

Игнатюк В. И., Бочарова Н. В., Загуляев С.В.

**Лабораторные работы
по дисциплине
«Численные методы
решения задач»**

Брест 2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»**

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

по дисциплине

«Численные методы решения задач»

Методические указания

для студентов специальностей:

1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и

1-74 04 01 «Сельское строительство и обустройство территорий»

дневной и заочной форм обучения

Брест 2017

УДК 518:624.04(075)

ББК 38.112

И 26

Рецензент:

зам. директор филиала РУП «Институт БелНИИС» – Научно-технический центр, доктор технических наук **Деркач Валерий Николаевич**

В.И. Игнатюк, Н.В. Бочарова, С.В. Загуляев

И 26 Лабораторные работы по дисциплине «Численные методы решения задач»: методические указания для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и 1-74 04 01 «Сельское строительство и обустройство территорий» дневной и заочной форм обучения. – Брест: Изд-во БрГТУ, 2017. – 55 с.

В методических указаниях представлены лабораторные работы, в которых рассматриваются основы решения численными методами задач расчета строительных конструкций и сооружений с использованием системы компьютерной алгебры MathCAD, включая расчеты с использованием общей системы уравнений равновесия и матриц влияния, использование в расчетах аппроксимаций функций, численного интегрирования, матричной формы определения перемещений, численного дифференцирования, метода конечных разностей, методы решения нелинейных уравнений.

Методические указания предназначены для студентов специальности 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» дневной и заочной форм обучения.

УДК 518:624.04(075)

ББК 38.112

© В.И. Игнатюк, 2017

© Н.В. Бочарова, 2017

© С.В. Загуляев, 2017

© Издательство БрГТУ, 2017

Введение

Численные методы – это методы приближенного решения математических задач, позволяющие свести решение задачи к выполнению конечного числа более простых алгебраических и арифметических действий, выполняемых как вручную, так и с помощью компьютерной техники.

В методических указаниях рассматривается применение численных методов к задачам расчета сооружений с использованием методов расчета, которые изучаются в строительной механике.

Для реализации процедур численных методов при решении задач строительства предлагается применять широко распространенный и современный компьютерный пакет прикладной математики MathCAD.

Решение любой практической задачи начинается с математической постановки задачи, включая описание исходных данных, условий и целей на языке математических понятий. Соответственно строится математическая модель.

Математическая модель может иметь вид уравнения, системы уравнений либо быть выраженной в форме математических структур или соотношений. Математические модели могут быть непрерывными или дискретными. После моделирования производится решение математической задачи и исследование математической модели. Процесс исследования свойств объекта по его модели называется моделированием.

В методических указаниях представлены лабораторные работы, в которых рассматриваются расчеты с использованием общей системы уравнений равновесия и матриц влияния, использование в расчетах аппроксимаций функций, численного интегрирования, матричной формы определения перемещений, численного дифференцирования, метода конечных разностей, методы решения нелинейных уравнений. После решения задач численными методами, которые являются приближенными методами, производится при возможности сравнение результатов с точными решениями для оценки полученных результатов и применяемых численных методов расчета.

Основное назначение лабораторных работ – научить студентов применять численные методы в расчетах сооружений, понимать их идеи и суть.

После выполнения лабораторных работ студент по каждой работе оформляет и защищает индивидуальный отчет.

Лабораторные работы соответствуют учебной программой дисциплины «Численные методы решения задач» для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и 1-74 04 01 «Сельское строительство и обустройство территорий», утвержденной 07.07.2015, регистрационный № УД-1-042/уч.

Лабораторная работа № 1

Применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых ферм

Цель работы: изучить применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых ферм.

Порядок выполнения работы:

- 1) обозначить приложенную к ферме нагрузку и реакции в опорах;
- 2) пронумеровать стержни фермы;
- 3) вырезая каждый узел фермы, составить общую систему равновесия;
- 4) решить систему уравнений в системе компьютерной алгебры MathCAD;
- 5) сделать проверку, используя три уравнения равновесия фермы в целом.

Пример расчета. Рассмотрим расчет фермы, представленной на рис. 1.1.

Будем считать, что нагрузка может быть приложена только в узлы верхнего пояса фермы, поэтому обозначим внешнюю нагрузку в виде сосредоточенных сил (P_1, P_2, P_3, P_4). Для удобства пронумеруем стержни фермы (1–13).

Обозначим реакции в опорах (R_A, R_B, H_B).

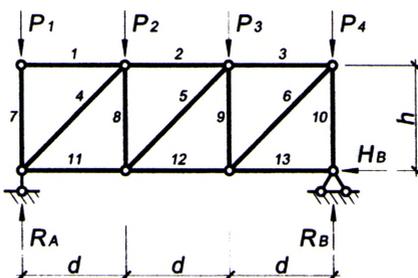


Рисунок 1.1

Вырезая каждый узел фермы, обозначим неизвестные продольные усилия стержней фермы (N_1, N_2, N_3, \dots и т.д., рис. 1.2).

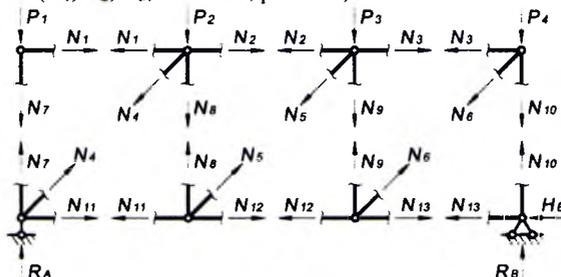
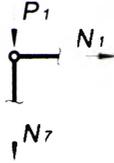


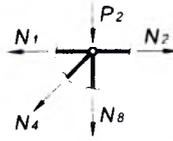
Рисунок 1.2

Составим уравнения равновесия для каждого узла фермы ($\sum X = 0; \sum Y = 0$); проецируя усилия и нагрузки на соответствующие оси.



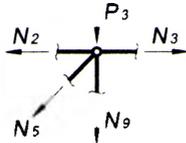
$$\sum X = 0; N_1 = 0;$$

$$\sum Y = 0; -P_1 - N_7 = 0;$$



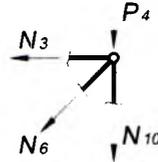
$$-N_1 - N_4 \cdot \cos \beta + N_2 = 0;$$

$$-P_2 - N_4 \cdot \sin \beta - N_8 = 0;$$



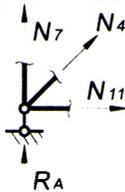
$$-N_2 - N_5 \cdot \cos \beta + N_3 = 0;$$

$$-P_3 - N_5 \cdot \sin \beta - N_9 = 0;$$



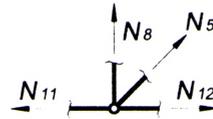
$$-N_3 - N_6 \cdot \cos \beta = 0;$$

$$-P_4 - N_6 \cdot \sin \beta - N_{10} = 0;$$



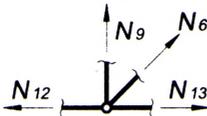
$$N_4 \cdot \cos \beta + N_{11} = 0;$$

$$R_A + N_4 \cdot \sin \beta + N_7 = 0;$$



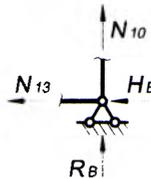
$$-N_{11} + N_5 \cdot \cos \beta + N_{12} = 0;$$

$$N_8 + N_5 \cdot \sin \beta = 0;$$



$$-N_{12} + N_6 \cdot \cos \beta + N_{13} = 0;$$

$$N_9 + N_6 \cdot \sin \beta = 0;$$



$$-N_{13} - H_B = 0;$$

$$N_{10} + R_B = 0;$$

Для определения неизвестных усилий и реакций, решим систему уравнений, составленную из полученных ранее уравнений равновесия узлов фермы.

Проверка: $\sum M_B = 0; R_A \cdot 3d - P_1 \cdot 3d - P_2 \cdot 2d - P_3 \cdot d = 0;$

$\sum M_A = 0; -R_B \cdot 3d + P_2 \cdot d + P_3 \cdot 2d + P_4 \cdot 3d = 0;$

$\sum X = 0; H_B = 0.$

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры MathCAD.

Параметры фермы

$$d := 2 \quad h := 2 \quad \cos := \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}} \quad \sin := \frac{h}{\sqrt{d^2 + h^2}}$$

Задание переменных

$$\begin{aligned} R_a &:= 0 & R_b &:= 0 & H_b &:= 0 \\ N_1 &:= 0 & N_2 &:= 0 & N_3 &:= 0 & N_4 &:= 0 & N_5 &:= 0 \\ N_6 &:= 0 & N_7 &:= 0 & N_8 &:= 0 & N_9 &:= 0 & N_{10} &:= 0 \\ N_{11} &:= 0 & N_{12} &:= 0 & N_{13} &:= 0 \end{aligned}$$

Внешняя нагрузка

$$P_1 := 1 \quad P_2 := 1 \quad P_3 := 1 \quad P_4 := 1$$

Задание системы уравнений

Given

$$\begin{aligned} N_1 &= 0 & N_4 \cos + N_{11} &= 0 \\ -P_1 - N_7 &= 0 & R_a + N_4 \sin + N_7 &= 0 \\ -N_1 - N_4 \cos + N_2 &= 0 & -N_{11} + N_5 \cos + N_{12} &= 0 \\ -P_2 - N_4 \sin - N_8 &= 0 & N_8 + N_5 \sin &= 0 \\ -N_2 - N_5 \cos + N_3 &= 0 & -N_{12} + N_6 \cos + N_{13} &= 0 \\ -P_3 - N_5 \sin - N_9 &= 0 & N_9 + N_6 \sin &= 0 \\ -N_3 - N_6 \cos &= 0 & -N_{13} - H_b &= 0 \\ -P_4 - N_6 \sin - N_{10} &= 0 & N_{10} + R_b &= 0 \end{aligned}$$

Поиск решения

Find($R_a, R_b, H_b, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}$) →

2		0
2	0	2
0	1	2
0	2	0
-1	3	0
-1	4	-1
$-\sqrt{2}$	5	-1
0	6	-1.414
0	7	0
$\sqrt{2}$	8	1.414
-1	9	-1
0	10	0
-1	11	-1
-2	12	-2
1	13	1
1	14	1
0	15	0

Проверка опорных реакций

$$R_a := 2 \quad R_b := 2 \quad H_b := 0$$

$$R_a \cdot 3 \cdot d - P_1 \cdot 3 \cdot d - P_2 \cdot 2 \cdot d - P_3 \cdot d = 0$$

$$-R_b \cdot 3 \cdot d + P_2 \cdot d + P_3 \cdot 2 \cdot d + P_4 \cdot 3 \cdot d = 0$$

$$H_b = 0$$

Лабораторная работа № 2

Использование матриц влияния в расчетах ферм

Цель работы: изучить использование матриц влияния на примере расчета статически определимых ферм.

Порядок выполнения работы:

- 1) составить матрицу влияния для заданной фермы;
- 2) рассчитать усилия фермы с единичной нагрузкой во всех узлах фермы, а также рассчитать 2–4 примера с различной заданной нагрузкой (симметричной и несимметричной);
- 3) для всех примеров сделать рисунки с изображением полученных внутренних усилий в ферме;
- 4) сравнить полученные результаты расчета с результатами, полученными с помощью методики расчета фермы лабораторной работы № 1;
- 5) сделать выводы (проанализировать, в каких стержнях возникает наибольшее усилие).

Методика расчета. При проведении расчетов, ориентированных на компьютерные технологии, в строительной механике применяют дискретные расчетные схемы и методы матричного исчисления. Для примера такого подхода рассмотрим расчет фермы с помощью матрицы влияния продольных усилий.

Действующие на ферму нагрузки представим в виде вектора нагрузок (2.1), компонентами которого являются значения заданных нагрузок ($P_1 \dots P_t$), пронумерованных в определенном порядке. Результатом расчета будет служить вектор усилий, в котором в заданном порядке будут перечислены значения продольных усилий в конкретных стержнях фермы ($N_1 \dots N_s$).

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_t \end{Bmatrix}; \quad \{N\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_s \end{Bmatrix},$$

где t – количество действующих нагрузок; s – количество стержней фермы.

Матрица влияния продольных усилий фермы записывается в виде:

$$[L_N] = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1t} \\ n_{21} & n_{22} & \dots & n_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{s1} & n_{s2} & \dots & n_{st} \end{bmatrix}.$$

Каждый элемент n_{ik} матрицы влияния представляет собой величину продольного усилия в i -м стержне фермы при действии на ферму только одной единичной нагрузки $P_k = 1$.

Вектор продольных усилий в стержнях фермы $\{N\}$ будет определяться произведением матрицы влияния фермы $[L_N]$ на вектор нагрузок $\{P\}$.

$$\{N\} = [L_N] \cdot \{P\}. \quad (2.1)$$

Пример расчета. Для примера рассмотрим расчет фермы, рассмотренной ранее в лабораторной работе № 1 (рис. 2.1).

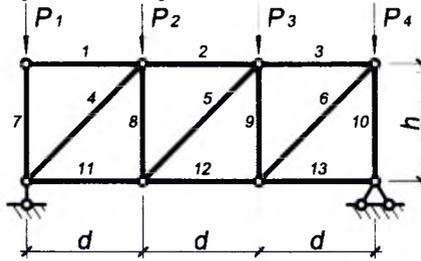


Рисунок 2.1

Составим матрицу влияния фермы. Так как в данной ферме 13 стержней и к ней приложено 4 внешних силы, то матрица влияния будет иметь размеры 4 x 13.

$$[L_N] = \begin{bmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} & \dots & n_{1,4} \\ n_{2,1} & n_{2,2} & \dots & n_{2,4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{13,1} & n_{13,2} & \dots & n_{13,4} \end{bmatrix}$$

Для определения элементов $n_{i,k}$ матрицы влияния данной фермы необходимо поочередно просчитать значения внутренних усилий в каждом i -ом стержне фермы при поочередном действии на ферму единичных нагрузок $P_k=1$, параллельно заполняя соответствующие столбцы матрицы влияния:

при $P_1=1; P_2=0; P_3=0; P_4=0$ (1 столбец);

при $P_1=0; P_2=1; P_3=0; P_4=0$ (2 столбец);

при $P_1=0; P_2=0; P_3=1; P_4=0$ (3 столбец);

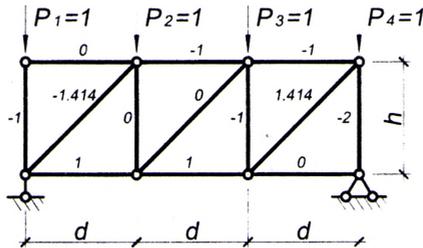
при $P_1=0; P_2=0; P_3=0; P_4=1$ (4 столбец).

$$[L_N] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

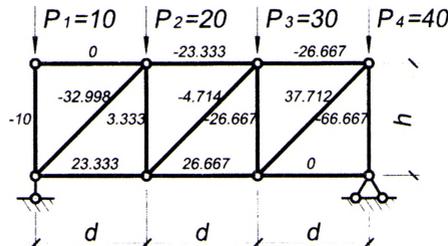
Матрица влияния принимает вид:

Используя полученную матрицу влияния, выполним примеры расчета фермы на различную нагрузку в системе компьютерной алгебры MathCAD:

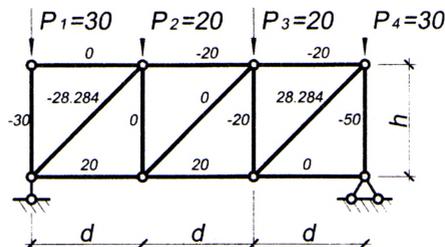
а) при $P_1=1; P_2=1; P_3=1; P_4=1$;



б) при $P_1=10; P_2=20; P_3=30; P_4=40$ (несимметричное нагружение);



в) при $P_1=30; P_2=20; P_3=20; P_4=30$ (симметричное нагружение);



Проанализировав результаты расчетов, можно сделать следующие выводы:

- наиболее растянутые стержни: № 6 ($N_6 = 37.712$) – при несимметричном нагружении, № 6 ($N_6 = 28.284$) – при симметричном нагружении;
- наиболее сжатые стержни – № 10 ($N_{10} = -66.667$) – при несимметричном нагружении, № 10 ($N_{10} = -50$) – при симметричном нагружении;
- сравнивая полученные результаты расчета с результатами, полученными с помощью методики расчета фермы лабораторной работы № 1, видим, что они совпадают.

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры MathCAD .

Матрица влияния фермы

ORIGIN := 1 - устанавливаем индексацию с 1, вместо 0 (по умолчанию)

$$LN := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Расчет на единичную нагрузку

Вектор внутренних усилий N

Вектор нагрузок

$$P := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$N := LN \cdot P$$

	1
1	0
2	-1
3	-1
4	-1.414
5	0
6	1.414
7	-1
8	0
9	-1
10	-2
11	1
12	1
13	0

$$N \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Расчет на несимметричную нагрузку

Расчет на симметричную нагрузку

$$P := \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$N := LN \cdot P$$

	1
1	0
2	-23.333
3	-26.667
4	-32.998
5	-4.714
6	37.712
7	-10
8	3.333
9	-26.667
10	-66.667
11	23.333
12	26.667
13	0

$$N \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{70}{3} \\ \frac{80}{3} \\ \frac{70\sqrt{2}}{3} \\ \frac{10\sqrt{2}}{3} \\ \frac{80\sqrt{2}}{3} \\ -10 \\ \frac{10}{3} \\ \frac{80}{3} \\ \frac{200}{3} \\ \frac{70}{3} \\ \frac{80}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P := \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$N := LN \cdot P$$

	1
1	0
2	-20
3	-20
4	-28.284
5	0
6	28.284
7	-30
8	0
9	-20
10	-50
11	20
12	20
13	0

$$N \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ -20 \\ -20\sqrt{2} \\ 0 \\ 20\sqrt{2} \\ -30 \\ 0 \\ -20 \\ -50 \\ 20 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Расчет на несимметричную и симметричную нагрузки с помощью лабораторной работы № 1

Параметры фермы

$$d := 2 \quad h := 2 \quad \cos := \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}} \quad \sin := \frac{h}{\sqrt{d^2 + h^2}}$$

Задание переменных

$$\begin{aligned} R_a := 0 \quad R_b := 0 \quad H_b := 0 \quad N_1 := 0 \quad N_2 := 0 \quad N_3 := 0 \quad N_4 := 0 \quad N_5 := 0 \\ N_6 := 0 \quad N_7 := 0 \quad N_8 := 0 \quad N_9 := 0 \quad N_{10} := 0 \quad N_{11} := 0 \quad N_{12} := 0 \quad N_{13} := 0 \end{aligned}$$

Несимметричная внешняя нагрузка

$$P_1 := 10 \quad P_2 := 20 \quad P_3 := 30 \quad P_4 := 40$$

Задание системы уравнений

Given

$$\begin{aligned} N_1 = 0 & & N_4 \cos + N_{11} = 0 \\ -P_1 - N_7 = 0 & & R_a + N_4 \sin + N_7 = 0 \\ -N_1 - N_4 \cos + N_2 = 0 & & -N_{11} + N_5 \cos + N_{12} = 0 \\ -P_2 - N_4 \sin - N_8 = 0 & & N_8 + N_5 \sin = 0 \\ -N_2 - N_5 \cos + N_3 = 0 & & -N_{12} + N_6 \cos + N_{13} = 0 \\ -P_3 - N_5 \sin - N_9 = 0 & & N_9 + N_6 \sin = 0 \\ -N_3 - N_6 \cos = 0 & & -N_{13} - H_b = 0 \\ -P_4 - N_6 \sin - N_{10} = 0 & & N_{10} + R_b = 0 \end{aligned}$$

Поиск решения

$$\text{Find}(R_a, R_b, H_b, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}) =$$

	1
1	33.333
2	66.667
3	0
4	0
5	-23.333
6	-26.667
7	-32.998
8	-4.714
9	37.712
10	-10
11	3.333
12	-26.667
13	-66.667
14	23.333
15	26.667
16	0

Симметричная внешняя нагрузка

$$P_1 := 30 \quad P_2 := 20 \quad P_3 := 20 \quad P_4 := 30$$

Задание системы уравнений

Given

$$\begin{aligned} N_1 = 0 & & N_4 \cos + N_{11} = 0 \\ -P_1 - N_7 = 0 & & R_a + N_4 \sin + N_7 = 0 \\ -N_1 - N_4 \cos + N_2 = 0 & & -N_{11} + N_5 \cos + N_{12} = 0 \\ -P_2 - N_4 \sin - N_8 = 0 & & N_8 + N_5 \sin = 0 \\ -N_2 - N_5 \cos + N_3 = 0 & & -N_{12} + N_6 \cos + N_{13} = 0 \\ -P_3 - N_5 \sin - N_9 = 0 & & N_9 + N_6 \sin = 0 \\ -N_3 - N_6 \cos = 0 & & -N_{13} - H_b = 0 \\ -P_4 - N_6 \sin - N_{10} = 0 & & N_{10} + R_b = 0 \end{aligned}$$

Поиск решения

$$\text{Find}(R_a, R_b, H_b, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}) =$$

	1
1	50
2	50
3	0
4	0
5	-20
6	-20
7	-28.284
8	$2.02 \cdot 10^{-14}$
9	28.284
10	-30
11	$-1.303 \cdot 10^{-14}$
12	-20
13	-50
14	20
15	20
16	0

Лабораторная работа № 3

Применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых многопролетных балок

Цель работы: изучить применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых многопролетных балок и решение систем линейных алгебраических уравнений.

Порядок выполнения работы:

1) разделить балку по шарнирам на простые балки (получим в качестве неизвестных в шарнирах внутренние силы и опорные реакции), показав усилия взаимодействия между ними;

2) получить общую систему уравнений равновесия рамы, составив уравнения равновесия для каждой простой балки;

3) определить усилия в простых балках и опорные реакции, решив полученную систему линейных алгебраических уравнений в системе компьютерной алгебры MathCAD;

4) построить эпюры усилий M , Q , N для каждой балки в отдельности и для всей многопролетной балки;

5) выполнить проверку выполнения общих закономерностей изменения эпюр усилий и статическую проверку.

Пример расчета.

Рассмотрим расчет многопролетной балки, показанной на рисунке 3.1

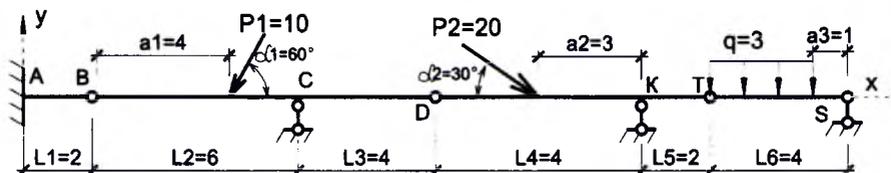


Рисунок 3.1

Каждая из простых балок – это диск, который имеет три степени свободы, равновесие которого описывается тремя уравнениями равновесия. Каждый шарнир, соединяющий балки, имеет две связи и при его разрезании в нем возникают соответственно две внутренние реактивные силы. Рассматриваемая многопролетная балка состоит из четырех простых балок, и для них соответственно можно составить двенадцать уравнений равновесия. Разделив многопролетную балку по трем шарнирам B, D, T на простые балки, получим в качестве неизвестных шесть внутренних реактивных сил и шесть опорных реакций в опорах.

Разобьем балку на простые балки. Обозначим реакции опор R_A , H_A , M_{RA} , R_B , R_D , R_S и неизвестные в шарнирах X_B , Y_B , X_D , Y_D , X_T , Y_T . (рис. 3.2).

Используя общий подход, следует составить уравнения равновесия для каждой из простых балок:

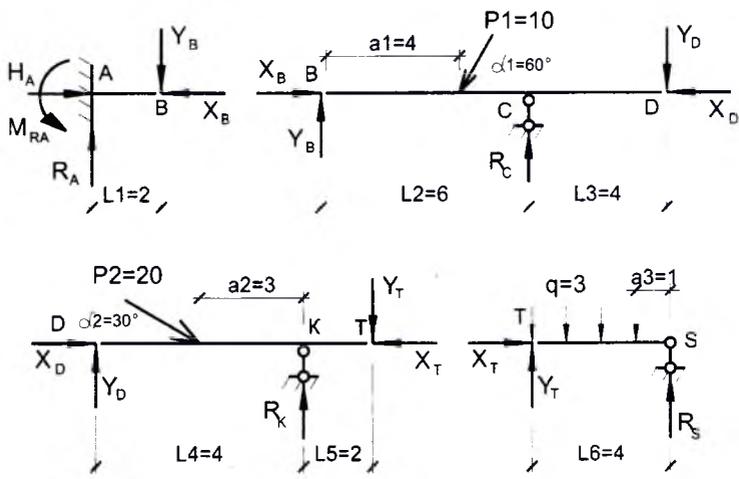


Рисунок 3.2

Для определения неизвестных усилий и реакций, решим систему уравнений, составленную уравнений равновесия для простых балок:

$$\left. \begin{cases} H_A - X_B = 0; \\ R_A - Y_B = 0; \\ -M_{RA} + Y_B \cdot L_1 = 0; \end{cases} \right\} \text{Уравнение равновесия балки AB}$$

$$\left. \begin{cases} X_B - P_1 \cdot \cos \alpha_1 - X_D = 0; \\ Y_B - P_1 \cdot \sin \alpha_1 + R_C - Y_D = 0; \\ P_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot a_1 - R_C \cdot L_2 + Y_D \cdot (L_2 + L_3) = 0; \end{cases} \right\} \text{Уравнение равновесия балки BCD}$$

$$\left. \begin{cases} X_D - X_T + P_2 \cdot \cos \alpha_2 = 0; \\ Y_D + R_K - Y_T - P_2 \cdot \sin \alpha_2 = 0; \\ P_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot (L_4 - a_2) - R_K \cdot L_4 + Y_T \cdot (L_4 + L_5) = 0; \end{cases} \right\} \text{Уравнение равновесия балки DKT}$$

$$\left. \begin{cases} X_T = 0; \\ Y_T + R_S - q \cdot (L_6 - a_3) = 0; \\ q \cdot (L_6 - a_3)^2 \cdot 0,5 - R_S \cdot L_6 = 0. \end{cases} \right\} \text{Уравнение равновесия балки TS}$$

После определения значений усилий строим эпюры M , Q , N (рис. 3.4). При этом необходимо выполнить проверку выполнения общих закономерностей изменения эпюр.

Для статической проверки составим три уравнения равновесия балки в целом, подставив полученные значения опорных реакций:

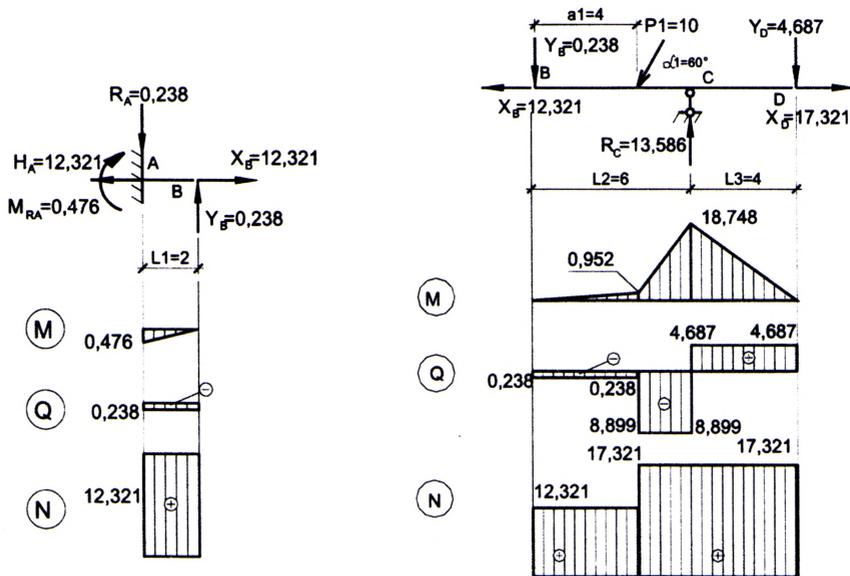
$$\begin{aligned} \sum X=0; & \quad H_A - P_1 \cdot \cos \alpha_1 + P_2 \cdot \cos \alpha_2 = 0; \\ \sum Y=0; & \quad R_A - P_1 \cdot \sin \alpha_1 - P_2 \cdot \sin \alpha_2 + R_C + R_K + R_S - q \cdot (L_6 - a_3) = 0; \\ \sum M_A=0; & \quad -M_{RA} + P_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot (L_1 + a_1) + P_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot (L_1 + L_2 + L_3 + (L_4 - a_2)) + \\ & \quad + q \cdot (L_6 - a_3) \cdot (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + \frac{(L_5 - a_3)}{2}) - R_C \cdot (L_1 + L_2) - \\ & \quad - R_K \cdot (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) - R_S \cdot (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6). \end{aligned}$$

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры MathCAD.

Теперь можно рассмотреть каждую балку отдельно с приложенными внешними нагрузками, опорными реакциями и усилиями между соседними балками (в шарнирах) и построить для каждой из них эпюры внутренних сил М, Q, N. Совместив эпюры усилий во всех простых балках на одной схеме, получим эпюры внутренних сил М, Q, N для многопролетной балки (рис.3.3).

Определим экстремум в балке TS: $\frac{5,625}{3-x} = \frac{3,375}{x}$; $\rightarrow 5,625 \cdot x = (3-x) \cdot 3,375$;

$$(5,625 + 3,375) \cdot x = 3 \cdot 3,375; \rightarrow x = 1,125 \text{ м}; M_{\max} = -3,375 \cdot 2,125 + 3 \cdot 1,125 \cdot \frac{1,125}{2} = -5,273 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$



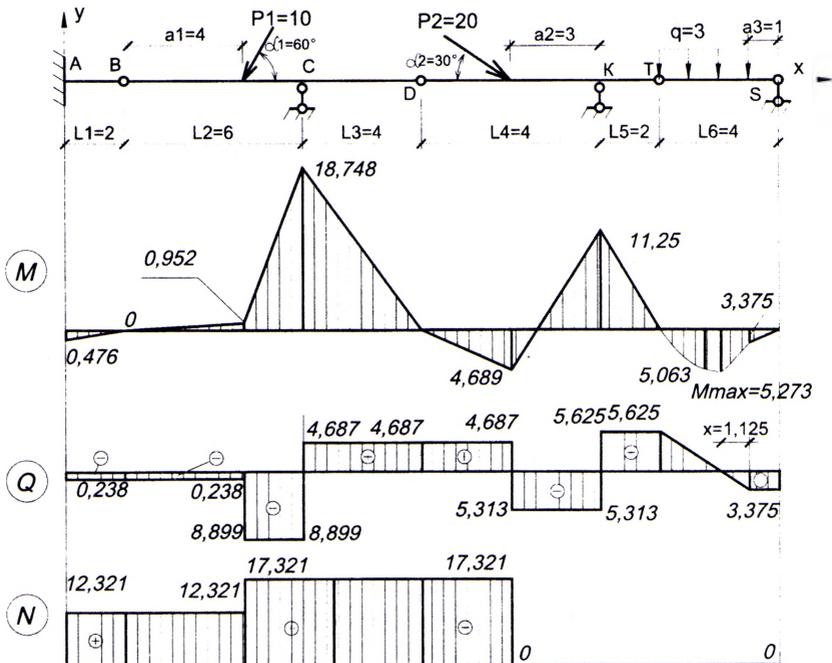
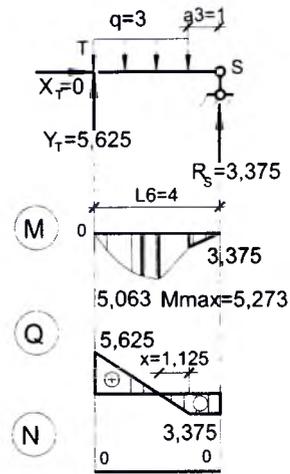
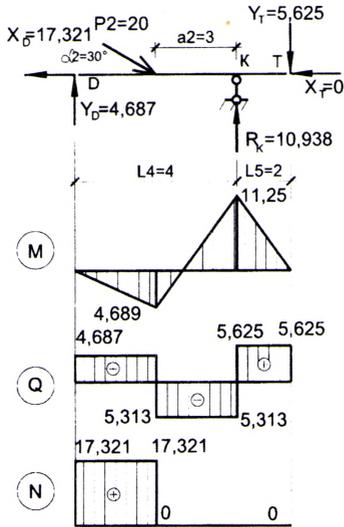


Рисунок 3.3

Параметры балки:

$$L1 := 2 \quad L2 := 6 \quad L3 := 4 \quad L4 := 4 \quad L5 := 2 \quad L6 := 4 \quad a1 := 4 \quad a2 := 3 \quad a3 := 1$$

$$\alpha1 := \frac{\pi}{3} \quad \alpha2 := \frac{\pi}{6}$$

Задание переменных:

$$Ra := 0 \quad Ha := 0 \quad Mra := 0 \quad Rc := 0 \quad Rk := 0 \quad Rs := 0$$

$$Xb := 0 \quad Yb := 0 \quad Xd := 0 \quad Yd := 0 \quad Xt := 0 \quad Yt := 0$$

Внешняя нагрузка:

$$P1 := 10 \quad P2 := 20 \quad q := 3$$

Задание системы уравнений:

Given

$$Ha - Xb = 0 \quad Xb - P1 \cdot \cos(\alpha1) - Xd = 0$$

$$Ra - Yb = 0 \quad Yb - P1 \cdot \sin(\alpha1) + Rc - Yd = 0$$

$$-Mra + Yb \cdot L1 = 0 \quad P1 \cdot \sin(\alpha1) \cdot a1 - Rc \cdot L2 + Yd \cdot (L2 + L3) = 0$$

$$Xd - Xt + P2 \cdot \cos(\alpha2) = 0$$

$$Xt = 0$$

$$Yd + Rk - Yt - P2 \cdot \sin(\alpha2) = 0$$

$$Yt + Rs - q \cdot (L6 - a3) = 0$$

$$P2 \cdot \sin(\alpha2) \cdot (L4 - a2) - Rk \cdot L4 + Yt \cdot (L4 + L5) = 0$$

$$q \cdot (L6 - a3)^2 \cdot 0.5 - Rs \cdot L6 = 0$$

Find(Mra, Ra, Ha, Rc, Rk, Rs, Xb, Yb, Xd, Yd, Xt, Yt) =

	0
0	-0.476
1	-0.238
2	-12.321
3	13.586
4	10.938
5	3.375
6	-12.321
7	-0.238
8	-17.321
9	4.687
10	0
11	5.625

$$\underline{Mra} := -0.476 \quad \underline{Ra} := -0.238 \quad \underline{Ha} := -12.321 \quad \underline{Rc} := 13.586 \quad \underline{Rk} := 10.938 \quad \underline{Rs} := 3.375$$

$$Ha - P1 \cdot \cos(\alpha1) + P2 \cdot \cos(\alpha2) = -4.919 \times 10^{-4}$$

$$Ra - P1 \cdot \sin(\alpha1) - P2 \cdot \sin(\alpha2) + Rc + Rk + Rs - q \cdot (L6 - a3) = 7.46 \times 10^{-4}$$

$$\begin{aligned} -Mra + P1 \cdot \sin(\alpha1) \cdot (L1 + a1) + P2 \cdot \sin(\alpha2) \cdot [L1 + L2 + L3 + (L4 - a2)] + \\ + q \cdot (L6 - a3) \cdot [L1 + L2 + L3 + L4 + L5 + (L6 - a3) \cdot 0.5] - Rc \cdot (L1 + L2) - \\ - Rk \cdot (L1 + L2 + L3 + L4) - Rs \cdot (L1 + L2 + L3 + L4 + L5 + L) = 0 \end{aligned}$$

Лабораторная работа № 4

Применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых рам

Цель работы: изучить применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых рам и решение систем линейных алгебраических уравнений.

Порядок выполнения работы:

- 1) разбить раму на простые стержни (прямолинейные элементы, в пределах которых нет изменения нагрузок), показав усилия взаимодействия между ними;
- 2) получить общую систему уравнений равновесия рамы, составив уравнения равновесия для каждого из стержней;
- 3) определить усилия в стержнях рамы, решив полученную систему линейных алгебраических уравнений в системе компьютерной алгебры MathCAD;
- 4) построить эпюры усилий M , Q , N рамы;
- 5) выполнить проверку выполнения общих закономерностей изменения эпюр усилий и статическую проверку.

Пример расчета. Рассмотрим расчет рамы, представленной на рис. 4.1 (при $d = 2\text{ м}$; $h = 2\text{ м}$; $P = 4\text{ кН}$; $m = 10\text{ кНм}$; $q = 10\text{ кН/м}$).

Разобьем раму на простые стержни, нумеруя узлы их соединения (1–7). Обозначим реакции опор R_{x1} , R_{y1} , R_6 , R_7 (рис. 4.2).

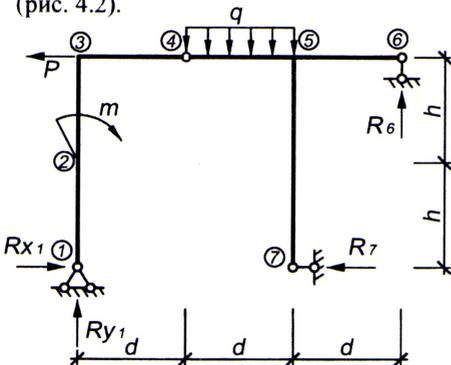


Рисунок 4.2

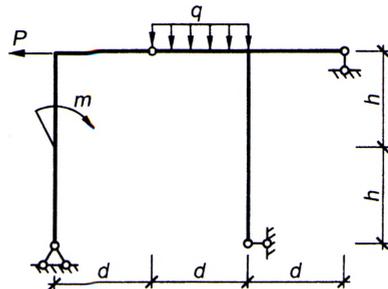


Рисунок 4.1

Вырезая каждый стержень, обозначим неизвестные внутренние усилия стержней рамы в характерных сечениях через x_i , y_i (продольные и поперечные усилия) и z_i (моменты), где i – номер характерного сечения (рис. 3.3). В случае соединения трех стержней в одном узле, вторую пару внутренних усилий будем обозначать через x'_i , y'_i , z'_i (см. узел 5).

В шарнирных соединениях отсутствуют моменты, поэтому там обозначаем только продольные и поперечные усилия (в узле 4 – x_4 , y_4).

При наличии сосредоточенной нагрузки или момента в узле, относим их к тому стержню, конечная точка которого примыкает к данному сечению (в нашем примере: внешний момент m относим к стержню 1-2; сосредоточенную нагрузку P – к стержню 2-3).

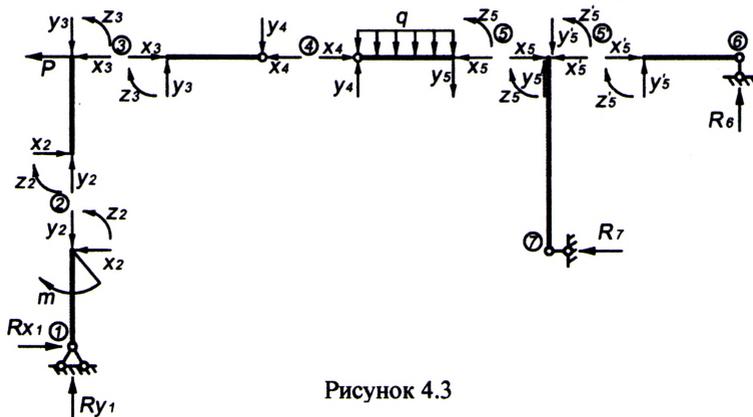


Рисунок 4.3

Составим уравнения равновесия для каждого стержня рамы, проецируя усилия и нагрузки на соответствующие оси. Суммы моментов берем относительно начальных сечений стержней.

Стержень 1-2:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & R_{x1} - x_2 &= 0; \\ \sum Y &= 0; & R_{y1} - y_2 &= 0; \\ \sum M_1 &= 0; & m - x_2 \cdot h - z_2 &= 0. \end{aligned}$$

Стержень 2-3:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & -P + x_2 - x_3 &= 0; \\ \sum Y &= 0; & y_2 - y_3 &= 0; \\ \sum M_2 &= 0; & -P \cdot h - x_3 \cdot h + z_2 - z_3 &= 0. \end{aligned}$$

Стержень 3-4:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & x_3 - x_4 &= 0; \\ \sum Y &= 0; & y_3 - y_4 &= 0; \\ \sum M_3 &= 0; & y_4 \cdot d + z_3 &= 0. \end{aligned}$$

Стержень 4-5:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & x_4 - x_5 &= 0; \\ \sum Y &= 0; & -q \cdot d + y_4 - y_5 &= 0; \\ \sum M_4 &= 0; & q \cdot d \cdot d/2 + y_5 \cdot d - z_5 &= 0. \end{aligned}$$

Стержень 5-6:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & x'_5 &= 0; \\ \sum Y &= 0; & R_6 + y'_5 &= 0; \\ \sum M_5 &= 0; & -R_6 \cdot d + z'_5 &= 0. \end{aligned}$$

Стержень 5-7:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & -R_7 + x_5 - x'_5 &= 0; \\ \sum Y &= 0; & y_5 - y'_5 &= 0; \\ \sum M_5 &= 0; & R_7 \cdot 2h + z_5 - z'_5 &= 0. \end{aligned}$$

Для определения неизвестных усилий и реакций, решим систему уравнений, составленную из полученных ранее уравнений равновесия стержней рамы:

$$\left\{ \begin{array}{l} Rx_1 - x_2 = 0; \\ Ry_1 - y_2 = 0; \\ m - x_2 \cdot h - z_2 = 0; \\ -P + x_2 - x_3 = 0; \\ y_2 - y_3 = 0; \\ -P \cdot h - x_3 \cdot h + z_2 - z_3 = 0; \\ x_3 - x_4 = 0; \\ y_3 - y_4 = 0; \\ y_4 \cdot d + z_3 = 0; \\ x_4 - x_5 = 0; \\ -q \cdot d + y_4 - y_5 = 0; \\ q \cdot d \cdot d/2 + y_5 \cdot d - z_5 = 0; \\ x'_5 = 0; \\ R_6 + y'_5 = 0; \\ -R_6 \cdot d + z'_5 = 0; \\ -R_7 + x_5 - x'_5 = 0; \\ y_5 - y'_5 = 0; \\ R_7 \cdot 2h + z_5 - z'_5 = 0. \end{array} \right.$$

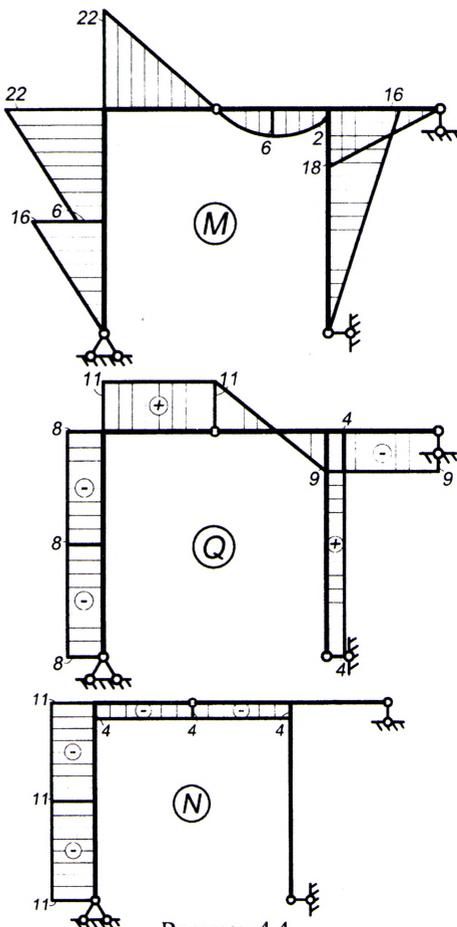


Рисунок 4.4

После определения значений усилий, строим эпюры M , Q , N (рис. 4.4). При этом необходимо выполнить проверку выполнения общих закономерностей изменения эпюр.

Для статической проверки составим три уравнения равновесия рамы, подставив полученные значения опорных реакций:

$$\sum X = 0; \quad Rx_1 + P - R_7 = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad Ry_1 - q \cdot d + R_6 = 0;$$

$$\sum M_4 = 0; \quad Ry_1 \cdot d - Rx_1 \cdot 2h - m + q \cdot d \cdot d/2 - R_6 \cdot 2d + R_7 \cdot 2h = 0.$$

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры MathCAD.

Параметры рамы

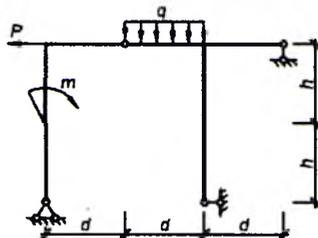
$$d := 2 \quad h := 2$$

Задание переменных

$$\begin{aligned} R_{x1} &:= 0 & R_{y1} &:= 0 & R_6 &:= 0 & R_7 &:= 0 & x_4 &:= 0 & y_4 &:= 0 \\ x_2 &:= 0 & y_2 &:= 0 & z_2 &:= 0 & x_5 &:= 0 & y_5 &:= 0 & z_5 &:= 0 \\ x_3 &:= 0 & y_3 &:= 0 & z_3 &:= 0 & x_{5i} &:= 0 & y_{5i} &:= 0 & z_{5i} &:= 0 \end{aligned}$$

Внешняя нагрузка

$$m := 10 \quad P := 4 \quad q := 10$$



Задание системы уравнений

Given

$$\begin{aligned} R_{x1} - x_2 &= 0 & x_4 - x_5 &= 0 \\ R_{y1} - y_2 &= 0 & -q \cdot d + y_4 - y_5 &= 0 \\ m - x_2 \cdot h - z_2 &= 0 & q \cdot d \cdot \frac{d}{2} + y_5 \cdot d - z_5 &= 0 \\ -P + x_2 - x_3 &= 0 & x_{5i} &= 0 \\ y_2 - y_3 &= 0 & R_6 + y_{5i} &= 0 \\ -P \cdot h - x_3 \cdot h + z_2 - z_3 &= 0 & -R_6 \cdot d + z_{5i} &= 0 \\ x_3 - x_4 &= 0 & -R_7 + x_5 - x_{5i} &= 0 \\ y_3 - y_4 &= 0 & y_5 - y_{5i} &= 0 \\ y_4 \cdot d + z_3 &= 0 & R_7 \cdot 2 \cdot h + z_5 - z_{5i} &= 0 \end{aligned}$$

Поиск решения

$$\text{Find}(R_{x1}, R_{y1}, R_6, R_7, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, x_4, y_4, x_5, y_5, z_5, x_{5i}, y_{5i}, z_{5i}) =$$

	0
0	8
1	11
2	9
3	4
4	8
5	11
6	-6
7	4
8	11
9	-22
10	4
11	11
12	4
13	-9
14	2
15	0
16	-9
17	18

Проверка

$$R_{x1} := 8 \quad R_{y1} := 11 \quad R_6 := 9 \quad R_7 := 4$$

$$R_{x1} - P - R_7 = 0$$

$$R_{y1} - q \cdot d + R_6 = 0$$

$$R_{y1} \cdot d - R_{x1} \cdot 2 \cdot h + m + q \cdot d \cdot \frac{d}{2} - R_6 \cdot 2 \cdot d + R_7 \cdot 2 \cdot h = 0$$

Лабораторная работа № 5

Расчет усилий в трехшарнирных арках

Цель работы: изучить расчет усилий и построение эпюр усилий в трехшарнирных арках с использованием численного подхода.

Порядок выполнения работы:

1) определить опорные реакции и выполнить расчет усилий M , Q , N в сечениях арки с заданным шагом, обеспечивающим достаточно точное представление нелинейных по длине арки зависимостей усилий;

2) построить для рассматриваемой арки эпюры усилий M , Q , N ;

3) выполнить проверку выполнения общих закономерностей изменения эпюр внутренних сил M , Q и N .

Примечание: все необходимые расчеты выполнить в системе компьютерной алгебры MathCAD.

Пример расчета. Рассмотрим расчет арки пролетом $L = 32$ м со стрелой подъема $f = 10$ м, ось которой изменяется по круговому закону (рисунок 5.1).

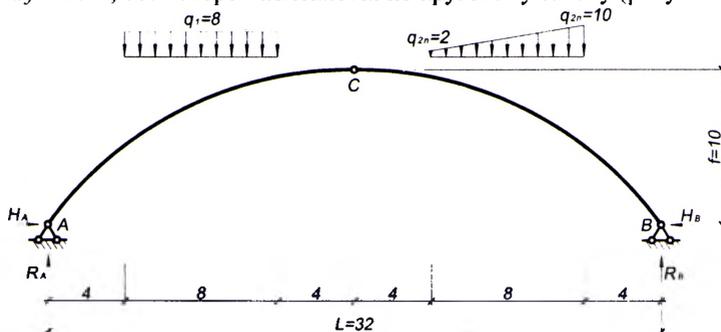


Рисунок 5.1

Определим опорные реакции арки, используя уравнения равновесия:

$$\sum M_B = 0; R_A \cdot L - q_1 \cdot 8 \cdot 24 - q_{2,n} \cdot 8 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot (q_{2,n} - q_{2,l}) \cdot 8 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 8 + 4\right) = 0;$$

$$R_A = \frac{q_1 \cdot 8 \cdot 24 + q_{2,n} \cdot 8 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot (q_{2,n} - q_{2,l}) \cdot 8 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 8 + 4\right)}{L};$$

$$\sum M_A = 0; -R_B \cdot L + q_1 \cdot 8 \cdot 8 + q_{2,l} \cdot 8 \cdot 24 + \frac{1}{2} \cdot (q_{2,n} - q_{2,l}) \cdot 8 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 8 + 20\right) = 0;$$

$$R_B = \frac{q_1 \cdot 8 \cdot 8 + q_{2,l} \cdot 8 \cdot 24 + \frac{1}{2} \cdot (q_{2,n} - q_{2,l}) \cdot 8 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 8 + 20\right)}{L};$$

$$\sum M_C^{лев} = 0; -H_A \cdot f + R_A \cdot \frac{L}{2} - q_1 \cdot 8 \cdot 8 = 0; \quad H_A = \frac{R_A \cdot \frac{L}{2} - q_1 \cdot 8 \cdot 8}{f}.$$

Так как арка нагружена только вертикальными нагрузками, горизонтальные реакции опор будут одинаковы: $H = H_A = H_B$.

Проверка нахождения реакций опор:

$$\sum M_C^{np} = 0; -R_B \cdot \frac{L}{2} + H_B \cdot f + q_{2,l} \cdot 8 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot (q_{2,l} - q_{2,r}) \cdot 8 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 8 + 4\right) = 0.$$

Усилия в арке определяем методом сечений. Разбиваем пролет арки на n одинаковых частей ($\Delta x = L/n$), обеспечивающих достаточное число сечений для представления нелинейных по длине арки зависимостей. Отметим, что, чем на большее число частей разобьем пролет, тем меньше будет шаг разбиения Δx и тем больше будем иметь расчетных сечений для вычисления ординат усилий, и тем более точно можно будет отобразить эпюры усилий.

В данном примере разобьем пролет арки на 16 частей ($\Delta x = 32/16 = 2$ м) и получим 17 расчетных сечений (0, 1, 2, ..., 16).

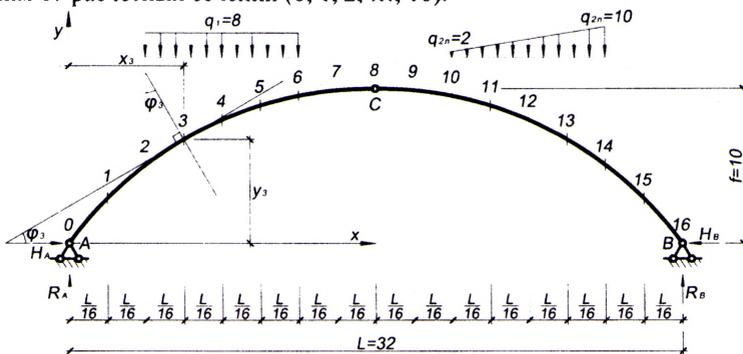


Рисунок 5.2

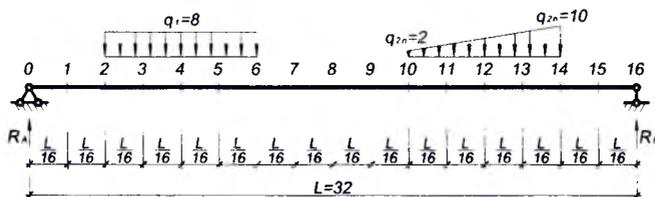


Рисунок 5.3

Величины усилий M , Q , N в сечениях арки определяются по формулам: $M_i = Mo_i - H \cdot y_i$; $Q_i = Qo_i \cos \varphi_i - H \sin \varphi_i$; $N_i = -(Qo_i \sin \varphi_i + H \cos \varphi_i)$, где Mo_i , Qo_i – изгибающий момент и поперечная сила в i -ом сечении простой двухопорной балки, имеющей такой же пролет, как арка, и нагруженной такой же нагрузкой, как арка (рисунок 5.3); H – распор арки; y_i , $\sin \varphi_i$, $\cos \varphi_i$ – ордината, синус и косинус угла наклона касательной к оси арки по отношению к горизонтальной оси (либо угол между нормалью к оси арки и вертикальной осью) для i -го сечения арки (рисунок 5.1).

Абсцисса x_i для каждого (i -го) сечения определяется выражением:

$$x_i = \Delta x \cdot i.$$

Ординаты y_i , синусы и косинусы углов наклона касательных ($\sin \varphi_i$, $\cos \varphi_i$) для сечений найдем, используя геометрические зависимости, представленные для различных очертаний осей арок в приложении к данному разделу.

Все расчеты для сечений и построения эпюр усилий выполняем в системе компьютерной алгебры MathCAD.

Геометрические характеристики трехшарнирных арок:

а) для круговых арок:

$$R = \frac{4f^2 + l^2}{8f}; \quad y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - R + f;$$

$$\sin \varphi = \frac{l - 2x}{2R}; \quad \cos \varphi = \frac{y + R - f}{R} = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}; \quad (5.1)$$

б) для параболических арок:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x); \quad \operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{4f}{l^2} (l - 2x);$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}; \quad \sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \varphi; \quad (5.2)$$

в) для синусоидальных арок:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}; \quad \operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{\pi f}{l} \cos \frac{\pi x}{l}; \quad \sin \varphi \text{ и } \cos \varphi \rightarrow \text{см. (4.2)}; \quad (5.3)$$

г) для эллиптических арок:

$$y = k \sqrt{a^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - ka + f; \quad \operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{k \left(\frac{l}{2} - x\right)}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2}}; \quad (5.4)$$

где $a = \frac{f}{2k} + \frac{kl^2}{8f}; \quad k = \frac{4f}{l}; \quad \sin \varphi \text{ и } \cos \varphi \rightarrow \text{см. (5.2)};$

д) для гиперболических арок:

$$y = f + a - \sqrt{\frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{k^2} + a^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)}{k^2 \sqrt{\frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{k^2} + a^2}}; \quad (5.5)$$

где $a = \frac{l^2}{8k^2 f} - \frac{f}{2}; \quad k = \frac{l}{\pi f}; \quad \sin \varphi \text{ и } \cos \varphi \rightarrow \text{см. (5.2)}.$

Круговая арка $L := 32$ - пролет арки $f := 10$ - стрела подъема арки

Опорные реакции

$$R_a := \frac{8 \cdot 8 \cdot 24 + 2 \cdot 8 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 8 + 4\right)}{L} = 58.667$$

$$R_b := \frac{8 \cdot 8 \cdot 8 + 2 \cdot 8 \cdot 24 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 8 + 20\right)}{L} = 53.333$$

$$H_a := \frac{R_a \cdot \frac{L}{2} - 8 \cdot 8 \cdot 8}{f} = 42.667$$

$$H_b := H_a = 42.667$$

$$H := H_a = 42.667$$

Проверка

$$\Sigma M_{сгр} := -R_b \cdot \frac{L}{2} + H_b \cdot 10 + 2 \cdot 8 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 8 + 4\right) = 0$$

Определение координат сечений, синусов и косинусов угла касательной

$i := 0..16$ - массив сечений

$$\Delta x := \frac{L}{16} = 2 \quad x_i := i \cdot \Delta x \quad R := \frac{4f^2 + L^2}{8f} \quad y_i := \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2} - x_i\right)^2} - R + f$$

$$\sin \varphi_i := \frac{L - 2 \cdot x_i}{2R} \quad \cos \varphi_i := \frac{y_i + R - f}{R}$$

Определение балочных усилий Мо и Qo

левая сторона

$$M_{o_0} := 0$$

$$M_{o_1} := R_a \cdot 2 = 117.333$$

$$M_{o_2} := R_a \cdot 4 = 234.667$$

$$M_{o_3} := R_a \cdot 6 - 8 \cdot 2 \cdot 1 = 336$$

$$M_{o_4} := R_a \cdot 8 - 8 \cdot 4 \cdot 2 = 405.333$$

$$M_{o_5} := R_a \cdot 10 - 8 \cdot 6 \cdot 3 = 442.667$$

$$M_{o_6} := R_a \cdot 12 - 8 \cdot 8 \cdot 4 = 448$$

$$M_{o_7} := R_a \cdot 14 - 8 \cdot 8 \cdot 6 = 437.333$$

$$M_{o_8} := R_a \cdot 16 - 8 \cdot 8 \cdot 8 = 426.667$$

$$Q_{o_0} := R_a = 58.667$$

$$Q_{o_1} := R_a = 58.667$$

$$Q_{o_2} := R_a = 58.667$$

$$Q_{o_3} := R_a - 8 \cdot 2 = 42.667$$

$$Q_{o_4} := R_a - 8 \cdot 4 = 26.667$$

$$Q_{o_5} := R_a - 8 \cdot 6 = 10.667$$

$$Q_{o_6} := R_a - 8 \cdot 8 = -5.333$$

$$Q_{o_7} := R_a - 8 \cdot 8 = -5.333$$

$$Q_{o_8} := R_a - 8 \cdot 8 = -5.333$$

	0
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14
8	16
9	18
10	20
11	22
12	24
13	26
14	28
15	30
16	32

	0
0	0
1	3.193
2	5.347
3	6.925
4	8.101
5	8.958
6	9.545
7	9.887
8	10
9	9.887
10	9.545
11	8.958
12	8.101
13	6.925
14	5.347
15	3.193
16	0

правая сторона

$$M_{o_{16}} := 0$$

$$M_{o_{15}} := R_b \cdot 2 = 106.667$$

$$M_{o_{14}} := R_b \cdot 4 = 213.333$$

$$M_{o_{13}} := R_b \cdot 6 - 8 \cdot 2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2\right) = 301.333$$

$$M_{o_{12}} := R_b \cdot 8 - 8 \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 4\right) = 357.333$$

$$M_{o_{11}} := R_b \cdot 10 - 8 \cdot 6 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6\right) = 389.333$$

$$M_{o_{10}} := R_b \cdot 12 - 8 \cdot 8 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 8\right) = 405.333$$

$$M_{o_9} := R_b \cdot 14 - 8 \cdot 8 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 8 + 2\right) = 416$$

$$M_{o_8} := R_b \cdot 16 - 8 \cdot 8 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 8 + 4\right) = 426.667$$

$$Q_{o_{16}} := -R_b = -53.333$$

$$Q_{o_{15}} := -R_b = -53.333$$

$$Q_{o_{14}} := -R_b = -53.333$$

$$Q_{o_{13}} := -R_b + 8 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = -35.333$$

$$Q_{o_{12}} := -R_b + 8 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = -21.333$$

$$Q_{o_{11}} := -R_b + 8 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = -11.333$$

$$Q_{o_{10}} := -R_b + 8 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = -5.333$$

$$Q_{o_9} := -R_b + 2 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = -5.333$$

$$Q_{o_8} := -R_b + 2 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = -5.333$$

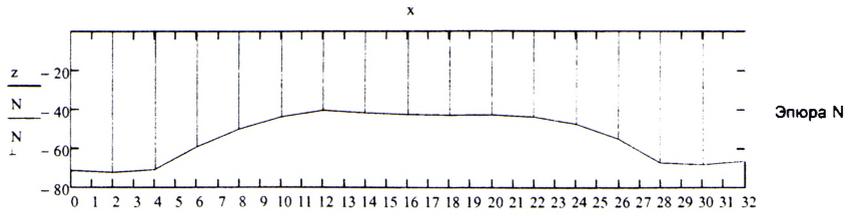
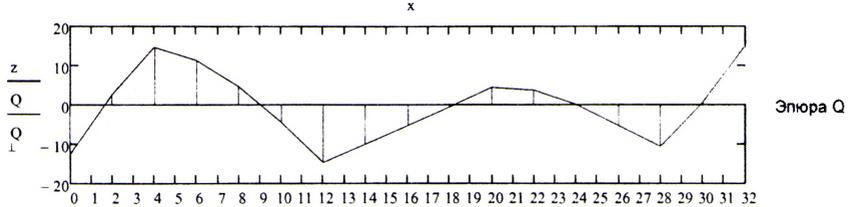
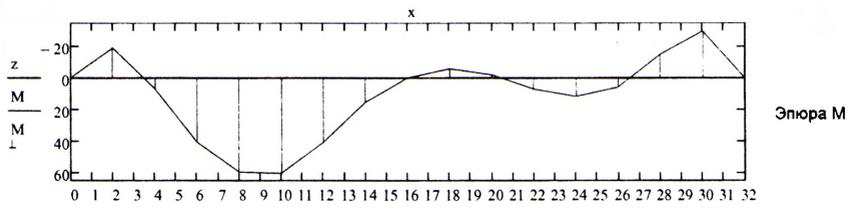
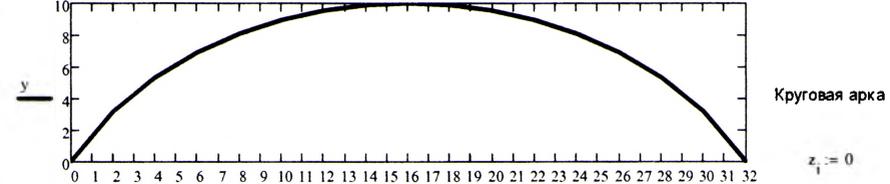
Определение усилий M, Q, N в арке

$$M_i := M_{o_i} - H \cdot y_i$$

$$Q_i := Q_{o_i} \cdot \cos \varphi_i - H \cdot \sin \varphi_i$$

$$N_i := -(Q_{o_i} \cdot \sin \varphi_i + H \cdot \cos \varphi_i)$$

	0		0		0		0		0	
	0	0.899	0	0.438	0	0	0	-12.644	0	-71.431
	1	0.787	1	0.618	1	-18.89	1	2.673	1	-72.492
	2	0.674	2	0.739	2	6.534	2	14.566	2	-71.064
	3	0.562	3	0.827	3	40.513	3	11.327	3	-59.267
	4	0.449	4	0.893	4	59.693	4	4.646	4	-50.1
	5	0.337	5	0.941	5	60.447	5	-4.34	5	-43.765
	6	0.225	6	0.974	6	40.758	6	-14.785	6	-40.377
	7	0.112	7	0.994	7	15.476	7	-10.094	7	-41.797
	8	0	8	1	8	0	8	-5.333	8	-42.667
	9	-0.112	9	0.994	9	-5.857	9	-0.506	9	-42.996
	10	-0.225	10	0.974	10	-1.909	10	4.391	10	-42.774
	11	-0.337	11	0.941	11	7.113	11	3.712	11	-43.99
	12	-0.449	12	0.893	12	11.693	12	0.119	12	-47.703
	13	-0.562	13	0.827	13	5.846	13	-5.26	13	-55.147
	14	-0.674	14	0.739	14	-14.799	14	-10.627	14	-67.468
	15	-0.787	15	0.618	15	-29.556	15	0.621	15	-68.297
	16	-0.899	16	0.438	16	0	16	14.981	16	-66.637



Лабораторная работа № 6

Определение перемещений в трехшарнирных арках

Цель работы: изучить процедуру определения перемещений в трехшарнирных арках с использованием численного интегрирования.

Порядок выполнения работы:

1) определить перемещение одного из сечений арки, используя формулу Мора и один из численных способов вычисления интегралов, для чего:

1.1) построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил от действия внешней нагрузки, от которой определяется перемещение;

1.2) в точке (в сечении), перемещение которой определяется, в направлении искомого перемещения приложить единичную «силу» и от ее действия построить единичные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил;

1.3) вычислить перемещение по формуле Мора, используя для вычисления интегралов один из численных способов (например, формулу трапеций).

2) исследовать влияние изгибающих моментов, поперечных и продольных сил на величину перемещения сечения арки, определив вклад в перемещение учета каждой из внутренних сил.

Примечание: все необходимые расчеты выполнить в системе компьютерной алгебры MathCAD.

Пример расчета. Выполним расчет трехшарнирной арки, рассмотренной ранее в лабораторной работе № 4, что позволяет воспользоваться ее результатами, то есть эпюрами M_p , Q_p , N_p . Определим вертикальное перемещение, например, 4-го сечения (рис 6.1), в котором изгибающий момент от действия внешней нагрузки достигает наибольшей величины.

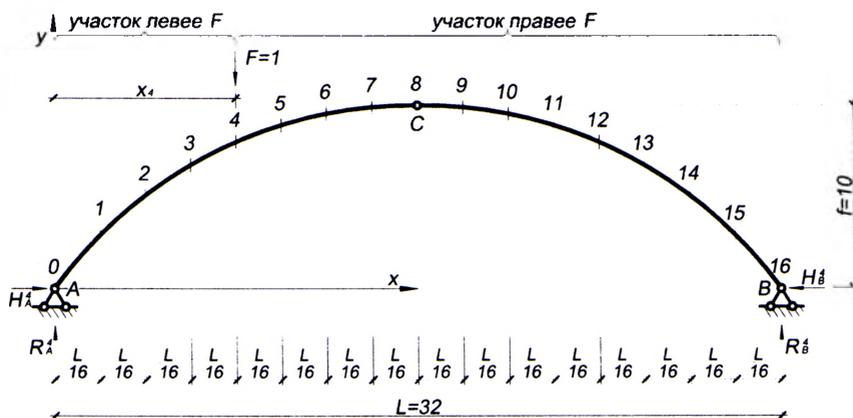


Рисунок 6.1

Перемещение некоторого (i -го) сечения арки в общем случае (с учетом поперечных и продольных сил) определяется по формуле Мора вида

$$\Delta_i = \int_0^L \frac{\overline{Mi} M_p dx}{EJ} + \int_0^L \eta \frac{\overline{Qi} Q_p dx}{GA} + \int_0^L \frac{\overline{Ni} N_p dx}{EA},$$

где EJ , GA , EA – жесткости арки соответственно при изгибе, сдвиге и растяжении-сжатии;

η – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по высоте сечения при изгибе (для прямоугольного сечения равен 1,2);

\overline{Mi} , \overline{Qi} , \overline{Ni} – законы изменения единичных эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в арке от действия единичной сосредоточенной нагрузки, приложенной в i -м сечении, в котором определяется перемещение;

M_p , Q_p , N_p – законы изменения эпюр M , Q и N в арке от действия внешних нагрузок (были получены ранее в лабораторной работе № 5).

При замене для вычисления интегралов Мора интегрирования численным суммированием, получим:

$$\Delta_i = \frac{\Delta x}{EJ} \sum_{j=1}^n \overline{Mi}_j M_{pj} + \eta \frac{\Delta x}{GA} \sum_{j=1}^n \overline{Qi}_j Q_{pj} + \frac{\Delta x}{EA} \sum_{j=1}^n \overline{Ni}_j N_{pj}.$$

Разбили арку на 16 частей и хотим определить в 4-м сечении, то выражение примет вид:

$$\Delta_4 = \Delta_4^M + \Delta_4^Q + \Delta_4^N = \frac{\Delta x}{EJ} \sum_{j=1}^{16} \overline{M4}_j M_{pj} + \eta \frac{\Delta x}{GA} \sum_{j=1}^{16} \overline{Q4}_j Q_{pj} + \frac{\Delta x}{EA} \sum_{j=1}^{16} \overline{N4}_j N_{pj}.$$

Численное вычисление будем производить по формуле трапеций.

Для построения единичных эпюр рассмотрим арку с приложенной единичной сосредоточенной силой $F = 1$ в 4-м сечении (рис. 5.1).

Определим опорные реакции в такой арке:

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0; \quad R_A^4 = \frac{L - x_4}{L}; \quad \sum M_A = 0; \quad R_B^4 = \frac{x_4}{L}; \\ \sum M_C^{\text{ле}} = 0; \quad H_A^4 = \frac{L/2(R_A^4 - 1) + x_4}{f}; \quad \sum X = 0; \quad H_B^4 = H_A^4. \end{aligned}$$

Так как эпюра изгибающих моментов в точке приложения силы $F=1$ будет иметь излом, а эпюры поперечных и продольных сил будут иметь скачок, то зависимости изменения эпюр этих усилий слева и справа от силы будут различными, и далее в расчете необходимо рассматривать два участка арки (левее и правее единичной силы F). Соответственно будем рассматривать два массива сечений: iL (с 0-го сечения по 4-е включительно) и iR (с 4-го сечения по 16-е включительно). Значения балочных усилий M_0 и Q_0 определяются:

$$Mo_{iL}^4 = R_A^4 \cdot x_{iL}; \quad Qo_{iL}^4 = R_A^4; \quad (\text{для сечений левее единичной нагрузки}),$$

$$Mo_{iR}^4 = R_A^4 \cdot x_{iR} - 1 \cdot (x_{iR} - x_A); \quad Qo_{iR}^4 = R_A^4 - 1; \quad (\text{правее единичной нагрузки}).$$

Значения усилий M, Q, N в сечениях арки определяются соответственно:

$$M_{iL} = Mo_{iL} - H \cdot y_{iL}; \quad Q_{iL} = Qo_{iL} \cos \varphi_{iL} - H \sin \varphi_{iL}; \quad N_{iL} = -(Qo_{iL} \sin \varphi_{iL} + H \cos \varphi_{iL}).$$

$$M_{iR} = Mo_{iR} - H \cdot y_{iR}; \quad Q_{iR} = Qo_{iR} \cos \varphi_{iR} - H \sin \varphi_{iR}; \quad N_{iR} = -(Qo_{iR} \sin \varphi_{iR} + H \cos \varphi_{iR}).$$

Слагаемые $\Delta_4^M, \Delta_4^Q, \Delta_4^N$ будут определяться как сумма слагаемых выражения перемещения для правого и левого участка арки:

$$\Delta_4^M = \Delta_{4\text{лев}}^M + \Delta_{4\text{прав}}^M; \quad \Delta_4^Q = \Delta_{4\text{лев}}^Q + \Delta_{4\text{прав}}^Q; \quad \Delta_4^N = \Delta_{4\text{лев}}^N + \Delta_{4\text{прав}}^N.$$

Для исследования влияния усилий M, Q, N на перемещение сечения определим вклад каждого слагаемого выражения перемещения в общую сумму:

$$\frac{\Delta_4^M}{\Delta_4} \cdot 100\%, \quad \frac{\Delta_4^Q}{\Delta_4} \cdot 100\%, \quad \frac{\Delta_4^N}{\Delta_4} \cdot 100\%.$$

Выполнив расчеты в системе компьютерной алгебры MathCAD и проанализировав результаты, можно сделать следующий вывод:

наибольшее влияние на величину перемещения оказывают изгибающие моменты, влияние поперечных и продольных сил составляет 3,7%, то есть невелико, а влияние поперечных составляет 0,435%, то есть незначительно.

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры MathCAD .

$$\begin{aligned}
 EJ &:= 1 \cdot 10^7 && \text{- жесткость арки при изгибе} && \eta &:= 1.2 && \text{- коэффициент, учитывающий неравномерность} \\
 GA &:= 1.28 \times 10^8 && \text{- жесткость арки при сдвиге} && && \text{распределения касательных напряжений} \\
 EA &:= 3.33 \times 10^8 && \text{- жесткость арки при растяжении-сжатии} && && \text{по высоте сечения при изгибе} \\
 &&& && && \text{(для прямоугольного сечения)}
 \end{aligned}$$

Определение опорных реакций при приложении единичной нагрузки в 4-ом сечении

$$R4a := \frac{L - x_4}{L} = 0.75 \quad R4b := \frac{x_4}{L} = 0.25 \quad H4a := \frac{\frac{L}{2}(R4a - 1) + x_4}{f} = 0.4 \quad H4b := H4a = 0.4$$

Проверка: $-R4b \frac{L}{2} + H4b f = 0$

Рассмотрим два участка арки (левее и правее единичной нагрузки)

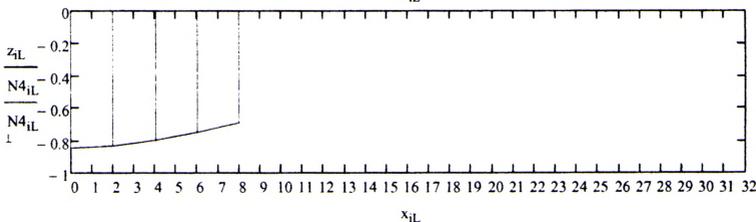
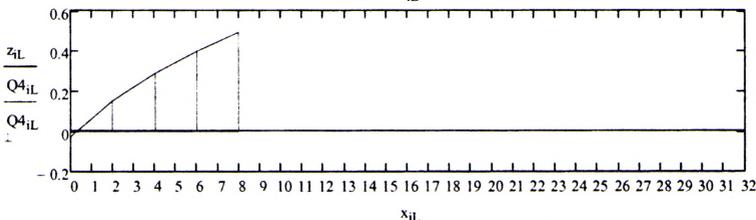
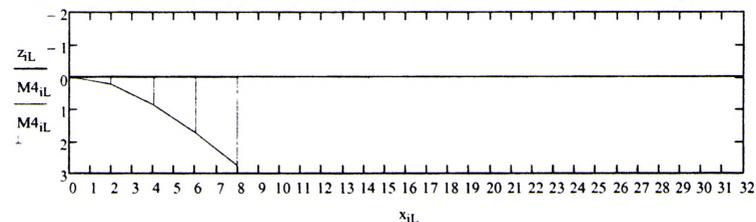
$iL := 0..4$ - массив сечений левее единичной нагрузки

Балочные значения M_0 и Q_0 (левее единичной нагрузки)

$$M4_{iL} := R4a \cdot x_{iL} \quad Q4_{iL} := R4a$$

Определение усилий M , Q , N в арке (левее единичной нагрузки)

$$M4_{iL} := M4_{iL} - H4a \cdot y_{iL} \quad Q4_{iL} := Q4_{iL} \cdot \cos \varphi_{iL} - H4a \cdot \sin \varphi_{iL} \quad N4_{iL} := -(Q4_{iL} \cdot \sin \varphi_{iL} + H4a \cdot \cos \varphi_{iL})$$



$$\Delta M4L := \frac{\Delta x}{6 \cdot EJ} \sum_{j=1}^4 (2 \cdot M4_{j-1} \cdot M_{j-1} + M4_{j-1} \cdot M_j + M4_j \cdot M_{j-1} + 2 \cdot M4_j \cdot M_j) = 2.873 \times 10^{-5} \quad \text{- перемножение единичной и грузовой эпюр M лев. участка}$$

$$\Delta Q4L := \frac{\eta \cdot \Delta x}{6 \cdot GA} \sum_{j=1}^4 (2 \cdot Q4_{j-1} \cdot Q_{j-1} + Q4_{j-1} \cdot Q_j + Q4_j \cdot Q_{j-1} + 2 \cdot Q4_j \cdot Q_j) = 1.836 \times 10^{-7} \quad \text{- перемножение единичной и грузовой эпюр Q лев. участка}$$

$$\Delta N4L := \frac{\Delta x}{6 \cdot EA} \sum_{j=1}^4 (2 \cdot N4_{j-1} \cdot N_{j-1} + N4_{j-1} \cdot N_j + N4_j \cdot N_{j-1} + 2 \cdot N4_j \cdot N_j) = 1.26 \times 10^{-6} \quad \text{- перемножение единичной и грузовой эпюр N лев. участка}$$

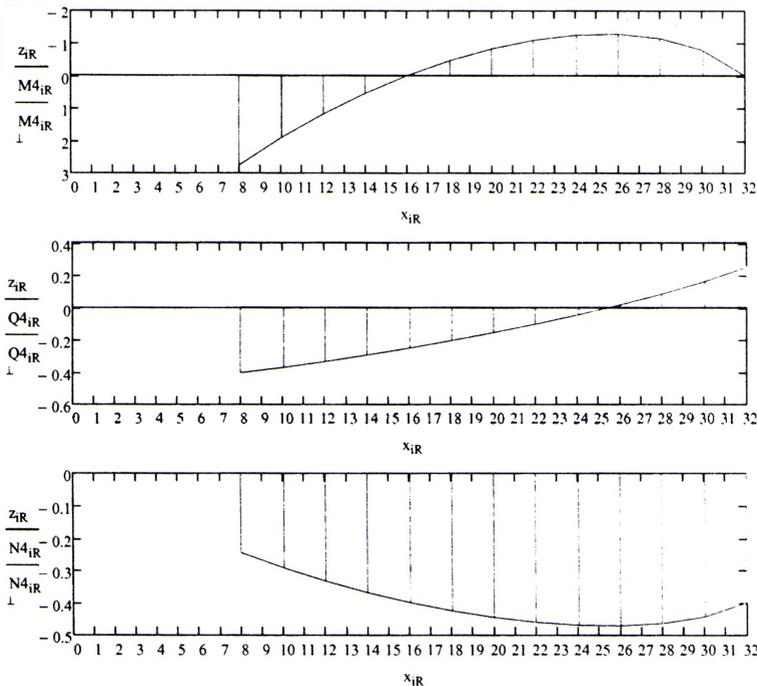
$iR := 4 \dots 16$ - массив сечений правее единичной нагрузки

Балочные значения M_0 и Q_0 (правее единичной нагрузки)

$$M4_{iR} := R4a \cdot x_{iR} - 1 \cdot (x_{iR} - x_4) \quad Q4_{iR} := R4a - 1$$

Определение усилий M , Q , N в арке (правее единичной нагрузки)

$$M4_{iR} := M4_{iR} - H4a \cdot y_{iR} \quad Q4_{iR} := Q4_{iR} \cdot \cos\varphi_{iR} - H4a \cdot \sin\varphi_{iR} \quad N4_{iR} := -(Q4_{iR} \cdot \sin\varphi_{iR} + H4a \cdot \cos\varphi_{iR})$$



$$\Delta M4R := \frac{\Delta x}{6 \cdot EJ} \sum_{i=5}^{16} (2 \cdot M4_{j-1} \cdot M_{j-1} + M4_{j-1} \cdot M_j + M4_j \cdot M_{j-1} + 2 \cdot M4_j \cdot M_j) = 5.213 \times 10^{-5} \text{ - перемножение единичной и грузовой эпюр } M \text{ прав. участка}$$

$$\Delta Q4R := \frac{\eta \cdot \Delta x}{6 \cdot GA} \sum_{i=5}^{16} (2 \cdot Q4_{j-1} \cdot Q_{j-1} + Q4_{j-1} \cdot Q_j + Q4_j \cdot Q_{j-1} + 2 \cdot Q4_j \cdot Q_j) = 1.817 \times 10^{-7} \text{ - перемножение единичной и грузовой эпюр } Q \text{ прав. участка}$$

$$\Delta N4R := \frac{\Delta x}{6 \cdot EA} \sum_{j=5}^{16} (2 \cdot N4_{j-1} \cdot N_{j-1} + N4_{j-1} \cdot N_j + N4_j \cdot N_{j-1} + 2 \cdot N4_j \cdot N_j) = 1.477 \times 10^{-6} \text{ - перемножение единичной и грузовой эпюр } N \text{ прав. участка}$$

Слагаемые выражения перемещения 4-го сечения

$$\begin{aligned} \Delta M4 &:= \Delta M4L + \Delta M4R = 8.086 \times 10^{-5} \\ \Delta Q4 &:= \Delta Q4L + \Delta Q4R = 3.653 \times 10^{-7} \\ \Delta N4 &:= \Delta N4L + \Delta N4R = 2.737 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

Перемещение 4-го сечения: $\Delta 4 := \Delta M4 + \Delta Q4 + \Delta N4 = 8.396 \times 10^{-5}$

Вклад кадого из слагаемых

$$\frac{\Delta M4}{\Delta 4} 100\% = 96.306\% \quad \frac{\Delta Q4}{\Delta 4} 100\% = 0.435\% \quad \frac{\Delta N4}{\Delta 4} 100\% = 3.259\%$$

Лабораторная работа № 7

Деформированный вид арки

Цель работы: определить перемещения точек трехшарнирной арки с использованием численного способа вычисления интегралов и получение ее деформированного вида.

Порядок выполнения работы:

- 1) разбить пролет арки на заданное число частей, определить расчетные сечения;
- 2) определить перемещения расчетных сечений арки, выполнив расчет по формуле Мора с учетом только изгибающих моментов и используя для численного суммирования формулу трапеций;
- 3) представить деформированный вид арки;
- 4) для трех наиболее нагруженных сечений определить перемещения, используя способ левых прямоугольников; сравнить полученные перемещения с результатами, полученными с помощью формулы трапеций.

Все расчеты и построения выполнить в системе компьютерной алгебры MathCAD.

Пример расчета. Для примера рассмотрим расчет арки, рассмотренной ранее в лабораторных работах № 5 и № 6.

Для получения наглядного представления деформированного вида арки, находящейся под действием внешней нагрузки, необходимо знать значения перемещений в каждом сечении арки.

Перемещение k -го сечения арки без учета поперечных и продольных сил определяется по формуле Мора вида:

$$\Delta_k = \int_0^S \frac{\overline{M1}_k M_P ds}{EJ},$$

где S – длина оси арки; $ds = \frac{dx}{\cos \varphi}$ – элементарная длина дуги арки;

EJ – жесткость арки при изгибе; $\overline{M1}_k$ – зависимость изменения единичной эпюры изгибающих моментов от действия единичной сосредоточенной нагрузки, приложенной в k -м сечении; M_P – зависимость изменения эпюры M в арке от действия внешних нагрузок (получена ранее в лабораторной работе № 5).

Вычисление интегралов Мора выполним с использованием численного суммирования по формуле трапеций:

$$\Delta_k = \frac{\Delta x}{6EJ} \sum_{j=1}^n \frac{2\overline{M1}_{k,j}^{лев} M_{P,j}^{лев} + \overline{M1}_{k,j}^{лев} M_{P,j}^{np} + \overline{M1}_{k,j}^{np} M_{P,j}^{лев} + 2\overline{M1}_{k,j}^{np} M_{P,j}^{np}}{1},$$

где n – число частей, на которые разбивается пролет арки (в данном случае $n = 16$).

Для построения единичных эпюр, рассмотрим арку с приложенной вертикальной единичной сосредоточенной силой $F = 1$ в k -м сечении (рис. 6.1).

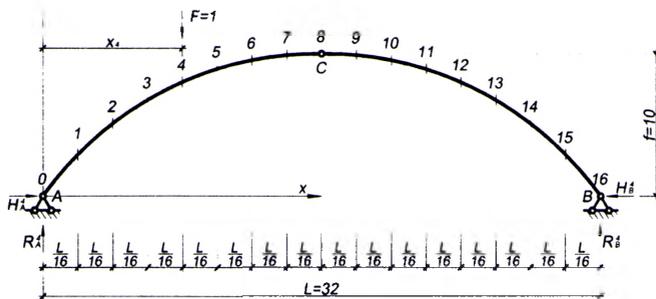


Рисунок 7.1

Опорные реакции в рассматриваемой арке от действия единичной силы:

$$\sum M_B = 0; \quad R_1^k = \frac{L - x_k}{L}; \quad \sum M_A = 0; \quad R_2^k = \frac{x_k}{L};$$

$$\sum M_C^{сек} = 0; \quad H_1^k = \frac{L/2(R_1^k - 1) + x_k}{f}, \text{ если } x_k < \frac{L}{2}; \quad H_1^k = \frac{R_1^k \cdot L}{2f}, \text{ если } x_k \geq \frac{L}{2};$$

$$\sum X = 0; \quad H_1^k = H_2^k.$$

Значения балочных усилий Ml_0 определяются:

$$Ml_0^k = R_1^k \cdot x_i - 1 \cdot (x_i - x_k), \text{ если } x_k < x_i; \quad Ml_0^k = R_1^k \cdot x_i, \text{ если } x_k \geq x_i;$$

Значения единичных эпюр Ml в сечениях арки определяются:

$$Ml_i = Ml_0_i - H_1^k \cdot y_i;$$

Расчеты выполняем в системе компьютерной алгебры MathCAD. Для построения деформированного вида будем использовать график, наложенный поверх графика очертания арки, подобрав необходимый масштабный коэффициент для отображения перемещений (из-за их малой величины).

Помимо формулы трапеций производить «перемножение» эпюр для определения перемещений можно несколькими другими способами: как более простыми (способом левых прямоугольников, способом правых прямоугольников), так и более точными (по формуле Симпсона).

Например, выберем три сечения, в которых получились наибольшие перемещения (в данном случае – 4, 8, 9), найдем в них перемещения способом левых прямоугольников и убедимся, что этот способ менее точен в сравнении с формулой трапеций.

$$\Delta_k^{III} = \frac{\Delta x}{EJ} \sum_{j=1}^n \frac{\overline{Ml}_k \cdot M_{P,j}}{\cos \varphi_j} = \frac{\Delta x}{EJ} \sum_{j=1}^n \frac{\overline{Ml}_k^{сек} \cdot M_{P,j}^{сек}}{\cos \varphi_j}.$$

Расхождение результатов, полученных двумя способами: $\lambda_i = \left| \frac{\Delta_i^{TP} - \Delta_i^{III}}{\Delta_i^{TP}} \right| \cdot 100\%$.

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры MathCAD.

Лабораторная работа № 8

Расчет двухшарнирной арки с использованием численного интегрирования

Цель работы: изучить расчет усилий и построение эпюр усилий в двухшарнирных арках с использованием численного подхода.

Порядок выполнения работы:

1) определить опорные реакции и выполнить расчет усилий M , Q , N в сечениях арки с заданным шагом, обеспечивающим достаточно точное представление нелинейных по длине арки зависимостей усилий;

2) построить для рассматриваемой арки эпюры усилий M , Q , N ;

3) выполнить проверку выполнения общих закономерностей изменения эпюр внутренних сил M , Q и N .

Примечание: все необходимые расчеты выполнить в системе компьютерной алгебры MathCAD.

Пример расчета. Выполним расчет двухшарнирной арки с затяжкой представленной на рисунке 8.1.

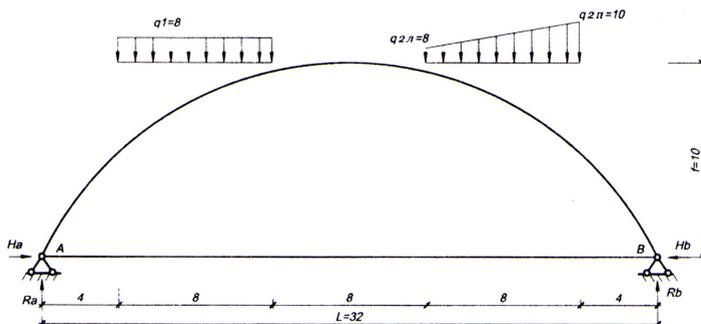


Рисунок 8.1

Жесткость арки принята постоянной по длине стержня ($EJ = Const$), жесткость затяжки принята равной $EA_{зат} = 5EJ$ ($k_{зат} = 5$). Ось стержня арки определяется круговой зависимостью, как и в лабораторной работе №4. Основную систему метода сил получим, разрезав затяжку.

Усилия в арке определяем методом сечений. Разбиваем пролет арки на n одинаковых частей ($\Delta x = L/n$), обеспечивающих достаточное число сечений для представления нелинейных по длине арки зависимостей. Отметим, что, чем на большее число частей разобьем пролет, тем меньше будет шаг разбиения Δx и тем больше будем иметь расчетных сечений для вычисления ординат усилий, и тем более точно можно будет отобразить эпюры усилий.

В данном примере разобьем пролет арки на 16 частей ($\Delta x = 32/16 = 2$ м) и получим 17 расчетных сечений (0, 1, 2, ..., 16).

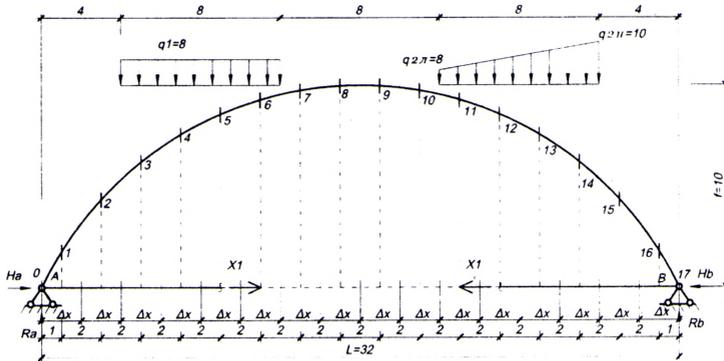


Рисунок 8.2

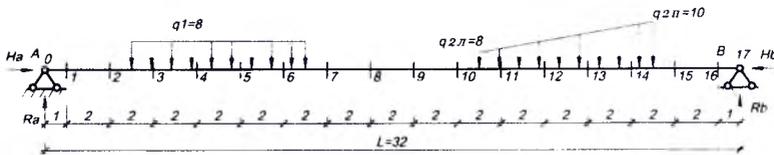


Рисунок 8.3

Расчетные величины (y , $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, M_P и т. д.) необходимо вычислять в средних точках участков Δx , координаты которых можно определить по выражению: $x_i = 0,5\Delta x + \Delta x(i-1)$.

Для арок постоянного сечения жесткости их будут константами и их можно вынести за суммы. Если ввести при этом обозначения:

$$k_G = \frac{GA}{EJ}; \quad k_N = \frac{EA}{EJ}; \quad k_{\text{sum}} = \frac{EA_{\text{sum}}}{EJ}$$

$$\delta_{11} = \frac{\Delta x}{EJ} \left(\sum_1^n \frac{y^2}{\cos \varphi} + \frac{\eta}{k_G} \sum_1^n \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} + \frac{1}{k_N} \sum_1^n \cos \varphi + \frac{n}{k_{\text{sum}}} \right); \Delta_{11} = -\frac{\Delta x}{EJ} \left(\sum_1^n \frac{y \cdot M_P}{\cos \varphi} + \frac{\eta}{k_G} \sum_1^n \frac{\sin \varphi \cdot Q_P}{\cos \varphi} + \frac{1}{k_N} \sum_1^n N_P \right)$$

Вычислив перемещения δ_{11} и Δ_{11} , решаем уравнение и находим неизвестное метода сил $X_1 = -\Delta_{11} / \delta_{11}$.

После этого можно построить окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в заданной статически неопределимой арке по формулам:

$$\begin{aligned} M &= \bar{M}_1 \cdot X_1 + M_P = -y X_1 + M_P; \\ Q &= \bar{Q}_1 \cdot X_1 + Q_P = -\sin \varphi X_1 + Q_P; \\ N &= \bar{N}_1 \cdot X_1 + N_P = -\cos \varphi X_1 + N_P; \end{aligned}$$

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры MathCAD.

Круговая арка $\frac{L}{3} := 32$ – пролет арки $f := 10$ – стрела подъема арки

Опорные реакции

$$R_a := \frac{8 \cdot 8 \cdot 24 + 2 \cdot 8 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 8 + 4\right)}{L} = 58.667 \quad R_b := \frac{8 \cdot 8 \cdot 8 + 2 \cdot 8 \cdot 24 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 8 + 20\right)}{L} = 53.333$$

$$H_f := \frac{R_a \cdot \frac{L}{2} - 8 \cdot 8 \cdot 8}{f} = 42.667$$

Определение координат сечений, синусов и косинусов угла касательной

$$i := 0..17 \quad \Delta x := \frac{L}{16} = 2$$

$$x_i := 0.5 \Delta x + \Delta x (i - 1) \quad R := \frac{4f^2 + L^2}{8 \cdot f}$$

$$x_0 := 0 \quad x_{17} := 32$$

$$\sin \phi_i := \frac{L - 2 \cdot x_i}{2 \cdot R} \quad \cos \phi_i := \frac{y_i + R - f}{R} \quad y_i := \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2} - x_i\right)^2} - R + f$$

Определение балочных усилий M_0 и Q_0

$M_{0_0} := 0$	$Q_{0_0} := R_a$
$M_{0_1} := R_a \cdot 1 = 58.667$	$Q_{0_1} := R_a = 58.667$
$M_{0_2} := R_a \cdot 3 = 176$	$Q_{0_2} := R_a = 58.667$
$M_{0_3} := R_a \cdot 5 - 8 \cdot 1 \cdot 0.5 = 289.333$	$Q_{0_3} := R_a - 8 \cdot 1 = 50.667$
$M_{0_4} := R_a \cdot 7 - 8 \cdot 3 \cdot 1.5 = 374.667$	$Q_{0_4} := R_a - 8 \cdot 3 = 34.667$
$M_{0_5} := R_a \cdot 9 - 8 \cdot 5 \cdot 2.5 = 428$	$Q_{0_5} := R_a - 8 \cdot 5 = 18.667$
$M_{0_6} := R_a \cdot 11 - 8 \cdot 7 \cdot 3.5 = 449.333$	$Q_{0_6} := R_a - 8 \cdot 7 = 2.667$
$M_{0_7} := R_a \cdot 13 - 8 \cdot 8 \cdot 5 = 442.667$	$Q_{0_7} := R_a - 8 \cdot 8 = -5.333$
$M_{0_8} := R_a \cdot 15 - 8 \cdot 8 \cdot 7 = 432$	$Q_{0_8} := R_a - 8 \cdot 8 = -5.333$
$M_{0_9} := R_a \cdot 17 - 8 \cdot 8 \cdot 9 = 421.333$	$Q_{0_9} := R_a - 8 \cdot 8 = -5.333$
$M_{0_{10}} := R_a \cdot 19 - 8 \cdot 8 \cdot 11 = 410.667$	$Q_{0_{10}} := R_a - 8 \cdot 8 = -5.333$
$M_{0_{11}} := R_a \cdot 21 - 8 \cdot 8 \cdot 13 - 2 \cdot 1 \cdot 0.5 - 1 \cdot 1 \cdot 0.5 \cdot \left(\frac{1-1}{3}\right) = 398.833$	
$M_{0_{12}} := R_a \cdot 23 - 8 \cdot 8 \cdot 15 - 2 \cdot 3 \cdot 1.5 - 3 \cdot 3 \cdot 0.5 \cdot \left(\frac{1-3}{3}\right) = 375.833$	
$M_{0_{13}} := R_a \cdot 25 - 8 \cdot 8 \cdot 17 - 2 \cdot 5 \cdot 2.5 - 5 \cdot 5 \cdot 0.5 \cdot \left(\frac{1-5}{3}\right) = 332.833$	
$M_{0_{14}} := R_a \cdot 27 - 8 \cdot 8 \cdot 19 - 2 \cdot 7 \cdot 3.5 - 7 \cdot 7 \cdot 0.5 \cdot \left(\frac{1-7}{3}\right) = 261.833$	
$M_{0_{15}} := R_a \cdot 29 - 8 \cdot 8 \cdot 21 - 2 \cdot 8 \cdot 5 - 8 \cdot 8 \cdot 0.5 \cdot \left(\frac{1-8}{3} + 1\right) = 160$	
$M_{0_{16}} := R_a \cdot 31 - 8 \cdot 8 \cdot 23 - 2 \cdot 8 \cdot 7 - 8 \cdot 8 \cdot 0.5 \cdot \left(\frac{1-8}{3} + 3\right) = 53.333$	
$M_{0_{17}} := R_a \cdot 32 - 8 \cdot 8 \cdot 24 - 2 \cdot 8 \cdot 8 - 8 \cdot 8 \cdot 0.5 \cdot \left(\frac{1-8}{3} + 4\right) = -5.684 \times 10^{-14}$	
$Q_{0_{11}} := R_a - 8 \cdot 8 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0.5 = -6.833$	
$Q_{0_{12}} := R_a - 8 \cdot 8 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 0.5 = -15.833$	
$Q_{0_{13}} := R_a - 8 \cdot 8 - 2 \cdot 5 - 5 \cdot 5 \cdot 0.5 = -27.833$	
$Q_{0_{14}} := R_a - 8 \cdot 8 - 2 \cdot 7 - 7 \cdot 7 \cdot 0.5 = -39.833$	
$Q_{0_{15}} := R_a - 8 \cdot 8 - 2 \cdot 8 - 8 \cdot 8 \cdot 0.5 = -53.333$	
$Q_{0_{16}} := R_a - 8 \cdot 8 - 2 \cdot 8 - 8 \cdot 8 \cdot 0.5 = -53.333$	
$Q_{0_{17}} := R_a - 8 \cdot 8 - 2 \cdot 8 - 8 \cdot 8 \cdot 0.5 = -53.333$	

$EJ := 1 \cdot 10^7$ жесткость арки при изгибе
 $GA := 1.28 \cdot 10^8$ жесткость арки при сдвиге
 $EA := 3.33 \cdot 10^8$ жесткость арки при растяжении сжатии
 $\eta := 1.2$ коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по высоте сечения при изгибе (для прямоугольного сечения)

$$R_{iy} := \frac{y_i \cdot y_i}{\cos \phi_i} \quad T_{iy} := \frac{y_i \cdot M_{0i}}{\cos \phi_i} \quad z_i := 0$$

$$kG := \frac{GA}{EJ} = 12.8$$

$$n := 17$$

$$kN_w := \frac{EA}{EJ} = 33.3$$

кзат := 4 – жесткость затяжки

$$\sum R = 1.029 \times 10^3 \quad \sum T = 4.571 \times 10^4$$

$$N_0 := -(Q_0 \cdot \sin \phi_0)$$

$$\delta_{11} := \left[\sum R + \frac{\eta}{kG} \cdot \sum \left(\frac{\sin \phi}{\cos \phi} \right)^2 + \frac{1}{kN} \cdot \sum \cos \phi + \frac{n}{\text{кзат}} \right] = 1.033 \times 10^3$$

$$\Delta_{11} := \left[\sum T + \frac{\eta}{kG} \cdot \sum \left(\frac{\sin \phi \cdot Q_0}{\cos \phi} \right) + \frac{1}{\text{кзат}} \cdot \sum N_0 \right] = -4.65 \times 10^4$$

$$X1 := \frac{-\Delta_{11}}{\delta_{11}} = 45.002 \quad \text{— неизвестное метода сил (продольное усилие в затяжке)}$$

Определение усилий M, Q, N в арке

$$M_i := M_{0i} - y_i \cdot X1$$

$$Q_i := Q_{0i} \cos \phi_i - X1 \cdot \sin \phi_i$$

$$N_i := -(Q_{0i} \sin \phi_i + X1 \cdot \cos \phi_i)$$

0	
0	0
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9
6	11
7	13
8	15
9	17
10	19
11	21
12	23
13	25
14	27
15	29
16	31
17	32

x =

0	
0	0
1	1.783
2	4.359
3	6.194
4	7.557
5	8.566
6	9.283
7	9.745
8	9.972
9	9.972
10	9.745
11	9.283
12	8.566
13	7.557
14	6.194
15	4.359
16	1.783
17	0

y =

0	
0	0
1	-21.586
2	-20.161
3	10.579
4	34.584
5	42.522
6	31.566
7	4.107
8	-16.754
9	-27.42
10	-27.893
11	-18.934
12	-9.644
13	-7.249
14	-16.921
15	-36.161
16	-26.919
17	-5.684 \cdot 10^{-14}

M =

0	
0	-14.743
1	-6.337
2	7.208
3	12.024
4	7.155
5	-0.535
6	-10.082
7	-12.842
8	-7.853
9	-2.797
10	2.328
11	6.083
12	3.14
13	-1.26
14	-3.507
15	-3.565
16	9.209
17	17.08

Q =

0	
0	-72.454
1	-73.667
2	-73.587
3	-66.691
4	-56.354
5	-48.717
6	-43.939
7	-43.459
8	-44.631
9	-45.23
10	-45.257
11	-45.109
12	-47.603
13	-52.899
14	-59.996
15	-69.691
16	-69.172
17	-67.66

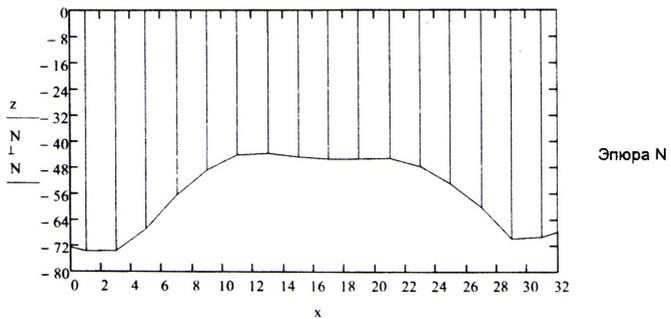
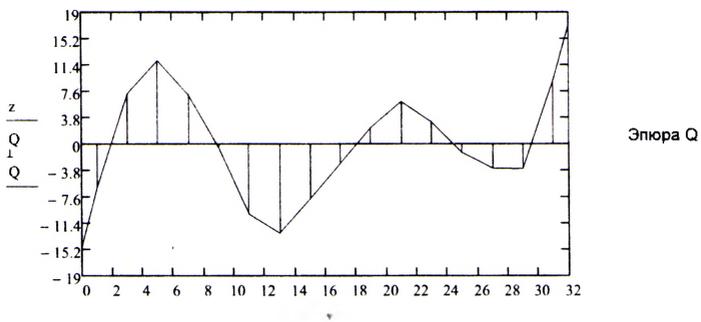
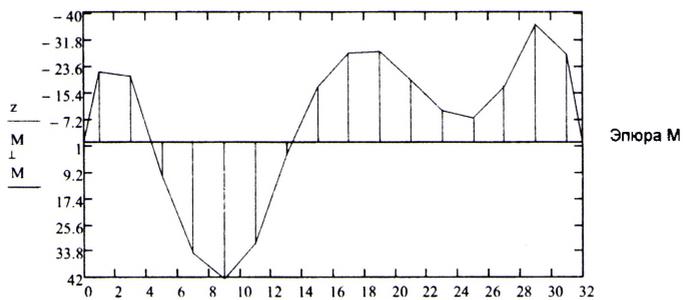
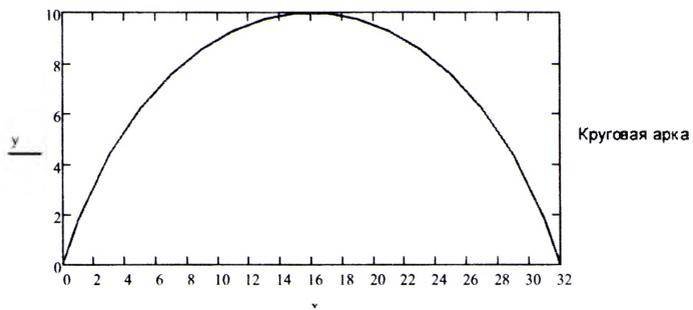
N =

0	
0	0
1	5.907
2	27.816
3	48.804
4	66.194
5	79.803
6	89.796
7	96.351
8	99.596
9	99.596
10	96.351
11	89.796
12	79.803
13	66.194
14	48.804
15	...

R =

0	
0	0
1	194.323
2	1.123 \cdot 10^3
3	2.28 \cdot 10^3
4	3.282 \cdot 10^3
5	3.987 \cdot 10^3
6	4.346 \cdot 10^3
7	4.377 \cdot 10^3
8	4.315 \cdot 10^3
9	4.208 \cdot 10^3
10	4.06 \cdot 10^3
11	3.858 \cdot 10^3
12	3.501 \cdot 10^3
13	2.915 \cdot 10^3
14	2.063 \cdot 10^3
15	...

T =



Лабораторная работа № 9

Матричная форма определения перемещений в рамах

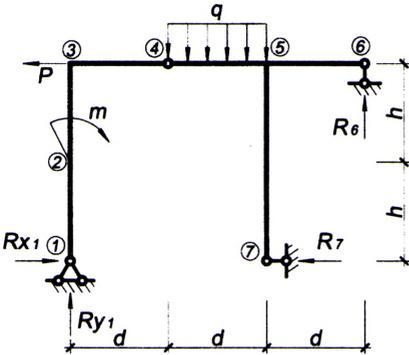
Цель работы: изучить применение матричной формы определения перемещений на примере расчета перемещений в раме.

Для выполнения лабораторной работы необходимо:

1) построить грузовую эпюру усилий M_P ;
 2) в узле, в котором предполагается определить линейное перемещение и угол поворота, приложить единичные усилия в соответствующих направлениях; построить единичные эпюры M_1 и M_2 ;

3) найти искомые перемещения, используя матричную форму; расчеты необходимо произвести в системе компьютерной алгебры MathCAD;

Для примера возьмем расчет рамы, рассмотренной в лабораторной работе № 4. Определим горизонтальное перемещение и угол поворота узла 5.



$$d = 2m;$$

$$h = 2m;$$

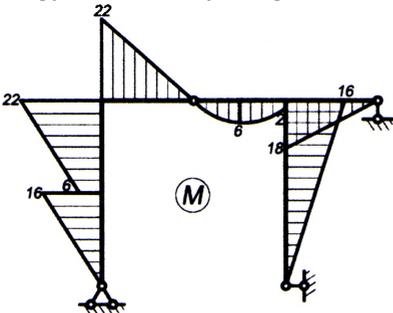
$$P = 4кН;$$

$$m = 10кНм;$$

$$q = 10кН/м.$$

Пусть изгибная жесткость вертикальных стержней равна $4EJ$; горизонтальных стержней – $2EJ$; (наклонных стержней – $3EJ$).

Грузовая эпюра моментов M_P рамы от действия внешней нагрузки была получена ранее.

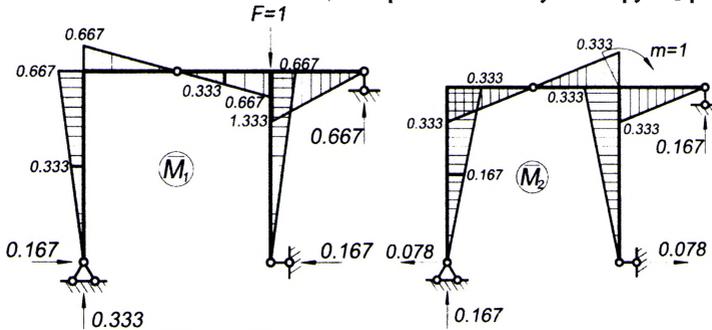


Составим матрицу-столбец (вектор) ординат грузовой эпюры M_P :

$$\{M_P\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -16 \\ -6 \\ -22 \\ 22 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \\ -2 \\ -18 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Примем правило знаков: положительными будем считать значения ординат, находящихся выше или правее стержня.

Для определения вертикального перемещения узла 5 приложим в него единичную сосредоточенную силу $F_1 = 1$ вертикально; построим единичную эпюру M_1 рамы. Соответственно, для определения угла поворота узла 5 приложим в него единичный момент $m = 1$; построим единичную эпюру M_2 рамы.



Составим матрицу $[\bar{M}]^T$, состоящую из двух строк ординат по участкам из единичных эпюр \bar{M}_1 и \bar{M}_2 :

$$[\bar{M}]^T = \begin{bmatrix} 0 & -0.333 & -0.333 & -0.667 & 0.667 & 0 & 0 & -0.333 & -0.667 & -1.333 & 0 & 0.667 & 0 \\ 0 & 0.167 & 0.167 & 0.333 & -0.333 & 0 & 0 & 0.167 & 0.333 & -0.333 & 0 & -0.333 & 0 \end{bmatrix}$$

Составим квазидиагональную матрицу упругой податливости системы $[D]$, которая состоит из матриц упругой податливости участков $[D_i]$ и нулевых матриц $[0]$:

$$[D] = \begin{bmatrix} [D_1] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [D_2] & \dots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \dots & [D_n] \end{bmatrix},$$

где n – количество участков в системе (в данном примере $n = 6$).

Составим матрицы упругой податливости участков $[D_i]$ с учетом их длин и изгибных жесткостей, приводя к общему множителю:

$$[D_1] = \frac{2}{6 \cdot 4EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6EJ} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad [D_4] = \frac{2}{6 \cdot 2EJ} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6EJ} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[D_2] = \frac{2}{6 \cdot 4EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6EJ} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad [D_3] = \frac{2}{6 \cdot 2EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$[D_5] = \frac{2}{6 \cdot 2EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [D_6] = \frac{4}{6 \cdot 4EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

Составим матрицу M_p (из ординат грузовой эпюры M) и транспонированную матрицу M^T (из ординат единичных эпюр)

$$MP := \begin{pmatrix} 0 \\ -16 \\ -6 \\ -22 \\ 22 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \\ -2 \\ -18 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} \quad MT := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.333 & 0.167 \\ -0.333 & 0.167 \\ -0.667 & 0.333 \\ 0.667 & -0.333 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.333 & 0.167 \\ -0.667 & 0.333 \\ -1.333 & -0.333 \\ 0 & 0 \\ 0.667 & -0.333 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -0.333 & -0.333 & -0.667 & 0.667 & 0 & 0 & -0.333 & -0.667 & -1.333 & 0 & 0.667 & 0 \\ 0 & 0.167 & 0.167 & 0.333 & -0.333 & 0 & 0 & 0.167 & 0.333 & -0.333 & 0 & -0.333 & 0 \end{pmatrix}$$

Составим матрицы упругой податливости участков

$$\begin{aligned} Dm1 &:= \frac{2}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} & D1 &:= \frac{1}{6 \cdot IJ} \cdot Dm1 & Dm4 &:= \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & D4 &:= \frac{1}{6 \cdot IJ} \cdot Dm4 \\ Dm2 &:= \frac{2}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} & D2 &:= \frac{1}{6 \cdot IJ} \cdot Dm2 & Dm5 &:= \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & D5 &:= \frac{1}{6 \cdot IJ} \cdot Dm5 \\ Dm3 &:= \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & D3 &:= \frac{1}{6 \cdot IJ} \cdot Dm3 & Dm6 &:= \frac{4}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & D6 &:= \frac{1}{6 \cdot IJ} \cdot Dm6 \end{aligned}$$

Составим квазидиагональную матрицу упругой податливости системы, составленную из матриц упругой податливости участков и нулевых матриц

$$Z2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Z23 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Z32 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad - \text{ нулевые матрицы}$$

$$D1row := \text{augment}(Dm1, Z2, Z2, Z23, Z2, Z2)$$

$$D4row := \text{augment}(Z32, Z32, Z32, Dm4, Z32, Z32)$$

$$D2row := \text{augment}(Z2, Dm2, Z2, Z23, Z2, Z2)$$

$$D5row := \text{augment}(Z2, Z2, Z2, Z23, Dm5, Z2)$$

$$D3row := \text{augment}(Z2, Z2, Dm3, Z23, Z2, Z2)$$

$$D6row := \text{augment}(Z2, Z2, Z2, Z23, Z2, Dm6)$$

$$Dm := \text{stack}(D1row, D2row, D3row, D4row, D5row, D6row)$$

$$Dm \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$EJ = 1$$

$$D := \frac{1}{6 \cdot EJ} \cdot Dm$$

Искомые перемещения

$$\Delta := MT \cdot D \cdot MP = \begin{pmatrix} 22.612 \\ -5.305 \end{pmatrix}$$

Лабораторная работа № 10

Расчет балок методом конечных разностей

Цель работы: изучить применение метода конечных разностей для расчета балочных систем.

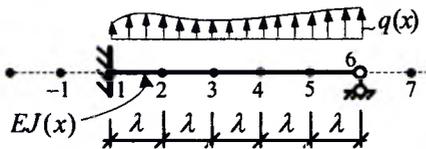
Порядок выполнения работы:

- 1) разбить пролет балки на заданное число частей, приняв граничные точки участков в качестве расчетных точек метода конечных разностей;
- 2) используя дифференциальные уравнения равновесия изгибаемых стержневых систем и метод конечных разностей, определить прогибы расчетных точек и изгибающие моменты в соответствующих (этим точкам) сечениях балки;
- 3) построить эпюру изгибающих моментов и график прогибов балки.

Примечание: все необходимые расчеты выполнить в системе компьютерной алгебры MathCAD.

Методика расчета.

Для расчета стержневых изгибаемых систем могут использоваться три варианта дифференциальных уравнений равновесия:



$$1) \quad y'' - \frac{M(x)}{EJ(x)} = 0; \quad (10.1)$$

$$2) \quad M'' - q(x) = 0, \quad (10.2)$$

$$3) \quad y'''' - \frac{q(x)}{EJ(x)} = 0, \quad (10.3)$$

Рисунок 10.1

которые в конечных разностях для i -й точки (рис. 10.1) имеют вид [2]:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = \frac{M_i}{EJ} \cdot \lambda^2; \quad (10.4)$$

$$M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1} = q_i \lambda^2; \quad (10.5)$$

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{q_i}{EJ} \lambda^2. \quad (10.6)$$

Переходя от дифференцирования к конечным разностям, мы должны разбить систему (балку) на заданное число конечных участков, граничные точки между которыми принимаются за расчетные точки (сечения). Для расчетных точек, в которых определяемые величины (перемещения, усилия) неизвестны, и необходимо записывать уравнения (10.4)– (10.6). При этом, как не сложно увидеть, в уравнениях будут появляться перемещения (усилия) в так называемых законтурных точках (например, в точках -1 и 7 на рис. 10.1). Для определения этих величин могут использоваться граничные условия сооружений, то есть известные значения перемещений и усилий на границах сооружения, связанные с условиями закрепления крайних точек системы:

- 1) шарнирное опирание (рисунок 10.2):
 2) защемление (рисунок 10.3):

$$y_i = 0 \text{ и } y_{i-1} = -y_{i+1};$$

$$y_i = 0 \text{ и } y_{i-1} = y_{i+1}.$$

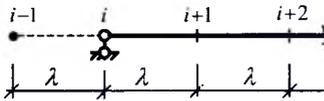


Рисунок 10.2

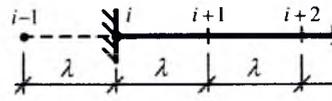


Рисунок 10.3

Пример расчета. Рассмотрим применение метода конечных разностей к решению задачи изгиба двухопорной балки, нагруженной распределенной (по треугольному закону) нагрузкой (рисунок 10.4).

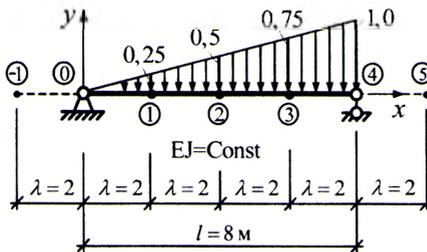


Рисунок 10.4

Определим вначале изгибающие моменты в системе, для чего воспользуемся вначале уравнением (10.2) – $M'' - q(x) = 0$, которое в конечных разностях представлено в (10.5).

Разобьем балку на четыре части ($\lambda = l/4 = 2$ м) и составим уравнения (9.5) для точек 1, 2 и 3 (последовательно принимая i равным номерам этих точек):

$$\begin{cases} M_0 - 2M_1 + M_2 = -0,25 \cdot \lambda^2; \\ M_1 - 2M_2 + M_3 = -0,5 \cdot \lambda^2; \\ M_2 - 2M_3 + M_4 = -0,75 \cdot \lambda^2. \end{cases} \quad (10.7)$$

Согласно граничным условиям при этом будем иметь: $M_0 = 0$ и $M_4 = 0$.

Учитываем граничные условия и решаем систему уравнений (10.7). Находим:

$$M_1 = 2,5; \quad M_2 = 4,0; \quad M_3 = 3,5.$$

Для определения прогибов системы воспользуемся теперь уравнением (10.1), которое в конечных разностях для произвольного i -го узла имеет вид (10.4).

Записав уравнение (10.4) для точек 1, 2 и 3, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y_0 - 2y_1 + y_2 = \frac{2,5}{EJ} \cdot \lambda^2; \\ y_1 - 2y_2 + y_3 = \frac{4,0}{EJ} \cdot \lambda^2; \\ y_2 - 2y_3 + y_4 = \frac{3,5}{EJ} \cdot \lambda^2, \end{cases}$$

решая которую, с учетом граничных условий ($y_0 = 0$ и $y_4 = 0$), найдем:

$$y_1 = -\frac{19}{EJ}; \quad y_2 = -\frac{28}{EJ}; \quad y_3 = -\frac{21}{EJ}.$$

Процедура расчета рассматриваемой задачи в системе компьютерной алгебры MathCAD (см. с. 47).

По полученным результатам строим эпюру изгибающих моментов и график прогибов балки (см. рис. 10.5).

Выполнив анализ результатов расчета, можно сделать следующие выводы:

- в методе конечных разностей густота разбивки системы определяет точность решения;
- наибольший изгибающий момент в рассматриваемой балке возникает между сечениями 2 и 3;
- наибольший прогиб при рассматриваемом нагружении балки возникает между точками 2 и 3.

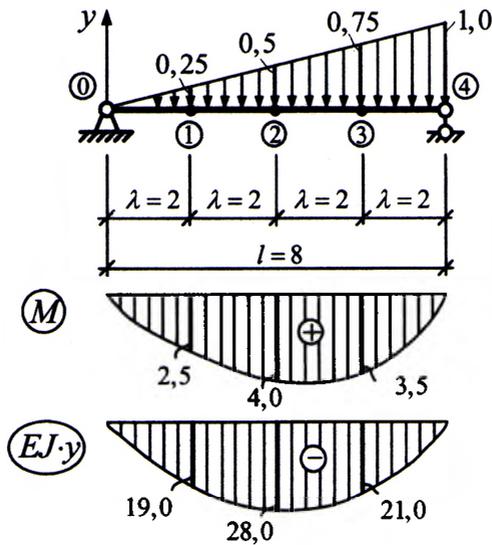
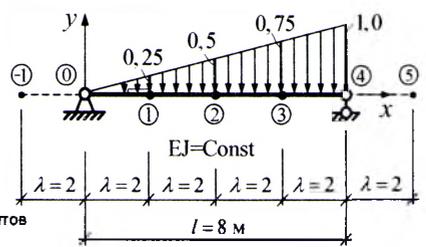


Рисунок 10.5

$L := 8$ -длина балки
 $n := 4$ -число участков разбиения
 $\lambda := \frac{L}{n} \quad \lambda = 2$ -длина участка
 $EI := 1$ -изгибную жесткость принимаем условно равной 1, т.к. она постоянна



Определение изгибающих моментов

Определяем значения нагрузки в точках:

$$q_0 := 0 \quad q_1 := -0.25 \quad q_2 := -0.5 \quad q_3 := -0.75 \quad q_4 := -1$$

Обозначим искомые неизвестные моменты в сечениях разбики:

$$M_0 := 0 \quad M_1 := 0 \quad M_2 := 0 \quad M_3 := 0 \quad M_4 := 0$$

Запишем систему уравнений метода конечных разностей и граничные условия для изгибающих моментов

Given

$$\begin{aligned}
 M_0 - 2M_1 + M_2 &= q_1 \cdot \lambda^2 \\
 M_1 - 2M_2 + M_3 &= q_2 \cdot \lambda^2 \\
 M_2 - 2M_3 + M_4 &= q_3 \cdot \lambda^2
 \end{aligned}$$

- система уравнений метода конечных разностей

$$M_0 = 0 \quad M_4 = 0 \quad \text{- граничные условия}$$

Находим изгибающие моменты в сечениях:

$$\text{Find}(M_1, M_2, M_3) = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 4 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

Определение перемещений

Значения изгибающих моментов в точках определены выше и равны:

$$M_0 := 0 \quad M_1 := 2.5 \quad M_2 := 4 \quad M_3 := 3.5 \quad M_4 := 0$$

Обозначим искомые перемещения в сечения:

$$y_0 := 0 \quad y_1 := 0 \quad y_2 := 0 \quad y_3 := 0 \quad y_4 := 0$$

3 Givenм систему уравнений метода конечных разностей и граничные условия для перемещений

$$\begin{aligned}
 y_0 - 2y_1 + y_2 &= \frac{M_1}{EI} \cdot \lambda^2 \\
 y_1 - 2y_2 + y_3 &= \frac{M_2}{EI} \cdot \lambda^2 \\
 y_2 - 2y_3 + y_4 &= \frac{M_3}{EI} \cdot \lambda^2
 \end{aligned}$$

- система уравнений метода конечных разностей

$$y_0 = 0 \quad y_4 = 0 \quad \text{- граничные условия}$$

Находим вертикальные перемещения сечений:

$$\text{Find}(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} -19 \\ -28 \\ -21 \end{pmatrix}$$

Лабораторная работа № 11

Применение общей системы равновесия строительной механики к расчету пространственной ферменной структуры

Цель работы: изучить применение общей системы равновесия строительной механики к расчету пространственной ферменной структуры.

Порядок выполнения работы:

- 1) обозначить приложенную к ферменной структуре нагрузку и реакции в опорах;
- 2) пронумеровать стержни ферменной структуры;
- 3) вырезая каждый узел ферменной структуры, составить общую систему равновесия;
- 4) решить систему уравнений в системе компьютерной алгебры MathCAD;
- 5) сделать проверку, используя три уравнения равновесия ферменной структуры в целом.

Пример расчета. Рассмотрим расчет ферменной структуры, представленной на рис. 11.1.

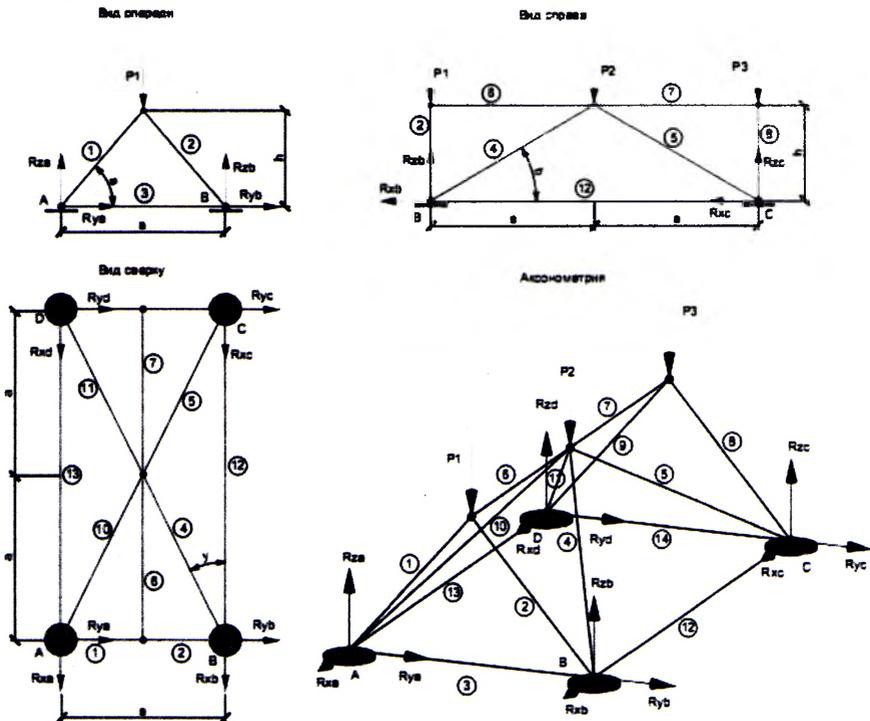


Рисунок 11.1

Будем считать, что нагрузка может быть приложена только в узлы верхних элементов ферменной структуры, поэтому обозначим внешнюю нагрузку в виде сосредоточенных сил (P_1, P_2, P_3). Для удобства пронумеруем стержни фермы (1–14). Обозначим реакции в опорах ($R_{xA}, R_{yA}, R_{zA}, R_{xB}, R_{yB}, R_{zB}, R_{xC}, R_{yC}, R_{zC}, R_{xD}, R_{yD}, R_{zD}$).

Вырезая каждый узел фермы, обозначим неизвестные продольные усилия стержней фермы (N_1, N_2, N_3, \dots и т. д., рис. 11.2).

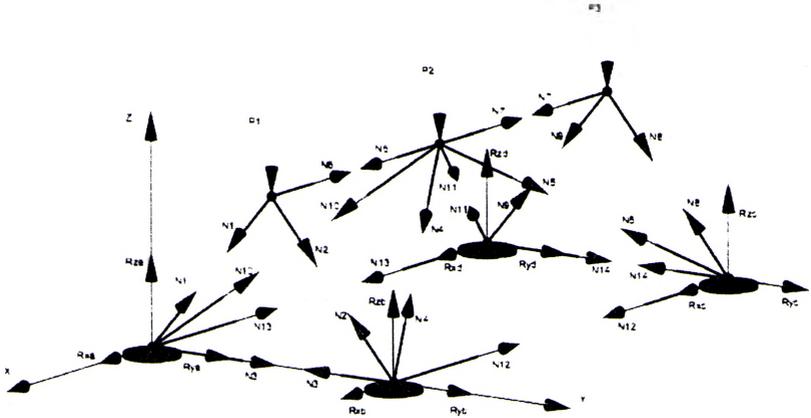
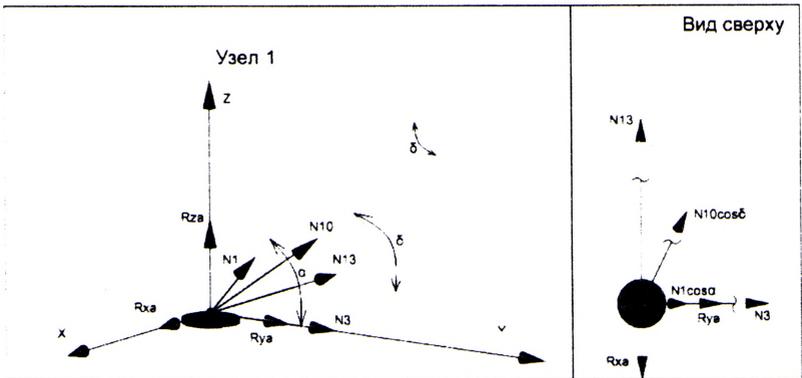
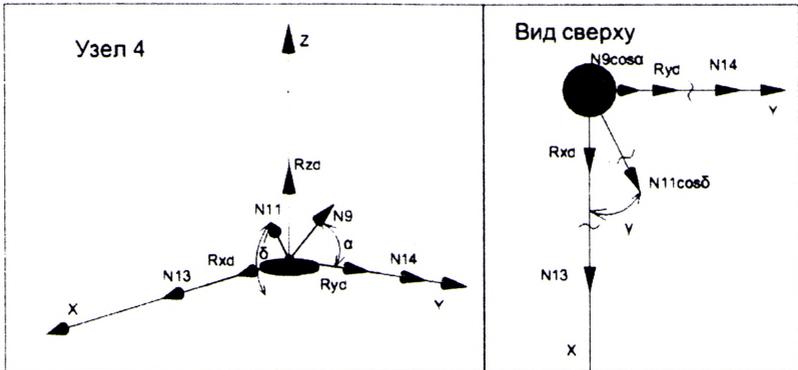


Рисунок 11.2

Составим уравнение равновесия для каждого узла ферменной структуры проецируя усилия и нагрузки на соответствующие оси. ($\sum X=0; \sum Y=0; \sum Z=0;$)



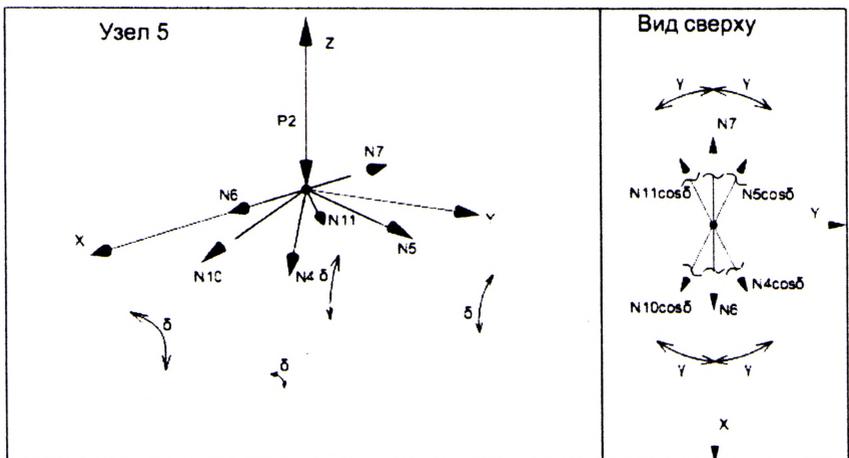
$$\begin{aligned} \sum X=0; & R_{xA} - N_{13} - N_{10} \cdot \cos \delta \cdot \cos \gamma = 0; \\ \sum Y=0; & R_{yA} + N_3 + N_1 \cdot \cos \alpha + N_{10} \cdot \cos \delta \cdot \sin \gamma = 0; \\ \sum Z=0; & R_{zA} + N_1 \cdot \sin \alpha + N_{10} \cdot \sin \delta = 0; \end{aligned}$$



$$\sum X = 0; R_{xd} + N_{13} + N_{11} \cdot \cos \delta \cdot \cos \gamma = 0;$$

$$\sum Y = 0; R_{yd} + N_{14} + N_9 \cdot \cos \alpha + N_{11} \cdot \cos \delta \cdot \sin \gamma = 0;$$

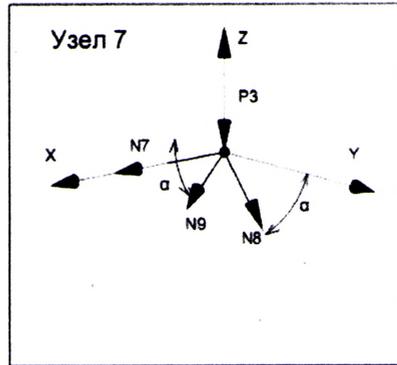
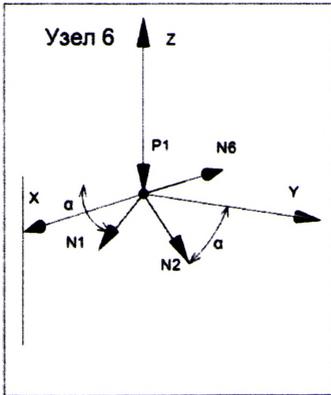
$$\sum Z = 0; R_{zd} + N_9 \cdot \sin \alpha + N_{11} \cdot \sin \delta = 0;$$



$$\sum X = 0; (N_{10} + N_4 - N_{11} - N_5) \cdot \cos \delta \cdot \cos \gamma + N_6 - N_7 = 0;$$

$$\sum Y = 0; (N_5 + N_4 - N_{11} - N_{10}) \cdot \cos \delta \cdot \sin \gamma = 0;$$

$$\sum Z = 0; -P_2 - (N_{10} + N_4 + N_5 + N_{11}) \cdot \sin \delta = 0;$$



$$\begin{aligned} \sum X &= 0; -N6 = 0; \\ \sum Y &= 0; N2 \cdot \cos \alpha - N1 \cdot \cos \alpha = 0; \\ \sum Z &= 0; -P1 - N2 \cdot \sin \alpha - N1 \cdot \sin \alpha = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; N7 = 0; \\ \sum Y &= 0; N8 \cdot \cos \alpha - N9 \cdot \cos \alpha = 0; \\ \sum Z &= 0; -P3 - N9 \cdot \sin \alpha - N8 \cdot \sin \alpha = 0; \end{aligned}$$

Для определения неизвестных усилий и реакций решим систему уравнений, составленную из полученных ранее уравнений равновесия узлов фермы.

Проверка: $\sum X = 0; Rxa + Rxb + Rxc + Rxd = 0;$
 $\sum Y = 0; Rya + Ryb + Ryc + Ryd = 0;$
 $\sum Z = 0; Rza + Rzb + Rzc + Rzd - P1 - P2 - P3 = 0$

Расчеты произведем в системе компьютерной алгебры MathCAD.

Параметры ферменной структуры a := 3 h := 1.732

$$\begin{aligned} \cos\alpha &:= \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}} & \cos\gamma &:= \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}} & \cos\delta &:= \frac{a \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}}{\sqrt{\left(a \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}\right)^2 + h^2}} \\ \sin\alpha &:= \frac{h}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}} & \sin\gamma &:= \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}} & \sin\delta &:= \frac{h}{\sqrt{\left(a \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}\right)^2 + h^2}} \end{aligned}$$

Задание переменных

$$\begin{aligned} R_{xa} &:= 0 & R_{ya} &:= 0 & R_{za} &:= 0 & N1 &:= 0 & N2 &:= 0 & N3 &:= 0 \\ R_{xb} &:= 0 & R_{yb} &:= 0 & R_{zb} &:= 0 & N8 &:= 0 & N9 &:= 0 & N10 &:= 0 \\ R_{xc} &:= 0 & R_{yc} &:= 0 & R_{zc} &:= 0 & N4 &:= 0 & N5 &:= 0 & N6 &:= 0 & N7 &:= 0 \\ R_{xd} &:= 0 & R_{yd} &:= 0 & R_{zd} &:= 0 & N11 &:= 0 & N12 &:= 0 & N13 &:= 0 & N14 &:= 0 \end{aligned}$$

Внешняя нагрузка P1 := 5 P2 := 10 P3 := 3

Given

1	2
X Rxa - N13 - N10·cosδ·cosγ = 0	X Rxb - N12 - N4·cosδ·cosγ = 0
Y Rya + N3 + N1·cosα + N10·cosδ·sinγ = 0	Y Ryb - N3 - N2·cosα - N4·cosδ·sinγ = 0
Z Rza + N1·sinα + N10·sinδ = 0	Z Rzb + N2·sinα + N4·sinδ = 0
3	4
X Rxc + N12 + N5·cosδ·cosγ = 0	X Rxd + N13 + N11·cosδ·cosγ = 0
Y Ryc - N14 - N8·cosα - N5·cosδ·sinγ = 0	Y Ryd + N14 + N9·cosα + N11·cosδ·sinγ = 0
Z Rzc + N8·sinα + N5·sinδ = 0	Z Rzd + N9·sinα + N11·sinδ = 0
5	6
X (N10 + N4 - N11 - N5)·cosδ·cosγ + N6 - N7 = 0	X -N6 = 0
Y (N5 + N4 - N11 - N10)·cosδ·sinγ = 0	Y N2·cosα - N1·cosα = 0
Z -P2 - (N10 + N4 + N5 + N11)·sinδ = 0	Z -P1 - N2·sinα - N1·sinα = 0
7	
X N7 = 0	
Y N8·cosα - N9·cosα = 0	
Z -P3 - N9·sinα - N8·sinα = 0	

Поиск решения

	0
0	-8 661
1	6 495
2	7.5
3	0
4	-2 165
5	2.5
6	8 661
7	-5 629
8	6.5
9	0
10	1 299
11	1.5
12	-3 307
13	-3 307
14	0
15	0
16	-10 897
17	0
18	0
19	-1 984
20	-1 984
21	-10 897
22	0
23	0
24	0
25	0

Find/Ras. Rva. Rm. Rnb. Rvb. Rrb. Rac. Rvc. Rad. Rvd. Rd1. N1. N2. N3. N4. N5. N6. N7. N8. N9. N10. N11. N12. N13. N14 →

Проверка результатов

$$\underline{Rva} = -8.661 \quad \underline{Rvb} = 6.495 \quad \underline{Rvc} = 7.5$$

$$\underline{Rrb} = 0 \quad \underline{Rvb} = -2.165 \quad \underline{Rrb} = 2.5$$

$$\underline{Rac} = 8.661 \quad \underline{Rvc} = -5.629 \quad \underline{Rvc} = 6.5$$

$$\underline{Rad} = 0 \quad \underline{Rvd} = 1.299 \quad \underline{Rvd} = 1.5$$

$$Rva - Rrb - Rac - Rad = 0$$

$$Rva + Rvb + Rvc + Rvd = 0$$

$$Rva - Rrb - Rac + Rrd - P1 - P2 - P3 = 0$$

ЛИТЕРАТУРА,

рекомендуемая для расширенного изучения материала

1. Ильин, В.П. Численные методы решения задач строительной механики / В.П. Ильин, В.В. Карпов, А.М. Масленников. – Мн. : Выш. школа, 1990. – 349 с.
2. Масленников, А.М. Расчет строительных конструкций численными методами: учебное пособие. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. – 224 с.
3. Турчак, Л.И. Основы численных методов : учебное пособие. – М. : Наука, 1987. – 320 с.
4. Борисевич, А.А. Строительная механика : учебное пособие / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Минск: БНТУ, 2007. – 821 с.
5. Игнатюк, В.И. Численные методы решения задач строительной механики : учебное пособие / В.И. Игнатюк, Н.В. Бочарова. – Брест: БрГТУ, 2015. – 100 с.
6. Караманский, Т.Д. Численные методы строительной механики / Пер с болг. ; под ред. Г.К. Клейна. – М. : Стройиздат, 1981. – 436 с.
7. Матричные алгоритмы в строительной механике стержневых систем : учебное пособие / Д.К. Бендюг [и др.]. – М. : Высшая школа, 1980. – 124 с.

Содержание

Введение.....	3
Лабораторная работа № 1. Применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых ферм.....	4
Лабораторная работа № 2. Использование матриц влияния в расчетах ферм	7
Лабораторная работа № 3. Применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых многопролетных балок.....	12
Лабораторная работа № 4. Применение общей системы равновесия строительной механики к расчету статически определимых рам.....	17
Лабораторная работа № 5. Расчет усилий в трехшарнирных арках.....	21
Лабораторная работа № 6. Определение перемещений в трехшарнирных арках.....	26
Лабораторная работа № 7. Деформированный вид арки.....	31
Лабораторная работа № 8. Расчет двухшарнирной арки с использованием численного интегрирования.....	34
Лабораторная работа № 9. Матричная форма определения перемещений в рамах.....	39
Лабораторная работа № 10. Расчет балок методом конечных разностей.....	43
Лабораторная работа № 11. Применение общей системы равновесия строительной механики к расчету пространственной ферменной структуры.....	47
Литература, рекомендуемая для расширенного изучения материала.....	54

Учебное издание

*Игнатюк Валерий Иванович
Бочарова Наталья Владимировна
Загуляев Станислав Валерьевич*

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ
по дисциплине
«Численные методы решения задач»

Методические указания

для студентов специальностей:

1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и

1-74 04 01 «Сельское строительство и обустройство территорий»

дневной и заочной форм обучения

Ответственный за выпуск Игнатюк В.И.

Редактор Боровикова Е.А.

Компьютерный набор и верстка Игнатюк В.И.

Корректор Никитчик Е.В.

Подписано к печати 11.10.2017 г. Формат 60×84¹/₁₆. Бумага «Снегурочка». Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 3,5. Тираж 200 экз. Заказ № 1028. Отпечатано на ризографе Учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, Брест, ул. Московская, 267.