МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Интегральное исчисление функций одной переменной

Дифференциальные уравнения

Интегральное исчисление функций нескольких переменных

Методические рекомендации и варианты заданий аттестационных работ по курсу «Математика» для студентов специальности «Промышленное и гражданское строительство» дневной формы обучения

Брест 2018

УДК [517.3+517.9](076)

В настоящей методической разработке приведены варианты заданий аттестационных работ по разделам «Интегральное исчисление функций одной переменной», «Дифференциальные уравнения», «Интегральное исчисление функций нескольких переменных» дисциплины «Математика», изучаемым студентами специальности «Промышленное и гражданское строительство» дневной формы обучения во втором семестре. Приведено подробное решение типовых задач, даны некоторые методические рекомендации, полезные для успешного выполнения заданий.

Составители: **Юхимук М.М.**, старший преподаватель,
Юхимук Т.Ю., старший преподаватель,
Сукасян Т.М., ассистент,
Махнист Л.П., к.т.н., доцент

Рецензент: **Басик А.И.**, доцент кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н.

I. Практические задания по теме «Интегральное исчисление функций одной переменной»

№1. Найти неопределенный интеграл.

1. $\int \frac{\sqrt[5]{x^4} - 7x^2 + 8}{x^3} dx$

2. $\int \frac{2x^2\sqrt{x} + x^4 - 6}{x^4} dx$

3. $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^4}} + \frac{7x^8}{\sqrt{x}} - 2 \right) dx$

4. $\int \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x^2} + \frac{4}{\sqrt[9]{x^7}} \right) dx$

5. $\int \frac{5 - \sqrt{x} + 3\sqrt[7]{x^4}}{4x} dx$

6. $\int \frac{\sqrt[5]{x^4} + 6x^2 - 7}{x^3} dx$

7. $\int \left(\frac{2\sqrt[5]{x^2}}{3x^4} - x^8 - \frac{3}{7x} \right) dx$

8. $\int \left(\frac{2x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt{x^5}} - 9 \right) dx$

9. $\int \frac{5x^3\sqrt{x} + x^5 - 1}{x^5} dx$

10. $\int \frac{7 - \sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x^2}}{3x} dx$

11. $\int \left(5 + \frac{\sqrt{x}}{x^3} - \frac{2}{\sqrt[9]{x^7}} \right) dx$

12. $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x^5}} + \frac{3x^7}{\sqrt{x}} - 4 \right) dx$

13. $\int \frac{\sqrt[5]{x^4} - 9x^2 + 6}{x^3} dx$

14. $\int \frac{2x^2\sqrt{x} - x^4 + 6}{x^4} dx$

15. $\int \left(\frac{3x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt{x^7}} - 8 \right) dx$

16. $\int \left(\frac{5\sqrt[5]{x^2}}{9x^4} - x^9 - \frac{1}{3x} \right) dx$

17. $\int \frac{5 + \sqrt{x} - 3\sqrt[7]{x^4}}{4x} dx$

18. $\int \frac{\sqrt[5]{x^4} + 7x^2 - 8}{x^3} dx$

19. $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^4}} - \frac{7x^8}{\sqrt{x}} + 2 \right) dx$

20. $\int \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x^2} - \frac{4}{\sqrt[9]{x^7}} \right) dx$

21. $\int \frac{\sqrt[6]{x^5} + 7x^5 - 4}{x^6} dx$

22. $\int \frac{3 - \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[5]{x^2}}{7x} dx$

23. $\int \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x^2} + \frac{4}{\sqrt[9]{x^7}} \right) dx$

24. $\int \left(\frac{2x}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt{x^5}} + 10 \right) dx$

25. $\int \frac{5x^3\sqrt{x} - x^5 + 1}{x^5} dx$

26. $\int \frac{\sqrt[5]{x^4} - 6x^2 + 7}{x^3} dx$

27. $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x^5}} - \frac{3x^7}{\sqrt{x}} + 4 \right) dx$

28. $\int \left(\frac{4\sqrt[5]{x^2}}{7x^4} + x^5 - \frac{1}{2x} \right) dx$

29. $\int \left(\frac{3x}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt{x^7}} + 8 \right) dx$

30. $\int \frac{3x^5\sqrt{x} + x^3 - 7}{x^4} dx$

№2. Найти неопределенный интеграл.

1. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^6 3x} dx$

2. $\int \frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$

3. $\int \frac{dx}{(1-3x)\ln(1-3x)}$

4. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{th}(3x-7)}}{\operatorname{ch}^2(3x-7)} dx$

5. $\int \sin^4 2x \cos 2x \, dx$

6. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt[6]{\ln^5(1-x)}}$

7. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{cth}(2x+1)}}{\operatorname{sh}^2(2x+1)} dx$

8. $\int \frac{4x^4\, dx}{2x^5+25}$

9. $\int e^{\cos 2x} \sin 2x \, dx$

10. $\int \frac{\sin(\operatorname{tg} 7x) dx}{\cos^2 7x}$

11. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 5x}}{\sin^2 5x} dx$

12. $\int \frac{\arccos^4 7x}{\sqrt{1-49x^2}} dx$

13. $\int \frac{4^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$

14. $\int \frac{\sqrt{\ln(5-x)}}{5-x} dx$

15. $\int \frac{x\, dx}{e^{7x^2-3}}$

16. $\int \frac{5-2x}{x^2-8} dx$

17. $\int \frac{\arccos^5 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

18. $\int \frac{dx}{(1+81x^2)\sqrt[5]{\operatorname{arcctg} 9x}}$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2} \arcsin^4 3x}$

20. $\int \frac{\operatorname{tg}^6 7x}{\cos^2 7x} dx$

21. $\int \frac{\ln^6(3+4x)}{3+4x} dx$

22. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{th}(2x+9)}}{\operatorname{ch}^2(2x+9)} dx$

23. $\int \operatorname{sh}^2 4x \operatorname{ch} 4x \, dx$

24. $\int \frac{dx}{\cos^2 6x \cdot \operatorname{tg} 6x}$

25. $\int \frac{3x+7}{2x^2-1} dx$

26. $\int \frac{\sqrt[6]{\operatorname{cth} 5x}}{\operatorname{sh}^2 5x} dx$

27. $\int \sqrt[5]{\cos^3 7x} \sin 7x \, dx$

28. $\int \frac{dx}{(3x-2)\ln(3x-2)}$

29. $\int \frac{dx}{(1+64x^2)\sqrt[5]{\operatorname{arctg} 8x}}$

30. $\int \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx$

№3. Найти неопределенный интеграл.

1. $\int \frac{x-2}{x^2-6x+7}dx$

2. $\int \frac{x^2-6x-19}{(x^2-x-6)(x-1)}dx$

3. $\int \frac{3x^2+5x-10}{(x^2-4)(x+1)}dx$

4. $\int \frac{3x+1}{x^2-4x+6}dx$

5. $\int \frac{4x-3}{x^2+2x-4}dx$

6. $\int \frac{2x^2-12x+6}{(x^2-1)(x-1)}dx$

7. $\int \frac{x^2+8x-5}{x^3-x^2}dx$

8. $\int \frac{3x-1}{x^2-2x-5}dx$

9. $\int \frac{5-2x}{x^2-8x-3}dx$

10. $\int \frac{5x^2-22x+8}{(x-1)(x^2-4)}dx$

11. $\int \frac{x^2-7x-58}{(x^2-x-6)(x+4)}dx$

12. $\int \frac{3x+2}{x^2+6x-12}dx$

13. $\int \frac{5x-6}{x^2-8x+17}dx$

14. $\int \frac{5x^2+11x-6}{(x^2-9)(x+3)}dx$

15. $\int \frac{2x^2-13x+32}{(x+5)(x^2-4x+4)}dx$

16. $\int \frac{2-3x}{x^2-10x-3}dx$

17. $\int \frac{5-x}{x^2+8x-13}dx$

18. $\int \frac{x^3-4x^2+3x-2}{x^3(x+2)}dx$

19. $\int \frac{6x^2-9x+4}{x^3(x-4)}dx$

20. $\int \frac{5-6x}{x^2+12x+11}dx$

21. $\int \frac{7x+4}{x^2+10x-7}dx$

22. $\int \frac{3x^2-5x-3}{x^3+x^2}dx$

23. $\int \frac{3x+27}{(x+5)(x^2+3x-4)}dx$

24. $\int \frac{5x-2}{x^2+4x+21}dx$

25. $\int \frac{7x+11}{x^2-14x+6}dx$

26. $\int \frac{7x^2+6x+15}{(x+1)(x^2-9)}dx$

27. $\int \frac{11-19x}{(x^2+5x-14)(x-1)}dx$

28. $\int \frac{11-9x}{x^2-16x-3}dx$

29. $\int \frac{4-3x}{x^2+8x-15}dx$

30. $\int \frac{x+77}{(x^2-x-6)(x+5)}dx$

№4. Найти неопределенный интеграл.

1. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x + 3\sin^2 x}$

2. $\int \frac{dx}{3 + 2\cos x + 5\sin x}$

3. $\int \frac{dx}{2\cos x + 4\sin x}$

4. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin x \cos x}$

5. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x - \cos^2 x}$

6. $\int \frac{dx}{2 - \sin x + 5\cos x}$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x}$

8. $\int \frac{dx}{6 + \cos^2 x}$

9. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$

10. $\int \frac{dx}{4\sin x - 3\cos x}$

11. $\int \frac{dx}{5 - \cos x + 2\sin x}$

12. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x - 3\sin^2 x}$

13. $\int \frac{dx}{7 - 2\sin^2 x}$

14. $\int \frac{dx}{3 - 5\sin x}$

15. $\int \frac{dx}{3\cos x - 2\sin x + 1}$

16. $\int \frac{dx}{5 + 6\cos x}$

17. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 7\cos^2 x}$

18. $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 4\sin x \cos x - \sin^2 x}$

19. $\int \frac{dx}{5\cos x + 7\sin x - 9}$

20. $\int \frac{dx}{2\cos^3 x \sin x}$

21. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x - 5}$

22. $\int \frac{dx}{8\cos^2 x - \sin 2x - \sin^2 x}$

23. $\int \frac{dx}{5 - 8\sin x - 2\cos x}$

24. $\int \frac{dx}{2\sin 2x - 5\sin^2 x + 5}$

25. $\int \frac{dx}{3\cos x - 8}$

26. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 3\cos x \sin x}$

27. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x}$

28. $\int \frac{dx}{5\sin^2 x + 2}$

29. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin 2x}$

30. $\int \frac{dx}{2\sin x + 7}$

№5. Найти неопределенный интеграл.

1. $\int \frac{x+3}{x\sqrt{x-4}}dx$ 2. $\int \frac{\sqrt{3x+2}+\sqrt[3]{3x+2}}{\sqrt{3x+2}}dx$ 3. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x+3}}$

4. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+5}}$ 5. $\int x\sqrt{4x-9}\,dx$ 6. $\int \frac{3-\sqrt{2x-1}}{\sqrt[5]{2x-1}}dx$

7. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{2x+10}$ 8. $\int \frac{\sqrt{x-2}-\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}}dx$ 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-9}+1}$

10. $\int \frac{dx}{2-\sqrt{3x+1}}$ 11. $\int \frac{2+\sqrt[5]{1-2x}}{\sqrt[3]{1-2x}}dx$ 12. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-5}}$

13. $\int x\sqrt{5x+11}dx$ 14. $\int \frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}}dx$ 15. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x+7}}$

16. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[5]{5x-4}}$ 17. $\int \frac{5-\sqrt[3]{3x+1}}{\sqrt[6]{3x+1}}dx$ 18. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9x-4}}$

19. $\int x\sqrt{2x+6}\,dx$ 20. $\int \frac{\sqrt[3]{8x+3}-\sqrt{8x+3}}{\sqrt[4]{8x+3}}dx$ 21. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5x-8}}$

21. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[7]{3x-5}}$ 23. $\int \frac{\sqrt[7]{2x-5}+4}{\sqrt{2x-5}}dx$ 24. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{5-4x}$

25. $\int x\sqrt[3]{6x-2}\,dx$ 26. $\int \frac{\sqrt[3]{7x+4}-\sqrt{7x+4}}{\sqrt[6]{7x+4}}dx$ 27. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{2+5x}}$

28. $\int \frac{2x-5}{x\sqrt{x+1}}dx$ 29. $\int \frac{\sqrt[3]{9x+1}+\sqrt[6]{9x+1}}{\sqrt{9x+1}}dx$ 30. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{10-7x}}$

№6. Вычислить определенный интеграл.

1. $\int_1^2 \frac{\ln(2x-1)}{(2x-1)^2}dx$ 2. $\int_1^2 (x-2)\sin(2-x)dx$ 3. $\int_0^{\pi/4} \frac{x\,dx}{\cos^2 4x}$

4. $\int_0^{1/4} (3x+2)e^{4x}\,dx$ 5. $\int_{1/2}^{1} (2x+5)\ln 2x\,dx$ 6. $\int_4^8 x\ln\frac{x}{8}dx$

7. $\int_1^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$ 8. $\int_{-1/5}^{0} 4x\cos(5x+2)dx$ 9. $\int_0^{1/3} x\,e^{2-6x}\,dx$

10. $\int_{0}^{1} x \operatorname{arctg} x \, dx$ 11. $\int_{-2}^{0} (2x+4) e^{2x+4} \, dx$ 12. $\int_{3}^{4} \ln \frac{5-x}{5+x} dx$

13. $\int_{\sqrt{3}/5}^{1} \operatorname{arcctg} 5x \, dx$ 14. $\int_{0}^{\pi/2} (2x+3) \sin x \, dx$ 15. $\int_{0}^{5} 3x e^{x/5} \, dx$

16. $\int_{1}^{6} (1+3x) \ln \frac{1}{x} dx$ 17. $\int_{-1/9}^{0} (5-x) e^{-9x} \, dx$ 18. $\int_{1}^{4} \frac{\ln 5x}{\sqrt{x}} dx$

19. $\int_{0}^{1/4} \operatorname{arctg} 4x \, dx$ 20. $\int_{-2}^{1} x^3 \sin(x^2+4) dx$ 21. $\int_{\pi/18}^{\pi/9} \frac{x \, dx}{\sin^2 3x}$

22. $\int_{0}^{2} \ln(7-3x) dx$ 23. $\int_{0}^{1/2} \arcsin 2x \, dx$ 24. $\int_{-5/2}^{0} x e^{-\frac{2}{5}x} \, dx$

25. $\int_{0}^{1} x^3 e^{x^2} \, dx$ 26. $\int_{0}^{\pi} \frac{x}{2} \sin 2x \, dx$ 27. $\int_{1}^{4} \sqrt{x} \ln x \, dx$

28. $\int_{1}^{9} \operatorname{arcctg} \sqrt{x} \, dx$ 29. $\int_{0}^{1/3} \arccos 3x \, dx$ 30. $\int_{0}^{\pi} x \cos \frac{x}{4} dx$

№7. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

1. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{5 \sin 3x}{\cos 3x} dx$ 2. $\int_{-\infty}^{0} \frac{2x+10}{\sqrt[7]{x^2+10x+26}} dx$ 3. $\int_{-1/4}^{0} \frac{dx}{\sqrt[5]{1+4x}}$

4. $\int_{1}^{+\infty} \frac{20x \, dx}{25x^4-9}$ 5. $\int_{-5/2}^{0} \frac{\ln^3(2x+5)}{2x+5} dx$ 6. $\int_{0}^{+\infty} \frac{5+x^2}{x^2+7} dx$

7. $\int_{4/5}^{1} \frac{dx}{(5x-4)^2}$ 8. $\int_{1/2}^{+\infty} \frac{5 \, dx}{x(1+\ln^2 2x)}$ 9. $\int_{0}^{1} \frac{x^3 dx}{1-x^4}$

10. $\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-4x^3} \, dx$ 11. $\int_{0}^{\pi/4} \frac{\cos 2x}{\sqrt[5]{(1-\sin 2x)^3}} dx$ 12. $\int_{2}^{+\infty} \frac{9x \, dx}{16x^4-25}$

13. $\int_{3/4}^{1} \frac{dx}{(4x-3)^3}$ 14. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x-3}$ 15. $\int_{-1/3}^{0} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+3x}}$

16. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^4 e^{-2x^5}\,dx$ 17. $\int\limits_{-1/5}^{0} \frac{\ln^4(5x+1)}{5x+1}dx$ 18. $\int\limits_{1/2}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx$

19. $\int\limits_{2/3}^{1} \frac{dx}{(3x-2)^4}$ 20. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x-3}{x^2-6x+12}dx$ 21. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2dx}{1-x^3}$

22. $\int\limits_{1/5}^{+\infty} \frac{2\,dx}{x(1+\ln^2 5x)}$ 23. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[7]{(1-\sin x)^4}}dx$ 24. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x-7}$

25. $\int\limits_{-4/3}^{0} \frac{\ln^2(3x+4)}{3x+4}dx$ 26. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{2x+7}{\sqrt[5]{x^2+7x+13}}dx$ 27. $\int\limits_{-1/5}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+5x}}$

28. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^3 e^{-5x^4}\,dx$ 29. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x-3}{x^2-6x+5}dx$ 30. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{7+x^2}{x^2+5}dx$

№8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

1. $y=x^2+4x-3,\ y=5x+3$ 2. $y=2x^2-2x-5,\ y=x^2+2x+7$
3. $y=x^2+4x-2,\ y=-x^2-2x+6$ 4. $y=-x^2+8x+9,\ y=2x-7$
5. $y=-x^2+6x+5,\ y=4x+2$ 6. $y=2x^2+2x-10,\ y=x^2-5x-2$
7. $y=2x^2-2x+5,\ y=x^2+x+9$ 8. $y=x^2+6x+12,\ y=-3x-8$
9. $y=x^2-2x+7,\ y=-5x+17$ 10. $y=x^2+8x-9,\ y=-x^2+10x+15$
11. $y=x^2+2x+3,\ y=-x^2+6x+9$ 12. $y=x^2+6x-5,\ y=5x+7$
13. $y=-x^2+6x-9,\ y=-5x+1$ 14. $y=2x^2+4x-3,\ y=x^2+2x+5$
15. $y=2x^2+3x+5,\ y=x^2-2x+1$ 16. $y=-x^2+2x+20,\ y=-x-8$
17. $y=x^2+8x+3,\ y=3x-3$ 18. $y=-x^2+2x+8,\ y=x^2-4x-12$
19. $y=x^2-6x+7,\ y=-x^2+4x-1$ 20. $y=-x^2+6x+11,\ y=5x-9$
21. $y=x^2-8x+2,\ y=-2x+9$ 22. $y=2x^2+3x-12,\ y=x^2+2x+8$
23. $y=x^2-9x+8,\ y=-x^2+9x-8$ 24. $y=-x^2+6x-5,\ y=-3x+3$
25. $y=-x^2-2x+5,\ y=2x-7$ 26. $y=x^2+10x+25,\ y=-x^2-8x-15$
27. $y=2x^2+6x-8,\ y=x^2+5x+4$ 28. $y=x^2+10x-9,\ y=4x-14$
29. $y=x^2+4x-5,\ y=7x-7$ 30. $y=2x^2+5x-3,\ y=x^2+2x+7$

II. Практические задания по теме «Дифференциальные уравнения»

№1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1. $y' = 5^{x^2+y} \cdot 4x$
2. $\left(y + x^2 y\right)dy = \left(1 + y^2\right)dx$
3. $xy' = 2 - y$
4. $\sin x\, dy = \left(y\cos x + 2\cos x\right)dx$
5. $\operatorname{tg} x \cos y\, y' = \operatorname{ctg} y \sin x$
6. $e^{2x}\cos y\, dx + \operatorname{tg} y\, dy = 0$
7. $3xy' + y^2 = 2$
8. $\sqrt{1 - x^2}\,dy - x\cos^2 y\, dx = 0$
9. $\left(5 + x^2\right)y' - x^2 y = 0$
10. $\left(y^2 + 5\right)dx = x^4 y^2\, dy$
11. $y'\sqrt{x^2 + 9} = e^{4y}$
12. $\left(x^2 + 9\right)y\, dx = x\left(y^2 - 4\right)dy$
13. $y' \ln x = \dfrac{y^2}{x}$
14. $\sqrt{1 - y^2}\operatorname{arctg} x\, dx = \left(1 + x^2\right)dy$
15. $y^2 + x^{-1}y^2 = y'$
16. $e^{x^2+4y}\,dy = x\, dx$
17. $x^2 y y' = x^2 + 4$
18. $\cos x\, dy = y\ln^3 y\, dx$
19. $\sqrt{1 - x^2}\, y' = \dfrac{\arcsin x}{4^y}$
20. $\dfrac{dy}{7^{x^2}} = x\sqrt{2 + y^2}\, dx$
21. $e^x y^3 y' = 1 + e^{2x}$
22. $\cos y \cos^2 x\, dy = \sin^2 y \sin x\, dx$
23. $\sin y \cos^2 x\, y' = 2\sin^2 y$
24. $\left(x^2 y + x^2\right)dx + y\, dy = 0$
25. $5^{x-y}\, y' = 8$
26. $\left(2x - 3\right)dy - 2xy\, dx = 0$
27. $y' = \left(9 - 2x\right)\cdot \operatorname{tg} y$
28. $\sqrt{y^2 - 4}\, dx + y\left(x^2 + 6\right)dy = 0$
29. $\left(5 + y^2\right)^3 y' = \dfrac{e^{2x}}{y}$
30. $\left(y^2 + y\right)x\, dx + \left(x^2 - 1\right)y\, dy = 0$

№2. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1. $x\, dy - y\, dx = \sqrt{x^2 - y^2}\,dx$
2. $y' = y/x + 5e^{y/x}$
3. $\left(4x + y\right)dx - x\, dy = 0$
4. $x^2 y' + xyy' = x^2 - xy$
5. $\left(x^2 + yx\right)dy - 2xy\, dx = 0$
6. $y^2 - xy = \left(3x^2 + xy\right)y'$
7. $\left(x^2 - y^2\right)dx - 3xy\, dy = 0$
8. $xy' = \sqrt{y^2 + x^2} + y$
9. $x\, dy - y\, dx = x\cos\dfrac{y}{x}\, dx$
10. $y'x - y = x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$

11. $2x^2dx - x^2dy = 3xy\,dx$

12. $y'x - 6\sqrt{xy} = y$

13. $y\,dx - x\,dy = x \cdot e^{y/x}\,dx$

14. $x\left(y' - \sin\dfrac{y}{x}\right) = y$

15. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 - xy}\,dx$

16. $y'x - \sqrt{x^2 + y^2} = y$

17. $y\,dx - x\,dy = y\ln\dfrac{y}{x}dx$

18. $y'x^2 + y^2y' = xy$

19. $\left(yx + y^2\right)dx - x^2dy = 0$

20. $x + 5y = xy'$

21. $\left(y - 4\sqrt{xy}\right)dx - x\,dy = 0$

22. $4x^2y + 3y^3 = 4x^3y'$

23. $x\,dy - y\,dx = x\cos^2\dfrac{y}{x}dx$

24. $y'x = y\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right)$

25. $(x + y)dx - (x - y)dy = 0$

26. $y'x - \sqrt{x^2 - yx} = y$

27. $xy\,dy - 4x^2dx = y^2dx$

28. $y'x + 4y' = y$

29. $y^2dx - x^2dy = 5xy\,dx$

30. $x^2\left(y' + 1\right) = yx\left(1 - y'\right)$

№3. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения.

1. $\left(x^2 - 4\right)y' + 2xy = 3,\ \ y(3) = -2$
2. $xy' + 2y = e^x\,x^3y^2,\ \ y(1) = -1/e$
3. $y' - 2xy - 5e^{x^2} = 0,\ \ y(0) = 7$
4. $y' + 2xy = e^{x^2}\,xy^2,\ \ y(0) = -1$
5. $xy' + 4xy = e^{-4x},\ \ y(1) = 1/e^4$
6. $y' - y\cos x = \dfrac{y^2\,\mathrm{tg}\,x}{e^{\sin x}},\ \ y(0) = 1$
7. $\left(x^2 + 1\right)y' + xy = x\sqrt{x^2 + 1},\ \ y(0) = 0$
8. $x^2yy' + xy^2 = \cos 2x,\ \ y(\pi) = 4/\pi$
9. $x^2y' + xy = x^3 + x^2,\ \ y(1) = 5/6$
10. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = y^4\cos x,\ \ y(0) = -1/3$
11. $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = \dfrac{1}{\sin x},\ \ y(\pi/2) = 3$
12. $xy' + y = xy^3\sin\dfrac{1}{x},\ \ y(1/\pi) = \pi$
13. $xy' - y = x^2\cos x,\ \ y(\pi/2) = \pi/2$
14. $y' - xy = 2xy^2\,e^{x^2/2},\ \ y(0) = 1/2$

15. $\left(x-2\right)y'+y=x^2-x^4,\ \ y(-1)=-13/15$

16. $xy'+3y=y^2x^3\ln x,\ \ y(1)=-2$

17. $xy'-y=x\ln x,\ \ y(1)=4$

18. $y'-y=\dfrac{5y^2}{\mathrm{e}^x\cos^2 5x},\ \ y(0)=-1$

19. $y'-y=\mathrm{e}^x\left(\sin x+4\right),\ \ y(0)=0$

20. $y'+y\sin x=\sqrt{\mathrm{e}^{\cos x}\,y},\ \ y(0)=\mathrm{e}$

21. $\sqrt{9-x^2}\left(y'+y\right)=\mathrm{e}^{-x},\ \ y(0)=1$

22. $y'+4y=-\dfrac{6\,\mathrm{e}^{4x}y^2}{\sin^2 6x},\ \ y(\pi/12)=\mathrm{e}^{-\pi/3}$

23. $y'+7y=\dfrac{\mathrm{e}^{-7x}}{\cos^2 x},\ \ y(0)=5$

24. $y'+y=y^2\sin\mathrm{e}^{-x},\ \ y(0)=-1/\cos 1$

25. $xy'-\left(x+5\right)y=5\,\mathrm{e}^x\cdot x^5,\ \ y(1)=\mathrm{e}$

26. $xy'-4y=5xy^2\cos x^5,\ \ y(1)=-1/\sin 1$

27. $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=3\sin x,\ \ y(0)=0$

28. $\left(1+x^2\right)y'-2xy=\left(x^2+x^4\right)y^2,\ \ y(0)=1$

29. $y'+2xy=\dfrac{7x}{\mathrm{e}^{x^2}},\ \ y(0)=2$

30. $y'-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}y=\dfrac{y^2}{\mathrm{e}^{\arcsin x}},\ \ y(0)=1$

№4. Найти частное решение дифференциального уравнения.

1. $y'''=18\sin 3x,\ \ y(\pi/6)=\pi/3,\ \ y'(\pi/6)=0,\ \ y''(\pi/6)=0$
2. $y'''=2\cos\dfrac{x}{3},\ \ y(6\pi)=30\pi,\ \ y'(6\pi)=-12,\ \ y''(6\pi)=0$
3. $y'''=\dfrac{1}{x^3},\ \ y(1)=1/2,\ \ y'(1)=3/2,\ \ y''(1)=1/2$
4. $y'''=\mathrm{e}^{x/2},\ \ y(0)=8,\ \ y'(0)=5,\ \ y''(0)=3$
5. $y'''=\cos 3x+1,\ \ y(0)=5,\ \ y'(0)=8/9,\ \ y''(0)=0$
6. $y'''=\sin 2x-2,\ \ y(0)=1/8,\ \ y'(0)=0,\ \ y''(0)=1/2$
7. $y''=\dfrac{1}{1+x^2},\ \ y(0)=4,\ \ y'(0)=0$

8. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0$

9. $y'' = \dfrac{1}{x},\ y(1) = 3,\ y'(1) = 3$

10. $y'' = \sin^2 x \cdot \cos x,\ y(\pi) = -7/9,\ y'(\pi) = 0$

11. $y'' = 3\cos^2 x \cdot \sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

12. $y''' = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x},\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 1/2$

13. $y''' = \dfrac{\cos x}{\sin^3 x},\ y(\pi/2) = \pi,\ y'(\pi/2) = 2,\ y''(\pi/2) = -1/2$

14. $y''' = \cos\dfrac{x}{2} + e^{-x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = -3,\ y''(0) = 1$

15. $y'' = \dfrac{1}{1+4x^2},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

16. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{1-9x^2}},\ y(0) = 1/9,\ y'(0) = 0$

17. $y'' = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x},\ y(1) = 3,\ y'(1) = 1$

18. $y'' = 6x + \sin^3 x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = -2/3$

19. $y''' = 8e^{2x} - 4\cos^2 x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1/2,\ y''(0) = 4$

20. $y'' = 3\cos^3 x - e^{x/5},\ y(0) = -1/3,\ y'(0) = -5$

21. $y''' = 24\sin^2 x - 6,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 2$

22. $y'' = 4\sin^4 x,\ y(0) = -17/32,\ y'(0) = 0$

23. $y'' = 8\cos^4 x,\ y(0) = -1/16,\ y'(0) = 2$

24. $y'' = 5\sin^4 x \cdot \cos x,\ y(\pi/2) = 3,\ y'(\pi/2) = 1$

25. $y'' = 7\cos^6 x \cdot \sin x,\ y(\pi) = 2,\ y'(\pi) = 1$

26. $y'' = 12x^2 - \dfrac{3}{4\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x},\ y(1) = 1,\ y'(1) = 5/2$

27. $y''' = 2e^x + \cos 3x,\ y(0) = 5,\ y'(0) = -1/9,\ y''(0) = 3$

28. $y''' = -\dfrac{2\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x},\ y(\pi/2) = -\pi^2/8,\ y'(\pi/2) = -\pi/2,\ y''(\pi/2) = 0$

29. $y''' = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0$

30. $y'' = \dfrac{1}{1+x},\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$

№5. Найти частное решение дифференциального уравнения.

1. $y'' - 10y' + 25y = 0,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 8$
2. $y'' + 3y' + 2y = 0,\ \ y(0) = 5,\ \ y'(0) = -7$
3. $y'' - 4y' + 5y = 0,\ \ y(0) = 5,\ \ y'(0) = 4$
4. $y'' + 6y' + 9y = 0,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = -5$
5. $y'' + 2y' - 3y = 0,\ \ y(0) = 4,\ \ y'(0) = -8$
6. $y'' + 9y = 0,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 9$
7. $y'' - 2y' + y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 1$
8. $y'' - 9y' + 20y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 5$
9. $y'' + 4y' + 8y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2$
10. $y'' - 8y' + 16y = 0,\ \ y(0) = 5,\ \ y'(0) = 12$
11. $y'' - 10y' + 21y = 0,\ \ y(0) = -3,\ \ y'(0) = -5$
12. $y'' + 6y' + 10y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -2$
13. $y'' + 12y' + 36y = 0,\ \ y(0) = -4,\ \ y'(0) = 14$
14. $y'' - 49y = 0,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 7$
15. $y'' + 12y' + 37y = 0,\ \ y(0) = -2,\ \ y'(0) = 4$
16. $4y'' - 4y' + y = 0,\ \ y(0) = -1,\ \ y'(0) = 1/2$
17. $y'' - 2y' = 0,\ \ y(0) = 5,\ \ y'(0) = 4$
18. $y'' - 4y' + 13y = 0,\ \ y(0) = 4,\ \ y'(0) = 5$
19. $9y'' - 6y' + y = 0,\ \ y(0) = -3,\ \ y'(0) = 0$
20. $2y'' + 3y' + y = 0,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 0$
21. $y'' - 2y' + 10y = 0,\ \ y(0) = 5,\ \ y'(0) = -1$
22. $y'' - 4y' + 4y = 0,\ \ y(0) = 6,\ \ y'(0) = 10$
23. $y'' + y' - 6y = 0,\ \ y(0) = 8,\ \ y'(0) = 1$
24. $y'' + 16y = 0,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 8$
25. $9y'' - 12y' + 4y = 0,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 6$
26. $2y'' + 5y' - 3y = 0,\ \ y(0) = 9,\ \ y'(0) = 1$
27. $y'' + 4y' + 20y = 0,\ \ y(0) = -1,\ \ y'(0) = 6$
28. $y'' + 14y' + 49y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -5$
29. $y'' - 10y' + 16y = 0,\ \ y(0) = -4,\ \ y'(0) = 4$
30. $y'' + 2y' + 17y = 0,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 9$

№6. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y''-2y'=4e^{2x}$
2. $y''-8y'+15y=15x^4-2x^3-6x^2-5x+11$
3. $y''-2y'+5y=100e^{2x}\sin 5x$
4. $y''-10y'+29y=\left(13x^2+x+22\right)e^{2x}$
5. $y''+8y'+16y=6e^{-4x}$
6. $9y''+12y'+4y=4\cos 4x-468\sin 4x$
7. $y''+6y'-7y=\left(16x+10\right)e^{x}$
8. $y''+7y'+10y=\left(130x+24\right)\cos x$
9. $y''+y=4\cos x+2\sin x$
10. $y''+36y=\left(27x+54\right)\sin 3x+33\cos 3x$
11. $y''+10y'+25y=\left(16x-8\right)e^{-x}$
12. $y''-14y'+49y=\left(12x^2-6x+2\right)e^{7x}$
13. $y''-3y'-4y=-150e^{5x}\cos 3x$
14. $y''-7y'+6y=-3\cos 5x+89\sin 5x$
15. $y''+4y=-17e^{-x}\cos 2x$
16. $y''-8y'+25y=-32\cos 4x+9\sin 4x$
17. $y''+4y'+4y=27x^2e^{x}$
18. $4y''+4y'+y=x^4+17x^3+58x^2+14x+14$
19. $y''-y'=6x^2-4x-9$
20. $y''+7y'+12y=65\sin 2x$
21. $y''+49y=14\sin 7x$
22. $y''-8y'+41y=41x^4-32x^3+12x^2+41$
23. $25y''+40y'+16y=100e^{-4x/5}$
24. $y''-6y'+9y=\left(169x+182\right)\sin 2x$
25. $y''-25y=1500x^2e^{5x}$
26. $y''-4y'=24x^5-150x^4-8x^3$
27. $y''-2y'+2y=\left(34x+1\right)e^{-3x}$
28. $y''-12y'+37y=37x^3+x^2-18x+39$
29. $y''-16y'+64y=578e^{3x}\sin 3x$
30. $y''-12y'+36y=-676e^{2x}\cos 6x$

№7. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y''+10y'+29y=\dfrac{1}{e^{5x}\sin 2x}$
2. $y''+49y=\dfrac{1}{\sin 7x}$
3. $y''-6y'+9y=\dfrac{e^{3x}}{x^2}$
4. $y''+2y'+y=\dfrac{1}{x^4e^{x}}$
5. $y''-y'=\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+4}$
6. $y''-5y'+6y=\dfrac{e^{4x}}{e^{2x}-9}$
7. $y''+36y=\operatorname{tg} 6x$
8. $y''+64y=\operatorname{ctg} 8x$
9. $y''-10y'+25y=e^{-5x}+\dfrac{e^{5x}}{x}$
10. $y''-16y'+64y=\dfrac{e^{8x}}{x^5}+e^{8x}$
11. $y''+y'=e^{x}\sin e^{x}$
12. $y''-5y'=e^{-5x}\cos e^{-5x}$
13. $y''-4y'+8y=\dfrac{e^{2x}}{\sin^2 2x}$
14. $y''+9y=\dfrac{5}{\cos^2 3x}$
15. $y''+4y'+4y=\dfrac{1}{x^5e^{2x}}$
16. $y''-4y'+4y=\dfrac{e^{2x}}{x}$
17. $y''-4y=\dfrac{e^{4x}}{e^{4x}-16}$
18. $y''+7y'+12y=\dfrac{e^{x}}{e^{2x}+1}$

19. $y'' + 25y = \dfrac{1}{\cos 5x}$

20. $y'' - 6y' + 18y = \dfrac{e^{3x}}{\cos^2 3x}$

21. $y'' - 14y' + 49y = \dfrac{e^{7x}}{x^7} + e^{7x}$

22. $y'' + 12y' + 36y = e^{6x} + \dfrac{1}{x e^{6x}}$

23. $y'' + y' - 20y = \dfrac{\sin x + 2}{e^{5x}}$

24. $y'' - y' - 2y = e^{2x}(\cos x + 1)$

25. $y'' + 4y = \dfrac{4}{\sin^2 2x}$

26. $y'' + 10y' + 29y = \dfrac{1}{e^{5x}\cos 2x}$

27. $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{1}{x^3 e^{3x}}$

28. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^8}$

29. $y'' - 3y' = \dfrac{e^{4x}}{e^{2x} + 4}$

30. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{\sin 5x}{e^x} + e^x$

№8. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

1. $\begin{cases} x' = -3x + 5y \\ y' = 6x - 2y \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = x - 4y \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -2x + 3y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = x - 4y \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = -9x + 4y \\ y' = -9x + 6y \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = 8x + 3y \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = -8x - 11y \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = 4x + 2y \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = 2x + 5y \\ y' = 5x + 2y \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 6x - 5y \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = -2x + 5y \\ y' = 4x - y \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = 6x + 3y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = 2x + 4y \\ y' = 5x + 3y \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = 2x - 6y \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = -5x + 3y \\ y' = -8x + 9y \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = -8x + y \\ y' = 11x + 2y \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = -10x - 6y \\ y' = 5x + y \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = -4x + 11y \\ y' = -x + 8y \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = 5x - 9y \\ y' = 2x - 4y \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = 2x - 7y \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = -6x - 13y \\ y' = 3x + 10y \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = -x + 7y \\ y' = x + 5y \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = -6x + y \\ y' = -7x + 2y \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = 5x + 6y \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = -4x + 6y \\ y' = 5x - 3y \end{cases}$

26. $\begin{cases} x' = -x + 4y \\ y' = 2x - 3y \end{cases}$

27. $\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = 7x + 6y \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = -10x + 6y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$

29. $\begin{cases} x' = -9x - 5y \\ y' = 8x + 5y \end{cases}$

30. $\begin{cases} x' = 2x + 4y \\ y' = 6x + 7y \end{cases}$

III. Практические задания по теме «Интегральное исчисление функций нескольких переменных»

№1. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах.

1. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x;y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f(x;y)dy$

2. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x;y)dx$

3. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x;y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x;y)dx$

4. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2-x^2} f(x;y)dy$

5. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-x-2}^{0} f(x;y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f(x;y)dy$

6. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y^2}^{2-y^2} f(x;y)dx$

7. $\int\limits_{1/2}^{1} dy \int\limits_{1/y}^{2} f(x;y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{y}^{2} f(x;y)dx$

8. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2-2}^{-x^2} f(x;y)dy$

9. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x;y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f(x;y)dy$

10. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{2-y^2}} f(x;y)dx$

11. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x;y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x;y)dx$

12. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2-x} f(x;y)dy$

13. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x;y)dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x;y)dy$

14. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{-\sqrt{y}} f(x;y)dx$

15. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f(x;y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f(x;y)dx$

16. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x^2-2}^{-x^2} f(x;y)dy$

17. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x^2} f(x;y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-x} f(x;y)dy$

18. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-y-2}^{y^3} f(x;y)dx$

19. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f(x;y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}} f(x;y)dx$

20. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{1/x}^{x} f(x;y)dy$

21. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{0} f(x;y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{0} f(x;y)dy$

22. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{y} f(x;y)dx$

23. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f(x;y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f(x;y)dx$

24. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x;y)dy$

25. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f(x;y)dy + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x;y)dy$

26. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{-4y-y^2}} f(x;y)dx$

27. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} f(x;y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x;y)dx$ 28. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x;y)dy$

29. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x;y)dy$ 30. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x;y)dx$

№2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$, если область D ограничена указанными линиями.

1. $f(x;y) = 8x^3y^3 + 12xy^2;\ D: y = 4,\ y = 2x,\ x = -\sqrt{y}$
2. $f(x;y) = 6x^2y - 8x^3y^3;\ D: x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt{x}$
3. $f(x;y) = 12xy - 3y^3;\ D: x = y^2,\ x + y = 2$
4. $f(x;y) = 4x^2y + 16x^3y^3;\ D: x^2 = 4y,\ y^2 = 4x$
5. $f(x;y) = 2xy^2 + 12y - y^3;\ D: y = -2,\ xy = 1,\ y = x$
6. $f(x;y) = 12x^2y + 4x^3y^3;\ D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$
7. $f(x;y) = 4xy^2 - 6y + 7;\ D: y = 0,\ y = \sqrt{x},\ x + y = 2$
8. $f(x;y) = 6x^2y - 12x^3y;\ D: x = 0,\ x - y + 5 = 0,\ x + y + 5 = 0$
9. $f(x;y) = 8x^3y^3 + 6xy^2;\ D: y = 1,\ x = -y^2,\ x = \sqrt{y}$
10. $f(x;y) = 12xy + 3x^3;\ D: y = x^2 - 1,\ x + y = 1$
11. $f(x;y) = 6xy^2 + 12xy^3;\ D: y = 0,\ x - y - 3 = 0,\ x + y + 3 = 0$
12. $f(x;y) = 2x^2y - 12x + x^3;\ D: x = 2,\ xy = 1,\ y = x$
13. $f(x;y) = 8x^3y^3 - 12xy^2;\ D: y = -4,\ y = 2x,\ x = \sqrt{-y}$
14. $f(x;y) = 16x^3y^3 - 4x^2y;\ D: x^2 + 4y = 0,\ y^2 + 4x = 0$
15. $f(x;y) = 3y^3 + 12xy;\ D: y^2 + x = 0,\ x + y + 2 = 0$
16. $f(x;y) = 4x^2y + 6x - 5;\ D: x = 0,\ x = \sqrt{y},\ x + y = 2$
17. $f(x;y) = 12xy^2 - 8x^3y^3;\ D: y = 4,\ 4x + 3y = 0,\ x = \sqrt{y}$
18. $f(x;y) = 3x^3 - 12xy;\ D: y = 1 - x^2,\ x - y = 1$
19. $f(x;y) = y^3 - 2xy^2 - 12y;\ D: y = 2,\ xy = -1,\ y = -x$
20. $f(x;y) = 16x^3y^3 + 4x^2y;\ D: x^2 = 4y,\ y^2 = -4x$
21. $f(x;y) = 6xy^2 - 8x^3y^3;\ D: y = -1,\ x = y^2,\ x = -\sqrt{-y}$
22. $f(x;y) = 4x^3y^3 - 12x^2y;\ D: x = -1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt{-x}$
23. $f(x;y) = 8x^3y^3 - 12xy^2;\ D: y = -4,\ 4x + 3y = 0,\ x = -\sqrt{-y}$
24. $f(x;y) = 8x^3y^3 - 12x^2y;\ D: x = 4,\ 2x + y = 0,\ y = \sqrt{x}$
25. $f(x;y) = 12xy^3 - 6xy^2;\ D: y = 0,\ x + y - 4 = 0,\ x - y + 4 = 0$

26. $f(x;y)=12x^3y+6x^2y;\ D: x=0,\ x-y=4,\ x+y=4$

27. $f(x;y)=3y^3+12xy;\ D: x=y^2,\ x-y=2$

28. $f(x;y)=4x^2y+12x-x^3;\ D: x=2,\ xy=-1,\ x+y=0$

29. $f(x;y)=6xy^2-8x^3y^3;\ D: y=1,\ x=y^2,\ x=-\sqrt{y}$

30. $f(x;y)=3-4x^2y-6x;\ D: x=0,\ x=-\sqrt{-y},\ x-y=2$

№3. Для заданной функции $f(x;y)$ вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L f(x;y)dl$, где L – отрезок прямой AB.

1. $f(x;y)=8\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}$; $A(-1;0)$, $B(0;1)$
2. $f(x;y)=\left(x^2+y^2+20\right)^{-\frac{1}{2}}$; $A(0;0)$, $B(1;2)$
3. $f(x;y)=8x^3y$; $A(-1;1)$, $B(2;3)$
4. $f(x;y)=\dfrac{\sqrt{2}}{x-y}$; $A(0;5)$, $B(5;0)$
5. $f(x;y)=\left(8-x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$; $A(0;0)$, $B(2;2)$
6. $f(x;y)=3\sqrt{x}+4\sqrt[3]{y}$; $A(0;1)$, $B(1;0)$
7. $f(x;y)=\left(x^2+y^2+2\right)^{-\frac{1}{2}}$; $A(0;0)$, $B(2;2)$
8. $f(x;y)=6x^2y$; $A(-1;-3)$, $B(1;1)$
9. $f(x;y)=\dfrac{\sqrt{2}}{x+y}$; $A(-3;0)$, $B(0;3)$
10. $f(x;y)=\left(5-x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$; $A(0;0)$, $B(1;2)$
11. $f(x;y)=6\sqrt[5]{x}+3\sqrt{y}$; $A(-1;0)$, $B(0;1)$
12. $f(x;y)=\left(x^2+y^2+10\right)^{-\frac{1}{2}}$; $A(0;0)$, $B(1;3)$
13. $f(x;y)=3x^2y^2$; $A(-2;2)$, $B(1;0)$
14. $f(x;y)=\dfrac{1}{\sqrt{2}(y-x)}$; $A(-2;0)$, $B(0;-2)$
15. $f(x;y)=\left(10-x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$; $A(0;0)$, $B(1;3)$
16. $f(x;y)=3\sqrt{x}-6\sqrt[5]{y}$; $A(0;1)$, $B(1;0)$
17. $f(x;y)=\left(x^2+y^2+8\right)^{-\frac{1}{2}}$; $A(0;0)$, $B(1;1)$
18. $f(x;y)=9xy^2$; $A(-1;1)$, $B(1;-2)$

19. $f(x;y)=\dfrac{1}{\sqrt{2}\left(y+x\right)}$; $A(0;-4)$, $B(4;0)$

20. $f(x;y)=\left(20-x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$; $A(0;0)$, $B(2;4)$

21. $f(x;y)=3\sqrt{y}+8\sqrt[3]{x}$; $A(-1;0)$, $B(0;1)$

22. $f(x;y)=\dfrac{\sqrt{5}}{x^2+y^2+20}$; $A(0;0)$, $B(2;4)$

23. $f(x;y)=16x^3y$; $A(-1;1)$, $B(2;3)$

24. $f(x;y)=\dfrac{1}{2x-3y}$; $A(0;3)$, $B(1;5)$

25. $f(x;y)=\left(18-x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$; $A(0;0)$, $B(3;3)$

26. $f(x;y)=8\sqrt[3]{y}-3\sqrt{x}$; $A(0;1)$, $B(1;0)$

27. $f(x;y)=\left(x^2+y^2+18\right)^{-\frac{1}{2}}$; $A(0;0)$, $B(3;3)$

28. $f(x;y)=12x^2y$; $A(-1;-3)$, $B(1;1)$

29. $f(x;y)=\dfrac{1}{\sqrt{2}\left(x+y\right)}$; $A(-3;0)$, $B(0;3)$

30. $f(x;y)=6\sqrt[5]{y}+9\sqrt{x}$; $A(0;1)$, $B(1;0)$

№4. Вычислить данный криволинейный интеграл второго рода. Сделать чертеж.

1. $\int\limits_L 2xy\,dx+6x^2dy$, где L – дуга параболы $x^2=4y$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(2;1)$
2. $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy$, где L – ломаная, звенья которой последовательно соединяют точки $A(-1;1)$, $B(0;0)$, $C(1;0)$
3. $\int\limits_L \left(x^2-y\right)dx-\left(x-y^2\right)dy$, где L – дуга окружности $\begin{cases} x=5\cos t \\ y=5\sin t \end{cases}$ от точки $A(5;0)$ до точки $B(0;5)$
4. $\int\limits_L \left(xy-y^2\right)dx-x\,dy$, где L – дуга параболы $y=x^2$ от точки $A(-1;1)$ до точки $B(0;0)$
5. $\int\limits_L \dfrac{y}{x}dx-3x\,dy$, где L – дуга кривой $y=\ln x$ от точки $A(\mathrm{e};1)$ до точки $B(\mathrm{e}^2;2)$

6. $\int\limits_L y\,dx - x\,dy$, где L – дуга окружности $\begin{cases} x = 7\cos t \\ y = 7\sin t \end{cases}$ от точки $A(7;0)$ до точки $B(-7;0)$, «пробегаемая» против хода часовой стрелки

7. $\int\limits_L \left(x^2 + y\right)dx - \left(x + y^2\right)dy$, где L – ломаная, звенья которой последовательно соединяют точки $A(1;0)$, $B(3;0)$, $C(4;2)$

8. $\int\limits_L (xy - x)dx - 5x^2dy$, где L – дуга параболы $y^2 = 4x$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(1;2)$

9. $\int\limits_L \left(x^2y + x\right)dx - \left(y^2x - y\right)dy$, где L – дуга окружности $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ от точки $A(0;1)$ до точки $B(-1;0)$

10. $\int\limits_L (xy + 1)dx - x^2y\,dy$, где L – отрезок прямой от точки $A(-1;1)$ до точки $B(2;0)$

11. $\int\limits_L 3xy\,dx + (y - x)dy$, где L – дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(2;4)$

12. $\int\limits_L y^2dx - x^2dy$, где L – дуга окружности $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$ от точки $A(0;4)$ до точки $B(0;-4)$, «пробегаемая» по ходу часовой стрелки

13. $\int\limits_L \left(x^2 - y\right)dx + \left(x - y^2\right)dy$, где L – ломаная, звенья которой последовательно соединяют точки $A(-1;0)$, $B(2;2)$, $C(3;2)$

14. $\int\limits_L (xy + 1)dx - x^2y\,dy$, где L – дуга параболы $y^2 = 4 - 4x$ от точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$

15. $\int\limits_L (y - x)dx + dy$, где L – дуга окружности $\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 9\sin t \end{cases}$ от точки $A(9;0)$ до точки $B(-9;0)$, «пробегаемая» против хода часовой стрелки

16. $\int\limits_L (xy - 3)dx + x^2y\,dy$, где L – отрезок прямой от точки $A(-2;1)$ до точки $B(1;0)$

17. $\int\limits_L xy\,dx + (y - x)dy$, где L – дуга кубической параболы $y = x^3$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(1;1)$

18. $\int\limits_L \cos y\,dx + \sin x\,dy$, где L – отрезок прямой от точки $A(-2;0)$ до точки $B(0;2)$

19. $\int\limits_L \left(x^2+y\right)dx-\left(x+y^2\right)dy$, где L – дуга окружности $\begin{cases} x=4\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$ от точки $A(0;4)$ до точки $B(4;0)$

20. $\int\limits_L \left(2xy-y^2\right)dx+x\,dy$, где L – дуга параболы $y=2\sqrt{x}$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(1;2)$

21. $\int\limits_L y\,dx+x\,dy$, где L – дуга окружности $\begin{cases} x=6\cos t \\ y=6\sin t \end{cases}$ от точки $A(0;6)$ до точки $B(0;-6)$, «пробегаемая» против хода часовой стрелки

22. $\int\limits_L \left(xy-x\right)dx-\dfrac{x^2}{2}dy$, где L – ломаная, звенья которой последовательно соединяют точки $A(0;0)$, $B(1;2)$, $C(3;2)$

23. $\int\limits_L 2xy\,dx+x^2dy$, где L – дуга параболы $x=2y^2$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(2;1)$

24. $\int\limits_L \left(x^2y-x\right)dx+y^2x\,dy$, где L – дуга окружности $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$ от точки $A(-1;0)$ до точки $B(0;-1)$

25. $\int\limits_L \left(xy-2\right)dx+x^2y\,dy$, где L – отрезок прямой от точки $A(-1;-1)$ до точки $B(2;0)$

26. $\int\limits_L 3xy\,dx-\left(5x+y\right)dy$, где L – дуга кубической параболы $y=x^3$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(2;8)$

27. $\int\limits_L y^2dx+x^2dy$, где L – дуга окружности $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$ от точки $A(0;2)$ до точки $B(0;-2)$, «пробегаемая» против хода часовой стрелки

28. $\int\limits_L \left(xy+y^2\right)dx-x\,dy$, где L – дуга параболы $y=3\sqrt{x}$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(1;3)$

29. $\int\limits_L \left(x^2+2y\right)dx+\left(2x-y^2\right)dy$, где L – ломаная, звенья которой последовательно соединяют точки $A(-2;0)$, $B(0;0)$, $C(2;2)$

30. $\int\limits_L \left(y+x\right)dx-dy$, где L – дуга окружности $\begin{cases} x=7\cos t \\ y=7\sin t \end{cases}$ от точки $A(-7;0)$ до точки $B(7;0)$, «пробегаемая» по ходу движения часовой стрелки

IV. Решение практических заданий по теме «Интегральное исчисление функций одной переменной»

№1. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{7x^3 + \sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt{x}} dx$.

Решение.

Представив радикалы в виде степеней переменной *x*, разделим числитель на знаменатель и воспользуемся свойством линейности неопределенного интеграла:

$$\int \frac{7x^3 + \sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{7x^3 + x^{2/3} - 1}{x^{1/2}} dx = \int \left(7x^{5/2} + x^{1/6} - x^{-1/2}\right) dx = 7\int x^{5/2} dx +$$

$$+\int x^{1/6} dx - \int x^{-1/2} dx = 7\frac{x^{5/2+1}}{5/2+1} + \frac{x^{1/6+1}}{1/6+1} - \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} = 2x^3\sqrt{x} + \frac{6}{7} x\sqrt[6]{x} - 2\sqrt{x} + C.$$

Ответ: $2\sqrt{x^7} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - 2\sqrt{x} + C,\ C = const$.

№2. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{4dx}{\sqrt{9 - 64x^2}}$.

Решение.

Учитывая, что $d(8x) = (8x)' dx = 8dx$, получим:

$$\int \frac{4\,dx}{\sqrt{9 - 64x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{8\,dx}{\sqrt{3^2 - (8x)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(8x)}{\sqrt{3^2 - (8x)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{8x}{3} + C.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\arcsin\frac{8x}{3} + C,\ C = const$.

№3. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^2 - 5x + 40}{\left(x^2 - 2x + 10\right)(x+2)} dx.$

Решение.

Так как подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, представим ее в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x^2 - 5x + 40}{\left(x^2 - 2x + 10\right)(x+2)} = \frac{Ax + B}{x^2 - 2x + 10} + \frac{C}{x+2} = \frac{(Ax+B)(x+2) + C\left(x^2 - 2x + 10\right)}{\left(x^2 - 2x + 10\right)(x+2)},$$

откуда $(Ax+B)(x+2) + C\left(x^2 - 2x + 10\right) = x^2 - 5x + 40$.

Для нахождения коэффициента *C* воспользуемся методом частных значений:

$x=-2:\ (-2A+B)(-2+2)+C\left((-2)^2-2(-2)+10\right)=(-2)^2-5(-2)+40;$

$$18\cdot C=54;$$
$$C=3.$$

Для нахождения коэффициентов A и B воспользуемся методом сравнения коэффициентов:

$x^2:\ A+C=1,$

$x^1:\ 2A+B-2C=-5,$ откуда $\begin{cases}A=-2,\\ B=5.\end{cases}$

Таким образом, $\int\frac{x^2-5x+40}{\left(x^2-2x+10\right)\left(x+2\right)}dx=\int\left(\frac{-2x+5}{x^2-2x+10}+\frac{3}{x+2}\right)dx=$

$$=\int\frac{-2x+5}{x^2-2x+10}dx+\int\frac{3}{x+2}dx=\left[\begin{matrix}d\left(x^2-2x+10\right)=(2x-2)dx\\ x^2-2x+10=(x-1)^2+9\end{matrix}\right]=\int\frac{-(2x-2)+3}{x^2-2x+10}dx+$$

$$+\int\frac{3}{x+2}dx=-\int\frac{(2x-2)dx}{x^2-2x+10}+\int\frac{3\,dx}{(x-1)^2+9}+3\int\frac{dx}{x+2}=-\int\frac{d\left(x^2-2x+10\right)}{x^2-2x+10}+$$

$$+3\int\frac{d\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)^2+3^2}+3\int\frac{d(x+2)}{x+2}=-\ln\left|x^2-2x+10\right|+\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+3\ln\left|x+2\right|+C.$$

Ответ: $-\ln\left|x^2-2x+10\right|+\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+3\ln\left|x+2\right|+C,\ C=const.$

№4. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}$.

Решение.

Приведем данный интеграл к интегралу от рациональной функции с помощью универсальной тригонометрической подстановки:

$$\int\frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}=\left[\begin{matrix}t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \ x=\operatorname{arctg}t,\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{matrix}\right]=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\cdot\frac{2t}{1+t^2}+3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+3}=$$

$$=\int\frac{2dt}{4t+3-3t^2+3+3t^2}=\int\frac{2dt}{4t+6}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(2t+3\right)}{2t+3}=\frac{1}{2}\ln\left|2t+3\right|=\frac{1}{2}\ln\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3\right|+C.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3\right|+C,\ C=const.$

№5. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}dx.$

***Решение*.**

Так как $НОК(2,3)=6$, то

$$\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}dx = \begin{bmatrix} 3x+1=t^6,\ x=\dfrac{t^6-1}{3}, \\ t=\sqrt[6]{3x+1},\ dx=2t^5dt \end{bmatrix} = \int \frac{t^3-1}{t^2+t^3}\cdot 2t^5dt = 2\int \frac{t^6-t^3}{1+t}dt.$$

Разделим числитель последней дроби на знаменатель уголком:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
-\,t^6 & -t^3 & & & & t+1 \\ \cline{6-6}
\underline{t^6+t^5} & & & & & t^5-t^4+t^3-2t^2+2t-2 \\
-\,-t^5 & -t^3 & & & & \\
\underline{-t^5-t^4} & & & & & \\
& -\,t^4-t^3 & & & & \\
& \underline{t^4+t^3} & & & & \\
& -\,-2t^3 & & & & \\
& \underline{-2t^3-2t^2} & & & & \\
& & -\,2t^2 & & & \\
& & \underline{2t^2+2t} & & & \\
& & -\,-2t & & & \\
& & \underline{-2t-2} & & & \\
& & 2 & & &
\end{array}
$$

Тогда $t^6-t^3=\left(t^5-t^4+t^3-2t^2+2t-2\right)\left(t+1\right)+2$, откуда

$$\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}dx = 2\int \frac{\left(t^5-t^4+t^3-2t^2+2t-2\right)\left(t+1\right)+2}{1+t}dt =$$

$$=2\int\left(t^5-t^4+t^3-2t^2+2t-2\right)dt+4\int\frac{dt}{t+1}=2\left(\frac{t^6}{6}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}-2\frac{t^3}{3}+t^2-2t\right)+$$

$$+4\ln\left|t+1\right| = \begin{bmatrix}\text{делаем обратную}\\ \text{подстановку}\end{bmatrix} = \frac{1}{3}(3x+1)-\frac{2}{5}\sqrt[6]{(3x+1)^5}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2}-$$

$$-\frac{4}{3}\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}-4\sqrt[6]{3x+1}+4\ln\left|\sqrt[6]{3x+1}+1\right|+C.$$

***Ответ*:** $\frac{1}{3}(3x+1)-\frac{2}{5}\sqrt[6]{(3x+1)^5}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2}-\frac{4}{3}\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}-$

$-4\sqrt[6]{3x+1}+4\ln\left(\sqrt[6]{3x+1}+1\right)+C,\ C=const.$

№6. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi}(x+2)\cos\frac{x}{2}dx$.

Решение.

Применим метод интегрирования по частям:

$$\int_0^{\pi}(x+2)\cos\frac{x}{2}dx=\begin{bmatrix} u=x+2, & du=dx, \\ dv=\cos\frac{x}{2}dx, & v=2\sin\frac{x}{2} \end{bmatrix}=(x+2)\cdot 2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}-$$

$$-\int_0^{\pi}2\sin\frac{x}{2}dx=(\pi+2)\cdot 2\sin\frac{\pi}{2}-(0+2)\cdot 2\sin\frac{0}{2}-4\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)=$$

$$=2\pi+4+4\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}=2\pi+4+4\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{0}{2}\right)=2\pi+4+4(0-1)=2\pi.$$

Ответ: 2π.

№7. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{2x\,dx}{1+x^4}$. или доказать его расходимость.

Решение.

$$\int_0^{+\infty}\frac{2x\,dx}{1+x^4}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\frac{2x\,dx}{1+x^4}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\frac{d\left(x^2\right)}{1+\left(x^2\right)^2}=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x^2\Big|_0^{b}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}b^2-\operatorname{arctg}0^2\right)=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}b^2=\frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

№8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями: $y=x^2+4x-2,\ y=2x+1$.

Решение.

Уравнение $y=x^2+4x-2$ задает параболу, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты ее вершины:

$$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2\cdot 1}=-2,\ y_0=y(x_0)=(-2)^2+4\cdot(-2)-2=4-8-2=-6.$$

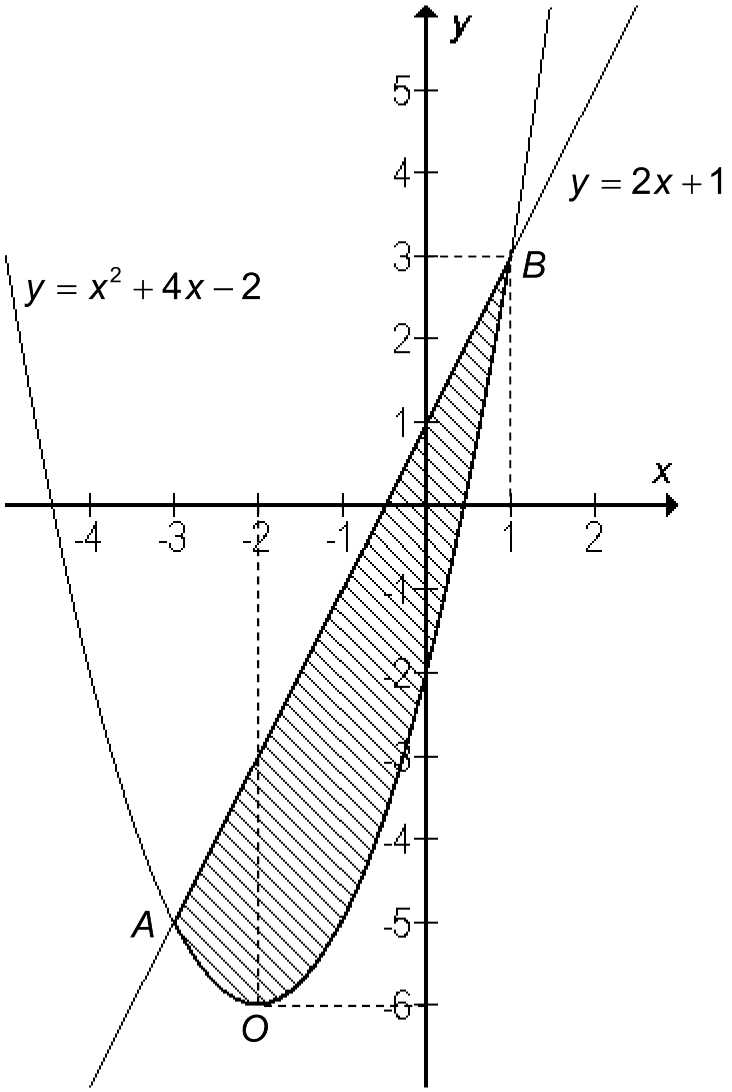
Значит, вершина параболы находится в точке $O(-2;-6)$.

Уравнение $y=2x+1$ определяет прямую. Найдем точки пересечения параболы и прямой, для чего составим систему из их уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x - 2, \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 2 = 2x + 1, \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0, \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 1, \end{array} \right. \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -3, \\ y = -5, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 3. \end{cases} \end{array} \right.$$ Значит, $A(-3;-5)$ и $B(1;3)$ – искомые точки пересечения.

Построим графики этих функций:



Теперь вычислим площадь заштрихованной фигуры:

$$S = \int_{-3}^{1} \left(2x + 1 - \left(x^2 + 4x - 2\right)\right) dx = \int_{-3}^{1} \left(-x^2 - 2x + 3\right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right)\Bigg|_{-3}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3 \cdot 1 \right) - \left(-\frac{(-3)^3}{3} - (-3)^2 + 3 \cdot (-3) \right) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 - 9 + 9 + 9 = 10\frac{2}{3}.$$

Ответ: $10\frac{2}{3}$.

V. Решение практических заданий по теме «Дифференциальные уравнения»

№1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y' = \mathrm{e}^x x^2\left(1+4y^2\right)$.

Решение.

Полагая $y' = \dfrac{dy}{dx}$, запишем уравнения в виде: $dy = \mathrm{e}^x x^2\left(1+4y^2\right)dx$.

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим обе части на выражение $1+4y^2 \neq 0$:

$$\frac{dy}{1+4y^2} = \mathrm{e}^x x^2\,dx.$$

Интегрируем: $\displaystyle\int \frac{dy}{1+4y^2} = \int \mathrm{e}^x x^2 dx$.

К первому интегралу применим метод поднесения под знак дифференциала:

$$\int \frac{dy}{1+4y^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2y)}{1+(2y)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2y) + C_1, \text{ где } C_1 = const.$$

Ко второму интегралу дважды применим формулу интегрирования по частям:

$$\int \mathrm{e}^x x^2 dx = \begin{bmatrix} u = x^2; & du = 2x\,dx \\ dv = \mathrm{e}^x dx; & v = \mathrm{e}^x \end{bmatrix} = \mathrm{e}^x x^2 - \int (2x)\mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x x^2 - 2\int x\,\mathrm{e}^x dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x; & du = dx \\ dv = \mathrm{e}^x dx; & v = \mathrm{e}^x \end{bmatrix} = \mathrm{e}^x \cdot x^2 - 2\left(x\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x dx\right) = x^2\,\mathrm{e}^x - 2\left(x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\right) =$$

$$\mathrm{e}^x \cdot \left(x^2 - 2x + 2\right) + C_2, \text{ где } C_2 = const.$$

В итоге получим:

$\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(2y) + C_1 = \mathrm{e}^x \cdot \left(x^2 - 2x + 2\right) + C_2$, или, обозначив $C = 2C_2 - 2C_1$,

$\operatorname{arctg}(2y) = 2\mathrm{e}^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C$ – общий интеграл ДУ.

Ответ: $\operatorname{arctg}(2y) = 2\mathrm{e}^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C,\ C = const$.

№2. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $x\,dy - 2y\,dx = x\,dx$.

Решение.

Из данного уравнения находим: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y + x}{x}$.

Исходное уравнение является однородным уравнением первого порядка, поэтому применим подстановку $y = x \cdot u$, где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция. Получаем:

$$u'x + u = \frac{2xu + x}{x} \Leftrightarrow u'x + u = 2u + 1 \Leftrightarrow u'x = u + 1.$$

Получили ДУ с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$\frac{du}{dx}x = u + 1 \Leftrightarrow \frac{du}{u+1} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{du}{u+1} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|u+1| = \ln|x| + \ln|C|.$$

Делаем обратную подстановку $u = \dfrac{y}{x}$:

$$\ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| = \ln|x| + \ln|C|;$$

$$\frac{y}{x} + 1 = x \cdot C;$$

$y = Cx^2 - x$ – общее решение исходного уравнения.

Ответ: $y = x^2C - x,\ C = const$.

№3. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения:

а) $\left(x^2 - 1\right)y' - xy = x^3 - x,\ y\left(\sqrt{2}\right) = 1;$

б) $xy' + 2y + x^5y^3\,\mathrm{e}^x = 0,\ y(1) = 1.$

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$y' - \frac{x}{x^2 - 1}y = x.$$

Это линейное ДУ первого порядка. Решаем его с помощью подстановки $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – новые неизвестные функции, одна из которых может быть выбрана произвольным образом.

Имеем:

$$u'v + uv' - \frac{x}{x^2 - 1}v = x;$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{x}{x^2 - 1}v\right) = x. \quad (*)$$

Находим функцию $v(x)$, приравнивая выражение в скобках к нулю:

$v' - \dfrac{x}{x^2-1}v = 0$ – ДУ с разделяющимися переменными;

$$\frac{dv}{dx} = \frac{x}{x^2-1}v;$$

$$\int\frac{dv}{v} = \int\frac{x\,dx}{x^2-1};$$

$$\ln|v| = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + \ln|C|;$$

$$v = C\sqrt{x^2-1}.$$

Т.к. функцию $v(x)$ можно выбрать произвольно, положим $C=1$, тогда $v=\sqrt{x^2-1}$. Подставляем полученное выражение для $v(x)$ в уравнение (*) и находим $u(x)$:

$$u'\sqrt{x^2-1} + u\cdot 0 = x;$$

$\dfrac{du}{dx}\sqrt{x^2-1} = x$ – ДУ с разделяющимися переменными;

$$du = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}};$$

$$\int du = \int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}};$$

$$u = \sqrt{x^2-1} + C.$$

Тогда $y = uv = \left(\sqrt{x^2-1}+C\right)\sqrt{x^2-1} = x^2 - 1 + C\sqrt{x^2-1}$ – общее решение исходного уравнения.

Находим значение постоянной C, используя начальное условие $y\left(\sqrt{2}\right)=1$: $1 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 1 + C\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-1} \;\Rightarrow\; C=0$.

Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид: $y = x^2-1$.

б) Преобразуем уравнение: $y' + \dfrac{2}{x}y = -x^4y^3\,\mathrm{e}^x$.

Данное уравнение является уравнением Бернулли. Решаем его с помощью подстановки $y = u(x)\cdot v(x)$, где $u(x)$, $v(x)$ – новые неизвестные функции, одна из которых может быть выбрана произвольным образом.

Имеем: $u'v + uv' + \dfrac{2}{x}uv = -x^4(uv)^3\,\mathrm{e}^x$,

$$u'v + u\left(v' + \frac{2}{x}v\right) = -x^4u^3v^3\,\mathrm{e}^x. \quad (**)$$

Находим функцию $v(x)$, приравнивая выражение в скобках к нулю:

$v'+\dfrac{2}{x}v=0$ – ДУ с разделяющимися переменными;

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{2}{x}v;$$

$$\frac{dv}{v}=-\frac{2\,dx}{x};$$

$$\int\frac{dv}{v}=-2\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v|=-2\ln|x|+\ln|C|,$$

$$v=\frac{C}{x^2}.$$

Так как функцию $v(x)$ можно выбрать произвольно, положим $C=1$, тогда $v=\dfrac{1}{x^2}$. Подставляем полученное выражение для $v(x)$ в уравнение (**) и находим $u(x)$:

$$u'\cdot\frac{1}{x^2}+u\cdot 0=-x^4u^3\left(\frac{1}{x^2}\right)^3 \mathrm{e}^x;$$

$u'=-u^3\,\mathrm{e}^x$ – ДУ с разделяющимися переменными;

$$\frac{du}{-u^3}=\mathrm{e}^x\,dx;$$

$$-\int\frac{du}{u^3}=\int\mathrm{e}^x\,dx;$$

$$\frac{u^{-2}}{2}=\mathrm{e}^x+C;$$

$$u=\frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{e}^x+2C}}.$$

Тогда $y=uv=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{e}^x+2C}}\right)x^{-2}=\dfrac{1}{x^2\sqrt{2\,\mathrm{e}^x+2C}}$ – общее решение исходного уравнения.

Находим значение постоянной C, используя начальное условие $y(1)=1$:

$$1=\frac{1}{1^2\sqrt{2\,\mathrm{e}^1+2C}}\ \Rightarrow\ C=0{,}5-\mathrm{e}.$$

Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид:

$$y=\frac{1}{x^2\sqrt{2\,\mathrm{e}^x+1-2\,\mathrm{e}}}.$$

Ответ: а) $y=x^2-1$; б) $y=\dfrac{1}{x^2\sqrt{2\,\mathrm{e}^x+1-2\,\mathrm{e}}}$.

№4. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' = 1 - \sin 3x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = \frac{26}{27}$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = \frac{4}{3}$.

Решение.

Найдём y'':

$$y'' = \int \left(1 - \sin 3x\right) dx = x + \frac{1}{3}\cos 3x + C_1.$$

Воспользуемся начальным условием $y''(0) = \frac{4}{3}$, подставив в последнее равенство $x = 0$ и $y'' = \frac{4}{3}$:

$$\frac{4}{3} = 0 + \frac{1}{3}\cos\left(3 \cdot 0\right) + C_1 \;\Rightarrow\; C_1 = 1.$$

Уравнение примет вид: $y'' = x + \frac{1}{3}\cos 3x + 1$.

Найдём y':

$$y' = \int \left(x + \frac{1}{3}\cos 3x + 1 \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{9}\sin 3x + x + C_2.$$

Воспользуемся начальным условием $y'(0) = -2$, подставив в последнее равенство $x = 0$ и $y' = -2$:

$$-2 = \frac{0^2}{2} + \frac{1}{9}\sin\left(3 \cdot 0\right) + 0 + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = -2.$$

Уравнение примет вид: $y' = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{9}\sin 3x + x - 2$.

Найдём y:

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{9}\sin 3x + x - 2 \right) dx = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{27}\cos 3x + \frac{x^2}{2} - 2x + C_3.$$

Воспользовавшись начальным условием $y(0) = \frac{26}{27}$, определим C_3:

$$\frac{26}{27} = \frac{0^3}{6} - \frac{1}{27}\cos\left(3 \cdot 0\right) + \frac{0^2}{2} - 2 \cdot 0 + C_3 \Rightarrow C_3 = 1.$$

Таким образом, искомое частное решение ДУ примет вид:

$$y = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{27}\cos 3x + \frac{x^2}{2} - 2x + 1.$$

Ответ: $y = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{27}\cos 3x + \frac{x^2}{2} - 2x + 1.$

№5. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения $y'' - 2y' - 80y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3$, $y'(0) = -6$.

***Решение*.**

Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 2\lambda - 80 = 0$.

Так как его корни $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = 10$ являются действительными и различными, то общее решение ДУ запишется в виде: $y = C_1 \mathrm{e}^{-8x} + C_2 \mathrm{e}^{10x}$.

Продифференцируем обе части этого равенства:

$y' = -8C_1 \mathrm{e}^{-8x} + 10C_2 \mathrm{e}^{10x}$.

Найдём частное решение исходного уравнения, воспользовавшись заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} y(0) = 3, \\ y'(0) = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ -8C_1 + 10C_2 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 3 - C_1, \\ -8C_1 + 10\left(3 - C_1\right) = -6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 3 - C_1, \\ -18C_1 = -36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Таким образом, искомое частное решение запишется в виде:

$y = 2\mathrm{e}^{-8x} + \mathrm{e}^{10x}$.

***Ответ*:** $y = 2\mathrm{e}^{-8x} + \mathrm{e}^{10x}$.

№6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x$;

б) $y'' + 2y' - 3y = \left(12x^2 + 6x - 4\right)\mathrm{e}^x$.

***Решение*.**

а) Общее решение данного линейного неоднородного ДУ будем искать в виде $y = \bar{y} + y^*$, где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего линейного однородного уравнения, а y^* – частное решение исходного неоднородного уравнения.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0$;

$$D = -64 < 0; \quad \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i.$$

Так как корни уравнения являются комплексно-сопряжёнными, то общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$\bar{y} = \mathrm{e}^{3x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right)$.

Так как числа $0 \pm 4i = \pm 4i$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение y^* неоднородного уравнения будем искать в виде $y^* = A\cos 4x + B\sin 4x$, где постоянные A и B подлежат определению.

Дважды дифференцируем последнее равенство:

$$\left(y^*\right)' = -4A\sin 4x + 4B\cos 4x;$$

$$\left(y^*\right)'' = -16A\cos 4x - 16B\sin 4x.$$

Подставляем y^* и ее производные в исходное уравнение:

$$-16A\cos 4x - 16B\sin 4x - 6\cdot\left(-4A\sin 4x + 4B\cos 4x\right) +$$

$$+25\cdot\left(A\cos 4x + B\sin 4x\right) = 9\sin 4x - 24\cos 4x;$$

$$9A\cos 4x + 9B\sin 4x + 24A\sin 4x - 24B\cos 4x = 9\sin 4x - 24\cos 4x.$$

Находим неизвестные A и B, приравнивая коэффициенты при $\sin 4x$ и $\cos 4x$ в левой и правой частях последнего равенства:

$$\begin{cases} 9B + 24A = 9, \\ 9A - 24B = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8A + 3B = 3, \\ 3A - 8B = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9A - 24B = -24, \\ 64A + 24B = 24 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 73A = 0, \\ 64A + 24B = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = 1. \end{cases}$$

Получаем частное решение исходного неоднородного уравнения в виде $y^* = \sin 4x$.

Тогда общее решение исходного ДУ имеет вид:

$$y = \mathrm{e}^{3x}\left(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x\right) + \sin 4x.$$

б) Так же, как и в предыдущем примере, общее решение данного уравнения будем искать в виде $y = \bar{y} + y^*$, где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, а y^* – частное решение исходного неоднородного уравнения.

Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$.

Так как корни $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$ этого уравнения являются действительными и различными, то общее решение соответствующего исходному однородного уравнения запишется в виде:

$$\bar{y} = C_1\mathrm{e}^{-3x} + C_2\mathrm{e}^{x}.$$

Поскольку правая часть исходного уравнения имеет вид $P_2(x)e^{1\cdot x}$, где $P_2(x)$ – многочлен второй степени, причем число $a=1$ является простым корнем характеристического уравнения, то частное решение y^* неоднородного уравнения будем искать в виде $y^* = x\cdot Q_2(x)\cdot e^{1\cdot x}$, или $y^* = \left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)e^x$, где постоянные A, B и C подлежат определению.

Дважды дифференцируем последнее равенство:

$$\left(y^*\right)' = \left(3Ax^2+2Bx+C\right)\cdot e^x + \left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)\cdot e^x =$$

$$= \left(Ax^3+(3A+B)x^2+(2B+C)x+C\right)e^x;$$

$$\left(y^*\right)'' = \left(3Ax^2+2(3A+B)x+(2B+C)\right)\cdot e^x + \left(Ax^3+(3A+B)x^2+(2B+C)x+C\right)\cdot e^x =$$

$$= \left(Ax^3+(6A+B)x^2+(6A+4B+C)x+(2B+2C)\right)e^x.$$

Подставляем y^* и ее производные в исходное уравнение:

$$\left(Ax^3+(6A+B)x^2+(6A+4B+C)x+(2B+2C)\right)e^x +$$

$$+2\left(Ax^3+(3A+B)x^2+(2B+C)x+C\right)e^x - 3\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)e^x =$$

$$= \left(12x^2+6x-4\right)e^x.$$

Разделим обе части равенства на e^x и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях:

x^3 : $A+2A-3A=0$;

x^2 : $6A+B+6A+2B-3B=12$;

x^1 : $6A+4B+C+4B+2C-3C=6$;

x^0 : $2B+2C+2C=-4$.

Получим систему: $\begin{cases} 12A=12, \\ 6A+8B=6, \\ 2B+4C=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=0, \\ C=-1. \end{cases}$

Таким образом, частное решение исходного неоднородного уравнения запишется в виде: $y^* = \left(x^3-x\right)e^x$.

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид:

$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + \left(x^3-x\right)e^x$, или $y = C_1 e^{-3x} + \left(x^3-x+C_2\right)e^x$.

Ответ: а) $y = e^{3x}\left(C_1\cos 4x + C_2 \sin 4x\right) + \sin 4x,\ C_1 = const, C_2 = const$;

б) $y = C_1 e^{-3x} + \left(x^3-x+C_2\right)e^x,\ C_1 = const, C_2 = const$.

№7. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$.

Так как его корни $\lambda_{1,2} = -1$ действительны и равны, то общее решение соответствующего однородного уравнения запишется в виде:

$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

При этом функции $y_1 = e^{-x}$ и $y_1 = x e^{-x}$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения.

Согласно методу вариации произвольных постоянных будем искать общее решение исходного неоднородного уравнения в виде $y^* = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) x e^{-x}$, где неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ подлежат определению.

Составляем систему для определения $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{-x} + C_2'(x) x e^{-x} = 0, \\ C_1'(x)\left(e^{-x}\right)' + C_2'(x)\left(x e^{-x}\right)' = \dfrac{e^{-x}}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) e^{-x} + C_2'(x) x e^{-x} = 0, \\ C_1'(x)\left(-e^{-x}\right) + C_2'(x)\left(e^{-x} - x e^{-x}\right) = \dfrac{e^{-x}}{x}. \end{cases}$$

Решим полученную систему относительно неизвестных $C_1'(x)$ и $C_1'(x)$ по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-x} & x e^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - x e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-x} \cdot \left(e^{-x} - x e^{-x}\right) - x e^{-x} \cdot \left(-e^{-x}\right) = e^{-2x};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & x e^{-x} \\ \dfrac{e^{-x}}{x} & e^{-x} - x e^{-x} \end{vmatrix} = 0 \cdot \left(e^{-x} - x e^{-x}\right) - x e^{-x} \cdot \dfrac{e^{-x}}{x} = -e^{-2x};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \dfrac{e^{-x}}{x} \end{vmatrix} = e^{-x} \cdot \dfrac{e^{-x}}{x} - 0 \cdot \left(-e^{-x}\right) = \dfrac{e^{-2x}}{x}.$$

Получаем: $C_1'(x) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-e^{-2x}}{e^{-2x}} = -1$; $C_2'(x) = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{e^{-2x}/x}{e^{-2x}} = \dfrac{1}{x}$.

Интегрируем: $C_1(x) = \int (-1)\,dx = -x + C_1$; $C_2(x) = \int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C_2$.

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$y = \left(-x + C_1\right) e^{-x} + \left(\ln|x| + C_2\right) x e^{-x}$, или $y = e^{-x}\left(-x + x\ln|x| + C_1 + C_2 x\right)$.

Ответ: $y = e^{-x}\left(-x + x\ln|x| + C_1 + C_2 x\right)$, $C_1 = const$, $C_2 = const$.

№8. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:
$$\begin{cases} x' = 6x + 3y, \\ y' = -8x - 5y. \end{cases}$$

Решение.

Данная система связывает неизвестные функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ и их производные первого порядка.

Дифференцируем первое уравнение системы по t:
$$x'' = 6x' + 3y'.$$

Заменим y' в последнем равенстве его выражением из второго уравнения системы:
$$x'' = 6x' + 3 \cdot \left(-8x - 5y\right), \text{ или } x'' = 6x' - 24x - 15y.$$

Заменим в последнем равенстве y на выражение $y = \dfrac{x' - 6x}{3}$ из первого уравнения системы:
$$x'' = 6x' - 24x - 15 \cdot \frac{x' - 6x}{3}, \text{ или } x'' - x' - 6x = 0.$$

Решим последнее однородное ДУ, для чего составим характеристическое уравнение:
$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0;$$
$$D = 25 > 0; \quad \lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2} = -2, \quad \lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2} = 3.$$

Поскольку корни $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 3$ данного уравнения являются действительными и различными, то общее решение ДУ запишется в виде:
$$x = C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{3t}.$$

Дифференцируя это равенство по t, получим:
$$x' = -2C_1 \mathrm{e}^{-2t} + 3C_2 \mathrm{e}^{3t}.$$

Находим функцию y из уравнения $y = \dfrac{x' - 6x}{3}$:
$$y = \frac{-2C_1 \mathrm{e}^{-2t} + 3C_2 \mathrm{e}^{3t} - 6 \cdot \left(C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{3t}\right)}{3} = -\frac{8}{3} C_1 \mathrm{e}^{-2t} - C_2 \mathrm{e}^{3t}.$$

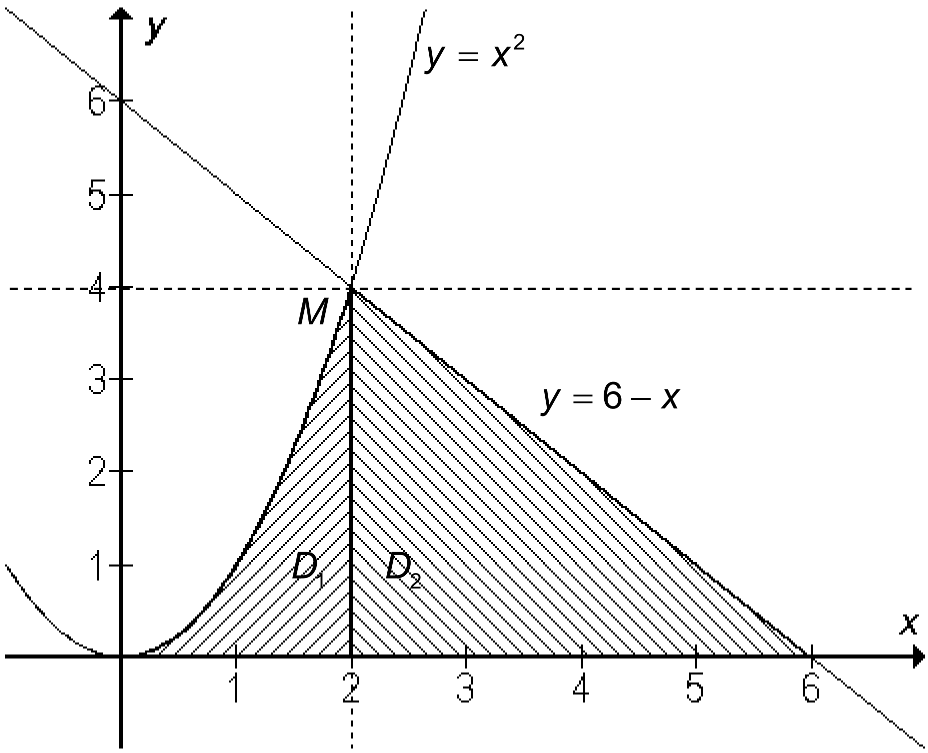
Ответ: $\begin{cases} x = C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{3t}, \\ y = -\dfrac{8}{3} C_1 \mathrm{e}^{-2t} - C_2 \mathrm{e}^{3t}, \end{cases} \quad C_1 = const, C_2 = const.$

VI. Решение практических заданий по теме «Интегральное исчисление функций нескольких переменных»

№1. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах $\int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x;y)dy + \int_2^6 dx \int_0^{6-x} f(x;y)dy$.

Решение.

Построим область интегрирования на плоскости Oxy. Область D_1, соответствующая первому повторному интегралу, расположена между прямыми $x=0$ и $x=2$, ограничена снизу прямой $y=0$, а сверху – параболой $y=x^2$. Область D_2, соответствующая второму интегралу, расположена между прямыми $x=2$ и $x=6$, ограничена снизу прямой $y=0$, а сверху – прямой $y=6-x$.



Учитывая, что прямая $y=6-x$ и правая ветвь параболы $y=x^2$ пересекаются в точке $M(2;4)$, получим, что область $D=D_1 \cup D_2$ расположена между прямыми $y=0$ и $y=4$, ограничена слева параболой $x=\sqrt{y}$, а справа – прямой $x=6-y$. Поэтому

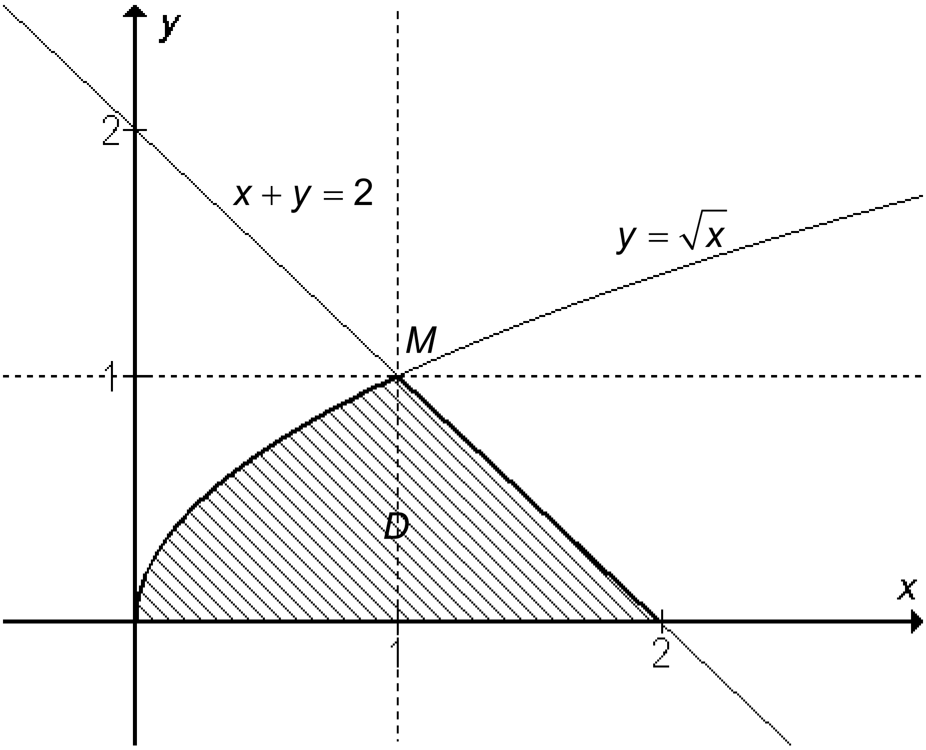
$$\int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x;y)dy + \int_2^6 dx \int_0^{6-x} f(x;y)dy = \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{6-y} f(x;y)dx.$$

Ответ: $\int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{6-y} f(x;y)dx$.

№2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \left(6x^2y-4xy^3\right)dxdy$, если область D ограничена линиями $y=0$, $y=\sqrt{x}$, $x+y=2$.

***Решение*.**

Построим область интегрирования на плоскости Oxy. Решая систему из уравнений заданных параболы и прямой, получим точку $M(1;1)$. Поскольку сведение данного двойного интеграла к повторным с внешним интегрированием по x потребует разбиения области D на части, выберем другой порядок интегрирования. Область D расположена между прямыми $y=0$ и $y=1$, ограничена слева параболой $x=y^2$, а справа – прямой $x=2-y$:



Следовательно,

$$\iint\limits_D \left(6x^2y-4xy^3\right)dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{2-y}\left(6x^2y-4xy^3\right)dx=\left[\int\limits_{y^2}^{2-y}\left(6x^2y-4xy^3\right)dx=\right.$$

$$=\left(2x^3y-2x^2y^3\right)\Big|_{y^2}^{2-y}=\left(2(2-y)^3y-2(2-y)^2y^3\right)-\left(2\left(y^2\right)^3y-2\left(y^2\right)^2y^3\right)=$$

$$=\left(2y\left(8-12y+6y^2-y^3\right)-2y^3\left(4-4y+y^2\right)\right)-\left(2y^6y-2y^4y^3\right)=$$

$$\left.=16y-24y^2+4y^3+6y^4-2y^5\right]=\int\limits_0^1\left(16y-24y^2+4y^3+6y^4-2y^5\right)dy=$$

$$=\left(\frac{16y^2}{2}-\frac{24y^3}{3}+\frac{4y^4}{4}+\frac{6y^5}{5}-\frac{2y^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=8-8+1+\frac{6}{5}-\frac{1}{3}=1\frac{13}{15}.$$

Ответ: $1\frac{13}{15}$.

№3. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L 6x^2y\,dl$, где L – отрезок прямой, соединяющей точки $A(-1;1)$ и $B(2;3)$.

Решение.

Составим уравнение прямой, проходящей через точки A и B:

$$\frac{x-(-1)}{2-(-1)}=\frac{y-1}{3-1} \Leftrightarrow \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2} \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3} \ (-1\le x\le 2).$$

Выразим элемент длины: $dl=\sqrt{1+(y')^2}dx=\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2}dx=\frac{\sqrt{13}}{3}dx$.

Тогда $\int\limits_L 6x^2y\,dl=\int\limits_{-1}^{2}6x^2\cdot\left(\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{13}}{3}dx=\frac{\sqrt{13}}{3}\int\limits_{-1}^{2}\left(4x^3+10x^2\right)dx=$

$$=\frac{\sqrt{13}}{3}\left(x^4+\frac{10x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\frac{\sqrt{13}}{3}\left(\left(16+\frac{80}{3}\right)-\left(1-\frac{10}{3}\right)\right)=\frac{\sqrt{13}}{3}\cdot 45=15\sqrt{13}.$$

Ответ: $15\sqrt{13}$.

№4. Вычислить криволинейные интегралы второго рода:

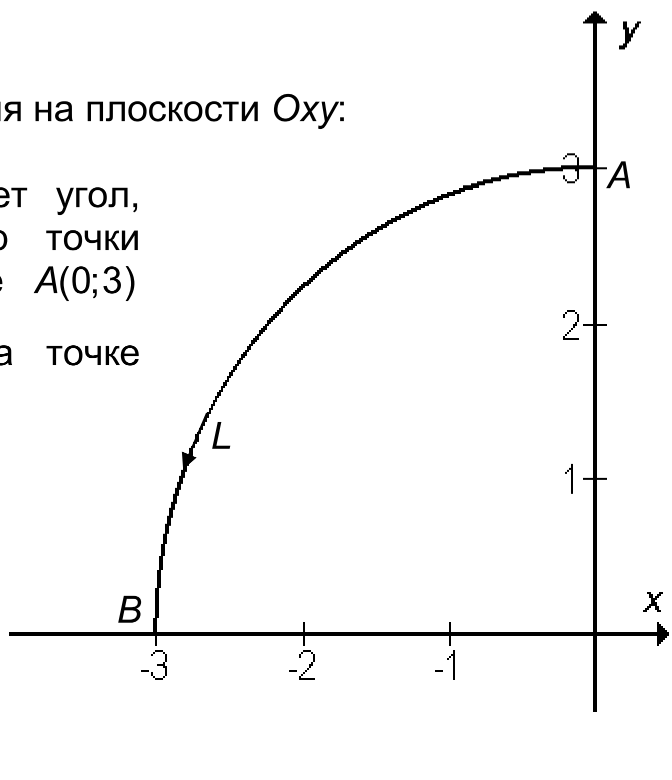
а) $\int\limits_L\left(x^2-2y\right)dx+y^2dy$, где L – дуга окружности $\begin{cases}x=3\cos t\\ y=3\sin t\end{cases}$ от точки $A(0;3)$ до точки $B(-3;0)$;

б) $\int\limits_L\left(3xy-y^2\right)dx+x^2dy$, где L – дуга параболы $y=\frac{2}{3}x^2$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(3;6)$.

Сделать чертеж.

Решение.

а) Построим кривую интегрирования на плоскости Oxy:



Поскольку параметр t определяет угол, который образует радиус-вектор точки окружности с осью Ox, то точке $A(0;3)$ соответствует значение $t=\frac{\pi}{2}$, а точке $B(-3;0)$ – значение $t=\pi$.

Так как $dx=\left(3\cos t\right)'dt=-3\sin t\,dt$, $dy=\left(3\sin t\right)'dt=3\cos t\,dt$, то получим:

$$\int\limits_L\left(x^2-2y\right)dx+y^2dy=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\left(\left((3\cos t)^2-2\cdot 3\sin t\right)\cdot(-3\sin t)+\left(3\sin t\right)^2\cdot 3\cos t\right)dt=$$

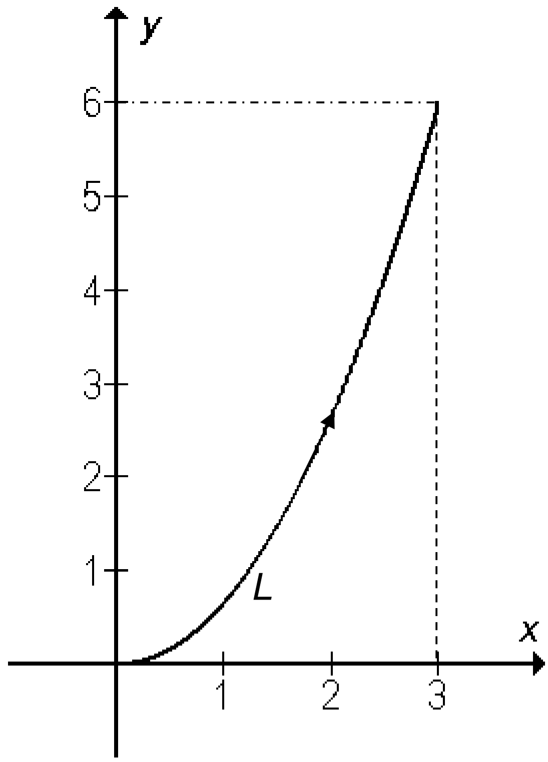
$$=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\left(-27\cos^2 t\cdot\sin t+18\sin^2 t+27\sin^2 t\cdot\cos t\right)dt=-27\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos^2 t\cdot\sin t\,dt+$$

$$+18\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\sin^2 t\,dt+27\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\sin^2 t\cdot\cos t\,dt=27\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\left(\cos t\right)^2 d(\cos t)+18\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt+$$

$$+27\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\left(\sin t\right)^2 d(\sin t)=9\cos^3 t\Big|_{\pi/2}^{\pi}+9\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}+9\sin^3 t\Big|_{\pi/2}^{\pi}=-9+\frac{9\pi}{2}-9=$$

$$=\frac{9\pi}{2}-18.$$

б) Построим кривую интегрирования на плоскости Oxy:



Поскольку $y=\dfrac{2}{3}x^2$, где $0\le x\le 3$, причём $dy=\left(\dfrac{2}{3}x^2\right)'dx=\dfrac{4}{3}x\,dx$, то

$$\int\limits_L\left(3xy-y^2\right)dx+x^2dy=\int\limits_0^3\left(3x\cdot\left(\frac{2}{3}x^2\right)-\left(\frac{2}{3}x^2\right)^2+x^2\cdot\left(\frac{4}{3}x\right)\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^3\left(\frac{10}{3}x^3-\frac{4}{9}x^4\right)dx=\left(\frac{5}{6}x^4-\frac{4}{45}x^5\right)\Bigg|_0^3=\frac{135}{2}-\frac{108}{5}=45{,}9.$$

Ответ: а) $\dfrac{9\pi}{2}-18$; б) $45{,}9$.

Литература

1. Бугров, Я. С. Высшая математика: Учеб. для вузов: В 3 т. Т. 2: Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. − М.: Дрофа, 2004. − 512 с.

2. Бугров, Я. С. Высшая математика: Учеб. для вузов: В 3 т. Т. 3: Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. − М.: Дрофа, 2004. − 512 с.

3. Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пособие. В 4 ч. Ч. 2. Комплексные числа. Неопределённые и определённые интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть ; под общ. ред. А. П. Рябушко. − Мн.: Выш. шк., 2009. − 396 с.

4. Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пособие. В 4 ч. Ч. 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И.Е. Юруть ; под общ. ред. А. П. Рябушко. − Мн.: Выш. шк., 2009. − 367 с.

5. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. − М.: Астрель: АСТ, 2005. − 991 с.

6. Гусак, А. А. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. − Мн.: ТетраСистемс, 2000. − 640 с.

7. Математика для инженеров: учебник. В 2 т. Т. 1 / С. А. Минюк, Н. С. Берёзкина, А. В. Метельский ; под науч. ред. Н. А. Микулика. – Мн.: Элайда, 2006. – 560 с.

8. Математика для инженеров: учебник. В 2 т. Т. 2 / С. А. Минюк, Н. С. Берёзкина, М. Н. Гончарова, А. В. Метельский; под науч. ред. Н. А. Микулика. – Мн.: Элайда, 2006. – 496 с.

9. Лудерер, Б. Высшая математика в экономике, технике, информатике: справочник: пер. с нем. / Б. Лудерер, Ф. Наллау, К. Феттерс ; под ред. А. В. Самусенко, В .В. Казаченок. − Мн.: Выш. шк., 2005. − 279 с.

10. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. − М.: Айрис-пресс, 2011. − 608 с.

Содержание

Учебное издание

Составители:
Юхимук Михаил Михайлович,
Юхимук Татьяна Юрьевна,
Сукасян Татьяна Михайловна,
Махнист Леонид Петрович

Интегральное исчисление функций одной переменной

Дифференциальные уравнения

Интегральное исчисление функций нескольких переменных

Методические рекомендации и варианты заданий аттестационных работ по курсу «Математика» для студентов специальности «Промышленное и гражданское строительство» дневной формы обучения

Ответственный за выпуск: Юхимук М.М.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная вёрстка: Юхимук Т.Ю.
Корректор: Юхимук М.М.

Подписано в печать 28.12.2018 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага «Performer». Гарнитура «Arial». Усл. печ. л. 2,56. Уч. изд. л 2,75. Заказ № 1598. Тираж 23 экз. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

224017, г. Брест, ул. Московская, 267.