

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ В СТЕРЖНЯХ И КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК, ВЫЗЫВАЮЩИХ МЕСТНУЮ ПОТЕРЮ УСТОЙЧИВОСТИ СЕТЧАТОГО КУПОЛА²

Драган В. И., Глушко К. К.

Введение. В подавляющем большинстве программных комплексов решение геометрически линейных и нелинейных задач деформирования строительных конструкций осуществляется при помощи метода Ньютона, модифицированного метода Ньютона, хорошо зарекомендовавших себя при решении только задач монотонного характера. При решении задач немонотонного характера получить результаты расчёта при использовании упомянутых методов крайне затруднительно [1].

Сложность нахождения критической нагрузки в конечно-элементных программных комплексах для инженерных расчётов строительных конструкций состоит в том, что исследователем всегда задаётся нагрузка, перемещения узлов системы является искомыми величинами. Поскольку критическая узловая нагрузка является величиной неизвестной, способов её назначения может быть великое множество. Так, назначенная нагрузка определённой величины, полученная по результатам сбора нагрузок на покрытие, может оказаться больше критической. В случае, если необходимо определить её точное значение, нужно задавать узловую нагрузку на сетчатый купол с некоторым шагом, производя геометрически нелинейные расчёты. Если сетчатый купол имеет большое количество стержней, то расчёт всей конструкции ради определения критической нагрузки лишь одного фрагмента может занять довольно длительное время и верный результат не может быть гарантирован.

В работе [2] были подробно описаны результаты, полученные авторами этих статей экспериментально и произведено сравнение с ними математической модели, предложенной Suzuki T, Ogawa T, Ikarashi K. в работе [3]. В той же работе [2] приведены результаты эксперимента по определению критической нагрузки, вызывающей прощёлкивание стержневого многогранника при приложении на купол неравной по величине узловой нагрузки.

Общая часть. В уравнивании внешних сил, приложенных к рассматриваемым элементам фрагментов сетчатой конструкции, принимают участие не только поперечные силы, но и проекции продольных сил на ось действия внешних нагрузок, то следует рассмотреть процесс изменения продольных сил от деформаций системы. В рассматриваемом случае силы, вызывающие сжатие, следует считать положительными, растяжение – отрицательными.

Для дальнейшего рассмотрения продольных деформаций в стержнях типа *HJ, HK, CG, CH, BC* и *OC* можно рассмотреть законы движения хорд этих стержней и рассмотреть равновесие узла *C* в плоскости горизонтальной проекции и вертикальной плоскости. На рисунке 1 изображён рассматриваемый фрагмент сетчатого купола.

²Эта статья является продолжением работы «ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ И ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ В РАДИАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ В СТЕРЖНЯХ СЕТЧАТОГО КУПОЛА»

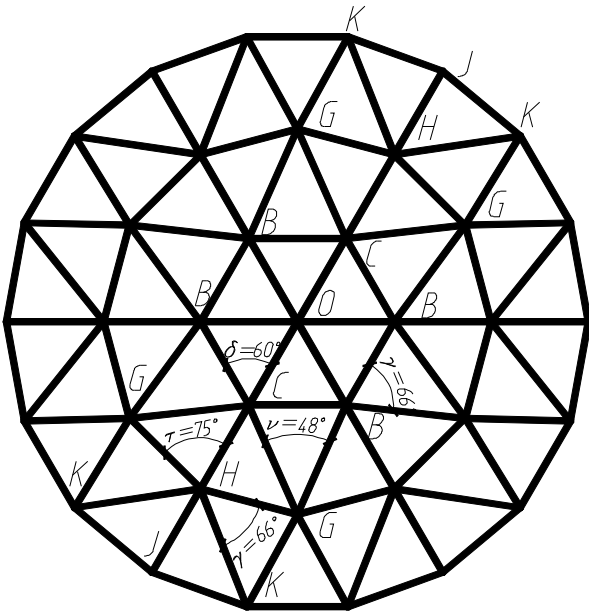


Рисунок 1 – Рассматриваемый фрагмент сетчатого купола

Поскольку проекции поперечных сил в горизонтальной плоскости в рассматриваемой точке несоизмеримо меньше проекций продольных сил в этой же плоскости, то поперечными силами, рассматривая систему сходящихся сил, можно пренебречь. Учитывая, что угол наклона стержней типа OC к горизонту равен b , стержней типа $CH, CG - 3b$, $HJ, HK - 5b$ в сферической стержневой оболочке, можно приравнять горизонтальные проекции продольных сил в этих стержнях, учитывая, что все названные углы малы. Необходимо составить уравнения равновесия сил в узлах H и C , проецируя силы на горизонтальную плоскость:

$$\begin{cases} N_{HJ} + 2N_{HK} \cos g - 2N_{GH} \cos t - N_{CH} = 0 \\ N_{CH} + 2N_{CG} \cos g - 2N_{BC} \cos d - N_{CO} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Разделив уравнение (1) на жёсткость растяжения-сжатия EI , можно получить следующую запись этого уравнения:

$$\begin{cases} e_{HJ} + 2e_{HK} \cos g - 2e_{GH} \cos t - e_{CH} = 0 \\ e_{CH} + 2e_{CG} \cos g - 2e_{BC} \cos d - e_{CO} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

При малом угле отклонения хорды $j \ll b$ можно утверждать, что уравнение (1) является приближённой записью, полагая $\cos 3b \approx 1, \cos 5b \approx 1$, принимая во внимание, что угол $0^\circ < b < 4^\circ$. Погрешность использования приближённого равенства относительно точной его записи составит практически от 0 до 2,3%. Для определения продольных деформаций стержней необходимо воспользоваться схемой деформирования отдельного фрагмента сетчатой конструкции в горизонтальной плоскости и зависимостями, определяющими величины продольных деформаций при перемещениях хорд стержней в радиальных плоскостях. На рисунке 1 изображена схема деформирования характерных стержней сетчатого купола в горизонтальной и радиальной плоскостях.

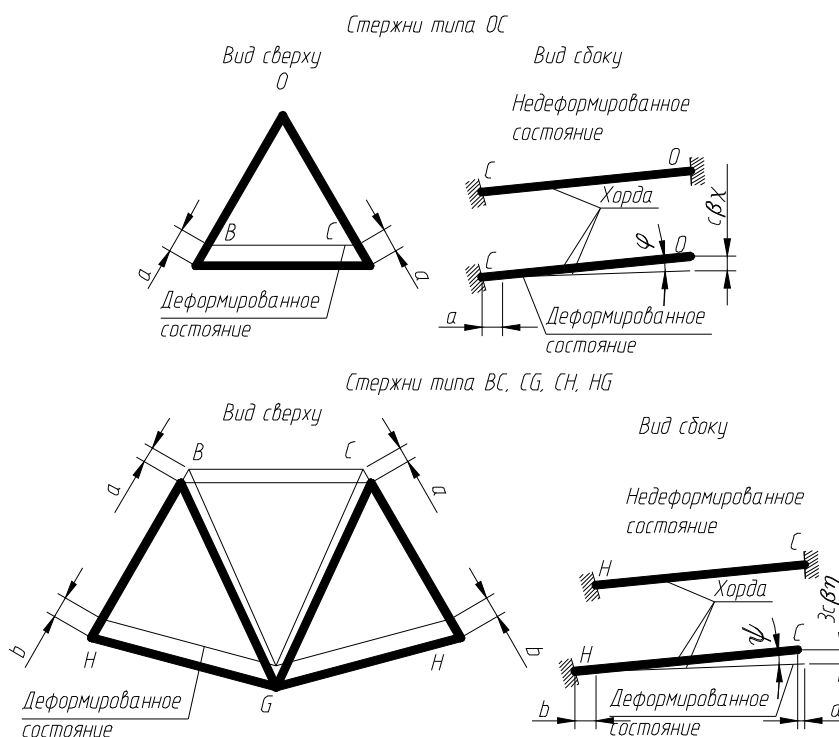


Рисунок 2 – Деформирование стержней типа CO , CH , CG , HG сетчатого купола

Поскольку отдельный стержневой многогранник является пологим, то углы наклона его стержней к касательной плоскости к поверхности в узловых точках сетчатой конструкции будут малыми. В таком случае синусы и косинусы этих углов можно свести к полиномам, используя преобразования их ряд Тейлора-Маклорена.

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(b-j) \approx 1 - \frac{(b-j)^2}{2!} + \frac{(b-j)^4}{4!} - \dots \\ \sin(b-j) \approx (b-j) - \frac{(b-j)^3}{3!} + \frac{(b-j)^5}{5!} - \dots \end{array} \right. \quad (3)$$

Ограничиваясь первыми членами ряда можно принять, что $\cos(b-j) \approx 1$, $\sin(b-j) \approx (b-j)$, исключая малые высших порядков. Необходимо выразить продольные деформации стержней рассматриваемого фрагмента. Выражение для определения продольной деформации стержня CO можно записать в следующем виде:

$$\Delta_{OC} = b^2 c(1-0.5c)c + a \Rightarrow e_{OC} = b^2 c(1-0.5c) + \frac{e_{BC}}{2 \cos d} \quad (4)$$

где a - величина перемещения узла C в плоскости проекции под действием внешней нагрузки, $b^2 c(1-0.5c)c$ - деформация укорочения стержня CO между неподвижными в горизонтальном, но подвижными в вертикальном опорами O и C направлениях, в которой $j = bc$ - величина угла отклонения хорды стержня от первоначального, проектного положения. Эта формула была получена В. А. Савельевым при решении подобной задачи. Величину этого перемещения можно

определить из рисунка 2. Выражение, определяющее величину продольной деформации стержня CH можно записать в следующем виде:

$$\Delta l_{CH} = \Delta l_{n,CH} - a + b \quad (5)$$

Теперь можно записать выражение для определения продольной относительной деформации стержня CH :

$$e_{CH} = 9b^2h(1-0.5h) - \frac{e_{BC}}{2\cos d} + \frac{e_{GH}}{2\cos t} \quad (6)$$

где $\Delta l_{n,CH} = 9b^2h(1 - \frac{1}{2}h)c$, $3bh$ - угол между хордой стержня CH в проектном положении. Подобным образом можно записать выражение для определения продольной относительной деформации стержня CG :

$$e_{CG} 2\cos 0.5u = e_{CH} \Rightarrow e_{CG} = \frac{9b^2h(1-0.5h)}{2\cos 0.5u} - \frac{e_{BC}}{4\cos 0.5u \cos d} + \frac{e_{GH}}{4\cos 0.5u \cos t} \quad (7)$$

где $\cos 0.5u$ - косинус половины угла $\angle BGC$, $\cos g$ - косинус угла $\angle GCH$.

Деформацию стержня HJ можно выразить подобно деформации стержня CO в виде следующего выражения:

$$\Delta l_{HJ} = \Delta l_{n,HJ} - b \quad (8)$$

где Δl_{HJ} - деформация укорочения стержня HJ . Следует отметить, что угол между осью стержня HJ в недеформированном состоянии и горизонтальной плоскостью в пять раз больше, чем угол между осью стержня CO и горизонтальной плоскостью. В связи с этим отклонение от геометрически линейного закона деформирования стержней третьего яруса сетчатого сферического купола будет проявляться в гораздо меньшей степени, чем стержней первого яруса ($1 - 0.5x \approx 1$). Так, приращение продольных деформаций стержня HJ можно описать линейной зависимостью:

$$e_{HJ} = 25b^2x - \frac{e_{CH}}{2\cos t} \quad (9)$$

где $\cos t$ - косинус угла $\angle CHG$. $5bx$ - угол между хордой стержня CH в проектном положении. Подобным образом можно выразить продольную деформацию стержня HK :

$$e_{HK} = 25b^2x - \frac{e_{GH} \cos g}{2\cos t} \quad (10)$$

Теперь, когда продольные деформации рассматриваемых стержней найдены, можно выразить деформации стержней HG и BC из уравнений системы (1):

$$e_{HG} = 2b^2 \cos t \frac{25x(1-0.5x) \left(1 + \frac{\cos g}{\cos \frac{u}{2}} \right) - 9h(1-0.5h)}{2 + \frac{\cos g}{\cos 0.5u} + 4\cos^2 t} + e_{BC} \frac{\cos t}{\cos d \left(2 + \frac{\cos g}{\cos 0.5u} + 4\cos^2 t \right)} \quad (11)$$

$$e_{BC} = 2b^2 \cos d \frac{\left(9h(1-0.5h) + \frac{25x(1-0.5x) \left(1 + \frac{\cos g}{\cos 0.5u} \right) - 9h(1-0.5h)}{2 \cos 0.5u + 4 \cos^2 d - 4 \cos^2 t \cos 0.5u} \cos 0.5u \right) \left(1 + \frac{\cos g}{\cos 0.5u} \right) - c(1-0.5c)}{2 + \frac{\cos g}{\cos 0.5u} + 4 \cos^2 d - \frac{1 + \frac{\cos g}{\cos 0.5u}}{2 + \frac{\cos g}{\cos 0.5u} + 4 \cos^2 t \cos 0.5u}} \quad (12)$$

Теперь можно повторить вывод формулы для определения продольной деформации стержня BC в двухъярусном фрагменте, считая, что стержни второго кольцевого сечения HG нерастяжимы. Результат можно описать следующей формулой:

$$e_{BC} = 2b^2 \cos d \cos \frac{u}{2} \frac{-c(1-0.5c) + 9h(1-0.5h) \left(1 + \frac{\cos g}{\cos 0.5u} \right)}{4 \cos^2 d \cos 0.5u + 2 \cos 0.5u + \cos g} \quad (13)$$

Принимая величины углов $d = g = t = u = \frac{p}{3}$ как наиболее часто используемые, можно оценить различия между выражениями, определяющими величины продольных деформаций стержня BC в выражениях (11) и (12):

$$e_{BC}^{III} = b^2 (3.262h(1-0.5h) - 0.319c(1-0.5c) + 5.544x) \quad (14)$$

$$e_{BC}^{II} = b^2 (3.969h(1-0.5h) - 0.279c(1-0.5c)) \quad (15)$$

Очевидно, величины продольных деформаций стержней типа BC , вычисленных в двухъярусном и трёхъярусном фрагментах, мало различаются по значению. Поэтому для практических расчётов следует применять выражение (13) как наиболее простое и обладающее хорошей точностью. Поскольку величина продольной деформации стержня BC входит в состав формул для определения продольных деформаций других рассматриваемых стержней, то различия между ними также будут малы, что было ранее подтверждено в работе [4] при исследовании местной потери устойчивости шарнирно-стержневых сетчатых куполов. Поэтому для отыскания продольных сил в стержнях первого и второго ярусов можно использовать уравнение (13) совместно с уравнениями (4) – (7).

Величины безразмерных параметров перемещений c, h являются зависимыми от приложенной внешней нагрузки. Учитывая, что величина внешней узловой нагрузки равна сумме проекций внутренних усилий в стержнях на ось действия внешней нагрузки, то можно составить следующие уравнения равновесия рассмотренных выше узлов:

$$\begin{cases} P_0 = k(N_{CO} - Q_{CO}) \\ P_C = (N_{CH} + 2N_{CG}) \beta b(1-u) - N_{CO} b(1-c) + Q_{CO} - Q_{CH} - 2Q_{CG} \end{cases} \quad (16)$$

где k - количество стержней, соединяемых в узле O .

Можно утверждать величины нагрузок в рассматриваемых узлах в общем случае соотносятся между собой. Величины отношений узловых нагрузок в узлах C и H к величине узловой нагрузки в узле O можно выразить в следующем виде при неизменных сечениях стержней:

$$\Omega_c = \frac{P_c}{P_o} = \frac{3(\bar{e}_{CH} + 2\bar{e}_{CG})(1-u) - \bar{e}_{CO}(1-c) + \bar{Q}_{CO} - \bar{Q}_{CH} - 2\bar{Q}_{CG}}{k(\bar{e}_{CO} - \bar{Q}_{CO})} \quad (17)$$

где P_o, P_c, P_H - величины узловых нагрузок в узлах O, C и H соответственно, $\bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{b^2}$. Решением этого уравнения является значения безразмерного параметра

прогиба h . Величина же Ω_c является заданной, величиной c следует задаваться. Решение уравнения (17) следует искать методом подбора.

Переход формы верхнего многогранника сетчатого купола из выпуклого состояния в вогнутое произойдёт, если перемещение узла O под нагрузкой при выполаживании стержневого многогранника с узлом O в центре и узлами типа C (B) в основании превысит стрелку подъёма многогранника в недеформированном состоянии. Это условие можно записать в виде следующего выражения:

$$c < 1 \quad (17)$$

Условие (17) определяет кардинальное изменение геометрии рассматриваемого многогранника, но не даёт возможность оценить величину критической нагрузки. В изложенной выше математической модели местной потери устойчивости жёстко-узловых сетчатых куполов в отличие от встречающихся в литературе шарнирно-стержневых математических моделей процесс «нагрузка-перемещение» описывается намного более сложно, используются неявно взаимозависимые безразмерные параметры прогибов, используется множество величин, предугадать значения которых невозможно. В связи с этим представить окончательную запись формулы, определяющую величину критической нагрузки крайне затруднительно. Поэтому, имея закон деформирования имеющегося многогранника в составе купола, можно потребовать выполнение следующего условия:

$$\frac{P_{уз}}{kEA} < P_{max} \quad (18)$$

Здесь величина P_{max} - безразмерная максимальная величина вычисленной нагрузки. Зависимость «нагрузка-перемещение» для жёстко-узловой сетчатой конструкции можно представить в виде следующих графиков:

Состояние рассматриваемого многогранника будет выпуклым, если выражение (17) будет удовлетворяться и вогнутым в противном случае. При наличии явно выраженного максимума P_{max} на диаграмме, местная потеря устойчивости начнётся с параметра деформирования, который соответствует величине

P_{\max} . Выпуклое состояние рассматриваемого фрагмента соответствует устойчивому состоянию, вогнутое – неустойчивому. По представленным графикам можно определить, какой величине безразмерного параметра c соответствует действующая нагрузка в узле O при известных величинах параметров Ω_C и n . Узловую нагрузку на сериях графиков 3 следует откладывать в виде результата следующего отношения:

$$p = \frac{P_{y3}}{b^3 EA} \quad (19)$$

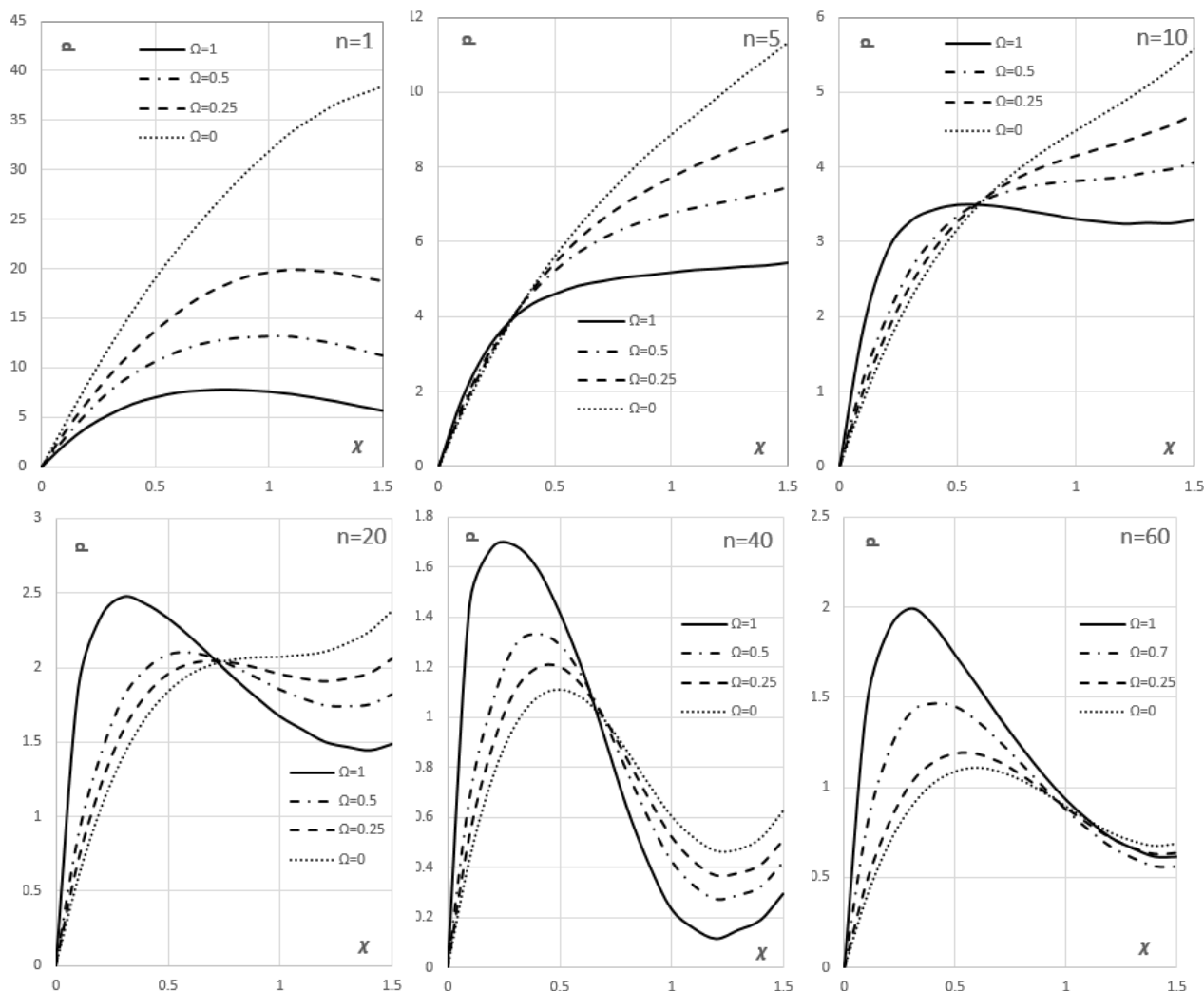


Рисунок 3 – Диаграммы деформирования верхнего многогранника сетчатого купола, сеть которого построена методом Кайвитта либо проекционным методом и имеющего шесть соединяемых стержней в верхнем узле

Как уже было отмечено, что изгибающие моменты в радиальной плоскости сетчатой конструкции в стержнях типа CO, CH, CG, HJ, HK противоположны по направлению в случае приложения нагрузки в узел O и в узлы типа C . Из этого следует вывод, что в каждой сетчатой конструкции существует такое соотношение нагрузок в узлах типа O и C Ω_C , что результирующие изгибающие

моменты в рассматриваемых стержнях могут в большей или меньшей мере уменьшаться по сравнению со случаем, если нагрузки будут прикладываться отдельно. В случае чистого изгиба или полного отсутствия моментов в рассматриваемых стержнях в процессе деформирования внешняя узловая нагрузка может быть уравновешена только продольными силами, процесс потери местной устойчивости сетчатой конструкции произойдёт подобно системе с шарнирными узлами, т.е. без действия поперечных сил. При значении узловой нагрузки в узле O близкой к критической величине резко возрастают величины перемещений узлов, малейшее приращение узловой нагрузки может вызвать значительное приращение перемещений и как следствие – достижение предела текучести материала стержней.

Выводы. Процесс перемещения центрального узла относительно соседних, расположенных в первом кольцевом сечении в общем случае не будет связан с пропорциональным приращением внутренних усилий в стержнях.

На геометрически нелинейный процесс деформирования стержневых многогранников в значительной мере влияют изгибная жёсткость стержня, угол между стержнем и касательной плоскостью к сетчатому куполу в центре узла в проектном положении, метод формообразования сетчатой конструкции.

Предложен критерий определения критической нагрузки на сетчатый купол с жёсткими узлами.

Представленные в относительных величинах серии диаграмм «нагрузка-прогиб» позволяют точно и просто определить величину критической нагрузки и вертикальные деформации верхнего узла сетчатого купола относительно ближайших соседних от приложенной внешней осесимметричной узловой нагрузки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Городецкий А. С. Компьютерные модели сооружений : А. С. Городецкий, И. Д. Езеров. - Киев. : Факт, 2005. – 344 с.
2. Lopez A. Numerical model and experimental tests on single-layer latticed domes with semi-rigid joints / Lopez A., Puente I., Serna M. A. // Computers and Structures 85 (2007) 360–374.
3. Suzuki T, Ogawa T, Ikarashi K. Elastic buckling analysis of rigidly jointed single-layer reticulated domes with random initial imperfection. IntJSpaceStruct 1992;7(4):265–73.
4. Журавлёв А. А. Пространственные деревянные конструкции : А. А. Журавлёв , Г. Б. Вержбовский, Н. Н. Ерёмченко. – Ростов-на-Дону. :РГСУ, 2003. – 518 с.