+0) = -1,1;\quad y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) =$
$= -1,1 + 0,1(-1,1 + 0,3) = -1,18 \quad и\ т.\ д.$

Результаты вычислений удобно записать в таблицу.

k	x_k	y_k	$f(x_k, y_k) =$ $= y_k + 3x_k$	$hf(x_k, y_k) =$ $= 0,1(y_k + 3x_k)$	$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$
0	0	-1,0000	-1,0000	-0,1000	-1,1000
1	0,1	-1,1000	-0,8000	-0,0800	-1,1800
2	0,2	-1,1800	-0,5800	-0,0580	-1,2380
3	0,3	-1,2380	-0,3380	-0,0338	-1,2718
4	0,4	-1,2718	-0,0718	-0,0072	-1,2790
5	0,5	-1,2790			

Нетрудно найти точное частное решение данного уравнения и сравнить полученные результаты

$y' - y = 3x;\quad y(0) = -1.$

$y(x) = \overline{y}(x) + y^*(x).$

$\overline{y}(x) : y' - y = 0,\quad y = e^{kx},\quad k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1.\quad \overline{y}(x) = ce^x.$

$y^*(x) = ax + b.\quad {y_*}'(x) = a,\quad a - ax - b = 3x \Rightarrow\ a = -3 = b.$

$y^*(x) = -3x - 3 = -3(x+1).$

$y(x) = ce^x - 3(x+1).$

$y(0) = c - 3 = -3 = -1 \Rightarrow c = 2;$

Частное решение $y(x) = 2e^x - 3(x+1)$

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$y_{прибл.}$	-1,0000	-1,1000	-1,1800	-!.2380	-12718	-1,2790
$y_{точн.}$	-1,0000	-1,0897	-1,1572	-1,2003	-1,2164	-1,2026

Метод Рунге-Кутта. Этот метод является одним из методов повышенной точности.

Пусть требуется решить задачу Коши: $y' = f(x, y),\quad y(x_0) = y_0.\quad h -$ шаг интегрирования.

Вычисление приближенного значения y_{k+1} решения задачи Коши в точке x_{k+1} методом Рунге-Кутта сводится к выполнению следующих операций:

1) на каждом шаге определяем коэффициенты:

$$
\begin{aligned}
&k_1 = hf(x_k, y_k);\\
&k_2 = hf\left(x_k + \frac{h}{2}; y_k + \frac{k_1}{2}\right);\\
&k_3 = hf\left(x_k + \frac{h}{2}; y_k + \frac{k_2}{2}\right);\\
&k_4 = hf\left(x_k + h; y_k + k_3\right).
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

2) значение y_{k+1} вычисляется по формуле:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \qquad (3)$$

<u>**Пример2.**</u> Методом Рунге-Кутта, приняв $h = 0,2$, найти приближенное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию

$y' = x - y + 2, \quad y(1) = 0, \quad x \in [1;2].$

<u>Решение.</u> Поскольку в данном случае $f(x, y) = x - y + 1, \quad x_0 = 1, \; y_0 = 0,$ то $f(x_0, y_0) = 3$. По формуле (2) находим

$k_1^0 = hf(x_0, y_0) = 0,2 \cdot 3 = 0,6000;$

$k_2^0 = 0,2f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{0,6}{2}\right) = 0,2 \cdot f(1,1;0,3) = 0,2(1,1 - 1 + 2) = 0,5600;$

$k_3^0 = 0,2f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0,2 \cdot f\left(1,1; \frac{0,56}{2}\right) = 0,2 \cdot f(1,1;0,28) =$

$= 0,2(1,1 - 0,28 + 2) = 0,5640;$

$k_4^0 = 0,2f\left(x_0 + h, y_0 + k_3\right) = 0,2 \cdot f(1,2;0,564) = 0,2(1,2 - 0,564 + 2) =$

$= 0,5272.$

По формуле (3)

$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left(k_1^0 + 2k_2^0 + 2k_3^0 + k_4^0\right) = \frac{1}{6}\left(0,6000 + 1,1200 + 1,128 + 0,5272\right) =$

$= 0,5625.$

Таким образом получаем приближенное значение $y_1 = 0,5625$ при $x_1 = 1,2$.

Результаты вычислений удобно записать в таблицу

i	x_i	y_i	$f(x_i;y_i) =$ $= x_i - y_i + 2$	$k_j = ha(x_i;y_i)$	p_j	$S = \sum_{j=1}^{4} p_j k_j$	$\Delta y_i = \frac{1}{6} S$
0	1 1,1 1,1 1,2	0 0,3 0,28 0,564	3 2,8 2,82 2,636	0,6 0,56 0,564 0,5272	1 2 2 1	1 1,12 1,128 0,5272	$1/6 \cdot 3,3752$ $= 0,5625$
$x_1 = x_0 + h = 1,2; \qquad y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0,5625$							

1	1,2	0,5625	2,6375	0,5275	1	0,5275	$\frac{1}{6}\cdot 2,9809=$
	1,3	0,8263	2,4737	0,4947	2	0,9895	$=0,4968$
	1,3	0,8099	2,4901	0,4980	2	0,9960	
	1,4	1,0605	2,3395	0,4679	1	0,4679	
$x_2=x_1+h=1,2+0,2=1,4;\quad y_2=y_1+\Delta y_1=0,5625+0,4968=1,0593$							
2	1,4	1,0593	2,3407	0,4681	1	0,4681	$\frac{1}{6}\cdot 2,6580=$
	1,5	1,2934	2,2066	0,4413	2	0,8826	$=0,443$
	1,5	1,2800	2,2200	0,4440	2	0,8880	
	1,6	1,5033	2,0967	0,4193	1	0,4193	
$x_3=x_2+h=1,4+0,2=1,6;\quad y_3=y_2+\Delta y_2=1,0593+0,443=1,5023$							
3	1,6	1,5023	2,0977	0,4195	1	0,4195	$\frac{1}{6}\cdot 2,3939=$
	1,7	1,7121	1,9879	0,3976	2	0,7952	$=0,3990$
	1,7	1,7011	1,9989	0,3998	2	0,7996	
	1,8	1,9021	1,8979	0,3796	1	0,3796	
$x_4=x_3+h=1,8;\quad y_4=y_3+\Delta y_3=1,5023+0,3990=1,9013$							
4	1,8	1,9013	1,8987	0,3797	1	0,3797	$\frac{1}{6}\cdot 2,1773=$
	1,9	2,0912	1,8088	0,3618	2	0,7235	$=0,3629$
	1,9	2,0822	1,8178	0,3636	2	0,7271	
	2,0	2,2649	1,7351	0,3470	1	0,3470	
$y_5=y_4+\Delta y_4=1,9013+0,3629=2,2642$							

Задания для аудиторной работы

Решить задачу Коши для следующих дифференциальных уравнений на заданном отрезке $[x_0;b]$ с точностью $\varepsilon=0,001$ методом:

1) Эйлера;
2) Рунге-Кутта, приняв $h=0,1$.

1) $y'=x^2+y^2,\quad y(0)=1;\quad b=0,5$

2) $y'\cdot(y^2+x)=y,\quad y(1)=1;\quad b=1,5$

3) $y'=x+\cos\dfrac{y}{3},\quad y(1,6)=4,6;\quad b=2,1$

Задания для индивидуальной работы

Решить задачу Коши для следующих дифференциальных уравнений на заданном отрезке $[x_0;b]$ с точностью $\varepsilon=0,001$ методом:

1) Эйлера;
2) Рунге-Кутта, приняв $h=0,1$.

I

1) $y'=x^2-y;\quad y(0)=2;\, b=0,5$

2) $y'=x+\sin\dfrac{y}{\pi};\quad y(1,7)=5,3;\quad b=2,2$

II

1) $y'=x^2y+x^3;\quad y(0)=1;\quad b=0,5$

2) $y'=x+\sin\dfrac{y}{3};\quad y(1,6)=4,6;\quad b=2,1$

III

1) $y' = x + y^2$; $y(0) = 1$; $b = 0,5$

2) $y' = x + cos\dfrac{y}{\sqrt{2}}$; $y(0,8) = 1,4$; $b = 1,3$

IV

1) $y' = y - x^2$; $y(1) = 0$; $b = 1,5$

2) $y' = 2x - \cos\dfrac{y}{5}$; $y(1) = 1$; $b = 1,5$

V

1) $y' = x - 2y$; $y(0) = 0$; $b = 0,5$

2) $y' = x + \cos\dfrac{y}{\sqrt{5}}$; $y(1,8) = 2,6$; $b = 2,3$

VI

1) $y' = 2x - y$; $y(1) = 1$; $b = 1,5$

2) $y' = x + \sin\dfrac{y}{e}$; $y(1,4) = 2,5$; $b = 1,9$

Литература

1. Воробьев Н.Н. Теория рядов. - СПб.: Лань, 2002.-408с.
2. Гусак А.А., Гусак Г.М., Бричикова Е.А. Справочник по высшей математике. – Мн. : ТетраСистемс, 2000. – 640 с.
3. Гладкий И.И., Сидоревич М.П., Тузик Т.А. Элементы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления: методические указания для студентов технических специальностей. – Брест: БГТУ, 2000. – 87 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. – М. : Высш. шк., 1997. – 416 с.
5. Ершова В.В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление. – Мн. : Выш. шк., 1976. – 256 с.
6. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Мн. : Выш. шк., 1985. Ч. III. –208 с. 1987. Ч. IV. – 240 с., 1988. Ч. V. – 254 с.
7. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М. : Наука, 1972. – 416 с.
8. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М. : Наука, 1981. – 368 с.
9. Кузнецов А.В., Сакович В.А. и др. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование. – Мн. : Выш. шк., 1995. – 383 с.
10. Пантелеев А.В., Якимова А.С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. – М. : Высш. шк., 2001. – 445 с.
11. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2. – М. : Наука, 1985. – 576 с.
12. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / Под ред. А.П. Рябушко. Ч. 3. – Мн. : Выш. шк., 1991. – 288 с.
13. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М. : Наука, 1981. – 368 с.
14. Тузик А.И. Высшая математика. Ряды. – Брест: БГТУ, 2003. –123 с.
15. Шмелев П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях. – М. : Высш. шк., 1983. – 176 с.

Учебное издание

Составители: Тузик Татьяна Александровна,
Журавель Мария Григорьевна.

Дифференциальные уравнения в частных производных. Элементы теории графов. Линейные разностные уравнения. Приближенные методы решения уравнений.

Задачи и упражнения

Печатается с оригинал-макета автора.

Редактор: Т.В. Строкач
Ответственный за выпуск: Т.А. Тузик

Подписано к печати 29.11.04. Формат 60x84/16. Бумага «Чайка».
Усл. п. л. 3,1. Уч. изд. л. 3,5. Тираж 200 экз. Заказ № 1146.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.