УДК 517.925.7

Н. А. Лукашевич (Минск), А. В. Чичурин (Брест)

К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ

Рассмотрим функцию y как сумму двух общих решений уравнений Риккати

$$y = \frac{\varphi_0 C+\varphi_1}{\varphi_2 C+\varphi_3} + \frac{\psi_0 C_1+\psi_1}{\psi_2 C_1+\psi_3}, \tag{1}$$

где $\varphi=\varphi_i(z)$, $\psi=\psi_i(z)$ $(i=\overline{0,3})$, C и C_1 – некоторые постоянные.

Введем следующую функцию
$$H = y - \frac{\varphi_0 C+\varphi_1}{\varphi_2 C+\varphi_3}. \tag{2}$$

Из (1), с учетом (2), выразим постоянную C_1:

$$C_1 = (H\psi_3-\psi_1)/(\psi_0-H\psi_2). \tag{3}$$

Продифференцируем (3) по z. В результате получим уравнение

$$f_0 H' + f_1 H^2 + f_2 H + f_3 = 0, \tag{4}$$

где $f_0=\psi_0\psi_3-\psi_1\psi_2$, $f_1=\psi_3\psi_2'-\psi_3'\psi_2$, $f_2=\psi_0\psi_3'-\psi_0'\psi_3+\psi_1'\psi_2-\psi_1\psi_2'$, $f_3=\psi_1\psi_0'-\psi_0\psi_1'$.

Продифференцировав по z уравнение (4), получим

$$f_0 H'' + f_0' H' + 2f_1 HH' + f_1' H^2 + f_2' H + f_2 H' + f_3' = 0. \tag{5}$$

Чтобы найти H' и H'' будем дифференцировать уравнение (2) по z

$$H' = y' - (\Phi_0 C^2+\Phi_1 C+\Phi_2)/(\varphi_2 C+\varphi_3)^2, \tag{6}$$

$$H'' = y'' - (F_0 C^3+F_1 C^2+F_2 C+F_3)/(\varphi_2 C+\varphi_3)^3, \tag{7}$$

где $\Phi_0=\varphi_2\varphi_0'-\varphi_0\varphi_2'$, $\Phi_1=\varphi_2\varphi_1'-\varphi_3'\varphi_0+\varphi_3\varphi_0'-\varphi_2'\varphi_1$, $\Phi_2=\varphi_3\varphi_1'-\varphi_1\varphi_3'$,

$F_0=\varphi_2\Phi_0'-2\Phi_0\varphi_2'$, $F_1=\varphi_3\Phi_1'-2\varphi_3'\Phi_0+\varphi_3\Phi_0'-2\varphi_2'\Phi_1$,

$F_2=\varphi_2\Phi_2'-2\varphi_2'\Phi_2+\varphi_3\Phi_1'-2\varphi_3'\Phi_1$, $F_3=\varphi_3\Phi_2'-2\Phi_2\varphi_3'$.

Рассмотрим систему уравнений (4), (5), где H' и H'' определяются формулами (6), (7). Для того, чтобы исключить постоянную C, возьмем результант от уравнений (6) и (7). Откуда получим уравнение вида

$$R_0(y,y')y''^2 + R_1(y,y')y'' + R_2(y,y') = 0, \tag{8}$$

где $R_0(y,y')=\xi_0 y'^3+\sum\limits_{i=0}^{2}\xi_i y'^i$, $R_1(y,y')=\sum\limits_{i=0}^{4}\eta_i y'^i$, $R_2(y,y')=\sum\limits_{i=0}^{5}\delta_i y'^i$.

Функции ξ_i, η_i, δ_i зависят от φ_j, ψ_j $(j=\overline{0,3})$ и их производных, и от y. После чего рассматривается уравнение вида

$$R_1^2(y,y') - 4R_0(y,y')R_2(y,y') = 0$$

и его решения.