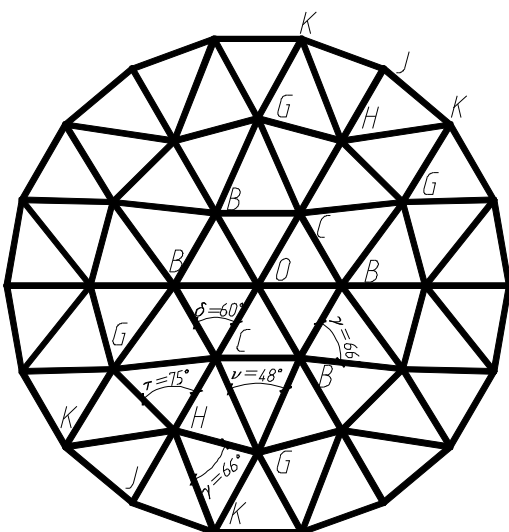


ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ И ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ В РАДИАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ В СТЕРЖНЯХ СЕТЧАТОГО КУПОЛА

Драган В. И., Глушко К. К.

Введение. Одним из видов потери устойчивости сетчатых куполов является потеря устойчивости положения отдельных фрагментов – стержневых многогранников. Необходимость рассмотрения местного изменения формы сетчатого купола при действии узловой нагрузки обусловлена тем, что статический расчёт и подбор сечений стержней всей конструкции был произведён без учёта этого явления. При «прощёлкивании» отдельных фрагментов наступает изменение расчётной схемы, поведение же купола с дефектами формы в изначальной расчётной схеме не рассматривалось. Таким образом, при местной потере устойчивости происходит изменение напряжённо-деформированного состояния стержней конструкции. Потеря местной устойчивости сетчатого купола является недопустимым явлением, поскольку нарушает целостность конструкции покрытия и герметичность кровли. Вопрос о потере местной устойчивости сетчатого купола может возникнуть при его реконструкции, в случае изменения узловых нагрузок наступает необходимость выявления скрытых запасов несущей способности.

Общая часть. Представленный ниже метод определения поперечных сил в стержнях следует применять при соблюдении следующих условий: общая устойчивость сетчатого купола обеспечена; вертикальные перемещения концов отдельных стержней купола принимаются перпендикулярными к оси стержня; длины рассматриваемых стержней значительно не отличаются и могут быть приняты одинаковыми, изгибные и погонные жёсткости разных стержней одинаковы, местная потеря устойчивости купола происходит в упругой стадии, внешняя нагрузка представляется узловой, распределённая нагрузка на поверхность купола является равномерно распределённой, действие крутящих моментов и изгибающих моментов в касательной плоскости к стержневой оболочке не рассматривается за малостью, рассматривается плоская форма изгиба стержня, узловой элемент сетчатой конструкции можно считать абсолютно твёрдым телом исчезающе малого размера. На рисунке 1 показан рассматриваемый трёхъярусный фрагмент сетчатого купола.



момента и изгибающих моментов в касательной плоскости к стержневой оболочке не рассматривается за малостью, рассматривается плоская форма изгиба стержня, узловой элемент сетчатой конструкции можно считать абсолютно твёрдым телом исчезающе малого размера. На рисунке 1 показан рассматриваемый трёхъярусный фрагмент сетчатого купола.

**Рисунок 1 – Рассматриваемый фрагмент
сетчатого купола**

Необходимо в первую очередь рассмотреть действие изгибающих моментов в радиальной плоскости в характерных стержнях рассматриваемого фрагмента: в стержнях OC , BC , CH , CG , HJ , HK . На рисунке 2 показаны слагаемые эпюры от отдельных вертикальных смещений торцов этих стержней и углов поворота их торцевых сечений.

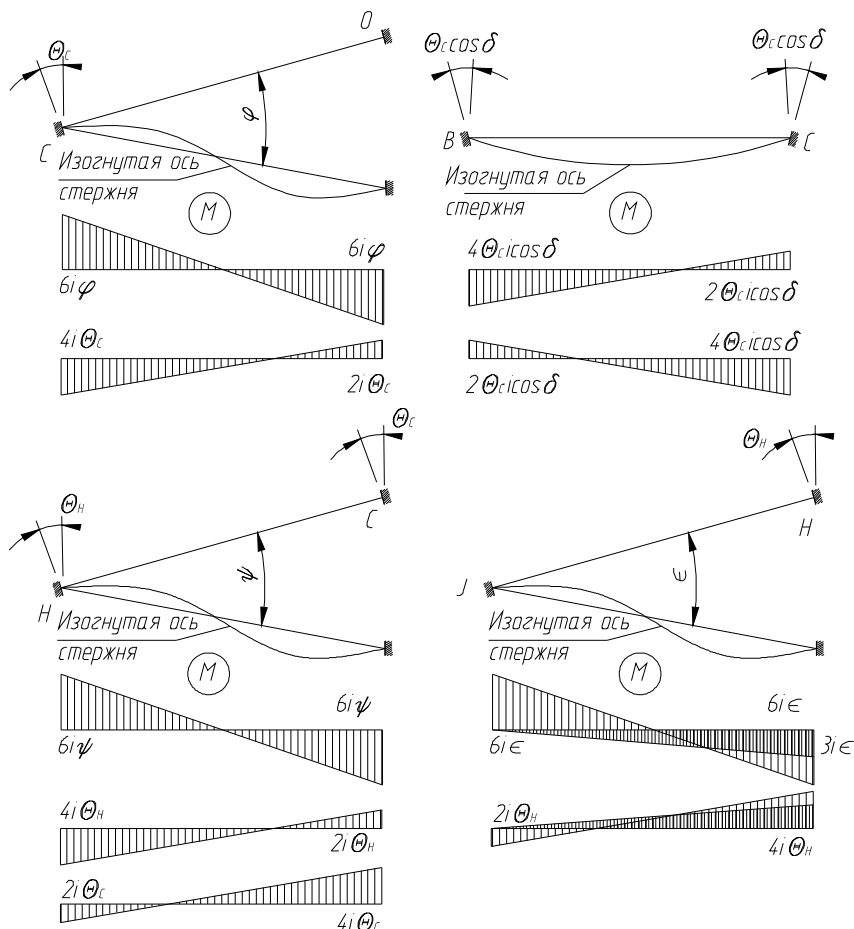


Рисунок 2 – Эпюры моментов при вертикальных смещениях торцов стержней и поворотах их торцевых сечений

Суммируя эпюры моментов, можно получить систему уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \Sigma M_O^{CO} = 6ibc - 2ib\Theta_c \\ \Sigma M_C^{CO} = -6ibc + 4ib\Theta_c \end{cases} \quad (1)$$

где M_O^{CO}, M_C^{CO} - изгибающие моменты в точках C и O стержня CO , $bc = j$ - угол поворота хорды стержня, i - погонная жёсткость стержня, $\Theta_c = \frac{q_c}{b}$ - приведенный угол поворота торцевого сечения стержня CO вблизи стержня C - величина угла поворота торцевого сечения вблизи узла C , отнесённого к углу наклона оси стержня CO к горизонтальной плоскости. Величина c показывает долю угла поворота хорды стержня j от угла между осью стержня и горизонтальной плоскостью b в проектном положении. Полагая, что стержень CH расположен в одной плоскости со стержнем CO , можно вычислить действующие в

нѐм изгибающие моменты. Схема деформирования стержня CH и эпюры моментов от отдельных перемещений показаны на рисунке 2. Суммируя эпюры, можно выразить величины действующих моментов на торцах стержня CH :

$$\begin{cases} \Sigma M_C^{CH} = 6iy - 4iq_C - 2iq_H \\ \Sigma M_H^{CH} = -6iy + 2iq_C + 4iq_H \end{cases} \quad (2)$$

Окончательно выражая величины изгибающих моментов, можно ввести обозначение $h = \frac{y}{3b}$, где $3b$ - угол наклона стержня CH к горизонтальной плоскости в недеформированной схеме. Величина h здесь имеет тот же физический смысл, что и s применительно к стержню CO . С учётом принятых обозначений формулы (2) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} \Sigma M_C^{CH} = 18ibh - 4ib\Theta_C - 2ib\Theta_H \\ \Sigma M_H^{CH} = -18ibh + 2ib\Theta_C + 4ib\Theta_H \end{cases} \quad (3)$$

Точно таким же образом можно получить выражения для вычисления изгибающих моментов в стержне CG , учитывая, что угол поворота торца C стержня CG можно выразить как $\Theta_G = \Theta_H \cos(0.5n)$. Здесь $g = \angle GCH$ (см. рисунок 2). Выражения для моментов можно получить в виде, подобно уравнениям (3):

$$\begin{cases} \Sigma M_C^{CG} = 18ibh - 4ib\Theta_C \cos g - 2ib\Theta_H \cos \frac{u}{2} \\ \Sigma M_G^{CG} = -18ibh + 2ib\Theta_C \cos g + 4ib\Theta_H \cos \frac{u}{2} \end{cases} \quad (4)$$

В стержне BC также возникают моменты при повороте торцов B и C , вызванные поворотом опоры C (B), перемещение хорды будет происходить параллельно самой себе, так как точки B и C при осесимметричной нагрузке получают одинаковые перемещения. На рисунке 2 показаны эпюры моментов в стержне BC при повороте каждого из торцов. Суммируя эпюры моментов (см. рисунок 2), можно получить систему уравнений следующего вида для стержня BC :

$$\begin{cases} \Sigma M_B^{BC} = 4iq_C \cos d - 2iq_C \cos d = 2ib\Theta_C \cos d \\ \Sigma M_C^{BC} = 4iq_C \cos d - 2iq_C \cos d = 2ib\Theta_C \cos d \end{cases} \quad (5)$$

где $\cos d$ - косинус угла $\angle BCO$.

Необходимо рассмотреть влияние углов поворота концевых сечений стержней третьего яруса на величины углов поворота концевых сечений стержней второго яруса. Углы поворота концов стержней в третьем кольцевом сечении в радиальной плоскости сетчатого купола в общем случае не нулевые, с другой же стороны не равны углам поворота при шарнирном опирании. Следует рассмотреть оба случая, считая стержни типа HJ и HK заделанными жѐстко в одном случае и опѐртыми шарнирно в другом. При этом полагается, что при действии осесимметричной нагрузки все узлы, находящиеся в одном и том же

кольцевом сечении сетчатого купола получают одинаковые вертикальные перемещения. На рисунке 2 изображены эпюры моментов в стержнях типа HJ . Изгибающие моменты в стержне HJ в точке H при жёстком и шарнирном опирании в точке J можно выразить следующим образом, учитывая, что угол наклона этого стержня к горизонту $5b$:

$$\begin{cases} \Sigma M_{H,Ж}^{HJ} = 6ie - 4ib\Theta_H = 30ibx - 4ib\Theta_H \\ \Sigma M_{H,Ш}^{HJ} = 3ie - 3ib\Theta_H = 15ibx - 3ib\Theta_H \end{cases} \quad (6)$$

Выражения для изгибающих моментов в стержне KH можно найти подобным образом, проецируя угол поворота узла H в радиальной плоскости, проходящей через центр описанной сферы и точки H и J на радиальную плоскость, проходящую через точки K , H и центр описанной сферы:

$$\begin{cases} \Sigma M_{H,Ж}^{HK} = 6ie - 4ib\Theta_H \cos g_1 = 30ibx - 4ib\Theta_H \cos g_1 \\ \Sigma M_{H,Ш}^{HK} = 3ie - 3ib\Theta_H \cos g_1 = 15ibx - 3ib\Theta_H \cos g_1 \end{cases} \quad (7)$$

где g_1 - угол между стержнями KHJ .

Как отмечалось выше, принимая равенство углов поворота в радиальной плоскости и вертикальных перемещений во всех узлах во втором кольцевом сечении, можно определить действующие изгибающие моменты в стержнях типа GH . Выражения для определения изгибающих моментов в стержне GH можно представить в виде следующей системы:

$$\begin{cases} M_H^{GH} = 4iq_H \cos t_1 - 2iq_H \cos t_1 = 2ib\Theta_H \cos t_1 \\ M_H^{GH} = 4iq_H \cos t_1 - 2iq_H \cos t_1 = 2ib\Theta_H \cos t_1 \end{cases} \quad (8)$$

Здесь угол t_1 - половина угла GHG .

При отсутствии сосредоточенных моментов в узле H , можно составить уравнение равновесия этого узла для вычисления приведенного угла поворота Θ_H :

$$\Sigma M_H^{HJ} + 2\cos g \Sigma M_H^{HK} + \Sigma M_H^{CH} + 2\cos g \Sigma M_H^{GH} = 0 \quad (9)$$

Подставляя выше изложенные выражения в уравнение (9), можно получить величину приведенного угла поворота Θ_H для случая шарнирного и жёсткого защемления нижних концов стержней третьего яруса:

$$\begin{cases} \Theta_{H,Ж} = \frac{15x(1 + 2\cos g) + 9h}{2(2 + \cos^2 t - 2\cos^2 g)} - \frac{\Theta_C}{2(2 + \cos^2 t - 2\cos^2 g)} \\ \Theta_{H,Ш} = \frac{15x(1 + 2\cos g) + 18h}{4(1 + \cos^2 t) + 3(1 + 2\cos^2 g)} - \frac{2\Theta_C}{4(1 + \cos^2 t) + 3(1 + 2\cos^2 g)} \end{cases} \quad (10)$$

Теперь, зная величины всех действующих моментов в узле C и учитывая, что сосредоточенные моменты в этом узле отсутствуют, можно составить уравнение равновесия узла, приравнивая суммы моментов слева и справа от него для выражения угла поворота узла Cq_C относительно переменных s и h

$$M_C^{CO} + 2M_C^{BC} \cos d = M_C^{CH} + 2M_C^{CG} \cos g \quad (11)$$

Подставляя в уравнение (11) выражения для определения моментов на каждом из концов стержней и приводя подобные, можно определить значения приведенного угла поворота Θ_C , которые будут соответствовать шарнирному опиранию стержней третьего яруса или их жёсткому закреплению:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_{C,ж}^{III} = \frac{18h(1+2\cos g) - \frac{15x(1+2\cos g) + 9h}{2 + \cos^2 t - 2\cos^2 g} (1 + 2\cos g \cos \frac{u}{2}) + 6c}{2(3 + 4\cos^2 t + 2\cos^2 g) - \frac{1 + 2\cos g \cos \frac{u}{2}}{2 + \cos^2 t - 2\cos^2 g}} \\ \Theta_{C,ш}^{III} = \frac{1}{2} \frac{9h(1+2\cos g) - \frac{1}{2} \cdot \frac{15x(1+2\cos g) + 18h}{2 + 2\cos^2 t + \cos^2 g} (1 + 2\cos g \cos \frac{u}{2}) + 3c}{2 + \cos^2 d + 2\cos^2 g - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + 2\cos g \cos \frac{u}{2}}{2 + 2\cos^2 t + \cos^2 g}} \end{array} \right. \quad (12)$$

Теперь можно повторить вывод формул для определения приведенного угла поворота Θ_C , принимая, что стержня второго яруса закреплены упруго с величиной податливости заделок r_H для стержня CH и r_G для стержня CG . Величины углов поворота упругих заделок равны $q_H = \Sigma M_H^{CH} i r_H = \Sigma M_H^{CH} R_H$ и $q_G = \Sigma M_G^{CG} i r_G = \Sigma M_G^{CG} R_G$. Используя уравнение (11), можно определить величину Θ_C через параметры прогиба c и h :

$$\Theta_C^{II} = \frac{q_C}{b} = \frac{3}{2} \frac{3h \left(2\cos g \frac{1+2R_G}{1+4R_G} + \frac{1+2R_H}{1+4R_H} \right) + c}{1 + \cos^2 d + 2\cos^2 g \frac{1+3R_G}{1+4R_G} + \frac{1+3R_H}{1+4R_H}} \quad (13)$$

Шарнирному закреплению концов стержней второго кольцевого сечения соответствуют значения $R_H \rightarrow \infty, R_G \rightarrow \infty$, жёсткому закреплению $R_H \rightarrow 0, R_G \rightarrow 0$. Учитывая это, можно утверждать, что справедливы следующие пределы отношений $\lim_{R_i \rightarrow \infty} \frac{1+2R_i}{1+4R_i} = \frac{1}{2}, \lim_{R_i \rightarrow \infty} \frac{1+3R_i}{1+4R_i} = \frac{3}{4}, \lim_{R_i \rightarrow 0} \frac{1+2R_i}{1+4R_i} = 1, \lim_{R_i \rightarrow 0} \frac{1+3R_i}{1+4R_i} = 1$.

Принимая величины углов $d = g = t = u = \frac{p}{3}$ как наиболее часто используемые (проекционная сеть, состоящая из правильных треугольников), можно оценить различия между зависимостями (12) и (13).

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_{C,ж}^{III} = 0.581c + 2.896h - 1.972x \\ \Theta_{C,ш}^{III} = 0.587c + 2.832h - 1.154x \\ \Theta_{C,ж}^{II} = 0.546c + 3.273h \\ \Theta_{C,ш}^{II} = 0.631c + 1.895h \end{array} \right. \quad (14)$$

Сравнивая попарно величины приведенных углов поворота, вычисленных в трёхъярусной и двухъярусной расчётных схемах с жёстким или шарнирным опиранием стержней, можно прийти к выводу, что влияние условий закрепления стержней третьего яруса на величину Θ_C невелико. Из этого также следует, что и влияние углов поворота концов стержней, находящихся за пределами третьего яруса также мало. Следует понимать, что наибольшее влияние на значение приведенного угла поворота узла C в радиальной плоскости Θ_C обладает величина c , поскольку её значение наибольшее из всех рассмотренных величин при образовании одиночной вмятины сетчатой стержневой поверхности. Поэтому, несколько завышая деформации, но с достаточной для аналитического расчёта точностью можно ограничиться рассмотрением двухъярусного фрагмента сетчатого купола с шарнирным опиранием во втором кольцевом ряде стержней. Для последующих расчётов может быть принята следующая формула для записи приведенного угла поворота торцевых сечений вблизи узла C :

$$\Theta_C = \frac{q_C}{b} = 1.5 \frac{3h(\cos g + 0.5) + c}{1 + \cos^2 d + 1.5 \cos^2 g + 0.75} \quad (15)$$

Следует понимать, что полученные формулы являются приближенными и не учитывают поворота поперечных сечений стержней, которые могут быть вызваны распором на торцах стержня, численно равным действующим в стержне продольной силе. Поскольку малые величины разной степени малости сильно влияют на конечный результат в рассматриваемой задаче, то в общем случае пренебрегать явлением продольного изгиба не следует. Для более точного определения величин изгибающих моментов в стержнях следует воспользоваться функциями Корноухова изложенных в работах [1,3]:

$$a(u) = \frac{u}{2tgu} \cdot \frac{tgu - u}{2tg \frac{u}{2} - u} \quad (17)$$

$$b(u) = \frac{u}{2\sin u} \cdot \frac{u - \sin u}{2tg \frac{u}{2} - u} \quad (18)$$

$$g(u) = a(u) + b(u) \quad (19)$$

$$d(u) = a(u) - b(u) \quad (20)$$

$$c(u) = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{utgu} \quad (21)$$

где $u_i = c \sqrt{\frac{N_i}{EI}} = \frac{c}{r} \frac{b}{b} \sqrt{e_i} = \sqrt{ne_i}$, N_i - продольная сила в i -м стержне, e_i - относи-

тельная продольная деформация i -го стержня, $\bar{e}_i = \frac{e_i}{b^2}$ - приведенное значение

продольной деформации стержня. Величина n характеризует одновременно геометрические характеристики сетчатой оболочки и геометрические характе-

ристики подобранного поперечного сечения стержня: $n = b^2 \left(\frac{c}{r}\right)^2 = \left(\frac{f}{c}\right)^2 \left(\frac{c}{r}\right)^2 = \frac{f^2}{r^2}$,

f - превышение узла O над узлами типа C , r - радиус инерции подобранного поперечного сечения стержня. На рисунке 3 изображены эпюры изгибающих моментов в радиальной плоскости в характерных стержнях от отдельных вертикальных перемещений и поворотов торцевых сечений с учётом продольного изгиба. Для стержня CO изгибающие моменты можно определить из следующих выражений:

$$\begin{cases} \Sigma M_O^{CO} = 2ig(u_{CO})bc - 2ib(u_{CO})b\Theta_C \\ \Sigma M_C^{CO} = -2ig(u_{CO})bc + 2ia(u_{CO})b\Theta_C \end{cases} \quad (22)$$

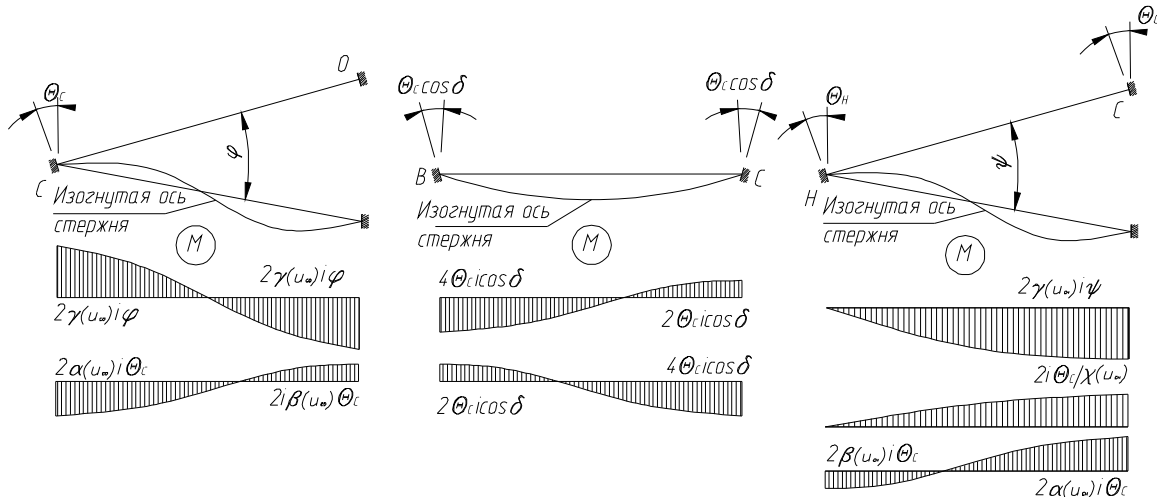


Рисунок 3 – Эпюры моментов при вертикальных смещениях торцов стержней и поворотах их торцевых сечений с учётом продольного изгиба

В стержне CH изгибающие моменты можно записать аналогично выше описанному случаю без учёта продольного изгиба с учётом допущения о шарнирном опирании стержней второго яруса:

$$\begin{cases} \Sigma M_C^{CH} = \frac{ibh}{c(u_{CH})} - \frac{ib\Theta_C}{c(u_{CH})} \\ \Sigma M_H^{CH} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

Совершенно аналогично можно выражения для вычисления изгибающих моментов в стержнях типа CG :

$$\begin{cases} \Sigma M_C^{CG} = \frac{ibh}{c(u_{CG})} - \frac{ib\Theta_C}{c(u_{CG})} \cos g \\ \Sigma M_G^{CG} = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Используя уравнение (11), можно вывести формулу для вычисления величины приведенного угла поворота торцевых сечений вблизи узла C :

$$\Theta_C = \frac{3h \left(\frac{2 \cos g}{c(u_{CG})} + \frac{1}{c(u_{CH})} \right) + 2c \cdot g(u_{CO})}{2a(u_{CO}) + 4 \cos^2 d \cdot d(u_{BC}) + \frac{1}{c(u_{CH})} + \frac{2 \cos^2 g}{c(u_{CG})}} \quad (25)$$

Зная величины безразмерных параметров прогибов, можно определить приведенный угол поворота (25), который участвует в выражениях поперечных сил, которые в свою очередь участвуют в уравнениях равновесия узла. Выражения для определения поперечных сил в рассматриваемых стержнях можно записать в следующем виде, используя [1,3,4]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{Q}_O^{CO} = \frac{-2c + \Theta_C}{n} \cdot \frac{2a(u_{CO})u_{CO} \sin(u_{CO}) - u_{CO}^2 \cos(u_{CO})}{1 - \cos(u_{CO})} \\ \bar{Q}^{BC} = 0 \\ \bar{Q}_C^{CH} = \frac{-3h + \Theta_C}{n \cdot c(u_{CH})} \\ \bar{Q}_C^{CG} = \frac{-3h + \Theta_C \cos(u_{CG})}{n \cdot c(u_{CG})} \end{array} \right. \quad (26)$$

где $\bar{Q}^i = \frac{Q^i}{b^3 EA}$, - функция, определяющая закон изменения поперечной силы в процессе деформирования.

Выводы. В ходе вывода законов изменения поперечных сил в стержнях сетчатого купола при исследовании местной потери устойчивости установлено, что для корректного определения поперечных сил в стержнях достаточно рассмотрения двух ярусов сетчатого купола. Вертикальные перемещения при фиксированном значении внешней нагрузки будут при этом несколько завышенными.

Направления действия изгибающих моментов, возникающих в стержнях при приложении нагрузки в верхний узел и в узлы первого сверху яруса, противоположны; следовательно существует такое соотношение между нагрузками в указанных узлах W , при котором величины изгибающий моментов будут малы или вовсе отсутствовать, поперечные силы в стержнях, соединённых в узле-вершине будут малы либо отсутствовать (при отсутствии изгибающих моментов или в случае чистого изгиба), как следствие внешняя узловaя нагрузка может быть уравновешена только продольными силами.

Выявлено, что на величину поворота торцевых сечений вблизи узла C в примыкающих к нему стержнях могут оказывать значительное влияние действующие в них продольные силы.

При учёте продольного изгиба в стержнях можно более достоверно определить значения поперечных сил в радиальной плоскости, имеющих важное значение при составлении уравнений равновесия узлов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Корноухов, Н. В. Прочность и устойчивость стержневых систем / Н. В. Корноухов – М.: Стройиздат, 1949. – 376 с.
2. Коршун, Л. И. Основы устойчивости стержневых систем / Л. И. Коршун, В. И. Игнатюк, А. С. Хамутовский. – Брест, 1995. – 64 с.
3. Вольмир, А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1967. – 948 с.
4. Пиковский, А. Ф. Статика стержневых систем со сжатыми элементами / А. А. Пиковский. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1961. – 396 с.