УДК 620.1:004.93

О КОМПЬЮТЕРИЗАЦИИ РАСЧЕТА СИСТЕМ ПЕРЕКРЕСТНЫХ БАЛОК

Игнатюк В. И.

Расчет сложных систем сегодня чаще всего выполняется методом конечных элементов, метод хорошо поддается алгоритмизации [1, 2] и на базе его разработано большинство современных компьютерных программ.

Рассматривается расчёт систем перекрестных балок (СПБ) на действие статических нагрузок методом конечных элементов (МКЭ) в форме метода перемещений [1] и создание соответствующей компьютерной программы расчета. Методика расчета разработана с учетом упругой податливости присоединения балочно-стержневых элементов к узлам.

Разрешающие уравнения МКЭ записываются в виде [1]:

$$\left[E_1\right]\cdot\left\{-\left[K\right]\cdot\left\{\Delta\right\}+\left\{P\right\}\right\}=0, \tag{1}$$

где: $\{P\}$– вектор нагрузок в узлах системы; $\{\Delta\}$ – вектор перемещений узлов; $\{K\}$ – матрица жесткости системы; $[E_1]$ – единичная диагональная матрица, в которой элементы на диагонали равны либо 1, если перемещения возможны, либо нулю, если перемещения не возможны вследствие наличия по направлениям опорных связей. Основы используемого метода конечных элементов представлены в работе [1]. Для систем перекрестных балок здесь пренебрегается линейными перемещениями в плоскости СПБ и углами поворота вокруг вертикальной оси. В результате вектор перемещений в узле СПБ будет иметь три величины – вертикальное линейное перемещение (в направлении оси z) и два угла поворота относительно горизонтальных осей x и y. Для конечных элементов будем иметь по шесть перемещений (рисунок 1) и усилий по концам. Матрица жесткости системы формируется из матриц жесткости конечных элементов (КЭ) дискретной модели СПБ в глобальной системе координат в соответствии со структурой системы [1].

Связь между матрицами жесткости КЭ в глобальной и локальной системах координат определяется выражением:

$$[K]=[T_a]^T\,[K']\cdot[T_a]. \tag{2}$$

Здесь $[T_\alpha]$ – матрица преобразования координат для КЭ, имеющая вид:

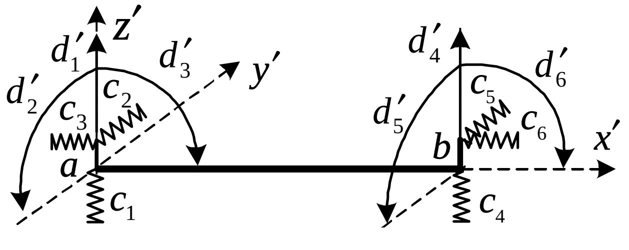


Рисунок 1 – Упругие связи КЭ СПБ

$$[T_a]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&0\\0&\cos\gamma&\sin\gamma&0&0&0\\0&-\sin\gamma&\cos\gamma&0&0&0\\\hline 0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&\cos\gamma&\sin\gamma\\0&0&0&0&-\sin\gamma&\cos\gamma\end{array}\right], \tag{3}$$

где γ – угол поворота КЭ по отношению к глобальной оси координат.

Для учёта упругой податливости узловых соединений получена матрица жёсткости КЭ, учитывающая упруго-податливое присоединение КЭ к узлам с помощью вертикальных (c_1, c_4) и угловых (c_2, c_3, c_5, c_6) упругих связей (рисунок 1), которая в локальной системе координат имеет вид:

$$
[K'_Э]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{12EJ}{l^3}k_1 & 0 & -\frac{6EJ}{l^2}k_2 & -\frac{12EJ}{l^3}k_1 & 0 & -\frac{6EJ}{l^2}k_4 \\
0 & \frac{GJ_{кр}}{l}k_G & 0 & 0 & -\frac{GJ_{кр}}{l}k_G & 0 \\
-\frac{6EJ}{l^2}k_2 & 0 & \frac{3EJ}{l}(k_2+k_3) & \frac{6EJ}{l^2}k_2 & 0 & \frac{3EJ}{l}(k_2-k_3) \\
\hline
\frac{12EJ}{l^3}k_1 & 0 & \frac{6EJ}{l^2}k_2 & \frac{12EJ}{l^3}k_1 & 0 & \frac{6EJ}{l^2}k_4 \\
0 & -\frac{GJ_{кр}}{l}k_G & 0 & 0 & \frac{GJ_{кр}}{l}k_G & 0 \\
-\frac{6EJ}{l^2}k_4 & 0 & \frac{3EJ}{l}(k_2-k_3) & \frac{6EJ}{l^2}k_4 & 0 & \frac{3EJ}{l}(k_4+k_5)
\end{array}\right], \qquad (4)
$$

где: c_j – упругая податливость связи, равная величине ее смещения (линейного либо углового) при приложении к ней единичного усилия (упругая податливость связи обратна ее жесткости); EJ, $GJ_{кр}$ – изгибная и крутильная жесткости конечного элемента.

В (4) обозначено: $k_1=\dfrac{t_4}{t_2t_4-3t_3^2}$; $k_2=\dfrac{t_3+t_4}{t_2t_4-3t_3^2}$; $k_3=\dfrac{1}{3t_4}+\dfrac{t_3}{t_4}k_2$;

$$k_4=\frac{t_4-t_3}{t_2t_4-3t_3^2};\quad k_5=\frac{1}{3t_4}+\frac{t_3}{t_4}k_4;\quad k_G=\frac{1}{1+(c_1+c_4)\dfrac{GJ_{кр}}{l}},$$

где: $t_2=1+(c_2+c_5)\dfrac{12EJ}{l^3}+(c_3+c_6)\dfrac{3EJ}{l}$; $t_3=(c_6-c_3)\dfrac{EJ}{l}$; $t_4=1+(c_3+c_6)\dfrac{EJ}{l}$.

Варьируя величины упругих связей c_i от нуля до бесконечности можно получить матрицы жесткости с шарнирными и жесткими соединениями конечных элементов в узлах.

При действии на КЭ распределённых нагрузок в МКЭ их необходимо преобразовывать к узловым. Это преобразование для конечных элементов, упруго-податливо присоединяемых к узлам, получено на основе расчётов соответствующих конечных элементов.

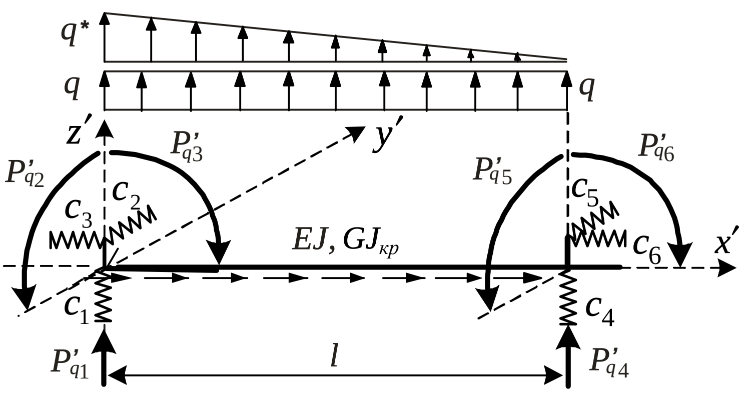


Рисунок 2

Для нагружения КЭ распределенными нагрузками, представленными на рисунке 2, величины узловых нагрузок будут определяться выражением:

$$\left\{P'_q\right\}=\begin{Bmatrix}P'_{q1}\\P'_{q2}\\P'_{q3}\\ \hline P'_{q4}\\P'_{q5}\\P'_{q6}\end{Bmatrix}=\left\{\begin{array}{c}\dfrac{q\,l}{2}\left(1-f_{q2}\right)+\dfrac{q^*l}{20}\left(10-u_{q1}\right)\\0\\-\dfrac{q\,l^2}{12}\left(1{,}5-3f_{q2}-f_{q3}\right)-\dfrac{q^*l^2}{120}\left(20+u_{q2}-6u_{q1}\right)\\ \hline \dfrac{q\,l}{2}\left(1+f_{q2}\right)+\dfrac{q^*l}{20}u_{q1}\\0\\\dfrac{q\,l^2}{12}\left(1{,}5+3f_{q2}-f_{q3}\right)+\dfrac{q^*l^2}{120}u_{q2}\end{array}\right\}. \qquad (5)$$

В (5) обозначено: $f_{q2}=\dfrac{3\,t_{q2}t_4-t_{q3}t_3}{6t_3^2-2t_2t_4}$; $f_{q3}=3\,f_{q2}\dfrac{t_3}{t_4}+\dfrac{t_{q3}}{2t_4}$;

$$u_{q1}=\frac{8s_{q2}u_3-5\,s_{q3}u_2}{4u_1u_3-3u_2^2},\quad u_{q2}=\frac{3u_2u_{q1}-5\,s_{q3}}{u_3},$$

где: $t_{q2}=\dfrac{EJ}{l}\left(\dfrac{1}{c_6}-\dfrac{1}{c_3}\right)+\dfrac{8EJ}{l^3}\left(\dfrac{1}{c_5}-\dfrac{1}{c_2}\right)$; $t_{q3}=1+\dfrac{3EJ}{l}\left(\dfrac{1}{c_3}+\dfrac{1}{c_6}\right)$; $s_{q2}=1+\dfrac{15EJ}{c_2l^3}$;

$s_{q3}=1+\dfrac{4EJ}{c_3l}$; $u_1=1+\dfrac{3EJ}{l^3}\left(\dfrac{1}{c_2}+\dfrac{1}{c_5}\right)+\dfrac{3EJ}{c_3l}$; $u_2=1+\dfrac{2EJ}{c_3l}$; $u_3=1+\left(\dfrac{1}{c_3}+\dfrac{1}{c_6}\right)\dfrac{EJ}{l}$.

Полученные выражения матриц жёсткости КЭ и сосредоточенных узловых усилий от распределённых равномерно и по треугольным законам нагрузок позволяют определять усилия в СПБ с учётом упруго-податливого присоединения КЭ к узлам на базе метода конечных элементов.

Далее получим зависимости для определения перемещений сечений балочного КЭ, упруго-податливого присоединяемого к узлам дискретной модели СПБ, в зависимости от перемещений узловых точек дискретной модели и действующих на стержни распределенных нагрузок. Зависимости для КЭ получим сначала в местной системе координат с последующим их преобразованием в глобальную систему координат [1].

Расчет КЭ выполним методом перемещений [3], приняв за неизвестные перемещения конечных точек элемента (Z_i), в которых он присоединяется к узлам конечно-элементной модели системы с помощью упругих связей (перемещения точек a и b на рисунке 3).

Основную систему метода перемещений получим, установив по направлениям всех возможных линейных и угловых перемещений концов стержня в точках a и b дополнительные связи (рисунок 3). Система уравнений метода перемещений в матричной форме имеет вид:

$$[r]\cdot\{Z\}+\{R_F\}=0, \qquad (6)$$

где: $\{Z\}$ – вектор перемещений дополнительных связей (рисунок 3); $[r]$ – матрица реакций в дополнительных связях, возникающих при их единичных смещениях; элемент этой матрицы r_{ik} есть реактивное усилие в направлении i-ой дополнительной связи (сила в линейной связи, либо момент в угловой связи) от единичного перемещения k-ой дополнительной связи (линейного смещения либо угла поворота); $\{R_F\}$ – вектор реактивных усилий в дополнительных связях от внешних воздействий, в качестве которых здесь будут выступать перемещения узлов d_i' и внешние нагрузки, распределенные в общем случае по трапецеидальным зависимостям.

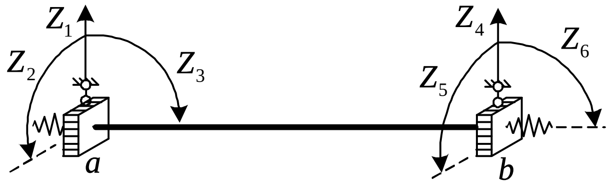
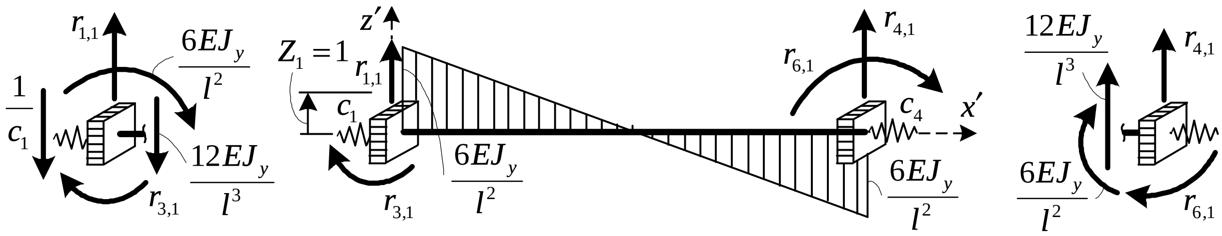


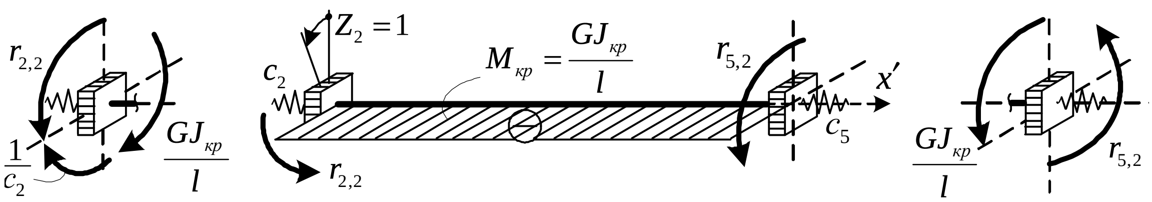
Рисунок 3 – Основная система метода перемещений

Для определения реакций в дополнительных связях от единичных перемещений узлов воспользуемся табличными эпюрами метода перемещений [3]. Построим от каждого из единичных перемещений эпюры изгибающих моментов и найдем возникающие в дополнительных связях реакции способом вырезания узлов. При этом учтем, что при единичном перемещении упругих связей в них возникают усилия (силы, моменты), равные обратной величине их упругой податливости. На рисунок 4 показаны соответствующие процедуры для перемещений Z_1=1, Z_2=1, Z_3=1.

а) от линейного перемещения Z_1=1:



б) от угла поворота Z_2=1:



в) от угла поворота Z_3=1:

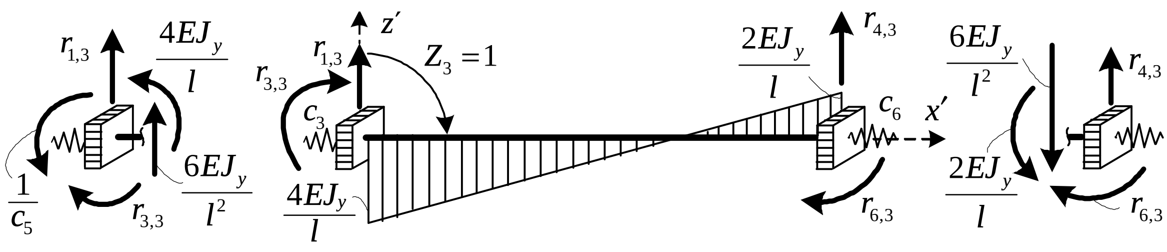


Рисунок 4

Реакции в дополнительных связях, возникающих от единичных перемещений, находятся из вырезания узлов и рассмотрения их равновесия (рисунок 4). Матрица $[r]$ в результате принимает вид:

$$
[r]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{12EJ_y}{l^3}+\frac{1}{c_1} & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2} & -\frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2}\\
0 & \frac{GJ_{кр}}{l}+\frac{1}{c_2} & 0 & 0 & -\frac{GJ_{кр}}{l} & 0\\
-\frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{l}+\frac{1}{c_3} & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{l}\\
\hline
-\frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & \frac{12EJ_y}{l^3}+\frac{1}{c_4} & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2}\\
0 & -\frac{GJ_{кр}}{l} & 0 & 0 & \frac{GJ_{кр}}{l}+\frac{1}{c_5} & 0\\
-\frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{l} & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{l}+\frac{1}{c_6}
\end{array}\right]. \qquad (9)
$$

Свободные члены уравнения (6) $R_{i,F}$ представляют собой реакции в дополнительных связях от внешних воздействий на конечный элемент. В качестве внешних воздействий здесь выступают перемещения узлов d_i' и распределенные по трапецеидальным зависимостям нагрузки. Перемещения узлов d_i' будут вызывать в упругих связях усилия, равные произведению этих перемещений на величины, обратные жесткостям связей $\left(d_i'\cdot\left(1/c_i\right)\right)$. Действие трапецеидально распределенных нагрузок учтем, сложив действие равномерно распределенной и треугольно распределенной нагрузок. Определение грузовых реакций $R_{i,F}$ для КЭ от перемещений узлов d_i' и распределенных нагрузок показано на рисунок 5.

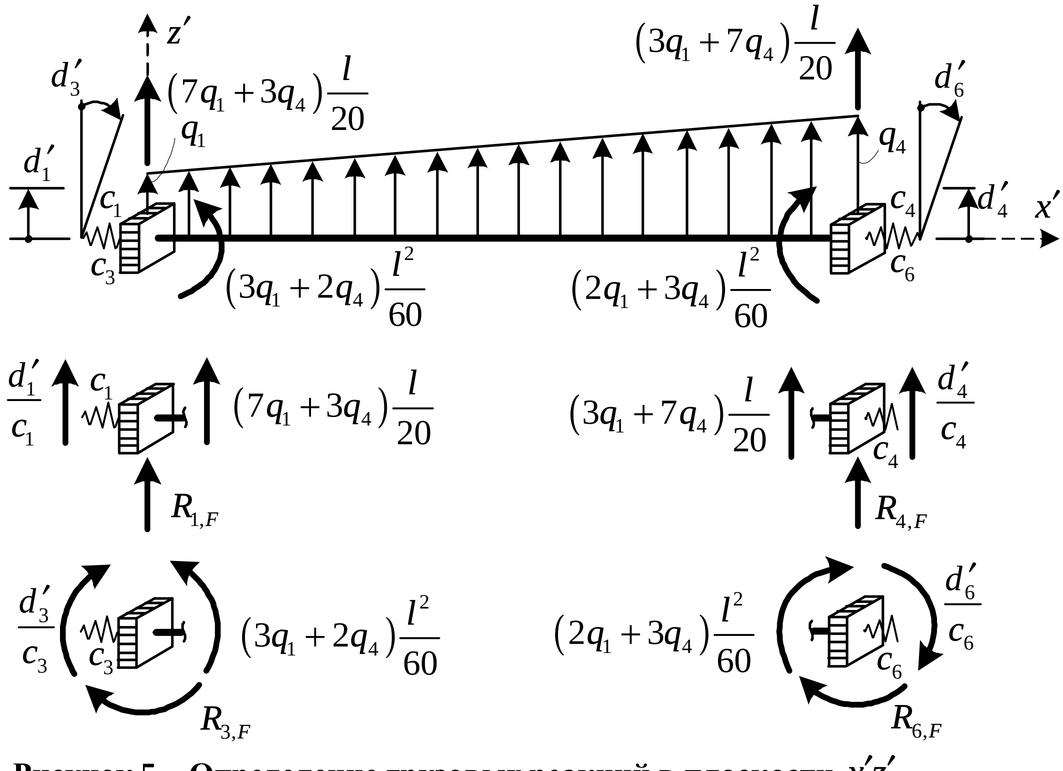


Рисунок 5 – Определение грузовых реакций в плоскости $x'z'$

Вырезая узлы, получим: $R_{1,F}=-\frac{d_1'}{c_1}-(7q_1+3q_4)\frac{l}{20}$;

$$
R_{3,F}=-\frac{d_3'}{c_3}-(3q_1+2q_4)\frac{l^2}{60};\quad R_{4,F}=-\frac{d_4'}{c_4}-(q_1+2q_4)\frac{l}{6};\quad R_{6,F}=-\frac{d_6'}{c_6}-(2q_1+3q_4)\frac{l^2}{60}.
$$

Матрица $\{R_F\}$ определена. Решая систему уравнений метода перемещений (6), найдем перемещения $\{Z\}$ концов стержня.

После этого перемещение любого сечения стержня в местной системе координат можно определить на основе дифференциальной зависимости:

$$\frac{d^2u_1}{dx^2}=\frac{M_y}{EJ_y}. \qquad \frac{d^2u_1}{dx^2}=\frac{M_y}{EJ_y}=\frac{1}{EJ_y}\left(r_4+r_1x+\frac{q_1}{2}x^2+\frac{q_4-q_1}{6l}x^3\right).$$

Проинтегрировав выражение два раза и учтя граничные условия (при $x=0$ – $y=Z_1,\ j_z=\dfrac{du_1}{dx}=-Z_3$), найдем постоянные интегрирования.

В результате зависимость для прогибов сечений элемента получим в виде:

$$u_1=Z_1-Z_3x+\frac{1}{EJ_z}\left(r_3\frac{x^2}{2}+r_1\frac{x^3}{6}+q_1\frac{x^4}{24}+\frac{q_4-q_1}{120l}x^5\right).)$$

После этого не составляет труда выполнить преобразование матрицы перемещений из местной в глобальную систему координат и получить зависимости для определения деформированного вида системы.

На основе изложенного сформирован алгоритм расчета СПБ методом конечных элементов, разработана (совместно с инж. Алексеевым Т. Ю.) компьютерная программа расчета «CrossBeam». Программа составлена на языке C# [4] в среде Microsoft Visual Studio для ОС Windows.

Основное окно программы «CrossBeam» представлено на рисунке 6, где

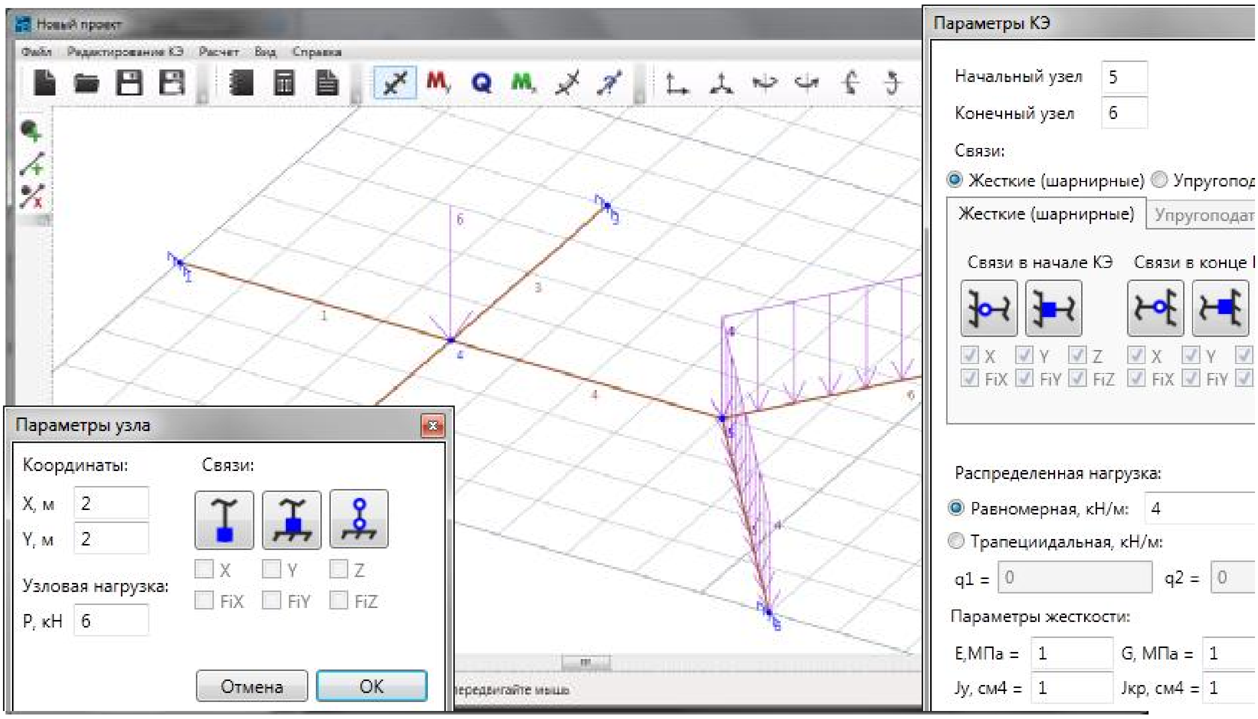


Рисунок 6 – Основное окно программы и окна параметров узлов и КЭ

показана также дискретная схема СПБ и окна ввода исходных данных «Параметры узла» и «Параметры КЭ», в которых задаются узлы дискретной модели СПБ и конечные элементы (включая номера узлов, с которыми соединяются КЭ, условия (связи) соединения КЭ с этими узлами (жесткие, шарнирные либо упруго-податливые), геометрические и жесткостные параметры балочно-стержневых КЭ и нагрузки на узлы и КЭ). Эти окна могут быть вызваны в любой момент для корректировки исходных данных. Исходные данные представляются в графическом и в табличном вариантах.

После ввода исходных данных программа проверяет систему на геометрическую неизменяемость и выполняет расчет системы. Результаты расчета представляются в виде численных результатов (в табличном виде) и в графическом виде – в виде эпюр усилий: изгибающих моментов M_y (рисунок 9), поперечных сил Q_z, крутящих моментов $M_{кр}$, а также в виде деформированной схемы системы (рисунок 9).

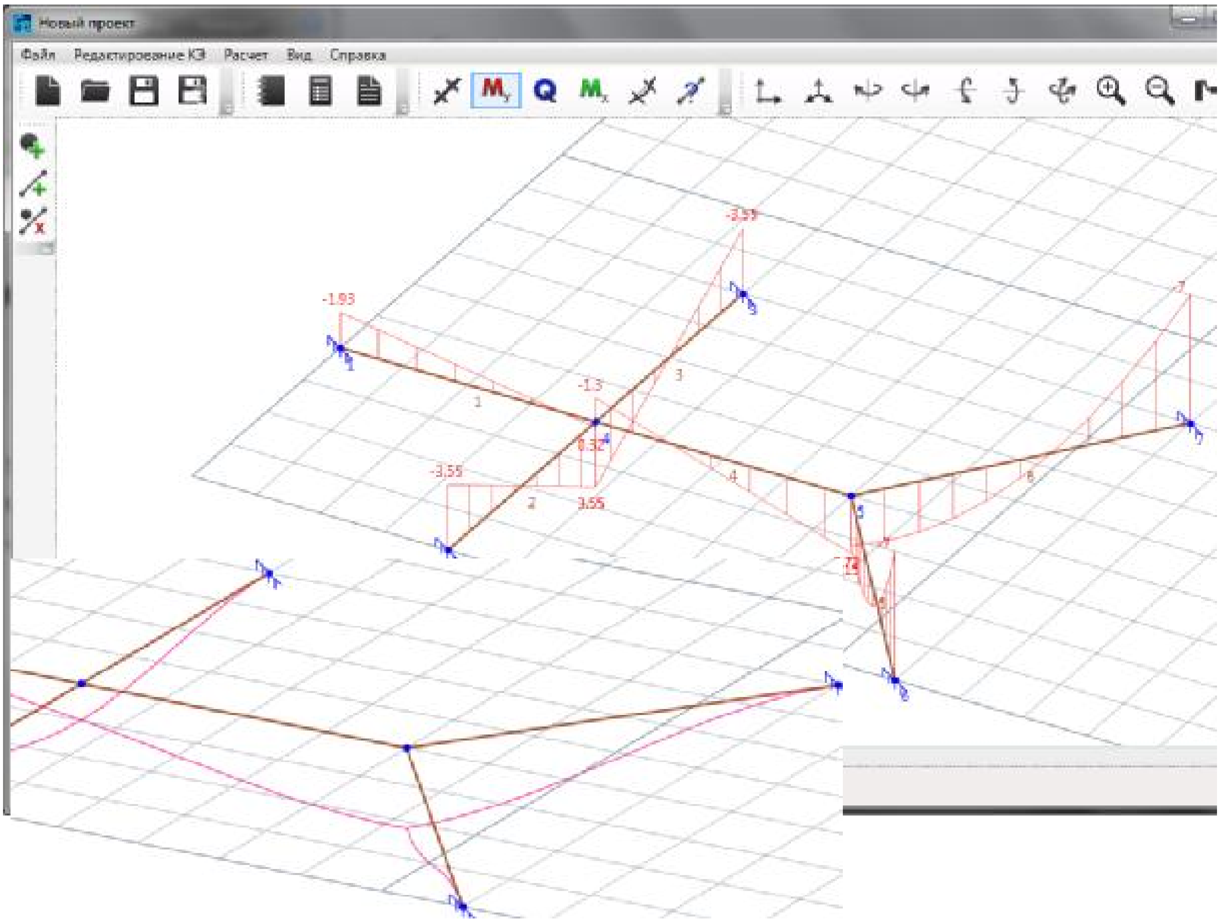


Рисунок 9 – Эпюра M_y и деформированный вид системы

После выполнения расчета системы можно посмотреть его результаты отдельно каждого КЭ, вызвав окно результатов расчета КЭ, в котором можно получить также усилия в любом из сечений КЭ. Изображения настраиваются с позиций наилучшего представления соответствующих объектов (повороты относительно вертикальной и горизонтальных осей, перемещения изображения, масштабирование, различные виды аксонометрии и т.п.).

Программа может использоваться в учебном процессе и в расчетно-проектной практике.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Игнатюк, В. И. Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем : учебное пособие / В. И. Игнатюк. – Брест : БрГТУ, 2009. – 172 с.

2. Перельмутер, А. В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. – М. : ДМК Пресс, 2007. – 600 с.

3. Борисевич, А. А. Строительная механика: учебное пособие / А. А. Борисевич, Е. М. Сидорович, В. И. Игнатюк. – Минск : БНТУ, 2009. – 756 с.

4. Павловская, Т. А. С#: Программирование на языке высокого уровня. – С.-Петербург : Питер, 2014. – 432 с.