УДК 531

И.Н. ЧОПЧИЦ, Н.И. ЧОПЧИЦ

ПРИМЕНЕНИЕ ИГОЛЬЧАТЫХ ВАРИАЦИЙ В КУРСЕ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Игольчатые вариации широко применяются при доказательстве теорем в теории оптимального управления [1, с. 131]. Адаптированные варианты соответствующих теорем как в плане их доказательства, так и в плане их применения в различных разделах курса физики, вполне доступны для студентов технических вузов. Пусть $\int_a^b f(x)dx = c$, где c – постоянная. Тогда $\int_a^b f^2(x)dx = c$ достигает минимума при $f(x) = \frac{c}{b-a}$, равного $\frac{c^2}{b-a}$. Доказательство основано на очевидной идее, показанной на рисунке 1:

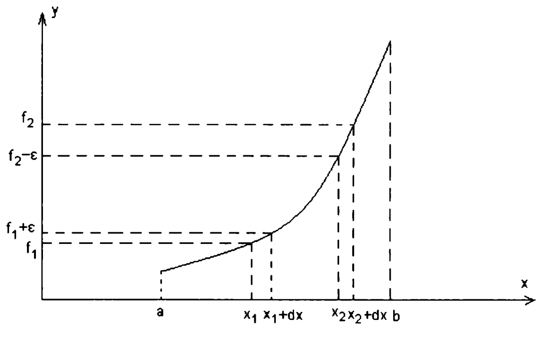

Рисунок 1

Очевидно, замена значения f_1 функции $f(x)$ на интервале (x_1, x_1+dx) на значение $f_1+\varepsilon$, и замена значения функции f_2 на интервале (x_2, x_2+dx) на $f_2-\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ не изменяет значение $\int_a^b f(x)dx$, но значение интеграла $\int_a^b f^2(x)dx$ при этом изменится на $\left[(f_2-\varepsilon)^2 + (f_1+\varepsilon)^2 - f_1^2 - f_2^2\right]dx = 2(f_1 - f_2)\varepsilon dx < 0$. Осуществляя последовательные игольчатые вариации, приходим к значению $f(x) = \frac{c}{b-a}$. При этом, как легко видеть, любая игольчатая вариация ведет теперь к возрастанию $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \frac{c^2}{b-a}$ ибо $\left(\frac{c}{b-a}+\varepsilon\right)^2+\left(\frac{c}{b-a}-\varepsilon\right)^2-\frac{2\tilde{n}^2}{(b-a)^2}=\varepsilon^2>0$, причем второй порядок малости по ε доказывает обычный характер минимума. Рассмотрим несколько примеров. Пусть $\int\limits_{t_1}^{t_2} Vdt = s$, то есть частица за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ проходит заданный путь s. Тогда $\int\limits_{t_1}^{t_2} V^2dt$ минимален при $V=\frac{s}{\Delta t}$, что фактически эквивалентно принципу наименьшего действия для свободной частицы. Другой, менее очевидный пример: пусть $\int\limits_{t_1}^{t_2} \grave{a}_{\delta}dt = V_{2x}-V_{1x}=\Delta V_x$, где a_x, V_x – проекции ускорения и скорости, соответственно. Тогда минимум интеграла $\int\limits_{t_1}^{t_2} \grave{a}_{\delta}^2dt=\frac{1}{m}\int\limits_{t_1}^{t_2} F_xdV_x$ при $a_x=\frac{\Delta V_x}{\Delta t}$ представляет собой $\frac{F(V_2-V_1)}{m}$, т.е. приращение мощности при единичной массе.

Возможны и экзотические случаи. Очевидно, интеграл $\int\frac{dx}{V_x}$ представляет время движения на заданном отрезке оси x. Тогда при $V_x=const$ минимизируется интеграл $\int\frac{dx}{V_{\delta}^2}=\int\frac{dt}{V_x}$, причем в традиционной механике выражение $\frac{dt}{V_x}$ не рассматривается. Величина $\frac{1}{V_x}$, которую можно назвать медленностью, однако, как и ее обобщение на трехмерный случай, являющееся так называемым ламеллярным вектором, помогает устно решать задачи на средние скорости, если движение задается этапами пути. Поэтому существуют задачи, в которых выражение рассматриваемого типа имеют право на жизнь. В качестве примера из электричества рассмотрим широко известную задачу о разряде конденсатора через постоянный резистор при принудительно регулируемой емкости и требовании, чтобы система имела максимальный механический КПД, что автоматически предполагает минимум тепловыделения. Имеем $\int\limits_{0}^{\tau} Idt = C_0U_0$, где C_0, U_0 – начальные значения емкости и напряжения, τ – время разряда, при этом интеграл $R\int\limits_{0}^{\tau} I^2dt$ должен быть минимален. Тогда в силу того, что $I=\frac{C_0U_0}{\tau}$ имеем следующий закон изменения емкости $C = C_0 \frac{\tau - t}{R}$, при котором $Q = \frac{RC_0^2 U_0^2}{\tau^2}$. Упомянем также известную задачу, часто трактуемую как парадокс о равномерном распределении тока по площади поперечного сечения однородного проводника. Полагая граничные условия стандартными для такого рода случаев, следует остановиться на вопросе, почему взаимное притяжение элементов тока не приводит к неравномерному распределению плотности тока по сечению.

Ответ в свете рассмотренных выше соотношений элементарен. Если $\int j ds = I$, то выражение $\rho l \int j^2 ds$, где ρ – удельное сопротивление, l – длина проводника, дает мощность тепловыделения в объеме проводника и при $j = \frac{I}{s}$ обеспечивает минимум этой мощности (пределы в интегралах не поставлены по очевидным соображениям). В качестве еще одного примера упомянем классическую задачу моделирования генератора постоянного тока. По горизонтальным рельсам с погонным сопротивлением ρ_0 для каждого рельса, замкнутыми на резистор с сопротивлением R, может скользить без трения стержень длиной l, равной расстоянию между рельсами, и сопротивлением $R_{ст}$ стержня. Вся система находится в вертикальном магнитном поле с индукцией B. Пусть за время τ в цепи прошел заряд q. Требуется найти закон изменения внешней силы F, при котором тепловыделение в стержне, имитирующем внутреннее сопротивление генератора, минимально.

Поскольку $I = \frac{Bl\dot{x}}{R + R_{ст} + 2\rho_0 x}$ и согласно теореме должно быть $I = \frac{q}{\tau}$, то закон движения имеет вид $x = \left(x_0 + \frac{R + R_{ст}}{2\rho_0} \right) \exp\left(\frac{2q\rho_0 t}{Bl\tau} \right) - \frac{R + R_{ст}}{2\rho_0}$ (x – текущая координата стержня), а выражение для силы F находится из второго закона Ньютона (m – масса стержня): $F_x = m\ddot{x} + \frac{B^2 l^2 \dot{x}}{R + R_{ст} + 2\rho_0 x}$.

В заключение заметим, что множество конструкций такого рода возникает в классической термодинамике, однако, большинство из них находится вне рамок традиционного использования. Рассмотрим одно из немногих исключений. Каждому процессу $P=P(V,T)$ можно поставить в соответствие процесс $P'=P'(V,T)$, где $P'=\alpha P^2$, α – постоянная с размерностью обратного давления. Тогда, если рассматривать всевозможные процессы $P=P(V,T)$, для которых работа при изменении объема от V_1 до V_2 постоянна, то в соответственном процессе работа максимальна при постоянном давлении P. На рисунке 2 показана практическая реализация подобной ситуации.

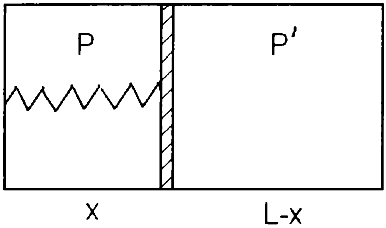

Рисунок 2

Предполагая, что пружина сжата, имеем следующую систему уравнений, описывающих ситуацию

$$PS+\kappa(l_0-x)=\alpha P^2$$

$$PSx=\nu_1 RT_1$$

$$\alpha P^2 (L-x)=\nu_2 RT_2,$$

где l_0 – длина недеформированной пружины, κ – коэффициент упругости.

Полагая для простоты $\nu_1=\nu_2=1$ *моль*, $S=1м^2$, получаем следующую систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{RT_1}{x}+k(l_0-x)=\frac{RT_2}{L-x} \\ &\frac{\alpha R^2 T_1^2}{x^2}(L-x)=RT_2 \end{aligned}\right\}$$

Задавая температуру T_1, можно найти T_2 и x, обеспечивающие необходимое состояние давлений. Аналогичные соображения могут быть применены к интегралам типа $\int c\,dT$ и $\int c^2 dT$, где T – термодинамическая температура, c – теплоемкость. В этой связи можно высказать метафизическое утверждение о том, что если конструкции (функционалы) минимальны в некоторых процессах, то они должны играть при описании этих процессов важную роль, даже если в традиционной парадигме они не присутствуют. В качестве примера упомянем известный интеграл движения в центральном поле, который обычно рассматривается как пример сохраняющейся, но бесполезной величины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М. : Наука, 1968. – 323 с.