УДК 531

И.Н. ЧОПЧИЦ, Н.И. ЧОПЧИЦ
Брест, БрГТУ

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ КАВАГУТИ В ЗАДАЧАХ СГЛАЖИВАНИЯ

В физике помимо пространств традиционных типов: евклидова (псевдоевклидова), риманова (псевдориманова), пространств аффинной связности, Финслера, Картана, некоторое применение находят и так называемые пространства Кавагути, в которых мера области D на m-мерной поверхности в n-мерном пространстве определяется m-кратным интегралом

$$S_m = \int_D \dots \int F(x, \frac{\partial x}{\partial u}) du_1 \wedge du_2 \dots \wedge du^m, \quad 1 \le m < n-1$$

где $x^i = x^i(u^1, u^2, \dots u^m)$ задает поверхность, а F – заданная дифференцируемая функция от x^i и $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}(\alpha = 1,2,\dots m)$ первой степени однородности по $\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$ для каждого α. Это пространство называют также пространством площадей. Очевидно, это пространство сводится к финслерову при $m = 1$ и к картанову при $m = n - 1$, однако в нем не всегда можно алгебраически построить метрический тензор g_{ij} по функции F и ее производным, кроме случая, когда ранг матрицы g_{ij} меньше n; В то же время в пространствах Финслера и Картана это возможно всегда. Пространства Кавагути являются удобным инструментом для изучения движения спина, поскольку это движение можно описывать простым m-вектором(в частных случаях, простым бивектором).Из стандартных физических пространств пространствами Кавагути являются пространство термодинамических параметров: на PV-диаграммах, например, площадь имеет смысл работы, а также фазовое пространство, в котором площадь имеет смысл действия. В настоящей работе рассмотрен совсем иной аспект применения пространств Кавагути, связанный со сглаживанием экспериментальных данных, для линеаризованных зависимостей различных физических величин. Одним из наиболее распространенных методов сглаживания является метод наименьших квадратов (МНК). Обычно он применятся без ссылок на геометрический тип конфигурационного пространства характеристик, связанных линейной или нелинейной зависимостью, даже если эти характеристики сделаны равноразмерными или безразмерными. Во многих случаях, однако, имеет смысл наделить это пространство аффинной структурой, что позволяет производить преобразование координат и, как следствие, отыскивать комбинации исходных характеристик, которые не зависят статистически друг от друга. При этом в пространстве исходных характеристик (x,y) индуцируется евклидова метрика и минимизируется не сумма $\sum(ax_i + b - y_i)^2$, а величина $\frac{\sum(ax_i + b - y_i)^2}{1+a^2}$.

С другой стороны, наряду с неоспоримыми и широко известными достоинствами МНК, он обладает и рядом недостатков, главным из которых является преувеличение вклада отклонений при малых значениях x, а также чувствительность к часто вынужденной неравноточности измеренных значений x и y. Эти недостатки в значительной мере устраняются процедурой введения весов, но она часто является достаточно произвольной. Альтернативы МНК, свободные от указанных недостатков, например метод наименьших модулей, вследствие неаналитичности требует больших вычислительных затрат. Идея метода сглаживания на основе пространства Кавагути показана на рисунке 1:

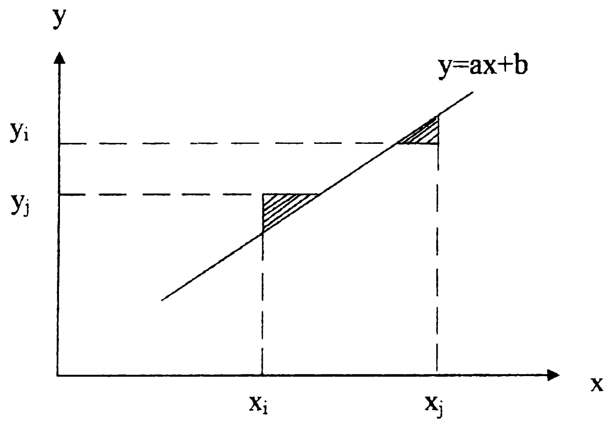

Рисунок 1

Если пространство (x,y) наделено структурой пространства Кавагути, то величина $\dfrac{\sum(y_i - ax_i - b)^2}{a}$ представляет собой сумму площадей показанных на рисунке треугольников, играющих в этом методе роль отклонений экспериментальных точек (x_i, y_i) от зависимости $y = ax + b$. Система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

после несложных преобразований принимает вид:

$$\begin{cases} b^2 - a^2 < x^2 > -2b < y > + < y^2 > = 0 \\ a < x > + b - < y > = 0 \end{cases},$$

где $< x >= \frac{\sum x_i}{n}; < y >= \frac{\sum y_i}{n}; < x^2 >= \frac{\sum x_i^2}{n}; < y^2 >= \frac{\sum y_i^2}{n}$; n – количество экспериментальных точек.

Решая систему находим:

$$a = \sqrt{\frac{< y^2 > - < y >^2}{< x^2 > - < x >^2}}, \quad b =< y > -a < x > .$$

Проведенные численные эксперименты с линейными зависимостями «испорченными» случайными погрешностями с различными распределениями (нормальным, равномерным, log-нормальным и т. д.) показали меньшую чувствительность метода к погрешностям и характеру их распределения. Остается, правда, открытым вопрос о доверительных интервалах для a и b в практике статистической обработки, однако прогрессирующие в последнее время скептическое отношение к парадигме фишеровской статистики позволяет этот вопрос оставить без внимания. Заметим, наконец, что для PV-диаграмм рассмотренный метод имеет отношение к экспериментальному изучению политропных процессов, а для фазовых пространств – к процессам управления движением.