

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**  
**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ**  
**«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**  
**КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ**

# **ДИНАМИКА СООРУЖЕНИЙ**

**Методические указания**  
**по дисциплине «Строительная механика»**  
**для студентов специальностей**  
**1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и**  
**1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью»**  
**дневной и заочной форм обучения**

Брест 2015

УДК 624.04  
ББК 38.112я73  
М 75

**Рецензент:**

директор филиала РУП «Институт БелНИИС» – Научно-технический центр,  
доктор технических наук *Найчук Анатолий Яковлевич*

**М 75** **В.В. Молош, С.В. Загуляев, И.С. Сыровкашко, Н.В. Бочарова**  
Динамика сооружений : методические указания по дисциплине  
«Строительная механика» для студентов специальностей 1-70 02 01  
«Промышленное и гражданское строительство» и 1-70 02 02  
«Экспертиза и управление недвижимостью» дневной и заочной форм  
обучения. – Брест : Изд-во БрГТУ, 2015. – 56 с.

**ISBN 978-985-493-337-5**

В методических указаниях приведены: классификация видов динамических воздействий; понятие степени свободы системы испытывающей действие динамической нагрузки; расчет систем с одной, двумя и бесконечным числом степеней свободы с учетом и без учета сил сопротивления при свободных и вынужденных колебаниях системы; методы борьбы с вибрацией; методы расчетов и примеры задач строительной механики стержневых систем на динамические воздействия.

Издание предназначено для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и 1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью» дневной и заочной формы обучения.

УДК 624.04  
ББК 38.112я73

ISBN 978-985-493-337-5

© В.В. Молош, 2015  
© С.В. Загуляев, 2015  
© И.С. Сыровкашко, 2015  
© Издательство БрГТУ, 2015

## 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Динамика сооружений – раздел строительной механики, в котором рассматриваются методы расчета сооружений на действие динамических нагрузок.

Динамическими нагрузками называются такие, которые во время действия сообщают массам сооружения ускорения, вызывая появление инерционных сил. Если инерционные силы, вызываемые нагрузками, при их приложении малы по сравнению с самими нагрузками, то такие нагрузки приближенно считаются статическими

Нагрузку, действующую на сооружение, относят к динамической, если она изменяет свою величину в сравнительно короткий промежуток времени. При действии динамической нагрузки массы элементов самого сооружения, а также связанного с ним оборудования, в процессе деформации получают ускорения, и это приводит к тому, что на сооружение со стороны движущихся масс системы действуют дополнительные силы – силы инерции, а в сооружении возникают колебания. Расчет сооружения с учетом сил инерции и возникающих при этом колебаний называется динамическим расчетом. Его задачей в общем случае является определение во времени закона движения масс деформируемой системы, зная который возможно дать оценку прочности и жесткости системы.

Различают следующие основные виды динамических нагрузок.

*Периодическая неподвижная нагрузка* — это нагрузка, значение которой изменяется периодически по определенному закону. Она может быть непрерывной или прерывной. Если периодическая нагрузка изменяется по закону синусов или косинуса, то такая нагрузка называется *гармонической* или *вибрационной*. Вибрационные воздействия на конструкции сооружений создаются за счет инерционных сил, возникающих при вращательном и вращательно-поступательном движении неуравновешенных частей машин и механизмов. Для сооружений вибрационные нагрузки представляют особую опасность, так как вызываемые ими напряжения и деформации зависят не только от амплитуды нагрузки, но и от частоты ее воздействия. Небольшая вибрационная нагрузка может вызвать значительные перемещения и усилия в системе.

*Кратковременная нагрузка* (импульсная) характеризуется быстрым развитием и быстрым исчезновением (взрыв).

*Ударная нагрузка* (удар в определенном месте сооружения) характерна резким изменением скорости ударяемого тела в короткий отрезок времени. Она может быть неподвижной и подвижной, хаотичной и периодической.

*Подвижная нагрузка* — нагрузка, положение которой на сооружении меняется во времени (движение поездов, автомобилей, кранов и др.). Действие подвижных нагрузок сопровождается, как правило, колебаниями и ударами.

*Сейсмическая нагрузка* результат беспорядочного движения почвы, толчков, ударов и колебаний при землетрясении.

Динамические нагрузки могут быть и комбинированными, например, вибрационно-ударная от копров периодического действия.

Все динамические нагрузки вызывают колебания конструкций, на которые они действуют.

Динамический расчет производится как для проверки сооружения на прочность, так и для определения величин динамических перемещений, скоростей и ускорений, которые при воздействии на людей и на некоторые виды оборудования, например на измерительные приборы, не должны превосходить допустимых пределов.

В динамике сооружений основной характеристикой системы является *число степеней свободы* – количество параметров, определяющих положение всех масс при любых деформациях системы.

С увеличением числа степеней свободы расчет систем усложняется. С целью упрощения расчета обычно пренебрегают угловыми перемещениями масс (тогда каждая точечная масса имеет в плоскости две степени свободы). Кроме того можно не учитывать некоторые весьма малые перемещения масс, которые не являются определяющими при данном виде колебаний. Например, при произвольном динамическом воздействии в невесомом упругом стержне с массой, сконцентрированной в его вершине (рис. 1.1 *а*), в общем случае имеют место деформации трех видов – продольные, деформации сдвига и изгибные. Если рассматривать поперечные колебания стержня, то деформациями сдвига и продольными можно пренебречь, равно как и вертикальным перемещением массы, обусловленным изгибом стержня. Получится система с одной степенью свободы – положение массы определяется одним параметром  $x$ .

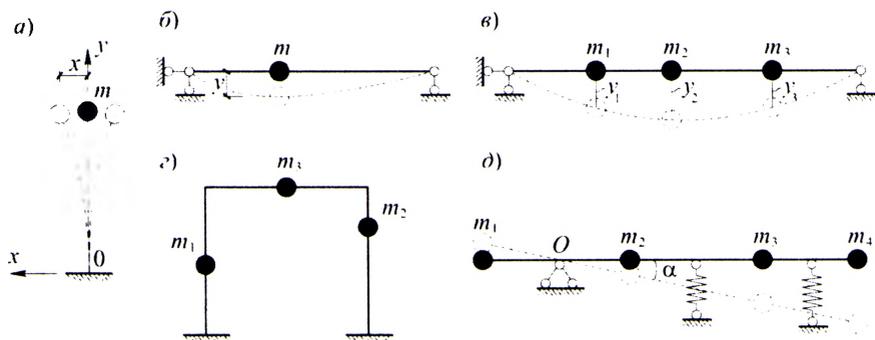


Рисунок 1.1

Показанная на рис. 1.1, *б* невесомая балка с одной точечной массой  $m$  имеет две степени свободы, если считать ее упругой и невесомой. Если пренебрегать продольными деформациями балки, то система будет иметь одну степень свободы, так как положение точечной массы определится только вертикальным перемещением  $y$ .

Невесомая балка с тремя точечными массами, показанная на рисунке 1.1, *в*, несмотря на бесконечное число возможных форм упругой линии, имеет только три степени свободы, так как положение трех масс  $m_1, m_2, m_3$  определяется тремя прогибами  $y_1, y_2, y_3$  соответствующих точек балки.

Рама, изображенная на рисунке 1.1, *з*, с тремя сосредоточенными массами имеет четыре степени свободы, а абсолютно жесткая балка (рисунк 1.1, *д*), имеющая возможность совершать перемещения, вращаясь вокруг неподвижной точки  $O$ , является системой с одной степенью свободы, независимо от числа масс и упругих опор, так как положение всех масс определяется одним параметром – углом поворота  $\alpha$  балки относительно центра  $O$ .

Если массы рассматриваются не как точечные, то приходится учитывать инерцию их вращения, и тогда во всех рассмотренных примерах число степеней свободы оказывается большим, так как положение масс в этом случае определяется уже не только прогибами, но и углами поворотов.

Так, например, плоская система, показанная на рисунке 1.1, *в*, будет в этом случае иметь семь степеней свободы.

Если учитывать собственную распределенную массу упругой системы, то степень свободы такой системы окажется уже равной бесконечности. Строго говоря, поскольку все сооружения имеют распределенную массу, они всегда являются системами со степенью свободы, равной бесконечности, однако во многих случаях удается свести расчет таких систем к расчету систем с конечным числом или даже с одной степенью свободы.

В дальнейшем, при динамических расчетах, будем считать системы линейно деформируемыми, т.е. сохраняющими линейную зависимость между силами и деформациями.

Для решения задач динамики сооружений применяются два основных способа: кинестатический и энергетический.

*Кинестатический* (точный) состоит в том, что сооружение рассматривается в равновесии в любой момент времени под действием заданных динамических нагрузок, вызываемых ими инерционными сил, и моментов масс самого сооружения и масс, расположенных на нем. Далее для расчета применяют методы общего курса строительной механики.

*Энергетический*, основанный на применении закона сохранения энергии, согласно которому сумма потенциальной и кинетической энергии упругой системы является величиной постоянной во времени.

Различают свободные и вынужденные колебания системы. Если упругую систему каким-либо внешним воздействием вывести из состояния устойчивого равновесия, а затем выводящую из этого состояния причину убрать, то система будет совершать колебания около положения устойчивого равновесия. Такие колебания называются свободными. Во время таких колебаний происходит непрерывный переход кинетической энергии в упругую и наоборот.

Неизбежные различного рода внешние и внутренние сопротивления движению системы непрерывно поглощают часть энергии системы, в результате чего процесс колебаний будет затухающим.

Свободные периодические колебания, совершаемые по гармоническому закону с одной частотой, называются собственными колебаниями, а соответствующие им формы колебаний – собственными или главными формами.

Если на систему действует непрерывно какая-то динамическая нагрузка, то она будет сообщать системе энергию, вызывать ее колебания. Такие колебания называются вынужденными.

## 2. СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

### 2.1. Свободные гармонические колебания системы с одной степенью свободы

Рассмотрим колеблющуюся невесомую однопролетную балку, масса которой сосредоточена в середине пролета (рис. 2.1).

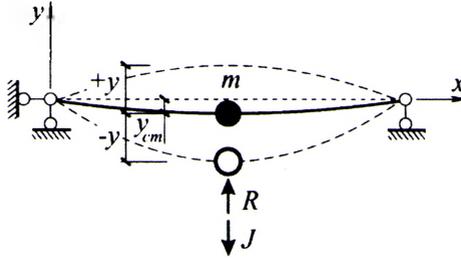


Рисунок 2.1

Из основного уравнения динамики (второй закон Ньютона) масса выражается делением веса груза  $Q$  на величину ускорения свободного падения  $g = 981 \text{ см/с}^2$ :

$$m = \frac{Q}{g}, \quad (2.1)$$

Под действием груза  $Q$  точка его приложения переместится вниз на величину  $y_{cm}$  (рис. 2.1). Без учета сил сопротивления на массу будут действовать сила упругой реакции балки  $R$  и сила инерции движущейся массы  $J$ . Рассмотрим каждую из этих сил, считая положительными силы, перемещения, скорости и ускорения, направленные вниз. Силу веса груза  $Q$  можно исключить из рассмотрения, так как она уравновешивается начальной силой реакции системы.

**Сила упругой реакции системы  $R$** , возникающая при отклонении массы  $m$  от положения статического равновесия, направлена к линии статического равновесия в сторону, противоположную перемещению. Сила  $R$  пропорциональна величине отклонения массы от начального положения и в соответствии с принятым правилом знаков должна считаться отрицательной:

$$R = -r_{11}y, \quad (2.2)$$

где  $r_{11}$  – жесткость балки в точке приложения массы (реакция балки, соответствующая единичному перемещению этой точки);  $y$  – перемещение этой точки.

Величина  $r_{11}$ , зависящая от упругих и геометрических характеристик системы, может быть найдена из общего выражения для перемещения, вызванного силой  $r_{11}$  и приравненного единице, т. е.

$$y = \delta_{11}r_{11} = 1 \text{ или } r_{11} = \frac{1}{\delta_{11}}, \quad (2.3)$$

где  $\delta_{11}$  – перемещение рассматриваемой точки, вызванное единичной силой.

Сила инерции движущейся массы  $J$  в соответствии с принципом Даламбера равна произведению массы  $m$  на ее ускорение, т. е. на вторую производную пути или перемещения  $y$  по времени  $t$ . Эта сила направлена в сторону, противоположную ускорению, и считается отрицательной:

$$J = -m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m\ddot{y}. \quad (2.4)$$

В дальнейшем будем обозначать дифференцирование по времени через  $\dot{\phantom{y}}$ , по длине – через  $\delta' \phantom{y}$ .

Уравнение динамического равновесия сил, действующих на массу, имеет следующий вид:

$$\sum y = J + R = 0. \quad (2.5)$$

Сила  $Q$ , учитывающая вес массы, в это уравнение не входит, так как ее действие уже учтено тем, что перемещения отсчитываются не от нуля, а от уровня статического равновесия.

Подставляя вместо сил  $J$  и  $R$  их выражения (2.2), (2.4), деля уравнение на  $m$  и меняя знаки, получаем обыкновенное однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{y} + \frac{r_{11}}{m} y = 0. \quad (2.6)$$

Обозначим

$$\frac{r_{11}}{m} = \omega^2 \quad (2.7)$$

Тогда решение дифференциального уравнения (2.6) может быть получено в виде:

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0) + B \cos(\omega t + \varphi_0); \quad (2.8)$$

где  $A$  и  $B$  – постоянные интегрирования;

$\varphi_0$  – начальная фаза свободных колебаний, характеризующая отклонение массы в начале движения

$$\varphi_0 = \arcsin\left(\frac{y_0}{A}\right); \quad (2.9)$$

$y_0$  – начальное перемещение

$$y_0 = A \sin \varphi_0. \quad (2.10)$$

Постоянные интегрирования  $A$  и  $B$  находим из начальных условий:

при  $t = 0, y = y_0, \dot{y} = \dot{y}_0 = V_0.$

Тогда  $B = y_0, A = \frac{V_0}{\omega}.$

Решение дифференциального уравнения (2.6) принимает вид:

$$y = \frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t + \varphi_0) + y_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (2.11)$$

График уравнения (2.8) представлен на рис. 2.2.

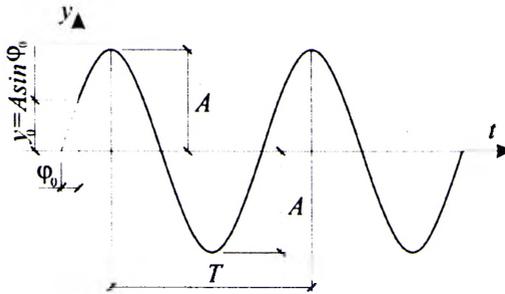


Рисунок 2.2

Уравнение (2.8) приводит к одинаковым значениям  $y$  при  $t = t_1, t = t_1 + 2\pi / \omega, \dots, t = t_1 + 2\pi n / \omega$  потому *период*, т. е. продолжительность полного цикла одного колебания в секундах, выражается формулой (2.12).

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2.12)$$

Величина  $\omega$  носит название *круговой*, или *циклической частоты* собственных колебаний системы.

Число полных циклов колебаний в 1 с. выражается в герцах и составляет

$$\lambda = 1 / T = \omega / (2\pi), \quad (2.13)$$

где  $T$  должно быть выражено в секундах.

Тогда из выражения (2.13) следует, что круговая частота есть число полных колебаний за  $2\pi$  сек.

Величина  $A$ , характеризующая размах колебания, называется *амплитудой колебаний*.

Определение частоты собственных колебаний является одной из важнейших задач динамики.

Из выражения (2.7) следует:

$$\omega^2 = \frac{r_{11}}{m} = \frac{1}{\delta_{11} m} = \frac{g}{y_{cm}} \left[ \frac{1}{cек^2} \right], \quad (2.14)$$

где  $y_{cm} = \delta_{11} Q$  – статическое перемещение массы  $m$  под действием собственного веса ( $Q = mg$ ).

Как видно из (2.14), частота собственных колебаний уменьшается с уменьшением жесткости упругой связи и с увеличением массы.

Дифференцированием выражения (2.8) могут быть получены формулы для скорости и ускорения гармонического колебательного движения:

$$V = \dot{y} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) - B\omega \sin(\omega t + \varphi_0); \quad (2.15)$$

$$\omega = \ddot{y} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) - B\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (2.16)$$

*Технической частотой*  $n$  называют число колебаний в минуту. Техническая частота выражается формулами:

$$n = 60\lambda = 60 / T = (30\omega / \pi) \sqrt{981 / y_{cm}} \approx 300 / \sqrt{y_{cm}}. \quad (2.17)$$

Выражение для определения частоты собственных колебаний можно получить и в другом виде, используя энергетический метод.

Условимся отсчитывать время  $t$  от того момента, когда колеблющаяся масса проходит свое среднее положение, а начальная фаза колебаний  $\varphi_0 = 0$ .

Тогда  $\dot{y}_0 = 0$  и из (2.11) получаем:

$$y = \frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t), \quad \dot{y} = V_0 \cos(\omega t).$$

Максимальные значения перемещения и скорости определяются при  $\sin(\omega t) = 1$  и  $\cos(\omega t) = 1$ , т.е.

$$y_{\max} = \frac{V_0}{\omega}; \quad \dot{y}_{\max} = \dot{y}_0 = V_0 = y_{\max} \cdot \omega.$$

Кинетическая энергия массы непрерывно изменяется в процессе колебаний и достигает максимума:

$$\frac{mV_{\max}^2}{2} = \frac{m}{2} \omega^2 y_{\max}^2 = \omega^2 K_{\max}, \quad (2.18)$$

где  $K_{\max}$  – кинетическая энергия массы в ее среднем положении при амплитуде  $y_{\max}$  и частоте  $\omega = 1$ .

Потенциальная энергия достигает максимума, когда масса  $m$  находится в крайнем положении. Кинетическая энергия в этот момент равна нулю: она перешла в потенциальную.

Потенциальная максимальная энергия равна:

$$H_{\max} = \frac{1}{2} r_{11} v_{\max}^2 \quad (2.19)$$

Приравняв выражения (2.18) и (2.19), получаем

$$\begin{aligned} H_{\max} &= \omega^2 K_{\max} \\ \omega^2 &= \frac{H_{\max}}{K_{\max}} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Для системы с одной степенью свободы

$$\omega^2 = \frac{r_{11}}{m}, \quad (2.21)$$

т.е. получили то же выражение (2.14).

Таким образом, для системы с одной степенью свободы формула (2.14) является точной. Для упругих систем с бесконечным числом степеней свободы, как будет показано дальше, эта формула является приближенной.

В ряде случаев при определении круговой частоты собственных колебаний системы, когда у системы направление смещения массы (инерционная сила  $J$ ) и реакции связей не совпадают (рис. 2.3, *а*), необходимо перейти к реакции эквивалентной связи согласно уравнению

$$r_i a = \sum r_{i,j} a_j. \quad (2.22)$$

Формула (2.14) приобретает вид:

$$\omega = \sqrt{r_i / m}. \quad (2.23)$$

Или, наоборот, когда у системы с одной степенью свободы имеется несколько зависимых перемещений масс. Тогда следует перейти к массе, эквивалентной заданным массам, перемещение которой совпадает с реакцией упругой связи (рис. 2.3, *б*). Формулы перехода получаются из условия равного действия инерционных сил

$$J_i a = \sum J_j a_j. \quad (2.24)$$

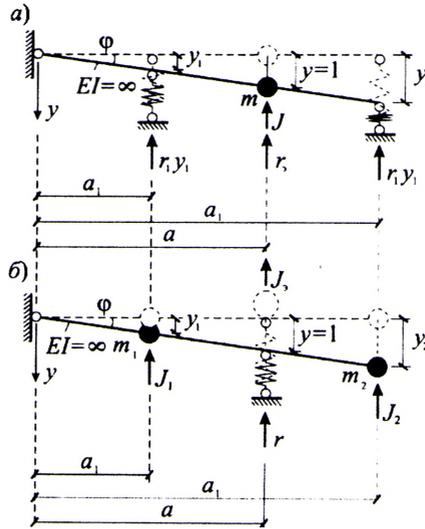


Рисунок 2.3

Инерционные силы вычисляются путем умножения масс на вращательные ускорения:

$$J_i = m_i \varepsilon \dot{a}, \quad J_i = m_i \varepsilon \dot{a}_i. \quad (2.25)$$

В общем случае при наличии нескольких масс и некоторого числа упругих связей можно отыскать  $r_i$  и  $m_i$ , когда реакция эквивалентной связи и инерционная сила эквивалентной массы будут лежать на одной прямой. Формула (2.14) получит вид:

$$\omega = \sqrt{r_i / m_i}. \quad (2.26)$$

Ниже приведен ряд примеров, в которых выполнен расчет круговой частоты собственных колебаний системы с одной степенью свободы.

**Пример 1.** Найти круговую частоту свободных колебаний массы  $m$ , входящей в состав системы, показанной на рис. 2.4. Жесткости стержней и пружины соответственно равны  $EJ = \infty$  и  $r$ .

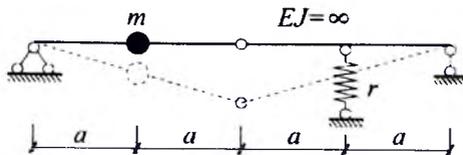


Рисунок 2.4

Статическое перемещение массы равно статическому укорочению пружины и составляет:

$$y_{cm} = mg\delta_{11} = \frac{mg}{r},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{cm}}} = \sqrt{\frac{r}{m}}.$$

**Пример 2.** Определить круговую частоту свободных колебаний сосредоточенной массы  $m$  (если  $Q = mg = 3$  кН), приложенной на расстоянии  $a = 1.5$  м от левой опоры балки (рис. 2.5). Пролет балки  $l = 6$  м. Собственный вес балки (двутавр 30а) не учитывать. Момент инерции поперечного сечения балки  $J = 8950$  см<sup>4</sup>. Момент сопротивления –  $W = 597$  см<sup>3</sup>. Модуль упругости стали  $E = 2.1 \cdot 10^6$ .

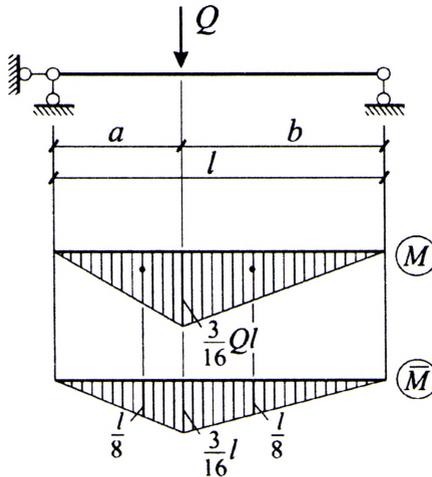


Рисунок 2.5

Статический прогиб балки под грузом  $Q$  от действия этого же груза находится путем перемножения эпюр по способу А. Н. Верещагина:

$$y_{cm} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{3Ql}{16} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{8} + \frac{3Ql}{16} \cdot \frac{3l}{8} \cdot \frac{l}{8} \right) = \frac{3Ql^3}{256EJ} = \frac{3 \cdot 3000 \cdot 600^3}{256 \cdot 2.1 \cdot 10^6 \cdot 8950} = 0.404 \text{ см.}$$

Круговая частота по формуле (2.21)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{cm}}} = \sqrt{\frac{981}{0.404}} = 49.2 \text{ с}^{-1}.$$

**Пример 3.** Определить круговую частоту свободных колебаний массы  $m = Q/g$ , сосредоточенной посредине пролета ригеля рамы, показанной на рис. 2.6. а, если  $Q = 1000$  кН,  $l = 2$  м,  $h = 3$  м,  $EJ = 10^{10}$  кН·см<sup>2</sup> и  $J/J_1 = 2$ .

Собственный вес стержней рамы не учитывать.

Грузовая эпюра изгибающих моментов  $M$  может быть получена расчетом данной статически неопределимой рамы методом сил или методом перемещений. Она имеет вид, приведенный на рисунке 2.6. б.

Статический прогиб под силой  $Q$  определяем путем перемножения эпюр. При этом эпюра  $\bar{T}$  от единичной силы, приложенной по направлению искомого перемещения, построена для статически определимой основной системы (рис. 2.6. в). Произведя перемножение эпюр с применением формулы трапеций, найдем

$$y_{cm} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2 \cdot 6} \left( 2 \cdot 442 \cdot \frac{1}{2} - 116 \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2 \cdot 6} \cdot 2 \cdot 442 \cdot \frac{1}{2} \right] = 0,0069 \text{ см.}$$

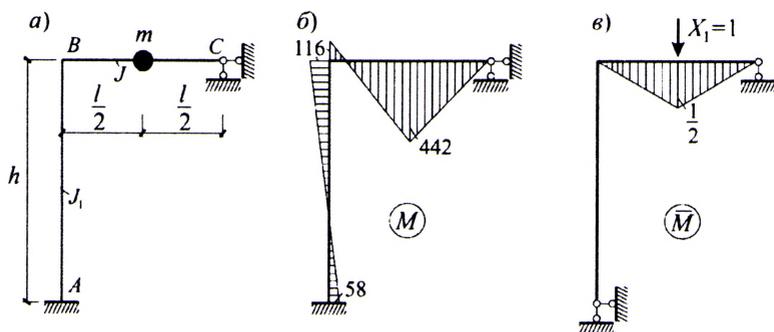


Рисунок 2.6

Круговая частота свободных колебаний составит

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{cm}}} = \sqrt{\frac{981}{0,0069}} = 377 \text{ с}^{-1}.$$

**Пример 4.** На системе (рис. 2.7. а) расположены сосредоточенные массы. Вычислить частоту собственных колебаний, применив статический и энергетический методы решений.

Независимо от числа масс система обладает лишь одной степенью свободы. За параметр, определяющий перемещение всех масс лучше принять угол поворота  $\alpha$  элемента бесконечной жесткости.

Инерционные силы и вектор  $r$ , определяющий жесткость системы, не лежат на одной прямой, поэтому, используя формулу для решения задачи статическим методом, приведем все массы к одной, эквивалентной заданным. Эквивалентная масса должна быть такой, чтобы инерционная сила оказывала на систему равнозначное действие и лежала на одной прямой с вектором  $r$ , определяющим жесткость (рис. 2.7. б).

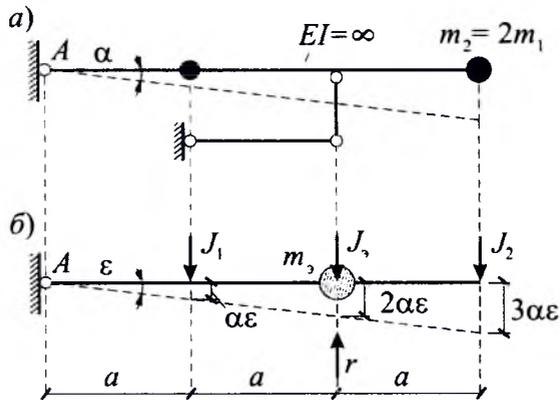


Рисунок 2.7

Эквивалентную массу находим из условия равного действия инерционных сил по уравнению

$$\sum M_A = J_1 a + J_2 3a = J_3 2a.$$

Выразим инерционные силы через произведения масс на их ускорения, используя связь вращательного ускорения с угловым:

$$J_1 = m_1 \epsilon a; \quad J_2 = m_2 \epsilon 3a; \quad J_3 = m_3 \epsilon 2a.$$

где  $\epsilon$  – угловое ускорение элемента бесконечной жесткости. Из равновесия сил получаем:

$$m_1 \epsilon a^2 + 2m_2 \epsilon 9a^2 = m_3 \epsilon 4a^2.$$

откуда

$$m_3 = \frac{19m_1}{4}.$$

Частота собственных колебаний составит:

$$\omega = \sqrt{\frac{r}{m_3}} = \sqrt{\frac{4r}{19m_1}}.$$

Решая задачу энергетическим методом, необходимо представить, что собственные колебания системы являются гармоническими, а перемещения каждой массы в любой момент времени выражаются зависимостью

$$y_i(t) = y_i^{\max} \sin \omega t = \frac{V_i^{\max}}{\omega} \sin \omega t.$$

где  $y_i^{\max}$  – амплитудное значение перемещения массы, т.е. перемещение при  $\sin \omega t = 1$ .

Рассмотрим два положения системы. Одно из них при отсутствии скоростей движущихся масс (рис. 2.8, а). При этом получим наибольшее значение потенциальной энергии в упругой связи:

$$\Pi_{\max} = \frac{R\Delta}{2} = \frac{r\Delta^2}{2} = \frac{r(2a)^2\alpha^2}{2}.$$

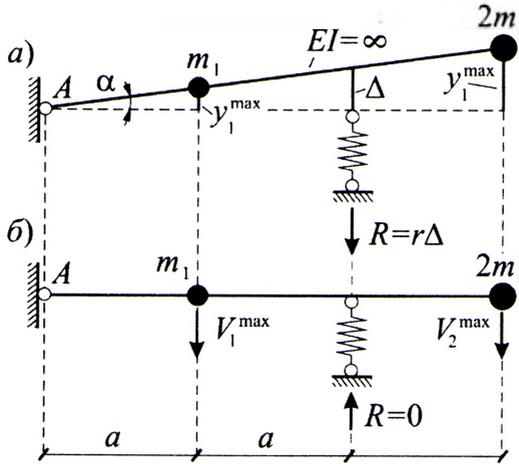


Рисунок 2.8

Другое положение – «нулевое», когда упругая связь не работает (рис. 2.8, б). При этом скорости движения масс достигают наибольших значений. Кинетическая энергия колеблющихся масс достигает максимума:

$$K_{\max} = \sum \frac{m_i (V_i^{\max})^2}{2} = \sum \frac{m_i (y_i^{\max} \omega)^2}{2} = \left[ \frac{m_1 a^2 \alpha^2}{2} + \frac{2m_1 (3a)^2 \alpha^2}{2} \right] \omega^2.$$

Записывая равенство энергий  $\Pi_{\max} = K_{\max}$ , находим частоту собственных колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{4r}{19m_1}}.$$

Получаем одинаковые выражения частоты собственных колебаний, так как результаты вычислений не зависят от метода решения задачи.

## 2.2. Свободные колебания системы с одной степенью свободы с учетом сил сопротивления

Из графика, приведенного на рис. 2.2, следует, что если массу вывести из состояния равновесия, ее колебания с постоянной амплитудой будут совершаться неограниченное время. В реальных условиях колебательный процесс протекает иначе, так как на систему действуют силы сопротивления, препятствующие свободному перемещению массы. Это сопротивление внешней среды (например, воздуха); трение в опорных устройствах системы; внутреннее трение частиц материала в процессе деформирования системы и др. При наличии сил сопротивления часть энергии системы расходуется (необратимо) на их преодоление, что приводит к постепенному затуханию процесса колебаний. Влияние сил сопротивления на колеблющуюся систему учитывается в предположении, что они пропорциональны скорости колебания системы.

Рассмотрим упругую невесомую однопролетную балку с сосредоточенной массой  $m$  (рисунок 2.9).

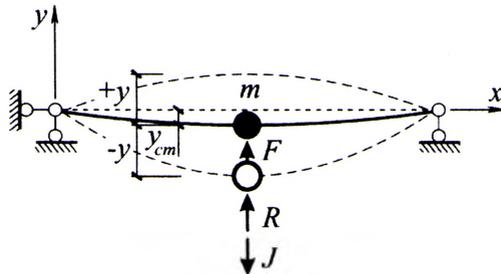


Рисунок 2.9

На выведенную из состояния равновесия массу  $m$  в общем случае действуют: сила упругой реакции балки  $R$ , и сила инерции движущейся массы  $J$  и обобщенная сила сопротивления  $F$ .

Сила упругой реакции балки  $R$  и сила инерции движущейся массы  $J$  могут быть определены соответственно по формулам (2.2) и (2.4).

Сила сопротивления  $F$  приложена к массе и направлена в сторону, противоположную ее движению поэтому:

$$F = -\alpha \frac{dy}{dt} = -\alpha \dot{y}, \quad (2.27)$$

где  $\alpha$  – коэффициент сопротивления среды;  $t$  – время.

Уравнение динамического равновесия системы будет имеет вид:

$$\sum y = J + R + F = 0. \quad (2.28)$$

Подставляя вместо сил  $J$ ,  $R$  и  $F$  их выражения (2.2), (2.4), (2.27) деля уравнение на  $m$  и меняя знаки, получаем обыкновенное однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{y} + 2k\dot{y} + \omega^2 y = 0, \quad (2.29)$$

где 
$$k = \frac{\alpha}{2m}.$$

Будем искать решение данного уравнения в форме

$$y = Ae^{zt}. \quad (2.30)$$

Тогда 
$$\dot{y} = zAe^{zt}, \quad \ddot{y} = z^2 Ae^{zt}.$$

После подстановки в уравнение (2.29) получим:

$$(z^2 + 2kz + \omega^2)Ae^{zt} = 0. \quad (2.31)$$

Так как  $Ae^{zt} = y \neq 0$ , то

$$z^2 + 2kz + \omega^2 = 0, \quad (2.32)$$

где  $\omega$  – круговая частота свободных колебаний без учета сил сопротивления.

Так как данное характеристическое уравнение имеет 2 корня

$$z_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2}, \quad (2.33)$$

то общий интеграл уравнения (2.29) будет состоять из 2-х членов

$$y = A_1 e^{z_1 t} + A_2 e^{z_2 t}. \quad (2.34)$$

При нахождении корней (2.34) возможны два случая:

1.  $k^2 > \omega^2$ . В этом случае оба корня  $z$  действительны и отрицательны. Это значит, при большом сопротивлении среды система не совершает колебаний.
2.  $k^2 < \omega^2$ . Оба корня – комплексные числа:

$$z_1 = -k + i\sqrt{\omega^2 - k^2}, \quad z_2 = -k - i\sqrt{\omega^2 - k^2}.$$

Обозначим  $\sqrt{\omega^2 - k^2} = \omega_1$ ,

Тогда 
$$z_1 = -k + i\omega_1, \quad z_2 = -k - i\omega_1,$$

И выражение (3.8) примет вид

$$y = A_1 e^{(-k+i\omega_1)t} + A_2 e^{(-k-i\omega_1)t} = A_1 e^{-kt} e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{-kt} e^{-i\omega_1 t}. \quad (2.35)$$

По формуле Эйлера

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t; \quad e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t.$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} y &= e^{-kt} [A_1(\cos \omega t + i \sin \omega t) + A_2(\cos \omega t - i \sin \omega t)] = \\ &= e^{-kt} [(A_1 + A_2)\cos \omega t + i(A_1 - A_2)\sin \omega t]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Обозначив  $(A_1 + A_2) = A_0 \cdot \sin \varphi_0$ ,  $i(A_1 - A_2) = A_0 \cdot \cos \varphi_0$ , получим

$$y = A_0 e^{-kt} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (2.37)$$

где  $e$  – основание натурального логарифма ( $e \approx 2,72$ );

$A_0$  – начальная амплитуда свободных колебаний

$$A_0 = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{V_0 + y_0 k}{\omega}\right)^2}; \quad (2.38)$$

$\varphi_0$  – начальная фаза свободных колебаний, характеризующая отклонение массы в начале движения

$$\varphi_0 = \arcsin\left(\frac{y_0}{A_0}\right); \quad (2.39)$$

$y_0$  – начальное перемещение

$$y_0 = A_0 \sin \varphi_0; \quad (2.40)$$

$V_0$  – начальная скорость массы.

Дадим времени  $t$  два последовательных значения  $t_n$  и  $t_{n+1}$ , обращающих  $\sin(\omega t + \varphi_0)$  в единицу. Для этого должно быть

$$\omega t_n + \varphi_0 = 2n\pi + \frac{\pi}{2}; \quad (2.41)$$

$$\omega t_{n+1} + \varphi_0 = 2n\pi + \frac{5}{2}\pi.$$

Разность между ними постоянна

$$t_{n+1} - t_n = \frac{2\pi}{\omega} + T. \quad (2.42)$$

где  $T = 2\pi / \omega_1$  – период свободных колебаний с учетом сил сопротивления.

Соответствующие мгновениям  $t_n$  и  $t_{n+1}$  амплитуды колебаний будут

$$y_n = A_0 e^{-kt_n}; y_{n+1} = A_0 e^{-kt_{n+1}} \quad (2.43)$$

а их отношение

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = e^{k(t_{n+1}-t_n)} = e^{kT} = const. \quad (2.44)$$

Найдем натуральный логарифм отношения двух последовательных однозначных амплитуд свободных колебаний:

$$\gamma = \ln \frac{y_n}{y_{n+1}} = \ln \frac{e^{-kt_n}}{e^{-kt_{n+1}}} = \ln e^{kT} = kT. \quad (2.45)$$

Эта величина, характеризующая скорость затухания колебаний, называется *логарифмическим декрементом затуханий*.

Процесс затухающих колебаний может быть изображен графически (рис. 2.10).

Огибающая кривая касается графика колебаний в тех точках, где амплитуда наибольшая, т.е.

$$\sin(\omega_1 t + \varphi_0) = 1.$$

Уравнение (2.38) показывает, что амплитуда колебаний при затухании приводит к уменьшению частоты свободных колебаний. Однако второй член под корнем этого выражения, как правило, во много раз меньше первого, поэтому практически можно считать, что затухание не оказывает влияния на частоту свободных колебаний.

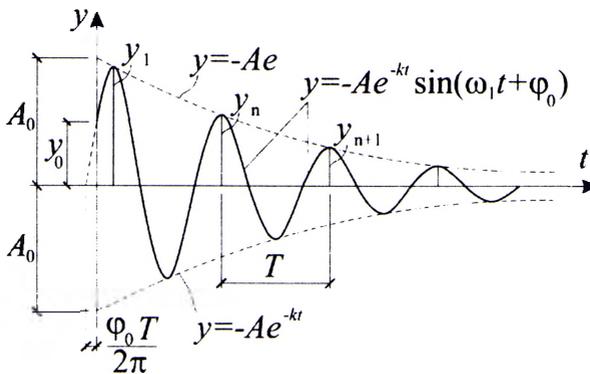


Рисунок 2.10

### 2.3. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы при действии гармонической нагрузки

*Вынужденными* называются колебания механической системы, на массу которой кроме восстанавливающей силы, силы сопротивления и силы инерции действует еще возмущающая сила, изменяющаяся во времени.

Наибольшее практическое значение для расчета промышленных сооружений имеет гармоническая нагрузка, т. е. нагрузка, изменяющаяся во времени по закону синуса или косинуса, например сосредоточенная сила

$$P(t) = P \sin \theta t, \quad (2.46)$$

где  $P$  – амплитуда возмущающей силы;  $\theta$  – круговая частота возмущающей силы.

Между технической частотой  $n$  (числом оборотов в минуту) и круговой частотой (числом вращений в  $2\pi$  с) существует зависимость

$$\theta = \frac{\pi n}{30}. \quad (2.47)$$

По гармоническим законам изменяются вертикальная ( $P_y$ ) и горизонтальная ( $P_x$ ) составляющие центробежной силы, возникающей при наличии неуравновешенной массы  $m$ , равномерно вращающейся части машины (рис. 2.11).

Рассмотрим консольную балку, на которую воздействует произвольно изменяющаяся во времени сила  $P(t)$  (рис. 2.12). Без учета сил сопротивления движению массы вниз противодействует сила инерции  $J$  и сила упругого сопротивления балки  $R$ .

$$J = m\ddot{y}, \quad R = r_{11} \cdot y. \quad (2.48)$$

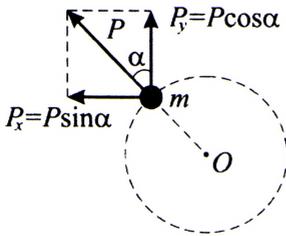


Рисунок 2.11

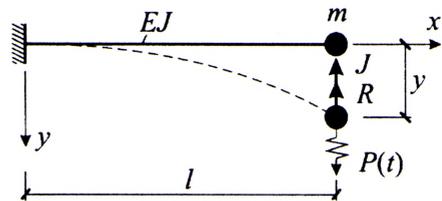


Рисунок 2.12

Воспользуемся статическим методом решения и тогда вместо однородного дифференциального уравнения динамического равновесия (2.6) получим неоднородное, т. е. уравнение с правой частью:

$$\sum Y = 0, \quad P(t) - m\ddot{y} - r_{11}y = 0,$$

или

$$\ddot{y} + \frac{r_{11}}{m}y = \frac{P(t)}{m}.$$

Обозначив  $\frac{F_{11}}{m} = \omega^2$ , получаем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{P(t)}{m}. \quad (2.49)$$

Решение этого уравнения складывается из общего решения собственных колебаний и частного решения уравнения (2.49).

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{1}{m\omega} \left[ \sin \omega t \int_0^t P(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \cos \omega t \int_0^t P(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right], \quad (2.50)$$

где  $\tau$  – переменная величина, изменяющаяся от 0 до  $t$ .

В зависимости от того, как меняется нагрузка, можно получить различное решение задачи.

Ограничимся рассмотрением 2-х частых случаев:

1. Нагрузка  $P(t) = P = const$ , тогда уравнение (2.49) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} y &= A \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{m\omega} \left[ \sin \omega t \int_0^t P(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \cos \omega t \int_0^t P(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right] = A \sin(\omega t + \varphi_0) + \\ &\quad + \frac{P}{m\omega^2} (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) + \\ &\quad + \frac{P}{m\omega^2} = A \sin(\omega t + \varphi_0) + P \cdot \delta_{11} = A \sin(\omega t + \varphi_0) + y_{cm}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Масса совершает простые гармонические колебания.  $y_{cm}$  представляет собой начальное отклонение под статическим действием силы  $P$ .

2. Нагрузка  $P(t)$  изменяется по гармоническому закону, т.е.  $P(t) = P \cdot \sin \theta t$ , где  $P$  – амплитудное значение нагрузки, которому соответствует величина  $\sin \theta t = 1$ , где  $\theta$  – частота возмущающей нагрузки.

Тогда

$$\begin{aligned}
 \int_0^t P \cdot \sin \theta \tau \cdot \cos \omega \tau d\tau &= P \int_0^t [\sin(\theta + \omega)\tau + \sin(\theta - \omega)\tau] \frac{1}{2} d\tau = \\
 &= -\frac{P}{2} \left[ \frac{1}{\theta + \omega} \cos(\theta + \omega)t + \frac{1}{\theta - \omega} \cos(\theta - \omega)t \right]; \\
 \int_0^t P \cdot \sin \theta \tau \sin \omega \tau d\tau &= P \int_0^t \frac{1}{2} [\cos(\theta - \omega)\tau - \cos(\theta + \omega)\tau] d\tau = \\
 &= \frac{P}{2} \left[ \frac{1}{\theta - \omega} \sin(\theta - \omega)t - \frac{1}{\theta + \omega} \sin(\theta + \omega)t \right]; \\
 y &= A \sin(\omega t + \varphi_0) - \frac{P}{2m\omega} \left\{ \frac{1}{\theta + \omega} \sin \omega t \cos(\theta + \omega)t + \right. \\
 &+ \frac{1}{\theta - \omega} \sin \omega t \cdot \cos(\theta - \omega)t - \frac{1}{\theta - \omega} \cos \omega t \cdot \sin(\theta - \omega)t - \\
 &\left. - \frac{1}{\theta + \omega} \cos \omega t \cdot \sin(\theta + \omega)t \right\} = A \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{P \cdot \sin \theta t}{m(\omega^2 - \theta^2)} = \quad (2.52) \\
 &= A \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{P \cdot \sin \theta t}{m\omega^2 \left( 1 - \frac{\theta^2}{\omega^2} \right)} = A \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{P \cdot \sin \theta t}{\frac{m}{m\delta_{11}} \left( 1 - \frac{\theta^2}{\omega^2} \right)} = \\
 &= A \sin(\omega t + \varphi_0) + y_{cm} \mu \sin \theta t;
 \end{aligned}$$

где  $\mu$  – динамический коэффициент, который показывает отношение максимального перемещения при действии динамической нагрузки к перемещению при статическом действии той же нагрузки.

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}. \quad (2.53)$$

Собственные колебания системы с частотой  $\omega$  существенно влияют на перемещение только вначале. По прошествии времени, равного нескольким периодам, они обычно затухают, и остаются только колебания с частотой  $\theta$  (так называемые установившиеся или стационарные вынужденные колебания). Значение динамического коэффициента изменяется с изменением соотношения частот вынужденных и собственных колебаний.

Когда эти частоты равны, т.е.  $\theta / \omega = 1$  возникает явление резонанса и динамический коэффициент  $\mu = \infty$ . Деформации сооружения могут принимать значения, во много раз превышающие их статическую величину. Зависимость динамического коэффициента от отношения частот можно изобразить графически (рис. 2.13).

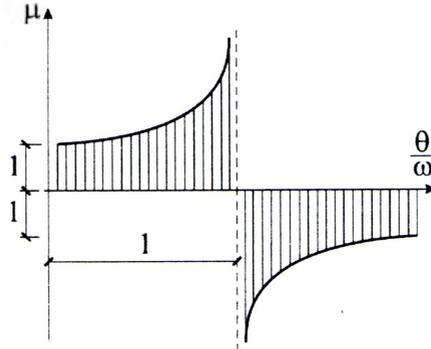


Рисунок 2.13

Таким образом, при действии возмущающей гармонической нагрузки резонанс возникает только при  $\theta = \omega$ . Если период возмущающей силы, изменяющейся по гармоническому закону, является кратным периода собственных колебаний системы, т.е. если  $\theta = \omega / n$ , где  $n$  – целое число не равное 1, то резонанс не возникает.

С учетом сил сопротивления дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы будет иметь вид

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} \dot{y} + \frac{r_{11}}{m} y = \frac{P(t)}{m}, \quad \text{или} \quad \ddot{y} + 2k\dot{y} + \omega^2 y = \frac{P(t)}{m}, \quad (2.54)$$

где  $k$  – тоже, что и в формуле 2.29.

Полное решение уравнения (2.54) состоит из общего решения соответствующего однородного уравнения (2.29) и частного решения уравнения (2.54), может быть представлено в следующем виде

$$y = A_0 e^{-kt} \sin(\omega t + \varphi_0) + y_{cm} \mu \sin(\theta t - \varepsilon). \quad (2.55)$$

Первый член этого уравнения выражает свободные колебания, второй – вынужденные.

Свободные колебания быстро затухают благодаря силам сопротивления и тогда устанавливаются вынужденные колебания с частотой  $\theta$ .

Во второй член формулы (2.29) входят следующие величины:  $\varepsilon$  – сдвиг фазы вынужденных колебаний по отношению к колебаниям возмущающей силы, характеризующий величину опережения

$$\varepsilon = \arctg \frac{(k/m)\theta}{\omega^2 - \theta^2}, \quad (2.56)$$

где  $\mu$  – динамический коэффициент гармонической нагрузки

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{k\theta}{m\omega^3}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\delta\theta}{\omega}\right)^2}} \quad (2.57)$$

где  $\delta$  – коэффициент неупругого сопротивления материала конструкции

$$\delta = \frac{k}{m\omega} \quad (2.58)$$

Значения этого коэффициента для разных материалов и для разных величин амплитуд инерционных сил машин приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Амплитуда инерционной силы, кН	Железобетон		Кирпичная кладка	Дерево	Сталь прокатная
	Предварительно напряженный	Ненапряженный			
<1	0,025	0,05	0,04	0,03	0,01
≥1	0,05	0,1	0,08	0,05	0,025

Амплитуды вынужденных колебаний и динамические коэффициенты благодаря затуханию уменьшаются и даже при резонансе, т. е. при совпадении частот собственных и вынужденных колебаний остаются конечными, хотя и могут оказаться опасными.

При совпадении частот ( $\theta = \omega$ ) из формулы 2.57 получаем

$$\mu = \frac{1}{\delta} \quad (2.59)$$

Наибольшего значения динамический коэффициент достигает при

$$\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 = 1 - \frac{\delta^2}{2} \quad (2.60)$$

$$\mu_{\max} = \frac{1}{\frac{\delta}{2}\sqrt{4 - \delta^2}} \quad (2.61)$$

Когда в системе с одной степенью свободы **возмущающая сила и сила инерции не совпадают**, расчет сооружения выполняют исходя из принципа независимости действия сил на максимальное действие инерционной силы и вибрационной нагрузки.

Наибольшая инерционная сила вычисляется по формуле

$$\delta_{11}^* \cdot J_1 + \Delta_{1p} = 0, \quad (2.62)$$

где  $\delta_{11}^* = \delta_{11} - 1/(m\theta^2)$ ;  $\Delta_{1p}$  – амплитудное перемещение массы от возмущающей силы.

Рассмотрим несколько примеров задач строительной механики при вынужденных колебаниях системы с одной степенью свободы.

**Пример 5.** Определить динамический коэффициент, амплитуду вынужденных колебаний и наибольшие нормальные напряжения в балке, рассмотренной в *примере 2*, если сосредоточенный груз  $Q = 3$  кН является двигателем с частотой вращения 400 об/мин, дающим вертикальную составляющую центробежной силы  $P(t) = P \sin \theta t$ . При этом  $P = 0,8$  кН. Найти также величину динамического коэффициента при резонансе.

Круговая частота свободных колебаний была найдена в *примере 2* и равна  $\omega = 49,2 \text{ с}^{-1}$ . Круговая частота вынужденных колебаний, равная частоте возмущающей силы

$$\theta = \frac{400\pi}{30} = 41,8 \text{ с}^{-1}.$$

Так как балка стальная, а амплитуда колебаний вертикальной составляющей центробежной силы превышает 1 кН, то по таблице 4.1 принимаем коэффициент неупругого сопротивления материала  $\delta = 0,025$ .

Динамический коэффициент по формуле (2.57):

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\delta\theta}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{41,8^2}{49,2^2}\right)^2 + \left(\frac{0,025 \cdot 41,8}{49,2}\right)^2}} = 3,56.$$

Динамический коэффициент по формуле (2.53):

$$\mu = \frac{1}{1 - (\theta / \omega)^2} = \frac{1}{1 - (41,8 / 49,2)^2} = 3,6.$$

Таким образом, учет затухания при отсутствии резонанса почти не изменил величину динамического коэффициента. При резонансе же, т. е. при  $\theta = \omega$ , с учетом затухания по формуле (2.59) получим

$$\mu = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{0,025} = 40.$$

Следовательно, хотя с учетом затухания динамический коэффициент при резонансе и не получается бесконечно большим, он все же оказывается весьма большим. Это заставляет избегать в конструкциях явления резонанса.

Статический прогиб от силы  $P = 0,8$  кН найдем, используя результат, найденный в *примере 2* для силы  $Q = 3$  кН с применением пропорции:

$$y_{cm} = 0,404 \frac{P}{Q} = 0,404 \frac{0,8}{3} = 0,107 \text{ см.}$$

Амплитуда вынужденных колебаний будет равна динамическому прогибу

$$y_{min} = \mu y_{cm} = 3,56 \cdot 0,107 = 0,381 \text{ см.}$$

Полный прогиб балки под силой будет равен статическому прогибу от силы  $Q$  плюс динамический прогиб от силы  $P$ :

$$y_{min} = 0,404 + 0,381 = 0,785 \text{ см.}$$

Максимальный прогиб, находящийся около середины пролета, может быть несколько больше.

Наибольший изгибающий момент с учетом динамического действия силы  $P$

$$M_{max} = (Q + \mu P)(ab/l) = (3 + 3,56 \cdot 0,8)(1,5 \cdot 4,5/6) = 6,56 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Наибольшие нормальные напряжения в опасном поперечном сечении балки

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{6560000}{597} = 11 \text{ МПа.}$$

В случае же, когда двигатель стоит неподвижно,

$$M_{max} = \frac{Qab}{l} = \frac{3 \cdot 1,5 \cdot 4,5}{6} = 3,37 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\sigma_{max} = \frac{3370000}{597} = 5,65 \text{ МПа.}$$

Таким образом, наличие динамической нагрузки, даже при отсутствии резонанса, может привести к сильному увеличению напряжений в сооружении по сравнению со статическими.

**Пример 6.** Двигатель массой  $m = Q/g$  ( $Q = 20$  кН) с неуравновешенной обмоткой, вызывающей центробежную силу  $P = 2$  кН, вращается с частотой  $300 \text{ мин}^{-1}$ . Жесткость упругой связи  $r_c$  составляет  $6 \text{ кН/см}$  (рис. 2.14, а). Найти частоту собственных колебаний системы и сопоставить с частотой вибрационной нагрузки. Вычислить наибольшее возможное перемещение правой опоры  $B$ . Собственной массой балки пренебречь.

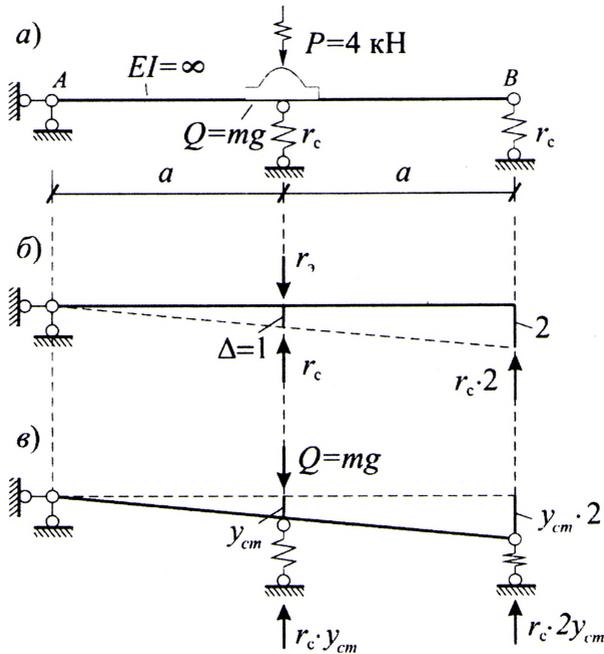


Рисунок 2.14

*Решение.* Поскольку балка достаточно жесткая, перемещения характеризуются лишь углом поворота балки вокруг левой жесткой опоры. Система обладает одной степенью свободы. Реакции упругих связей ( $r_c$ ) с инерционной силой двигателя не совпадают.

Определим эквивалентную реакцию связи  $r_c$ , как силу, которую следует приложить в направлении движения массы  $m$ , чтобы перемещение этой массы составляло  $\Delta = 1$  (рис. 2.14, б). Из равновесия системы, согласно уравнению  $\sum M = 0$ :

$$r_c a = r_c a + 2r_c 2a; \quad r_c = 5r_c.$$

Частота свободных колебаний составит:

$$\omega = \sqrt{\frac{r_c}{m}} = \sqrt{\frac{5r_c g}{Q}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 6 \cdot 981}{20}} = 38,36 \text{ с}^{-1}.$$

Определяем круговую частоту возмущающей силы

$$\theta = \frac{300\pi}{30} = 31,4 \text{ с}^{-1}.$$

Частота возмущающей силы меньше частоты собственных колебаний системы почти на 20 %. Явление резонанса невозможно.

Коэффициент динамичности составит

$$\mu = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{31,4}{38,36}\right)^2} = \frac{1}{0,331} = 3,02.$$

Максимальное перемещение точки  $B$  определится как сумма ее статического перемещения от силы тяжести мотора и амплитуды колебаний от динамической нагрузки. Определим значение коэффициента, зависящего от жесткости системы (рис. 2.14, в):

$$Qa = r_c a y_{cm} + r_v 2a 2y_{cm}; \quad y_{cm} = \frac{Q}{5r_c}.$$

Наибольшее перемещение в точке  $B$

$$y_{\max} = y_{cm}^Q + \mu y_{cm}^P = \frac{1}{5r_c} (Q + \mu P) = \frac{20 + 3,02 \cdot 2}{5 \cdot 6} = 0,868 \text{ см}.$$

**Пример 7.** Построить динамические эпюры внутренних сил для рамы, приведенной на рисунке 2.15. На раму действует возмущающая сила  $P = 4 \text{ кН}$ , которая не совпадает с инерционной силой, вызванной колебаниями массы  $m = 2 \text{ кН} \cdot \text{с}^2/\text{м}$ . Собственный вес стержней рамы не учитывать, жесткость элементов рамы составляет  $EJ = 20000 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ . Техническая частота соотносится с частотой собственных колебаний массы  $m$ , как  $\theta = 0,8\omega$ .

Система имеет одну степень свободы, так как возможно только горизонтальные колебания массы  $m$ .

Инерционную силу  $J_1$  определяем по выражению

$$\left( \delta_{11} - \frac{1}{m\theta^2} \right) \cdot J_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

Для определения единичного и грузового перемещений построим эпюры  $\overline{M}_1$  и  $M_p$  (рис. 2.15, б, в).

$$\delta_{11} = \sum \frac{\overline{M_1^2} ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{5}{6} 2 \cdot 1,43^2 + \frac{2}{6} 2 \cdot 1,43^2 \cdot 2 + \frac{5}{6} 2 \cdot 3,57^2 \right] = \frac{31,96}{EJ} = 0,0016 \text{ м.}$$

$$\Delta_{1p} = \sum \frac{\overline{M_1 M_p} ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{3}{6} 2 \cdot 6,858 \cdot 0,858 + \frac{2}{6} (2 \cdot 6,858 \cdot 0,858 + 2 \cdot 3,43 \cdot 1,43 + \right. \\ \left. + 6,858 \cdot 1,43 + 3,43 \cdot 0,858) + \frac{2}{6} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3,43 \cdot 1,43 + \frac{3}{6} 2 \cdot 5,14 \cdot 2,14 + \right. \\ \left. + \frac{5}{6} 2 \cdot 8,57 \cdot 3,57 \right] = \frac{85,86}{EJ} = 0,0043 \text{ м.}$$

Круговая частота собственных колебаний массы  $m$  составит:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 0,0016}} = 17,68 \text{ с}^{-1}.$$

Частота возмущающей силы:

$$\theta = 0,8\omega = 0,8 \cdot 17,68 = 14,14 \text{ с}^{-1}.$$

Определяем инерционную силу  $J_1$ :

$$\left( 0,0016 - \frac{1}{2 \cdot 14,14^2} \right) \cdot J_1 + 0,0043 = 0, \quad J_1 = 4,77 \text{ кН.}$$

Динамическую эпюру изгибающих моментов  $M_d$  строим на основании принципа независимости действия сил по формуле:

$$M_d = M_1 \cdot J_1 + M_p + M_g.$$

где  $M_g$  – эпюра изгибающих моментов от веса  $mg$  ( $g$  – ускорение свободного падения) Эпюра  $M_g$  будет нулевой, так как вес  $mg$  воспринимается опорой в точке  $A$ .

Эпюру поперечных сил  $Q_d$  строят по эпюре изгибающих моментов, а эпюру продольных сил  $N_d$ , по эпюре поперечных сил вырезанием узлов.

Динамические эпюры и статическая проверка приведены на рисунке 2.15.

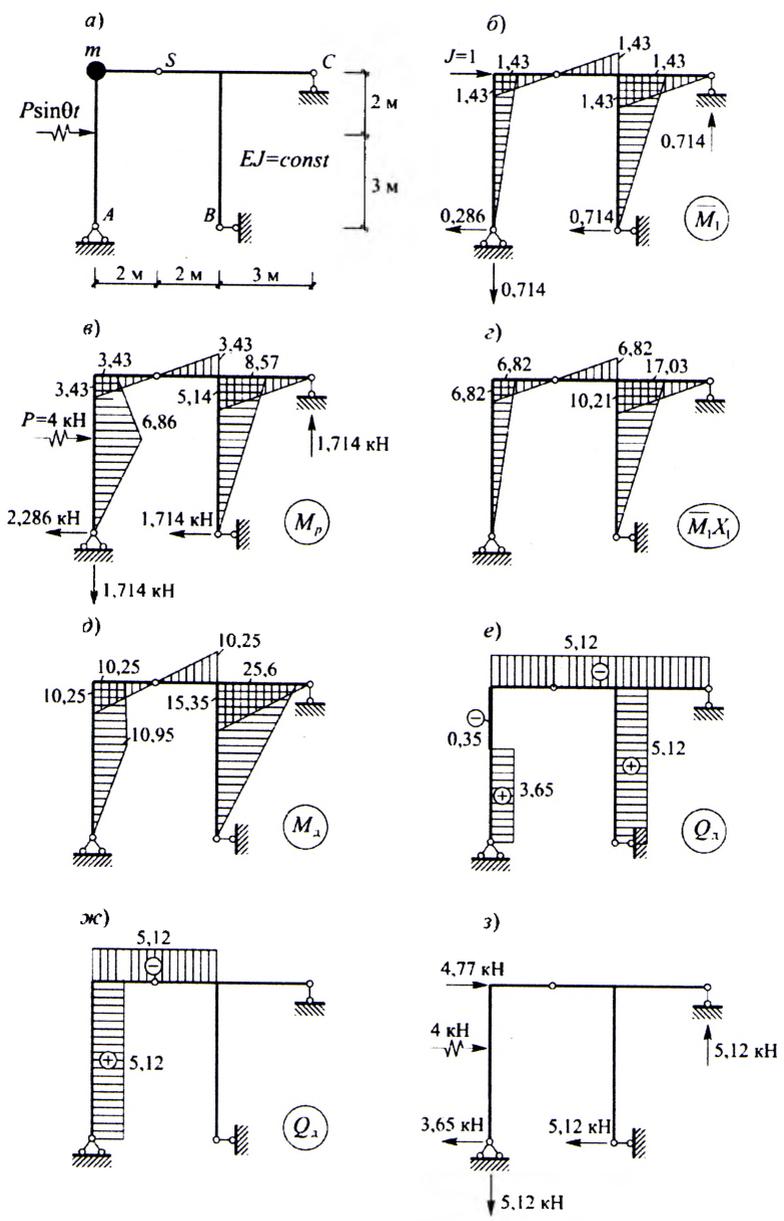


Рисунок 2.15

### 3. СИСТЕМЫ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Число возможных форм свободных колебаний упругой системы равно числу степеней ее свободы. Каждой форме колебаний соответствует своя частота. Совокупность частот данной системы составляет ее *спектр частот*.

Для практических целей часто бывает достаточно найти наименьшую частоту, представляющую наибольшую опасность в смысле возможности возникновения резонанса с вибрационной нагрузкой. Дело в том, что, во-первых, резонанс на низшей частоте приводит к наибольшему динамическому эффекту. Во-вторых, если даже частота возмущающей силы значительно превышает низшую частоту собственных колебаний системы, то резонанс на этой частоте все же будет возникать при разгоне машины во время ее пуска. Поэтому меньшую частоту иногда называют *частотой основного тона колебаний*. Следующий по порядку тон колебаний называется *первым обертоном*.

Если число степеней свободы системы больше единицы, то их можно отнести к системам со многими степенями свободы. Наиболее простыми из них являются системы с двумя степенями свободы, которые являются частным случаем систем с бесконечным числом степеней свободы. Однако, они просты при расчете, допускают решения в замкнутом виде и обладают всеми свойствами систем с бесконечным числом степеней свободы.

#### 3.1. Свободные колебания систем с двумя степенями свободы

В качестве модели такой системы рассмотрим балку с двумя сосредоточенными массами  $m_1$  и  $m_2$ , саму балку будем считать невесомой (рис. 3.1).

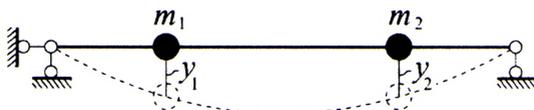


Рисунок 3.1

Во время свободных колебаний на систему действуют только силы инерции и реакции ее связей. Следовательно, упругую линию балки можно рассматривать как статическую, вызванную этими силами. Амплитуда колебаний в точках приложения масс обозначим через  $y_1$  и  $y_2$ . Будем считать, что балка совершает свободные колебания как система с одной степенью свободы, сохраняя неизменной форму своей упругой линии.

Перемещение массы  $m_1$  складывается из перемещений, вызванных силой инерции массы  $m_1$  и силой инерции массы  $m_2$ , т.е.

$$y_1 = -\delta_{11}m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} - \delta_{12}m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2}, \quad (3.1)$$

где  $\delta_{ik}$  – перемещение точки приложения массы  $m_i$  в направлении ее движения от действия силы  $P = 1$ , приложенной в точке приложения массы  $m_k$ .

Аналогично, перемещение массы  $m_2$ :

$$y_2 = -\delta_{21}m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} - \delta_{22}m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2}. \quad (3.2)$$

Получаем систему двух дифференциальных уравнений свободных колебаний:

$$\begin{cases} \delta_{11}m_1\ddot{y}_1 + \delta_{12}m_2\ddot{y}_2 + y_1 = 0; \\ \delta_{21}m_1\ddot{y}_1 + \delta_{22}m_2\ddot{y}_2 + y_2 = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Решение уравнений будем искать в виде:

$$\begin{cases} y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_0); \\ y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_0), \end{cases} \quad (3.4)$$

тогда

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = -\omega^2 A_1 \sin(\omega t + \varphi_0); \\ \ddot{y}_2 = -\omega^2 A_2 \sin(\omega t + \varphi_0). \end{cases} \quad (3.5)$$

Подставляем в систему (3.3) и сокращаем на  $\sin(\omega t + \varphi_0)$

$$\begin{cases} (\delta_{11}m_1\omega^2 - 1)A_1 + \delta_{12}m_2\omega^2 A_2 = 0; \\ \delta_{21}m_1\omega^2 A_1 + (\delta_{22}m_2\omega^2 - 1)A_2 = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Система линейных однородных уравнений имеет решение, когда определитель из коэффициентов при неизвестных  $A_1$  и  $A_2$  обращается в нуль.

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}m_1\omega^2 - 1 & \delta_{12}m_2\omega^2 \\ \delta_{21}m_1\omega^2 & \delta_{22}m_2\omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.7)$$

Раскрываем определитель и получаем уравнение для определения частот свободных колебаний

$$(\delta_{11}m_1\omega^2 - 1)(\delta_{22}m_2\omega^2 - 1) - \delta_{12}\delta_{21}m_1m_2\omega^4 = 0. \quad (3.8)$$

Это уравнение называется *уравнение частот* или *вековым уравнением*.

Уравнение частот, полученное в результате раскрытия определителя второго порядка ( $n = 2$ ), может быть решено строго непосредственно. Решение этого уравнения определяет четыре значения частот собственных колебаний, два из которых отрицательны.

Таким образом, система имеет две частоты собственных колебаний, меньшую из которых называют *основной частотой* или *частотой основного тона колебаний*.

Отметим, что в случае, когда  $n \geq 4$ , решение уравнения может оказаться затруднительным или даже невозможным.

Из уравнений (3.6) следует, что отношение амплитуд колебаний

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{\delta_{11}m_1\omega^2 - 1}{\delta_{12}m_2\omega^2} = -\frac{\delta_{21}m_1\omega^2}{\delta_{22}m_2\omega^2 - 1}. \quad (3.9)$$

Каждому из значений  $\omega$  отвечает свое значение этого отношения. Это значит, что каждой из двух частот отвечает своя особая форма свободных колебаний – особое очертание упругой линии. Эти две формы носят название *главных* или *собственных форм*. Их примерный вид приведен на рис. 3.2.

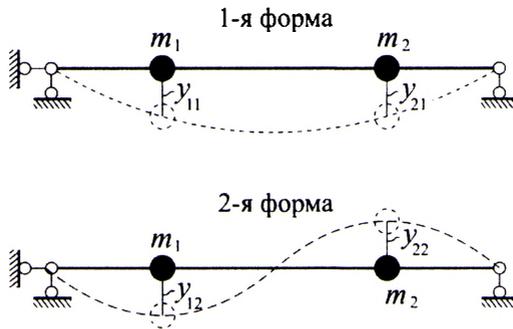


Рисунок 3.2

Главные формы обладают замечательными свойствами. Представим себе, что мы деформировали балку, придав упругой линии очертание по первой форме. Если после этого предоставим балку самой себе, то она начнет совершать простое гармоническое колебание с частотой  $\omega$ , как система с одной степенью свободы, сохраняя неизменной одну и ту же форму упругой линии. Аналогично можно сказать и о второй форме. Никаких других форм упругих линий, обладающих такими свойствами, не существует. Г.е. главные формы колебаний обособлены друг от друга и каждая из них происходит со своей определенной частотой, которая выражается формулой:

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{\delta_{ii}m_i}}. \quad (3.10)$$

Эта формула по своей структуре аналогична формуле (2.14) для системы с одной степенью свободы.

Собственные формы связаны между собой замечательным соотношением, которое называется взаимной ортогональностью форм.

Первая форма есть статическая упругая линия, вызванная системой сил  $\omega_1^2 m_1 y_{11}$  и  $\omega_1^2 m_2 y_{21}$ , а вторая – системой сил  $\omega_2^2 m_1 y_{12}$  и  $\omega_2^2 m_2 y_{22}$ .

Применим к этим двум статическим упругим линиям теорему Бетти: приравняем друг другу виртуальные работы, производимые статической нагрузкой одной из форм на перемещениях, отвечающей другой из них:

$$\omega_1^2 m_1 y_{11} y_{12} + \omega_1^2 m_2 y_{21} y_{22} = \omega_2^2 m_1 y_{12} y_{11} + \omega_2^2 m_2 y_{22} y_{21} \quad (3.11)$$

или

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2)(m_1 y_{11} y_{12} + m_2 y_{21} y_{22}) = 0.$$

Так как

$$\omega_1 - \omega_2 \neq 0, \text{ то } m_1 y_{11} y_{12} + m_2 y_{21} y_{22} = 0. \quad (3.12)$$

Чтобы изогнуть балку по первой форме, нужно приложить к ней в точках приложения масс силы

$$P_1 = km_1 y_{11} \text{ и } P_2 = km_2 y_{21}. \quad (3.13)$$

Таким образом, из уравнения (3.12) вытекает, что работа внешних сил, отвечающих одной из форм собственных колебаний, на перемещениях, отвечающих другой форме, равна нулю.

$$P_1 \cdot y_{12} + P_2 \cdot y_{22} = 0. \quad (3.14)$$

Для симметричных систем с симметрично расположенными массами возможны симметричные и обратносимметричные формы колебаний, при которых силы инерции будут симметричны и обратносимметричны. В этом случае перемещения вычисляются как групповые от парных симметричных или обратносимметричных единичных сил. Побочные же перемещения, связывающие симметричные и обратносимметричные силы инерции, обращаются в нуль.

Это также приводит к распаду уравнения частот на два независимых уравнения, из которых одно позволит найти частоты симметричных колебаний, а другое – обратносимметричных.

При этом, так как групповые перемещения находятся от парных единичных сил, соответствующая масса должна входить в вековые уравнения с коэффициентом 1/2.

В отличие от балок частоты различных форм колебаний рам могут быть близкими друг к другу. При этом возможен двоякый резонанс, представляющий повышенную опасность для сооружения.

Рассмотрим два примера определения частоты собственных колебаний системы с двумя степенями свободы.

**Пример 8.** Определить частоты собственных колебаний невесомой консольной балки с двумя равными сосредоточенными массами (рис. 3.3. а)  $m = Q/g = 0,5/9,81 = 0,051$  кг,  $EJ = 2000$  кН·м<sup>2</sup>;  $l = 4,0$  м.

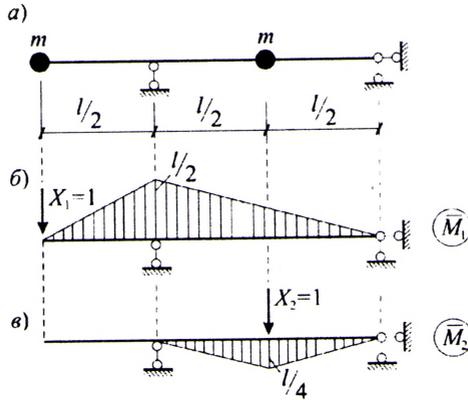


Рисунок 3.3

Вычисляем перемещения от единичных сил путем перемножения построенных от них эпюр изгибающих моментов (рис. 3.3. б, в):

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1 \cdot l \cdot 2 \cdot l}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot l \cdot 2 \cdot l}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} \right) = \frac{l^3}{8EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1 \cdot l \cdot l}{4 \cdot 2 \cdot 4EJ} = -\frac{l^3}{32EJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{EJ} \frac{1 \cdot l \cdot 2 \cdot l}{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{l^3}{48EJ}.$$

Составляем определитель из этих коэффициентов и приравняем его нулю:

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11}m - \frac{1}{\omega^2} & \delta_{12}m \\ \delta_{21}m & \delta_{22}m - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем уравнение частот, квадратное относительно  $1/\omega^2$ :

$$\left(\frac{l^3 m}{8EJ} - \frac{1}{\omega^2}\right)\left(\frac{l^3 m}{48EJ} - \frac{1}{\omega^2}\right) - \left(\frac{l^3 m}{32EJ}\right)^2 = 0,$$

$$\text{или } \left(\frac{1}{\omega^2}\right)^2 - \frac{7l^3 m}{48EJ} \frac{1}{\omega^2} + \frac{5l^6 m^2}{3072E^2 J^2} = 0.$$

Решая квадратное уравнение, находим:

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{7l^3 m}{96EJ} \pm \sqrt{\left(\frac{7l^3 m}{96EJ}\right)^2 - \frac{15}{49}\left(\frac{7l^3 m}{96EJ}\right)^2} = \frac{7l^3 m}{96EJ} (1 \pm 0.835);$$

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{l^3 m}{7.48EJ}; \quad \omega_1 = 2.74 \sqrt{\frac{EJ}{l^3 m}} = 2.74 \sqrt{\frac{2000}{4^3 \cdot 0.051}} = 67.8 \text{ с}^{-1};$$

$$\frac{1}{\omega_2^2} = \frac{l^3 m}{83.2EJ}; \quad \omega_2 = 9.12 \sqrt{\frac{EJ}{l^3 m}} = 9.12 \sqrt{\frac{2000}{4^3 \cdot 0.051}} = 226 \text{ с}^{-1}.$$

**Пример 9.** Определить частоты свободных колебаний балки с тремя равными сосредоточенными массами  $m$ , расположенными так, как показано на рис. 3.4, а. Жесткость балки равна  $EJ$ .

Так как система и расположенные на ней массы симметричны, то задача может быть решена с учетом симметрии.

Построив эпюры изгибающих моментов от единичных сил инерции (рис. 3.4, б-г), находим перемещения путем перемножения эпюр:

$$\delta_{11} = \left(\frac{l}{4} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2l \cdot 2}{3 \cdot 4} + \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4}\right) \frac{1}{EJ} = \frac{l^3}{24EJ};$$

$$\delta_{12} = \left[\frac{l}{8} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2l \cdot 2}{3 \cdot 4} + \left(\frac{l}{8} + \frac{l}{4}\right) \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{4} \cdot 2\right] \frac{1}{EJ} = \frac{11l^3}{384EJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2l \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{l^3}{48EJ};$$

$$\delta_{21} = \frac{l}{8} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2l \cdot 4}{3 \cdot 8} \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{l^3}{192EJ}.$$

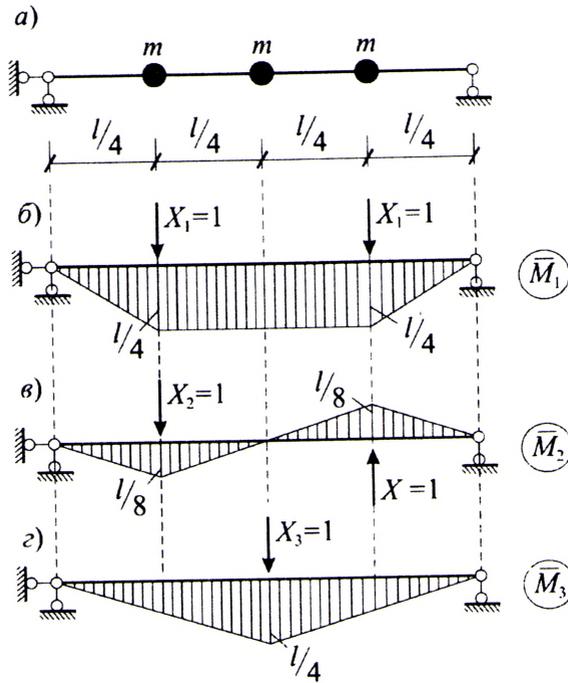


Рисунок 3.4

Перемещения  $\delta_{12}$  и  $\delta_{23}$  обращаются в нуль.

Определитель для симметричных колебаний составляем с учетом того, что перемещения от групповой силы  $\bar{X}_1$ , состоящей из двух сил, получились удвоенными, поэтому соответствующая масса вводится с коэффициентом  $1/2$ :

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} \frac{m}{2} - \frac{1}{\omega^2} & \delta_{13} m \\ \delta_{31} \frac{m}{2} & \delta_{33} m - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Или

$$D = \begin{vmatrix} \left( \frac{l^3}{24EJ} \frac{m}{2} - \frac{1}{\omega^2} \right) & \frac{11l^3}{384EJ} m \\ \frac{11l^3}{384EJ} \frac{m}{2} & \left( \frac{l^3}{48EJ} m - \frac{1}{\omega^2} \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем уравнение частот, квадратное относительно  $1/\omega^2$ :

$$\left(\frac{l^3 m}{48 EJ} - \frac{1}{\omega^2}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{11 l^3 m}{384 EJ}\right)^2 = 0;$$

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^2 - \frac{l^3 m}{24 EJ} \frac{1}{\omega^2} + \frac{7}{2} \left(\frac{l^3 m}{384 EJ}\right)^2 = 0.$$

Решая это уравнение, находим:

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{l^3 m}{48 EJ} \pm \sqrt{\left(\frac{8 l^3 m}{384 EJ}\right)^2 - \frac{7}{2} \left(\frac{8 l^3 m}{384 EJ}\right)^2} = \frac{l^3 m}{384 EJ} (8 \pm 7,78);$$

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{15,78 l^3 m}{384 EJ} = \frac{l^3 m}{24,35 EJ};$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{24,35 EJ}{l^3 m}} = 4,98 \sqrt{\frac{EJ}{l^3 m}};$$

$$\frac{1}{\omega_2^2} = \frac{0,22 l^3 m}{384 EJ} = \frac{l^3 m}{1745 EJ};$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1745 EJ}{l^3 m}} = 42,0 \sqrt{\frac{EJ}{l^3 m}}.$$

Уравнение частот для обратносимметричных колебаний

$$\delta_{22} \frac{m}{2} - \frac{1}{\omega_3^2} = 0;$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{2}{\delta_{22} m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 192 EJ}{l^3 m}} = 19,2 \sqrt{\frac{EJ}{l^3 m}}$$

### 3.2. Вынужденные колебания систем с двумя степенями свободы.

Пусть на упругую балку с двумя сосредоточенными массами действует периодическая возмущающая нагрузка гармонического типа  $P \sin \theta t$  (рис. 3.5).

Основная задача расчета заключается в определении максимальных внутренних усилий и перемещений в балке и проверка на резонанс.

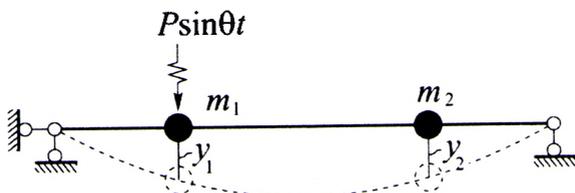


Рисунок 3.5

Перемещения масс  $m_1$  и  $m_2$  от действия инерционных сил и возмущающей нагрузки выражаются следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} y_1 &= -\delta_{11} m_1 \ddot{y}_1 - \delta_{12} m_2 \ddot{y}_2 + \delta_{1P} \cdot P \cdot \sin \theta t; \\ y_2 &= -\delta_{21} m_1 \ddot{y}_1 - \delta_{22} m_2 \ddot{y}_2 + \delta_{2P} \cdot P \cdot \sin \theta t; \end{aligned} \quad (3.15)$$

или

$$\begin{cases} -\delta_{11} m_1 \ddot{y}_1 - \delta_{12} m_2 \ddot{y}_2 + \delta_{1P} \cdot P \cdot \sin \theta t - y_1 = 0; \\ -\delta_{21} m_1 \ddot{y}_1 - \delta_{22} m_2 \ddot{y}_2 + \delta_{2P} \cdot P \cdot \sin \theta t - y_2 = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Наличие в уравнениях свободных членов вида  $P \sin \theta t$  дает частый интеграл того же вида, но с иной амплитудой. Будем искать этот частый интеграл в виде:

$$y_1 = C_1 \sin \theta t; \quad y_2 = C_2 \sin \theta t. \quad (3.17)$$

Тогда

$$\ddot{y}_1 = -\theta^2 C_1 \sin \theta t; \quad \ddot{y}_2 = -\theta^2 C_2 \sin \theta t. \quad (3.18)$$

Подставим полученные выражения производных и перемещений в уравнения (3.16) и сократим на  $\sin \theta t$ :

$$\begin{cases} \delta_{11} m_1 \theta^2 C_1 + \delta_{12} m_2 \theta^2 C_2 - C_1 + \delta_{1P} \cdot P = 0; \\ \delta_{21} m_1 \theta^2 C_1 + \delta_{22} m_2 \theta^2 C_2 - C_2 + \delta_{2P} \cdot P = 0; \end{cases} \quad (3.19)$$

или

$$\begin{cases} C_1 (\delta_{11} m_1 \theta^2 - 1) + C_2 \delta_{12} m_2 \theta^2 + \delta_{1P} \cdot P = 0; \\ C_1 \delta_{21} m_1 \theta^2 + C_2 (\delta_{22} m_2 \theta^2 - 1) + \delta_{2P} \cdot P = 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Преобразуем систему уравнений к виду:

$$\begin{cases} C_1 m_1 \theta^2 (\delta_{11} - \frac{1}{m_1 \theta^2}) + C_2 m_2 \theta^2 \delta_{12} + \delta_{1P} \cdot P = 0; \\ C_1 m_1 \theta^2 \delta_{21} + C_2 m_2 \theta^2 (\delta_{22} - \frac{1}{m_2 \theta^2}) + \delta_{2P} \cdot P = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Каждую максимальную амплитуду  $C_1$  и  $C_2$  можно представить как результат действия максимальных сил инерции  $J_1$  и  $J_2$  и амплитудного значения возмущающей нагрузки  $P$ .

Максимальные силы инерции определяются при  $\sin \theta t = 1$ , т.е.

$$\begin{aligned} J_1 &= m_1 \ddot{y}_1 = m_1 \theta^2 C_1; \\ J_2 &= m_2 \ddot{y}_2 = m_2 \theta^2 C_2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Подставляя в (3.21) вместо  $m_i \theta^2 C_i$  величины  $J_i$ , получаем систему канонических уравнений для определения максимальных сил инерции.

$$\begin{cases} Z_1(\delta_{11} - \frac{1}{m_1 \theta^2}) + Z_2 \delta_{12} + P \delta_{1p} = 0; \\ Z_1 \delta_{21} + Z_2(\delta_{22} - \frac{1}{m_2 \theta^2}) + P \delta_{2p} = 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Решая эти уравнения при известной частоте возмущений нагрузки, получаем значения максимальных инерционных сил.

В случае, когда частота возмущающей нагрузки  $\theta$  совпадает с одной из частот собственных колебаний, наступает явление резонанса.

Зная максимальные силы инерции, можно определить все внутренние усилия в системе в состоянии наибольших отклонений.

$$\begin{aligned} M &= M_p + \sum \bar{M}_i \cdot Z_i; \\ Q &= Q_p + \sum \bar{Q}_i \cdot Z_i; \\ N &= N_p + \sum \bar{N}_i \cdot Z_i; \end{aligned} \quad (3.24)$$

где  $M_p$ ,  $Q_p$ ,  $N_p$  – внутренние усилия в системе от действия амплитудного значения возмущающей нагрузки;  $\bar{M}_i$ ,  $\bar{Q}_i$ ,  $\bar{N}_i$  – усилия в системе от единичных сил, приложенных по направлению сил инерции.

**Пример 9.** Построить динамические эпюры внутренних сил для рамы с массой  $m = 1,4 \text{ кН} \cdot \text{с}^2/\text{м}$ , приведенной на рисунке 3.6. На раму действует вибрационная возмущающая сила  $P = 2 \text{ кН}$ . Собственный вес стержней рамы в расчетах не учитывать. Жесткость стержней рамы составляет  $EJ = 12500 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ . Считать, что частота возмущающей силы  $P$  соотносится с частотой собственных колебаний массы  $m$ , как  $\theta = 0,62\omega$ .

Система имеет две степени свободы, так как возможны горизонтальные и вертикальные колебания массы  $m$ .

Уравнение частот имеет вид

$$\lambda^2 - (\delta_{11} + \delta_{22})m\lambda + (\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)m^2 = 0,$$

где 
$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}.$$

Для определения собственной частоты колебаний системы строим единичные эпюры от действия инерционных сил в направлении возможных колебаний массы  $m$  и грузовую эпюру от внешней нагрузки, и определяем соответствующие единичные и грузовые перемещения. Эпюры приведены на рисунке 3.6.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{3,2}{6} \cdot 2 \cdot 3,2^2 + \frac{4,52}{6} (2 \cdot 3,2^2 + 2 \cdot 1,6^2 + 3,2 \cdot 1,6 \cdot 2) + \frac{1,6}{6} \cdot 2 \cdot 1,6^2 \cdot 2 + 3,2 \cdot 1,6 \cdot 1,6 + \frac{4,52}{6} \cdot 2 \cdot 1,6^2 \right] = \frac{52,7}{EJ} = \frac{52,7}{12500} = 0,0042 \text{ м.}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{3,2}{6} \cdot 2 \cdot 4,52 \cdot 3,2 + \frac{4,52}{6} (3,2 \cdot 4,52 + 4 \cdot 2,4 \cdot 3,39 + 2,26 \cdot 1,6) + \frac{1,6}{6} \cdot 2 \times \times 2,26 \cdot 1,6 \cdot 2 + 3,2 \cdot 1,6 \cdot 4,52 + \frac{4,52}{6} \cdot 2 \cdot 6,67 \cdot 1,6 \right] = \frac{96,81}{EJ} = \frac{96,81}{12500} = 0,0077 \text{ м.}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{3,2}{6} \cdot 2 \cdot 4,52^2 + \frac{4,52}{6} (4,52^2 + 4 \cdot 3,39^2 + 2 \cdot 2,26^2) + \frac{1,6}{6} \cdot 2 \cdot 2,26^2 + \frac{4,8}{6} \cdot 2 \cdot 6,76^2 + \frac{4,52}{6} \cdot 2 \cdot 6,76^2 \right] = \frac{220,35}{EJ} = \frac{220,35}{12500} = 0,0176 \text{ м.}$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{3,2}{6} \cdot 2 \cdot 9,04 \cdot 3,2 + \frac{4,52}{6} (3,2 \cdot 9,04 + 4 \cdot 2,4 \cdot 6,78 + 4,52 \cdot 1,6) + \frac{1,6}{6} \cdot 2 \cdot 4,52 \cdot 1,6 \cdot 2 + 3,2 \cdot 1,6 \cdot 9,04 + \frac{4,52}{6} \cdot 2 \cdot 13,52 \cdot 1,6 \right] = \frac{193,61}{EJ} = \frac{193,61}{12500} = 0,0155 \text{ м.}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2p} &= \frac{1}{EJ} \left[ \frac{3,2}{6} \cdot 2 \cdot 9,04 \cdot 4,52 + \frac{4,52}{6} (4,52 \cdot 9,04 + 4 \cdot 3,39 \cdot 6,78 + 4,52 \cdot 2,26) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1,6}{6} \cdot 2 \cdot 4,52 \cdot 2,26 + \frac{4,8}{6} \cdot 2 \cdot 6,76 \cdot 13,52 + \frac{4,52}{6} \cdot 2 \cdot 13,52 \cdot 6,76 \right] = \\ &= \frac{440,7}{EJ} = \frac{440,7}{12500} = 0,0353 \text{ м.} \end{aligned}$$

Подставим полученные значения перемещений в уравнение частот:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (0,0042 + 0,0176) \cdot 1,4 \cdot \lambda + (0,0042 \cdot 0,0176 - 0,0077^2) \cdot 1,4^2 &= 0, \\ \text{или } \lambda^2 - 0,0305\lambda + 0,000029 &= 0. \end{aligned}$$

Решая, получаем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0,0295, \quad \lambda_2 = 0,00098. \\ \omega_{\min} &= 5,82 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_{\max} = 31,9 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Частота возмущающей силы составит:

$$\theta = 0,62\omega_{\min} = 0,62 \cdot 5,82 = 3,608 \text{ с}^{-1}.$$

Инерционные силы  $J_1$  и  $J_2$  определяем из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \left( \delta_{11} - \frac{1}{m\theta^2} \right) J_1 + \delta_{12} J_2 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21} J_1 + \left( \delta_{22} - \frac{1}{m\theta^2} \right) J_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left( 0,0042 - \frac{1}{1,4 \cdot 3,608^2} \right) J_1 + 0,0077 J_2 + 0,0155 = 0; \\ 0,0077 J_1 + \left( 0,0176 - \frac{1}{1,4 \cdot 3,608^2} \right) J_2 + 0,0353 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_1 = 0,465 \text{ кН}; \\ J_2 = 1,044 \text{ кН}. \end{cases}$$

Динамическую эюру изгибающих моментов  $M_d$  строим на основании принципа независимости действия сил по формуле:

$$M_d = M_1 \cdot (J_1 + mg) + M_2 \cdot J_2 + M_p.$$

где  $mg$  – собственный вес массы  $m$  ( $g$  – ускорение свободного падения).

Эюру поперечных сил  $Q_d$  построим по эюре изгибающих моментов, а эюру продольных сил  $N_d$ , по эюре поперечных сил вырезанием узлов.

Динамические эюры и статическая проверка приведены на рисунке 3.6.

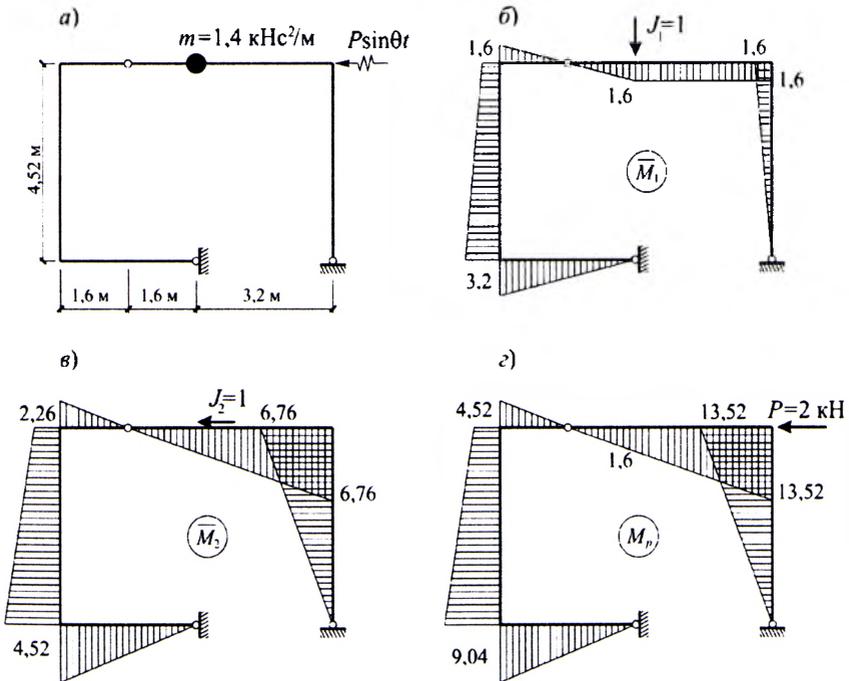


Рисунок 3.6 (а-г)

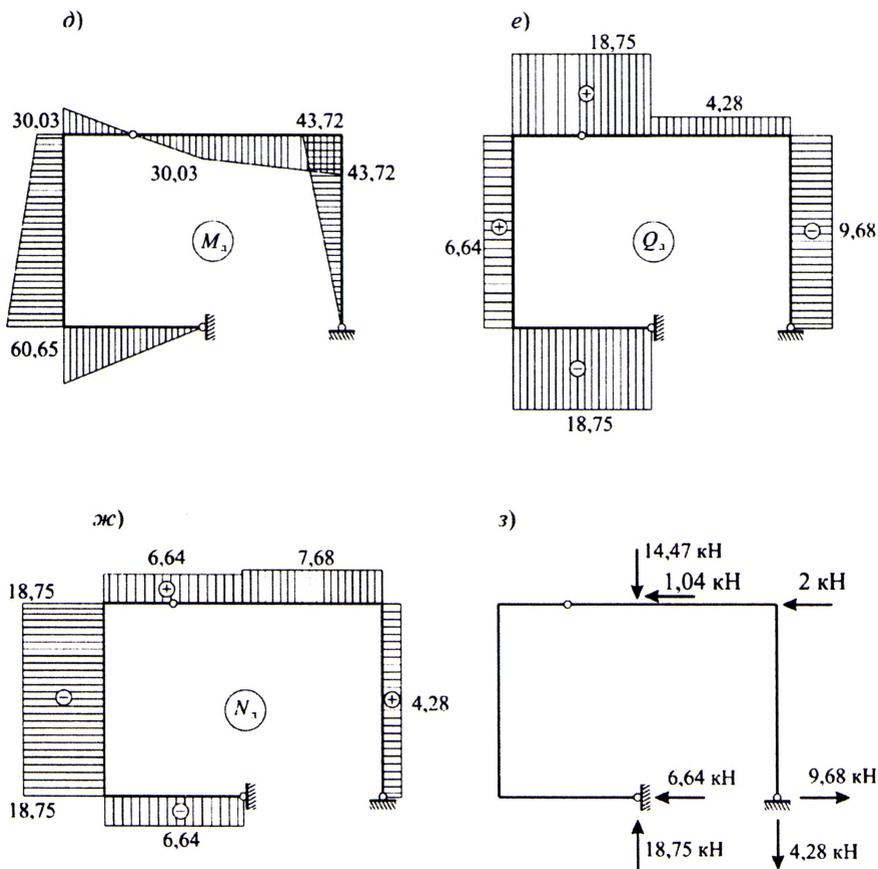


Рисунок 3.6 (d-з)

### 3.3. Свободные колебания систем с бесконечным числом степеней свободы

Изложенные выше теории колебаний систем с двумя степенями свободы имеют практическую ценность для приближенного динамического расчета сооружений. В действительности все сооружения обладают распределенной массой и должны рассматриваться как системы с бесконечным числом степеней свободы.

Рассмотрим простейшую стержневую систему – балку постоянного сечения с распределенной массой  $m$  (рис. 3.7).

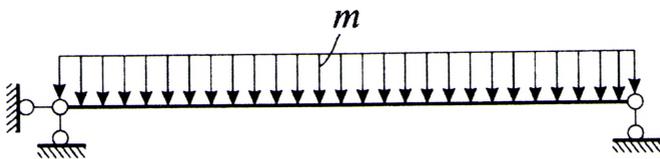


Рисунок 3.7

Положение балки в любой момент времени определяется упругой линией, которая при колебаниях является функцией двух переменных – координаты сечения и времени, т.е.

$$y = f(x, t).$$

Как известно, между внешней погонной нагрузкой и изгибающим моментом всегда существует зависимость

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = P. \quad (3.25)$$

Изгибающий момент может быть выражен через прогибы

$$M_x = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot EJ. \quad (3.26)$$

Погонной внешней нагрузкой в данном случае являются силы инерции, интенсивность которых равна

$$P = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (3.27)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (7.1), получим дифференциальное уравнение свободных колебаний балки с бесконечным числом степеней свободы

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (3.28)$$

Задача свелась к одному уравнению 4-го порядка. Каждый интеграл этого уравнения будет функцией от двух переменных – координаты  $X$  и времени  $t$ .

$$y = f(x, t) \quad (3.29)$$

В общем случае, давая  $t$  разные значения, будем получать разные формы изгиба.

Отношение прогибов в любой точке балки  $X$  в два произвольных мгновенных времени  $t_0$  и  $t$  является числом, зависящим только от времени, но не от абсциссы  $X$ . Это значит, что

$$\frac{f(x,t)}{f(x,t_0)} = F(t).$$

Отсюда 
$$f(x,t) = f(x,t_0) \cdot F(t). \quad (3.30)$$

Приняв  $t_0 = 0$ , получаем, что интеграл (3.29) должен выражаться как произведение двух функций, из которых одна зависит только от  $X$ , другая – только от  $t$ , т.е.

$$y = f(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

Тогда частные производные, входящие в дифференциальное уравнение (3.28) будут равны

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = T(t) \cdot \frac{d^4 X(x)}{dx^4};$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X(x) \cdot \frac{d^2 T(t)}{dt^2}.$$

Подставляя полученные выражения в (2), находим

$$\frac{EJ}{m} T(t) \frac{d^4 X(x)}{dx^4} + X(x) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = 0.$$

Отсюда можно получить следующее равенство отношений:

$$\frac{EJ}{m} \cdot \frac{\frac{d^4 X(x)}{dx^4}}{X(x)} = - \frac{\frac{d^2 T(t)}{dt^2}}{T(t)}.$$

Теперь левая часть зависит только от  $X$ , правая – только от  $t$ , и все же имеет постоянное равенство, справедливое при любых значениях этих переменных. Очевидно, такое равенство возможно, если и левая и правая часть являются постоянной величиной, которую обозначим через  $\omega^2$ . Тогда получаем два дифференциальных уравнения

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0; \quad (3.31)$$

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} - \omega^2 \frac{m}{EJ} X(x) = 0. \quad (3.32)$$

Перейдем к решению этих уравнений.

Интегрируя уравнение (3.31), аналогичное уравнению свободных колебаний системы с одной степенью свободы, находим

$$T(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (3.33)$$

Общий интеграл уравнения (3.32) выразится через круговые и гиперболические функции

$$X(x) = B_1 \sin kx + B_2 \cos kx + B_3 \operatorname{sh} kx + B_4 \operatorname{ch} kx, \quad (3.34)$$

где 
$$k = \sqrt[4]{\omega^2 \frac{m}{EJ}} \quad (3.35)$$

или 
$$\omega = k^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}}. \quad (3.36)$$

Постоянная интегрированная  $A$  зависит от начальных условий движения, постоянные  $B_i$  – от граничных условий.

Рассмотрим балку с шарнирно опертными концами. Граничные условия для нее: при  $x = 0$ ,  $X = 0$  и  $X'' = 0$ ; при  $x = l$   $X = 0$  и  $X'' = 0$ .

Из первых двух условий получаем  $B_2 = B_4 = 0$ . Из последующих двух граничных условий следует:

$$\begin{cases} B_1 \sin kl + B_3 \operatorname{sh} kl = 0; \\ -B_1 \sin kl + B_3 \operatorname{sh} kl = 0. \end{cases} \quad (3.37)$$

Решение этих уравнений возможно при условии, что определитель при неизвестных равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \sin kl & \operatorname{sh} kl \\ -\sin kl & \operatorname{sh} kl \end{vmatrix} = 0 \quad (3.38)$$

или 
$$2 \sin kl \cdot \operatorname{sh} kl = 0.$$

Решение  $\operatorname{sh} kl = 0$  возможно только в случае, когда  $k = 0$ , так как только  $\operatorname{sh} 0 = 0$ , т.е. колебания отсутствуют.

Практический интерес представляет решение  $\sin kl = 0$

Это уравнение имеет бесчисленное множество корней

$$K_n = \frac{n\pi}{l}; \quad \omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}. \quad (3.39)$$

Каждому значению собственной частоты отвечает своя форма колебаний  $X_n$ . Из уравнений (3.37), в связи с тем, что  $\sin kl = 0$ , получаем, что  $B_1 = 0$ .

Итак

$$X_n = B_1 \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (3.40)$$

т.е.  $n$ -я форма колебаний представляет собой кривую, содержащую  $n$  полуволи синусоиды. Нечетным значениям  $n$  отвечает симметричная форма, четным – обратносимметричная форма колебаний.

Известно, что интеграл однородного дифференциального уравнений представляет собой сумму частных интегралов. Тогда

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cdot T_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega_n t + \varphi) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.41)$$

Произведение  $A \cdot B$  здесь заменено на  $A_n$ .

Таким образом, свободные колебания балки в общем случае представляют собой сумму бесконечного множества простых гармонических колебаний, каждое из которых совершается со своей особой частотой  $\omega_n$  и со своей особой формой изгиба  $X_n$ .

Принципиально решение остается таким же для балки с любым закреплением опор, а также для любой стержневой системы.

#### 3.4. Вынужденные колебания систем с бесконечным числом степеней свободы.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы с бесконечным числом степеней свободы записывается в виде

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P(x,t), \quad (3.42)$$

где  $P(x,t)$  – возмущающая нагрузка, зависящая от координат сечения и времени.

Рассмотрим частый случай, когда нагрузка изменяется по гармоническому закону.

$$P(x, t) = q(x) \cdot \sin \theta t, \quad (3.43)$$

где  $q(x)$  – распределенная на балке нагрузка.

Условимся искать приближенное решение, задавшись формой колебаний. Примем самую простую форму колебаний, которой соответствуют максимальные усилия в виде изогнутой оси, получаемой от статического действия нагрузки. Этим самым мы отождествляем систему с бесконечным числом степеней свободы с системой с одной степенью свободы.

Как было показано ранее, частный интеграл дифференциального уравнения вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы имеет вид:

$$y = \frac{1}{m\omega} \left[ \sin \alpha t \int_0^t P(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \cos \alpha t \int_0^t P(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right]. \quad (3.44)$$

Подставляя сюда, выражение для динамической нагрузки и учитывая, что  $\frac{1}{m\omega} = \delta_n \omega$ , получим

$$y(x, t) = \delta_n \omega q(x) \left[ \sin \alpha t \int_0^t \sin \theta \tau \cos \omega \tau d\tau - \cos \alpha t \int_0^t \sin \theta \tau \sin \omega \tau d\tau \right]. \quad (3.45)$$

Таким образом, перемещения в любой момент времени будут таковы, как будто на систему действует эквивалентная статическая нагрузка

$$q_{\text{экв.}} = \omega q(x) \left[ \sin \alpha t \int_0^t \sin \theta \tau \cos \omega \tau d\tau - \cos \alpha t \int_0^t \sin \theta \tau \sin \omega \tau d\tau \right]. \quad (3.46)$$

Если нагрузке  $q(x)$  соответствуют перемещения  $X(x)$  (перемещения при свободных колебаниях балки), то нагрузке  $q_{\text{экв.}}$  соответствуют перемещения  $y(x, t)$ . Отношение перемещений пропорционально отношению нагрузок, их вызвавших, т.е.

$$\frac{y(x, t)}{X(x)} = \frac{q_{\text{экв.}}}{q(x)} \quad (3.47)$$

или

$$y(x,t) = \frac{X(x)}{q(x)} q_{\text{ввн}} = \omega X(x) \left[ \sin \omega t \int_0^t \sin \theta \tau \cos \omega \tau d\tau - \cos \omega t \int_0^t \sin \theta \tau \sin \omega \tau d\tau \right]. \quad (3.48)$$

Это уравнение перемещений в любой момент времени от нагрузки, изменяющейся по гармоническому закону. После интегрирования получаем следующее выражение для перемещений

$$y(x,t) = X(x) \frac{\sin \theta t}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} = y(x) \cdot \mu \cdot \sin \theta t, \quad (3.49)$$

где  $\mu$  – динамический коэффициент.

Максимальное перемещение соответствует

$$y(y)_{\text{max}} = y_{\text{ст}} \cdot \mu. \quad (3.50)$$

При совпадении частот вынужденных колебаний и свободных колебаний возникает явление резонанса. Нужно, однако, заметить, что явление резонанса возникает при совпадении частот только в том случае, если нагрузка действительно содержит составляющую, пропорциональную кривой  $\mu \cdot y_{\text{ст}}$ . Если, например,  $q(x,t)$  распределена по пролету симметрично, а частота  $\theta$  совпадает с одной из частот  $\omega_n$  обратно симметричной формы колебаний, то резонанса не будет.

#### 4. МЕРЫ БОРЬБЫ С ВИБРАЦИЕЙ

Колебания могут оказать вредное влияние на людей и оборудование. Опытно установлено, что критерием чувствительности людей к колебаниям с низкими частотами (от 1 до 10 Гц) может служить ускорение колебания, а к колебаниям с высокими частотами (свыше 10 Гц) – их скорость.

В тех случаях, когда в результате динамического расчета конструкции требования прочности, жесткости или характеристики воздействия на людей и оборудование не удовлетворяются, следует принимать меры борьбы с колебаниями. Эти меры довольно разнообразны и эффективны при условии правильного выбора их в каждом конкретном случае. Ниже перечислены основные способы борьбы с вибрацией.

**Целесообразная расстановка машин.** Путем той или иной расстановки машин, служащих источником колебаний, можно уменьшить или даже избежать резонансных явлений. Так, например, придвинув такую машину ближе к опоре несущей балки, можно увеличить частоту собственных колебаний последней. Машины, создающие горизонтальные силы инерции, следует располагать так, чтобы эти силы действовали в том направлении, для которого жесткость здания больше или частота собственных колебаний сильнее отличается от частоты вращения машины.

**Изменение жесткости конструкции.** Увеличение жесткости конструкции путем увеличения размеров ее поперечных сечений, уменьшения пролетов, или с применением других мероприятий приводит к повышению частот собственных колебаний, что может быть использовано для увеличения разрыва между этой частотой и частотой возмущающих нагрузок.

Уменьшение жесткости конструкции может быть целесообразным лишь в редких случаях, так как приводит к снижению прочности и создает возможность резонанса с более высокими тонами колебаний измененной конструкции.

**Изменение режима работы машины.** Понижение или повышение частоты вращения может привести к такому же эффекту, как и повышение или соответственно понижение жесткости конструкции, т.е. к уменьшению динамического коэффициента.

Колебания, создаваемые машинами с вращающимися массами с возвратно-поступательным ходом, можно значительно уменьшить путем уравнивания инерционных сил. Уравнивание машины может быть достигнуто за счет уравнивания ее движущихся масс, а также путем встречного сдвигания или страивания, при котором две или три одинаковые машины ставятся на одном валу и работают с относительным сдвигом фаз на  $180^\circ$  или  $120^\circ$ . Для этой же цели к машине может быть добавлен специальный антивибратор.

**Применение виброгасителя.** Динамический виброгаситель представляет собой дополнительную систему, которая устанавливается на конструкции, совершающей вынужденные колебания с целью нейтрализовать своими реакциями возмущающую нагрузку.

**Виброизоляция.** Виброизоляция оказывается одним из наиболее простых средств для уменьшения вредного действия колебаний. Различают *активную*

*виброизоляции*, назначением которой является уменьшение динамических сил, передаваемых машиной на несущую конструкцию, и *пассивную виброизоляцию*, которая имеет целью изолировать те или иные места работы или приборы от колебаний несущих конструкций.

Расчет активной виброизоляции ведется исходя из рассмотрения расчетной схемы, показанной на рисунке 4.1.

При этом массу  $m$  на амортизаторах можно рассматривать в качестве системы с одной степенью свободы, имеющей возможность совершать только вертикальные колебания, для которой динамический коэффициент выражается формулой 2.57.

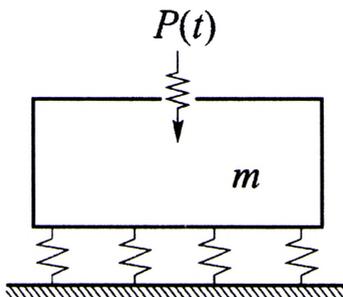


Рисунок 4.1

Эффективность виброизоляции оценивается коэффициентом передачи силы, который выражается формулой

$$\eta = \frac{1}{(\theta / \omega)^2 - 1}. \quad (4.1)$$

Для эффективности виброизоляции отношение частоты возмущающей силы  $\theta$  к частоте свободных колебаний  $\omega$  поддресоренной массы должно быть не меньше 4. В этом случае величина  $\eta$  будет не выше 1/15 и эффективность виброизоляции достигнет 93,5 %.

При малых значениях  $\theta \eta \approx 1$  и виброизоляция оказывается бесполезной.

При  $\theta / \omega < 1,41$   $\eta > 1$  и тогда виброизоляция оказывает даже вредное действие.

При  $\theta / \omega = 1$  наступает резонанс, который может быть опасен для пружинных амортизаторов.

Для гашения колебаний со средними частотами (6–25 Гц) наиболее подходят стальные пружинные изоляторы, которые допускают большую статическую осадку и дают возможность понизить частоту собственных колебаний изолируемой массы.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Строительная механика: Динамика и устойчивость сооружений : учеб. для строит. спец. вузов / А.Ф. Смирнов [и др.] ; Под ред. Смирнова А.Ф. – М. : Стройиздат, 1984. – 415 с.
2. Дарков, А.В. Строительная механика : учеб. для строит. специальностей вузов / А.В.Дарков, Н.Н.Папошников. – 9-е изд., испр. – СПб. : Лань, 2004. – 655 с. (1986. – 607 с.)
3. Александров, А.В. Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности: Учеб. для строит. специальностей вузов / А.В.Александров, В.Д. Потапов. – 2-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 2002. – 399 с.
4. Сеньюшков, М.А. Основы устойчивости и динамики сооружений. Учебное пособие для студентов строительных специальностей. – Брянск : РИО БГИТА, 2010. – 223 с.
5. Чернов, Ю.Т. Прикладные методы динамики сооружений (Метод "нормальных форм" и его приложения) : Учеб. пособие для вузов по направлению "Стр-во" / Ю.Т. Чернов. – М. : Изд-во АСВ, 2001. – 77с.
6. Коробко, В.И. Строительная механика : Динамика и устойчивость стержневых систем : Учебник / Под ред. В.И. Коробко. – М. : Изд-во АСВ, 2008. – 400с.
7. Даниелов, Э.Р. Устойчивость и колебания плоских рам : программно-методическое обеспечение по курсу "Устойчивость и динамика сооружений" : учеб. пособие для вузов по направлению подгот. дипломир. специалистов "Стр-во" / Э.Р. Даниелов. – М. : Изд-во АСВ, 2004. – 160 с.
8. Рабинович, И.М. Курс строительной механики : В 2 ч. – М. : Гос. Изд-во лит. по стр-ву и архитектуре, 1954. – Ч. II. – 544 с.
9. Безухов, Н.И. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах / Н.И. Безухов, О.В. Лужин, Н.В. Колкунов. – М. : Стройиздат, 1969. – 424 с.
10. Киселев, В.А. Строительная механика : Спец. Курс: Динамика и устойчивость сооружений. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : Стройиздат, 1980. – 616 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Основные понятия .....	3
2. Системы с одной степенью свободы .....	6
2.1. Свободные гармонические колебания системы с одной степенью свободы .....	6
2.2. Свободные колебания системы с одной степенью свободы с учетом сил сопротивления .....	16
2.3. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы при действии гармонической нагрузки .....	20
3. Системы со многими степенями свободы .....	31
3.1. Свободные колебания систем с двумя степенями свободы. ....	31
3.2. Вынужденные колебания систем с двумя степенями свободы .....	38
3.3. Свободные колебания систем с бесконечным числом степеней свободы .....	44
3.4. Вынужденные колебания систем с бесконечным числом степеней свободы .....	48
4. Меры борьбы с вибрацией .....	51
Список использованных источников и рекомендуемая литература .....	53

Учебное издание

*Загуляев Станислав Валерьевич*  
*Молош Виктор Викторович*  
*Сыроквашко Иван Степанович*  
*Бочарова Наталья Владимировна*

# ДИНАМИКА СООРУЖЕНИЙ

Методические указания  
по дисциплине «Строительная механика»  
для студентов специальностей

1-70 02 01 «*Промышленное и гражданское строительство*» и  
1-70 02 02 «*Экспертиза и управление недвижимостью*»  
дневной и заочной форм обучения

Ответственный за выпуск Молош В.В.  
Редактор Боровикова Е.А.  
Компьютерный набор и верстка Загуляев С.В., Молош В.В.  
Корректор Никитчик Е.В.

Издательство БрГТУ.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 1/235 от 24.03.2014 г.  
Подписано к печати 28.09.2015 г. Формат 60×84/16. Бумага  
Снегурочка. Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 3,25.  
Уч.-изд. л. 3,5. Тираж 200 экз. Заказ № 980. Отпечатано на  
ризографе Учреждения образования «Брестский государственный  
технический университет». 224017, Брест, ул. Московская, 267.

ISBN 978-985-493-337-5



9789854 933375