Ю. В. Кожокарь, А. А. Крощенко
Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

РЕШЕНИЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДУФФИНГА РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

Перед нами была поставлена задача решения краевой непериодической задачи Дуффинга вида (1).

(1) $y''(x)+\alpha y'(x)+\beta y(x)+\gamma(y(x))^n=F(x)$, $\gamma\neq 0$, с краевыми условиями 1-го или 2-го рода:

$$\begin{cases} y(a)=A \\ y(b)=B \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=A \\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=B \end{cases}$$

Эксперимент состоял в решении данной задачи некоторыми одношаговыми и многошаговыми методами неполного/полного прогноза при произвольных начальных приближениях.

В качестве тестового примера мы использовали задачу (2):

$$y''(x)+y'(x)+y(x)+(y(x))^3=e^{-x}+e^{-3x}, \quad 0\le x\le 2, \quad \begin{cases} y(0)=1 \\ y(2)=e^{-2} \end{cases} \qquad (2)$$

Для аппроксимации 1-й и 2-й производных использовался метод неопределенных коэффициентов для многоточечной аппроксимации производных.

В качестве точек аппроксимации были выбраны корни полиномов Чебышева. Из системы (3) находятся коэффициенты аппроксимации:

$$\begin{cases} c_0+c_1+\ldots+c_n=0, \\ c_0x_0+c_1x_1+\ldots+c_nx_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0x_0^{k-1}+c_1x_1^{k-1}+\ldots+c_nx_n^{k-1}=0, \\ c_0x_0^{k}+c_1x_1^{k}+\ldots+c_nx_n^{k}=k!, \\ c_0x_0^{k+1}+c_1x_1^{k+1}+\ldots+c_nx_n^{k+1}=(k+1)!x_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0x_0^{n}+c_1x_1^{n}+\ldots+c_nx_n^{n}=n(n-1)\ldots(n-k+1)x_i^{n-k}. \end{cases} \qquad (3)$$

Полученные коэффициенты используются для конструирования производных по общей формуле: $y^{(k)}(x_i)=\sum_{i=0}^{n}c_iy_i$.

При подстановке полученных аппроксимаций производных в общую задачу (1), получается нелинейная система вида: $\sum_{j=0}^{n}y_j(c_j^2+\alpha c_j^1)+\beta y_i+\gamma y_i^n=F(x_i)$, $i=\overline{1,n-1}$, где c_j^1 и c_j^2 - это коэффициенты аппроксимации соответствующих 1-й и 2-й производных. Недостающих два условия находятся из заданных краевых условий.

Решение полученной нелинейной системы проводилось по регуляризованной схеме вида:

1. Решение СЛАУ относительно Δx_n:

$$\left(\alpha\beta_n^2\|f(x_n)\|^2 E + \overline{f'(x_n)}f'(x_n)\right)\Delta x_n = -\overline{f'(x_n)}f(x_n),\ n = 0,1,2,\ldots,\beta_0 \in [10^{-3},10^{-1}],\alpha << 1$$

2. Внесение поправки в вектор x_n: $x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n$, n=0,1,2,…

3. Проверка условия: если $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon$, где ε - малая величина (параметр останова), то конец просчётов, иначе переход на шаг 4.

4. Определение новой шаговой длины:

$$\beta_{n+1} = \min\left(1,\ \frac{\gamma_n\|f(x_n)\|}{\beta_n\left(\|f(x_n + \Delta x_n)\|\right)}\right);\ \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n\|f(x_n)\|\|f(x_{n+1} + \Delta x_{n+1})\|}{\|f(x_n + \Delta x_n)\|\|f(x_{n+2})\|};$$

$$\gamma_0 = \frac{\beta_0^2\|f(x_0 + \Delta x_0)\|}{\|f(x_1)\|}$$

и переход на 1.

Затем производится восстановление сеточного решения полиномами Чебышева 1-го рода по формулам:

$$f(x) \approx P_m(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} c_k T_k\left(\frac{2x - b - a}{b - a}\right),\ c_k = \frac{2}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\tilde{f}(x_j)T_k\left(\frac{2x_j - b - a}{b - a}\right),\ k = \overline{0,m},\ m \le n$$

, где в качестве x_j выбирались корни полиномов Чебышева, а $\tilde{f}(x_j)$ $\left(j = \overline{1,n-1}\right)$ - сеточное решение.

На основании численного эксперимента можно сделать ряд выводов.

Установлено, что непериодическая задача типа Дуффинга весьма чувствительна к начальным приближениям. Чем вероятнее, что область начальных приближений входит в область значений функции, тем лучше и быстрее сходится тот или иной метод. Кроме того, в связи с достаточно плотной сеткой значений x_i $\left(i = \overline{1,n-1}\right)$ уже на этапе нахождения коэффициентов наблюдаются некоторые проблемы, связанные с достаточно большими по величине коэффициентами. Соответственно, при составлении нормы, она нередко становится очень большой.

Замечено, что многошаговые методы как полного, так и неполного прогноза «работают» хуже одношаговых.

Среди рассмотренных методов особенно хочется выделить одношаговый метод Ермакова – Калиткина.