

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ**

**«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»**

**Кафедра физики**

**Гладковский В. И.**

# **ПОСОБИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО КУРСУ «ФИЗИКА»**

*Рекомендовано Советом Брестского государственного технического университета в качестве пособия для студентов специальностей:*

*1-36 01 01 «Технология машиностроения»*

*1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства»*

*1-37 01 06 «Техническая эксплуатация автомобилей»*

*1-37 01 07 «Автосервис»*

*1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств»*

**Издание второе, исправленное и дополненное**

**БРЕСТ 2009**

УДК (378.118.14 + 37.016):53

ББК 74.580.26я723

Г 52

*Рецензенты:*

**В. А. Плетюхов**, декан физического факультета Брестского государственного университета, д-р. физ.-мат. наук, профессор;

**В.С. Секерджицкий**, заведующий кафедрой теоретической физики и астрономии Брестского государственного университета, канд. физ.-мат. наук, доцент.

*Печатается по решению Совета УО БрГТУ*

**Гладковский В.И.**

Г 52 Пособие для самостоятельной работы по курсу «Физика». Пособие. – Брест: Изд-во БрГТУ, 2009. – 107 с.

ISBN 978-985-493-129-6

Пособие предназначено для оказания помощи студентам технических специальностей высших учебных заведений в организации самостоятельной учебной работы по физике. Пособие состоит из трех учебных диалогов и девяти тем для самостоятельной работы над основными темами по курсу «Физика».

Учебные диалоги предназначены для расширения представлений студентов о способах самоорганизации мышления на основе принципа логического систематического уточнения. Поэтому пособие может быть также использовано и для самообразования.

Девять тем объединены в три раздела: «Механика, молекулярная физика и термодинамика», «Электричество и магнетизм», «Оптика и элементы квантовой физики» и рассчитаны на три семестра. Каждый раздел включает в себя по три темы. Такая структура соответствует требованиям учебного плана, традиционно сложившимся для технических специальностей вузов. Каждая тема содержит в себе задания для самостоятельной учебной работы по физике, варианты условий для самостоятельного выполнения заданий, примеры решения заданий и Информационный блок.

В процессе работы над пособием использовались работы других авторов, хотя формулировка заданий носит авторизированный характер. Суть авторизации сводилась к выбору тематической последовательности заданий с последующей реализацией дифференцированного подхода к обучению в форме разноуровневой вариатизации. В конце пособия приводится список использованной литературы.

УДК (378.118.14 + 37.016):53

ББК 74.580.26я723

ISBN 978-985-493-129-6

© В.И. Гладковский, 2009

© Издательство БрГТУ, 2009

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	5
<b>УЧЕБНЫЕ ДИАЛОГИ</b> .....	6
<i>Ситуация непонимания</i> .....	6
<i>Контрольные вопросы (1)</i> .....	9
<i>Усложнение задачи</i> .....	10
<i>Контрольные вопросы (2)</i> .....	13
<i>Подведение к решению</i> .....	14
<i>Контрольные вопросы (3)</i> .....	15
<b>ТЕМА (1): «Кинематика и динамика материальной точки»</b> .....	16
<i>Информационный блок (1)</i> .....	16
<i>Задания (1)</i> .....	23
<i>Таблица вариантов (1)</i> .....	24
<i>Примеры (1)</i> .....	26
<b>ТЕМА (2): «Кинематика и динамика вращательного движения. Законы сохранения. Элементы механики колебательного движения»</b> .....	30
<i>Информационный блок (2)</i> .....	30
<i>Задания (2)</i> .....	35
<i>Таблица вариантов (2)</i> .....	35
<i>Примеры (2)</i> .....	39
<b>ТЕМА (3): «Молекулярная физика и термодинамика»</b> .....	42
<i>Информационный блок (3)</i> .....	42
<i>Задания (3)</i> .....	45
<i>Таблица вариантов (3)</i> .....	45
<i>Примеры (3)</i> .....	48
<b>ТЕМА (4): «Электростатика»</b> .....	53
<i>Информационный блок (4)</i> .....	53
<i>Задания (4)</i> .....	56
<i>Таблица вариантов (4)</i> .....	57
<i>Примеры (4)</i> .....	57
<b>ТЕМА (5): «Электрический ток»</b> .....	62
<i>Информационный блок (5)</i> .....	62
<i>Задания (5)</i> .....	64
<i>Таблица вариантов (5)</i> .....	65
<i>Примеры (5)</i> .....	72
<b>ТЕМА (6): «Магнитное поле. Электромагнитная индукция»</b> .....	74
<i>Информационный блок (6)</i> .....	74

<i>Задания (6)</i> .....	75
<i>Таблица вариантов (6)</i> .....	76
<i>Примеры (6)</i> .....	80
<b>ТЕМА (7): «Интерференция света»</b> .....	84
<i>Информационный блок (7)</i> .....	84
<i>Задания (7)</i> .....	85
<i>Таблица вариантов (7)</i> .....	86
<i>Примеры (7)</i> .....	86
<b>ТЕМА (8): «Дифракция и поляризация света»</b> .....	90
<i>Информационный блок (8)</i> .....	90
<i>Задания (8)</i> .....	92
<i>Таблица вариантов (8)</i> .....	93
<i>Примеры (8)</i> .....	97
<b>ТЕМА (9): «Элементы квантовой физики»</b> .....	99
<i>Информационный блок (9)</i> .....	99
<i>Задания (9)</i> .....	100
<i>Таблица вариантов (9)</i> .....	101
<i>Примеры (9)</i> .....	102
<b>ЛИТЕРАТУРА</b> .....	104
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ</b> .....	105

## ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие по своему статусу занимает промежуточное положение между традиционным учебником и сборником задач. В учебнике обычно в систематизированном виде излагаются основные теоретические положения, отражающие содержание образования изучаемой дисциплины. Сборник задач предназначен для практического изучения теоретических положений на основе применения их в разнообразных конкретных условиях. Как правило, в учебниках отсутствуют задачи, а сборники задач почти не содержат теоретических положений. В одном случае степень конкретизации материала минимальна, в другом — максимальна. Во избежание недоразумений необходимо подчеркнуть, что данное пособие ни в какой мере не претендует на замену действующих учебников и сборников задач по физике. Оно предназначено для оказания помощи в организации под руководством преподавателя самостоятельной учебной работы по физике студентов технических специальностей высших учебных заведений.

В начале пособия помещены учебные диалоги, написанные для оказания помощи тем студентам, которые захотят получить более углубленное представление о способах самоорганизации мышления на основе принципа логического систематического уточнения [1]. Поэтому пособие может быть также использовано и для самообразования.

Каждая тема содержит краткие сведения теоретического характера, задания, варианты условий и примеры решения основных заданий. Решение задач по любой дисциплине невозможно без освоения соответствующих теоретических средств и интеллектуального развития. Интеллектуальное развитие базируется на преодолении познавательных затруднений в процессе перехода от информационно-упражненческой формы организации процесса обучения к задачно-целевой, и в перспективе — к проблемно-ситуативной [2].

Квалификационные стандарты по специальностям и недавно введенные Министерством образования Республики Беларусь “Критерии оценки знаний и компетенций студентов по 10-балльной шкале” позволяют выделить три уровня освоения студентами изучаемой дисциплины: основной, средний и высокий. Поэтому задания пособия содержат задачи различного уровня сложности.

В процессе работы над пособием использовались работы других авторов, поэтому в конце пособия приводится список использованной литературы. Формулировка самих заданий носит авторизированный характер. Суть авторизации сводилась к подбору тематически целостной последовательности задач, взятых из существующих задачников по физике, с последующей реализацией дифференцированного подхода к обучению на основе разноуровневой вариативности.

Рассмотрение работы на заседаниях научно-методического семинара кафедры физики БрГТУ было весьма продуктивным, за что автор выражает свою искреннюю признательность всем участникам обсуждения.

## УЧЕБНЫЕ ДИАЛОГИ

Роль диалога в образовании трудно переоценить. Существуют исследования, которые указывают на то, что в современной школе обучающийся говорит на занятиях всего лишь примерно 10-20 % учебного времени. Все остальное время он молчит и чем-то занимается. Хорошо, если тем, чем ему положено заниматься в это время. А если — нет?

Каков же выход из создавшегося в традиционной методике преподавания репродуктивного тупика? Во многих педагогических работах считается хорошим тоном хотя бы упомянуть о различных школах: диалога культур Библера, «таксономии целей обучения» Блума, «структуры интеллекта» Гилфорда, «обучения в сотрудничестве, самоопределения» и т. п. Но какова эффективность применения этих многоумных концепций на практике?

Говорят, что собрались как-то шука, рак и лебедь доставить воз с чем-то там полезным туда, куда кому-то надо было. И ведь старались, бедолаги. Но воз и ныне там, поскольку возникает ...

### Ситуация непонимания

*Действующие лица: С. — студент; П. — преподаватель.*

С.: Я не могу решить эту задачу! Я не понимаю, как ее решать!

П.: Почему Вы не понимаете, как решать эту задачу?

С.: Ну, я не знаю... Может быть, знаний не хватает, а может быть, опыта...

П.: Хорошо. Давайте попробуем разобраться: каких знаний и какого опыта Вам не хватает для решения именно этой задачи.

С.: А как я могу ответить, каких знаний мне не хватает, если я не знаю, какие знания нужны для решения этой задачи? Что касается опыта, то здесь все просто: “бери побольше и кидай подальше”. Чем больше я буду решать задач, тем больше у меня будет опыт. Разве не так?

П.: Хорошо, я попробую задавать наводящие вопросы. Вам нужны знания по географии, истории, литературе и т. п. для того, чтобы решать задачи по физике?

С.: Нет, конечно. И ежу понятно, что для того, чтобы решать задачи по физике, нужны знания по физике.

П.: Очень хорошо. Меня радует то, что ежики сейчас стали такими умными... Скажите, Вам нужны знания по всем разделам физики или по какому-то одному, конкретному разделу физики?

С.: По одному, наверное... Я так думаю.

П.: Почему?

С.: Если для решения задачи нужны знания по нескольким разделам физики, значит это уже — сложная задача. Если же нужны знания по всем разделам, то это уже — суперсложная задача!

П.: Хорошо, допустим, что это так. А как Вы думаете, вот эта ваша задача — она сложная или суперсложная?

С.: Непохожа она на суперсложную... Но, она и не сложная! Она похожа на простую... Я из этого раздела вроде бы все формулы знаю, но решить задачу не могу, потому что не понимаю. Значит эта задача — и не простая и не сложная. Она — непонятная!

- П.: Вы хотите сказать, что кроме простых и сложных задач, есть еще задачи понятные и непонятные?
- С.: Да. Если задача понятная, то я знаю, что надо делать, для того чтобы найти ответ. А вот если она непонятная...
- П.: Кстати, а что такое понимание?
- С.: Это просто. Когда я понимаю задачу, я могу ее решить.
- П.: Вернемся к вопросу о том, какие знания Вам нужны. Вы сказали, что формулы вроде бы все знаете, не так ли? Значит, какие-то знания у Вас уже есть?
- С.: Я не знаю, какие именно формулы мне нужны для решения *этой* задачи. Если бы я знал, *каких* именно знаний мне не хватает для решения этой задачи, я бы нашел их в учебнике и решил эту задачу. Кстати, Вы не собираетесь показать мне как ее решить? Тогда я буду знать, как решается эта задача, и она перестанет быть непонятной. По-моему, преподаватели для этого только и нужны.
- П.: Для чего, для этого?
- С.: Ну, для того, чтобы делать из непонятных задач — понятные.
- П.: С этим можно, конечно, согласиться. Только вот как это сделать?
- С.: Ой, ну я же сказал! Вас же наверняка этому учили! Надо показать, как решается вот эта вот проклятая задача и все, дело — в шляпе! После этого я буду знать, наконец, как она решается, эта задачка непонятная и она перестанет быть непонятной. Все! И вопрос будет закрыт...
- П.: А какая Вам от этого будет польза?
- С.: Ну, я смогу решить *эту* задачу.
- П.: И все?
- С.: Ну, может быть, я смогу решить задачу, как-то похожую на эту, хотя...
- П.: А эта задача не похожа на те задачи, которые Вы умеете решать?
- С.: Нет, она совсем не похожа на те задачи, которые я умею решать!
- П.: Скажите, а те задачи, которые Вы умеете решать, они сложные или простые?
- С.: Простые, конечно.
- П.: Но ведь и эта задача простая. Вы сами так сказали. Почему же Вы не можете ее решить?
- С.: Потому что именно ее-то я и не понимаю. Я уже просмотрел все формулы из этого раздела, и ни одна из них не подходит для того, чтобы получить решение. Я не знаю... Понавидумывали задач каких-то, а их никто из студентов решить не может... Кому это надо? Да проживу я и без физики как-нибудь!
- П.: Вот именно — как-нибудь. А откуда берутся задачи? Кто их сочиняет?
- С.: А их разве сочиняют? Это же не музыка и не стихотворения!
- П.: Конечно сочиняют. Вы и сами можете сочинить задачу.
- С.: Я?! Сочинить?! Не может быть! Да и зачем мне еще какую-то другую задачу придумывать? Мне и с этой хлопот хватает!
- П.: Но все же давайте попробуем. Я предлагаю Вам вспомнить любую формулу по физике, которую Вы знаете. Вспомнили? Тогда запишите ее.
- С.: Ну, хорошо, пожалуйста. Это я могу. Вот она.
- (Запишите и Вы, читатель, свою формулу).*
- П.: Можете ли Вы придумать задачу, для решения которой нужно было бы воспользоваться этой формулой?

С.: Конечно. Для этого надо в условии задать все величины, кроме одной. Ну и придумать “текстовку”, т.е. текст условия. Например: “Из пункта А по направлению к пункту В отправилась колонна машин, груженных картофелем. За какое время доедет колонна до пункта В, если расстояние между пунктами такое-то, а средняя скорость такая-то?” Хм, выходит, я знаю как придумываются задачи! Вот, смотрите, вот текст: это и это — будем считать известными величинами, например, вот столько и столько, а вот это — неизвестная величина. Ее и надо найти.

*(Запишите и Вы текст своей задачи)*

П.: Очень хорошо! Вот видите, оказывается, что сочинять задачи не так уж и трудно.

С.: Ладно, не трудно. Но зачем это надо? Ведь я же хочу научиться решать задачи, а не сочинять их. Кроме того, все задачи уже, наверное, придуманы.

П.: А если подумать?

С.: Это что же получается? Для того чтобы научиться решать задачи, надо научиться их сочинять? Но ведь этому никто не учит!

П.: Так уж и никто?

С.: Ну, Вы вроде учите... Но ведь Вы не учите! Все время вопросы какие-то задаете! И спрашиваете, и спрашиваете... По-моему, преподаватель — это тот, кто преподает, преподносит знания, а студент — это тот, кто берет их. Это...

П.: “и ежу понятно”?

С.: Ну да... Я просто хотел сказать...

П.: Что?

С.: Ну так обычно говорят, когда все понятно. Надо вперед побыстрее двигаться, а мы тут с этой задачей непонятной застряли... Это что же получается? Пока я не придумаю задачу, похожую на нее, но попроще, я ее сам решить не смогу?

П.: Получается, что так. Сами — не сможете.

С.: Но ведь это — заколдованный круг! Поди туда, не знаю куда, найди то, не знаю что!

П.: Не надо так отчаиваться! Вернемся к Вашей первой сочиненной задаче. Скажите, текст у нее может быть только такой или его можно заменить на другой?

С.: Можно и заменить, решение от этого не изменится. Это что же получается? Условия могут быть разные, а формулы для ее решения будут одни и те же? Интересное кино выходит... Вот, смотрите:

*(Записывает новый вариант текста условия своей задачи. Попробуйте и Вы записать новый вариант текста условия своей задачи)*

П.: Ну, до кинофильма еще далеко, хотя... В принципе, это было бы неплохо. А знаете, Вы мне подсказали неплохую идею!

С.: Я? Вам? Подсказал?! Я ничего не подсказывал. Это просто так говорится когда...

П.: Я знаю, но, тем не менее, подсказали. Спасибо.

С.: Ладно, пожалуйста. Пусть будет, что я Вам подсказал. А почему Вы не хотите мне подсказать?

П.: А разве я не подсказываю? По-моему, я все время только и делаю, что подсказываю.

С.: Но Вы не подсказываете! Только вопросы задаете и задаете... Так, стойте, а для чего Вы это делаете?

П.: Ну-ну, как Вы думаете, для чего я это делаю?

С.: По-моему, Вы это делаете для того, чтобы я сам научился задавать себе вопросы. Это что же получается, что я сам себя могу учить? Для этого надо только задавать себе вопросы и отвечать на них? Классно...

П.: Конечно, можете. По-моему, это...

**Вместе:** “и ежу понятно!”

### **Контрольные вопросы (1)**

1. Какую задачу можно считать *простой*? Приведите пример.
2. Какая задача называется *сложной*? Сформулируйте пример.
3. Как перейти от простой задачи к сложной? Приведите пример.
4. Как перейти от сложной задачи к простой? Покажите на примере.
5. Как можно самостоятельно научиться решать задачи?

## Усложнение задачи

*Действующие лица: С. — студент; П. — преподаватель.*

С.: После предыдущего разговора, я долго думал над тем как *правильно* усложнять задачу.

П.: Давайте подумаем, как вообще можно усложнить задачу? Для того, чтобы правильно сделать что-нибудь, надо знать правила...

С.: Но ведь правил нет, я так понимаю... В учебнике про составление задач нет ни слова...

П.: Правила можно вывести самим.

С.: Это как с задачами? Хорошенькое дело! И задачи сам сочиняй, да еще и правила, по которым их надо составлять, — сам придумывай! Может, все-таки проще было бы показать, как решается эта задача — и дело с концом?

П.: Если Вы так хотите, я могу, конечно, показать ее решение. Но, что Вы будете делать на экзамене, если Вам попадется задача, непохожая на те, что Вы умсете решать?

С.: Ладно, я понял... Сам, так сам. Давайте выдумывать правила. А что для этого надо?

П.: В нашем случае, как минимум, надо знать: какая задача простая, а какая — сложная.

С.: С простой задачей мы справимся запросто. Если задача «изготовлена» из одной формулы, то такая задача является простой. Логично?

П.: Логично, то логично — в том случае, если формула простая. А если формула — сложная?

С.: А какая разница?

П.: Разница есть. Например, Вам могут предложить задачу, для решения которой необходимо использовать формулу, смысла которой Вы не понимаете. Что Вы будете делать?

С.: Хорошо, тогда давайте дадим такое определение: «Простой задачей называется такая задача, для решения которой нужно применить одну простую формулу». Так годится?

П.: Может быть и годится... Но какая формула называется простой?

С.: Простая формула — это такая формула, при помощи которой я могу определить любую величину из нее. Так пойдет?

П.: Ну что ж, давайте пока на этом остановимся. Ну, а сложная?

С.: Сложной задачей называется такая задача, в основе которой лежит две или больше формул. Знаете, я не уверен, что мы должны вводить тип сложности формулы в определение. Получается что-то не то. По-моему, чем больше формул, — тем сложнее задача, разве не так?

П.: Может быть так, а может и не так. Тем не менее, примем Ваши определения за исходные. Может быть, в дальнейшем нам придется эти определения уточнить или видоизменить, либо вообще от них отказаться и ввести новые определения.

С.: В этом и состоит смысл логики систематического уточнения?

П.: Ну, примерно... А теперь давайте примем эти определения за исходные рабочие определения: одна формула — простая задача, чем больше формул, тем сложнее задача. Так?

С.: Сейчас, наверно, еще какой-нибудь подвох будет? Я, кажется, уже начинаю догадываться...

П.: А если догадываетесь, то попробуйте сами сделать вывод.

С.: Попробовать можно. Тем более, если что не так, то Вы поправите, правда?

П.: А до этого я Вас поправлял?

С.: Поправляли, конечно. То есть, нет! Вы ведь только вопросы задаете! А делаете Вы это для того, чтобы я понял, что... Так, хорошо, это мы уже проходили. Сейчас опять, наверно, скажете, что эта задача, которую я не могу решить — простая?

П.: Вот Вы уже и научились задавать вопросы. Согласно Вашему же определению, эта задача — простая. Для ее решения действительно нужно знать всего лишь одну формулу. И Вы эту формулу уже знаете!

С.: Но я не знаю, какую именно формулу я должен применить для решения *этой* задачи!

П.: Не знаете, конечно. Но Вы можете попробовать применять те формулы, которые знаете, по очереди — сначала одну, затем другую и так далее...

С.: Действовать по методу «научного» тыка? И сколько я буду возиться с этими формулами? Хотя, ладно, давайте попробуем, раз Вы так говорите... Хотя, что-то мне подсказывает, что и в этот раз ничего не получится. Если бы дело обстояло так просто, то не было бы вообще никаких особых трудностей с решением задач. Ведь так?

П.: Что ж, Вы опять правы. А для чего же я советовал Вам так сделать?

С.: Наверно, для того, чтобы я помучился как следует и потом... Пойдите, я, кажется, догадался! Ведь мы просто перебираем все возможности, так?

П.: Правильно. Заметьте, теперь уже Вы задаете вопросы и заставляете меня отвечать.

С.: С кем поведешься, от того и наберешься!

П.: И чего же Вы набрались от меня?

С.: Главное — это то, что если задавать вопросы, то отвечая на них, можно чему-нибудь научиться!

П.: Да, чему-нибудь и как-нибудь... Как Вы думаете, любые вопросы нужно задавать?

С.: Нет, не любые, конечно. Если бы от одних только вопросов люди умнели, то все давно уже стали бы умными. Ведь люди только то и делают, что задают вопросы.

П.: И не прислушиваются к ответам...

С.: Может быть. Но Вы как-то так задаете свои вопросы, что отвечая на них, начинаешь почему-то кое-что понимать, причем, — самостоятельно. Это интересно, но уж очень все сложно и утомительно. А хочется побыстрее развязаться с этой задачей... У меня еще столько дел накопилось!

П.: Я понимаю. Но боюсь, что мой ответ Вам опять не понравится. Вот он: вопросы надо задавать так, чтобы после ответов на них стала ясной сущность рассматриваемого в задаче явления.

С.: Так... Новые веники под Новый год. Явление и сущность какие-то...

П.: Явление, это то, что происходит, то, что мы видим непосредственно. А сущность — это то, что обуславливает явления.

С.: А как их отличать, если одно видим, а о другом можно только догадываться?

П.: Для чего же человеку дано такое качество, которое называется «умом»?

С.: А у животных, что, нет ума? Вот, например, мой кот, он знает какой умный! Хотите, я Вам расскажу одну историю? Дело было так...

П.: Я не сомневаюсь, что история эта будет интересной и может быть даже поучительной, но ведь Вы, кажется, намекали на то, что у Вас не так много времени?

С.: Да, я и забыл. С Вами тут про все забудешь... О чем это мы говорили?

П.: Мы говорили о сущности.

С.: Да-да, я вспомнил. Явление существует, а сущность проявляется. Может быть, это как если у нас в основе задачи лежала одна формула, а тексты условий могли быть разными, так? Значит, формула, на основе которой построена задача, — это и есть ее сущность?

П.: Не совсем так, но уже ближе к существу вопроса. Дело в том, что формула, на базе которой строится задача, является элементом математической модели, лежащей в основе данной задачи.

С.: Так... Теперь еще и модель какая-то появилась! Да еще и математическая! И много еще у Вас тузов в колоде?

П.: Хватает... Вернемся к нашим рабочим определениям. Я немного помогу Вам. В основе задачи может лежать одна или больше формул, так?

С.: Так.

П.: Значит, мы должны отличать задачи с одной формулой от задач с двумя формулами и так далее. Число формул, составляющих математическую модель физической задачи, назовем *порядком задачи*.

С.: Почему выбрано именно такое название?

П.: Выбор названия связан с аналогией с таким известным Вам из математики понятием как *порядок системы уравнений*.

С.: Ясно.

П.: Но может быть и другая ситуация. Одна и та же формула может использоваться в задаче несколько раз.

С.: Как это может быть?

П.: Это может быть в том случае, если один и тот же физический процесс описан в задаче в разные моменты времени. Или если разные процессы имеют одинаковую физическую природу. Для того чтобы отличать такие случаи неоднократного использования одной и той же формулы, можно ввести следующее определение: число раз использования одной и той же формулы называется *рангом задачи*.

С.: А если в задаче используются, например, две формулы и каждая из них применяется по два раза, то чему будет равен общий ранг задачи?

П.: А Вы как думаете?

С.: Я думаю, что в этом случае общий ранг задачи равен сумме рангов, т. е. четырем.

П.: Все правильно. И как мы можем сформулировать правило для определения ранга задачи?

С.: Ранг задачи равен сумме рангов отдельных формул, входящих в состав задачи. Так?

П.: Так. Теперь Вы можете ответить на свой первоначальный вопрос?

С.: Думаю, что да. Задачу можно усложнять двумя способами: увеличивать порядок задачи или увеличивать ее ранг.

П.: Ну вот, мы и вывели правило усложнения задач. В первом приближении, конечно...

С.: Почему --- в первом?

П.: А если подумать ?

### **Контрольные вопросы (2)**

1. В чем отличие сложной задачи от простой?
2. Что называют физической моделью условия? Приведите примеры.
3. Что называется математической моделью физической задачи?
4. Что называют порядком и рангом задачи?
5. Как можно усложнить простую задачу? Покажите на примере.

## Подведение к решению

*Действующие лица: С. — студент; П. — преподаватель.*

С.: Как же все-таки научиться решать задачи? Что для этого надо?

П.: Ответ простой. Для этого надо практиковаться. Давайте рассмотрим следующую ситуацию. Предположим, что Вы составили свою задачу и предлагаете ее решить кому-нибудь другому, например, своему товарищу. Что произойдет?

С.: Он меня пошлет подальше с моей задачей!

П.: Другими словами, он не захочет ее решать?

С.: Конечно, не захочет! Зачем ему лишняя головная боль?

П.: А если Вы ему объясните ситуацию, скажете, что сами придумали задачу и хотите проверить, насколько она сложная?

С.: Тогда другое дело. Он может попробовать ее решить.

П.: Итак, что является первым необходимым условием для того, чтобы научиться решать задачи?

С.: Я понял. Первым и необходимым условием, для того чтобы научиться решать задачи, является желание или необходимость. Если ты сам хочешь или если это кому-нибудь нужно, например, самому себе. А еще может быть просто интересно! Например, как с кроссвордами... Их ведь решают просто так?

П.: Это правильно, но не совсем. То, о чем Вы говорите, в психологии называется *мотивом*. Итак, нужен мотив.

С.: А что еще нужно кроме мотива?

П.: Давайте подумаем, что еще кроме стремления учиться нужно для того, чтобы научиться решать задачи?

С.: Я думаю, что также нужны знания.

П.: А еще?

С.: Хорошо было бы иметь какую-то схему, по которой можно было бы решать любую задачу...

П.: Ну, насчет любой, это, пожалуй, Вы чересчур сильно замахнулись... Хотя, как примерная цель для нашей беседы — сойдет.

С.: Опять примем условно? В качестве рабочей цели?

П.: Я вижу, Вы быстро схватываете основные идеи. Хорошо бы, чтобы и дальше так было...

С.: Буду стараться. Но Вы должны меня натолкнуть на мысль, а то я сам не знаю о чем думать.

П.: Хорошо. Мы остановились на знаниях. Какие знания Вы подразумевали?

С.: Ну, во-первых, это должны быть знания по физике. Во-вторых, по какому-то конкретному разделу физики, а именно по тому разделу, который мы сейчас изучаем.

П.: Что конкретно нужно знать?

С.: Основные понятия, их определения, что они означают, связи с другими понятиями, а также — формулы. Ого, сколько всего...

П.: Нужна Вам здесь моя помощь?

С.: Определения и формулы я сам могу выучить, для этого достаточно только немного посидеть и поучить. Память у меня хорошая... Что касается смысла определений и связи с другими понятиями, то здесь Ваша помощь, конечно, необходима, правда?

П.: Так, очень хорошо. Предположим, что мы проделали все, что нужно. Готовы ли Вы решать задачи?

С.: Думаю, что да. Если я знаю теорию, то прочитав текст задачи, я сразу пойму какие формулы надо применять. Затем остается только получить ответ, вот и все.

П.: Тогда в чем трудность при решении этой задачи?

С.: Я уже говорил, что я не понимаю ее.

П.: А свою задачу Вы понимаете?

С.: Да, конечно, ведь я же ее сам и составлял!

П.: Можете ли Вы составить задачу похожую на эту, непонятную, но проще?

С.: Могу, конечно. Но, ведь, для этого надо что-то «выбросить» из условия. Я не знаю, правильно ли это будет?

П.: То есть удалить? Ну, так и удаляйте! Что получилось?

С.: *(Показывает текст упрощенной задачи).*

П.: Эту задачу уже Вы можете решить?

С.: Эту --- могу! Но что делать в том случае, если и упрощенная задача не получается?

П.: А если подумать? Если Вы внимательно читали предыдущий текст, то сможете сами ответить на этот вопрос.

### **Контрольные вопросы (3)**

1. Что необходимо для того, чтобы научиться решать задачи по физике?
2. Что называют мотивом?
3. Какого рода знания нужны для решения физических задач?
4. Составьте примерную схему решения стандартной физической задачи?
5. Что делать в том случае, если задача после упрощения снова не решается?

## ТЕМА (I): «Кинематика и динамика материальной точки»

### Информационный блок (I)

*Механическим движением* называется изменение положения тела относительно других тел с течением времени.

*Материальной точкой* называется тело, размерами и формой которого в данных условиях можно пренебречь.

Положение материальной точки указывается с помощью *радиус-вектора*  $\vec{r}$ , соединяющего начало координат с данной точкой:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.1)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы, направленные вдоль осей координат  $OX, OY, OZ$ , соответственно. Значения координат данной материальной точки находятся как проекции радиус-вектора на оси координат  $OX, OY, OZ$ :

$$x = |\vec{r}| \cdot \cos(\hat{r}, \vec{i}), \quad y = |\vec{r}| \cdot \cos(\hat{r}, \vec{j}), \quad z = |\vec{r}| \cdot \cos(\hat{r}, \vec{k}), \quad (1.2)$$

где *модуль*  $|\vec{r}|$  радиус-вектора  $\vec{r}$  вычисляется по формуле:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (1.3)$$

а направление радиус-вектора определяется при помощи *направляющих косинусов*:

$$\cos(\hat{r}, \vec{i}) = \frac{x}{|\vec{r}|}; \quad \cos(\hat{r}, \vec{j}) = \frac{y}{|\vec{r}|}; \quad \cos(\hat{r}, \vec{k}) = \frac{z}{|\vec{r}|}. \quad (1.4)$$

*Единичным вектором*  $\vec{e}_r$  в направлении радиус-вектора  $\vec{r}$  называется вектор вида

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (1.5)$$

Если положение точки в пространстве изменяется, то радиус-вектор зависит от времени:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (1.6)$$

Уравнение вида (1.6) называют *векторной формой кинематического закона движения* точки.

Зависимость (1.6) эквивалентна системе уравнений:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \quad (1.7)$$

Зависимость вида (1.7) называется *координатной формой кинематического закона движения* точки.

На рисунке 1.1 показан вектор, соединяющий точки 1 и 2, находящиеся на траектории движения материальной точки. Такой вектор является *вектором*

**перемещения** материальной точки из положения 1 в положение 2. Вектор  $\vec{r}_2$  равен геометрической сумме векторов  $\vec{r}_1$  и  $\Delta\vec{r}$ :

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r},$$

в чем легко убедиться с помощью рисунка 1.1. Выражая из последнего уравнения вектор  $\Delta\vec{r}$ , находим, что вектор перемещения равен разности радиус-векторов точек 2 и 1:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (1.8)$$

Кроме того, вектор перемещения  $\Delta\vec{r}$  может быть представлен через разности координат:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k}, \quad (1.9)$$

где  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta y = y_2 - y_1$ ,  $\Delta z = z_2 - z_1$  — **разности координат** материальной точки, отсчитанные вдоль осей  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$ .

**Модуль вектора перемещения**  $|\Delta\vec{r}|$  из точки 1 в точку 2 определяется по формуле

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}, \quad (1.10)$$

Следовательно, модуль вектора перемещения численно равен расстоянию между двумя положениями 1 и 2 материальной точки в пространстве.

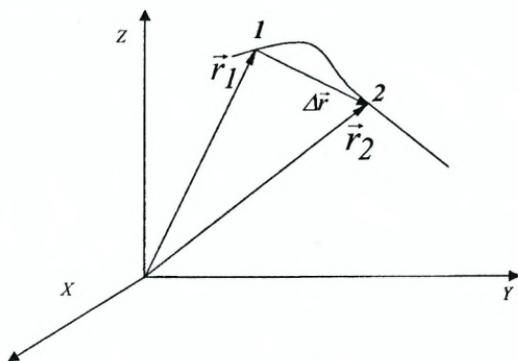


Рисунок 1.1

Изменение с течением времени положения материальной точки характеризуется **вектором мгновенной скорости**, который в соответствии с физическим смыслом производной определяется как производная от радиус-вектора материальной точки по времени<sup>1</sup>:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.11)$$

<sup>1</sup> Переход к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$  ограничен такими промежутками времени, при которых тело проходит расстояния, соизмеримые с размерами атомов или молекул. Другими словами, понятие производной в физике применимо к тем случаям, когда деление пространства на все меньшие и меньшие участки в принципе возможно для рассматриваемого тела.

Вектор мгновенной скорости точки можно представить в виде:

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} \quad (1.12)$$

где проекции  $V_x$ ,  $V_y$  и  $V_z$  вектора мгновенной скорости на соответствующие оси координат вычисляются по формулам:

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} \quad (1.13)$$

С другой стороны, так как единичный вектор, направление которого совпадает с направлением радиус-вектора материальной точки, по определению равен отношению радиус-вектора к его модулю:

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},$$

то, следовательно, радиус-вектор материальной точки можно представить в виде следующей зависимости:

$$\vec{r} = |\vec{r}| \cdot \vec{e}_r \quad (1.14)$$

Тогда, в соответствии с формулой (1.11) и с учетом выражения (1.14), вектор мгновенной скорости точки может быть записан в виде суммы двух составляющих:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(|\vec{r}| \cdot \vec{e}_r)}{dt} = \frac{d(|\vec{r}|)}{dt} \vec{e}_r + |\vec{r}| \frac{d(\vec{e}_r)}{dt} = \vec{V}_r + \vec{V}_\varphi \quad (1.15)$$

Направление первой составляющей  $\vec{V}_r = \frac{d(|\vec{r}|)}{dt} \vec{e}_r$  совпадает с направлением

радиус-вектора  $\vec{r}$ , а величина  $\frac{d(|\vec{r}|)}{dt}$  в соответствии с физическим смыслом производной по времени показывает, как быстро изменяется модуль радиус-вектора в данный момент времени.

Направление второй составляющей  $\vec{V}_\varphi = |\vec{r}| \frac{d(\vec{e}_r)}{dt}$  по построению перпендикулярно направлению радиус-вектора. Эта составляющая равна произведению модуля радиус-вектора на производную по времени от единичного вектора  $\vec{e}_r$ . Но единичный вектор по величине изменяться не может, следовательно, для того чтобы вектор  $\vec{V}_\varphi$  тождественно не равнялся нулю, необходимо чтобы единичный вектор изменял свое направление. Последнее эквивалентно вращению единичного вектора вокруг некоторой оси с определенной угловой скоростью  $\omega$ . Другими словами, если производная от единичного вектора по времени  $\frac{d(\vec{e}_r)}{dt}$  не равна нулю, то она равна произведению модуля угловой скорости  $\omega$  вращения радиус-вектора на перпендикулярный к нему единичный вектор  $\vec{e}_\varphi$ , направленный в сторону возрастания угла  $\varphi$ :

$$\frac{d(\vec{e}_r)}{dt} = \frac{d(\varphi \vec{e}_\varphi)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi + \frac{d(\vec{e}_\varphi)}{dt} \varphi = \omega \vec{e}_\varphi$$

Таким образом, вектор скорости материальной точки действительно может быть представлен в виде геометрической суммы двух составляющих:

$$\vec{V} = \frac{d(|\vec{r}|)}{dt} \vec{e}_r + |\vec{r}| \omega \vec{e}_\varphi = \vec{V}_r + \vec{V}_\varphi.$$

В целях наглядности, рассмотренные кинематические характеристики  $\vec{V}$ ,  $\vec{V}_r$  и  $\vec{V}_\varphi$ , возникающие при движении материальной точки вдоль некоторой криволинейной траектории, например, в плоскости  $XOY$ , показаны на рисунке 1.2. Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения материальной точки.

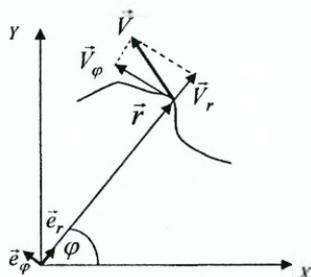


Рисунок 1.2

Модуль вектора мгновенной скорости определяется по формуле

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

или по формуле

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_r^2 + V_\varphi^2}.$$

Направление вектора мгновенной скорости определяется при помощи *направляющих косинусов*:

$$\cos(\vec{V}, \vec{i}) = \frac{V_x}{|\vec{V}|}; \quad \cos(\vec{V}, \vec{j}) = \frac{V_y}{|\vec{V}|}; \quad \cos(\vec{V}, \vec{k}) = \frac{V_z}{|\vec{V}|}. \quad (1.16)$$

*Средняя скорость*  $\langle \vec{V} \rangle$  перемещения материальной точки за время от  $t_1$  до  $t_2$  определяется по формуле:

$$\langle \vec{V} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad (1.17)$$

где  $\Delta \vec{r} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k}$  — вектор перемещения точки за промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Из предыдущей формулы следует, что вектор перемещения материальной точки можно выразить через вектор средней скорости ее перемещения:

$$\Delta \vec{r} = \langle \vec{V} \rangle (t_2 - t_1). \quad (1.18)$$

**Путь**, пройденный материальной точкой при перемещении из положения 1 в положение 2, численно равен длине дуги между точками 1 и 2. При движении точки конец радиус-вектора описывает в пространстве кривую, называемую **траекторией** движения точки. При смещении материальной точки вдоль траектории на бесконечно малую величину, ее путь можно записать следующим образом:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = dt \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}.$$

Проинтегрировав полученное выражение по времени  $t$  в пределах от  $t_1$  до  $t_2$  и перейдя под знаком интеграла к пространственной координате  $x$  в пределах от  $x_1$  до  $x_2$ , получим следующие формулы для определения пути:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} dt = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (z'_x)^2} dx, \quad (1.19)$$

где  $y'_x = \frac{dy}{dx}$  — производная от координаты  $y$  по координате  $x$ ,  $z'_x = \frac{dz}{dx}$  — производная от координаты  $z$  по координате  $x$ ,  $x_1$  и  $x_2$  — значения координаты  $x$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ , соответственно. Зависимость  $S = S(t)$  называют **естественной формой кинематического закона движения** точки.

Изменение вектора скорости с течением времени характеризуется при помощи **вектора мгновенного ускорения**, который определяется как производная от вектора скорости по времени:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}. \quad (1.20)$$

Вектор ускорения материальной точки можно представить в виде:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (1.21)$$

где  $a_x = \frac{dV_x}{dt}$ ,  $a_y = \frac{dV_y}{dt}$  и  $a_z = \frac{dV_z}{dt}$  — проекции вектора ускорения на соответствующие оси координат.

**Модуль вектора ускорения** вычисляется следующим образом:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.22)$$

**Направляющие косинусы** вектора ускорения равны

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos(\vec{a}, \vec{k}) = \frac{a_z}{|\vec{a}|} \quad (1.23)$$

Ускорение характеризует изменение величины и направления скорости в целом. Оно может быть представлено в виде векторной (геометрической) суммы тангенциального и нормального ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \quad (1.24)$$

Модуль ускорения выражается через модули тангенциального и нормального ускорений при помощи теоремы Пифагора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_\tau|^2 + |\vec{a}_n|^2} \quad (1.25)$$

*Тангенциальное ускорение* показывает, как быстро изменяется величина вектора скорости в данный момент времени. Вектор тангенциального ускорения направлен вдоль касательной к траектории в данной точке:

$$\vec{a}_\tau = a_\tau \vec{e}, \quad (1.26)$$

где величина  $a_\tau = \frac{d|\vec{V}|}{dt}$  показывает, как быстро изменяется модуль мгновенной скорости  $|\vec{V}|$  и характер этого изменения (возрастание или убывание). Вектор  $\vec{e} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$  является единичным вектором, совпадающим по направлению с направлением

вектора скорости  $\vec{V}$  движения частицы. Поэтому вектор  $\vec{e}$  направлен в сторону движения частицы по касательной к траектории в данной точке. Если модуль вектора скорости  $|\vec{V}|$  возрастает, то знак ее производной по времени положителен и направление вектора тангенциального ускорения  $\vec{a}_\tau$  совпадает с направлением вектора  $\vec{V}$ . Если же в данный момент времени мгновенная скорость убывает по величине, то знак ее производной по времени становится отрицательным. В этом случае направление вектора тангенциального ускорения  $\vec{a}_\tau$  противоположно направлению вектора скорости  $\vec{V}$ .

Проекция вектора полного ускорения  $\vec{a}$  на направление вдоль касательной равна модулю вектора полного ускорения, умноженному на косинус угла между вектором скорости и вектором ускорения:

$$a_\tau = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{V}, \vec{a}) \quad (1.27)$$

Из определения скалярного произведения векторов  $\vec{V}$  и  $\vec{a}$ :  $\vec{V}\vec{a} = |\vec{V}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{V}, \vec{a})$ , следует, что  $\cos(\vec{V}, \vec{a})$  можно выразить через отношение скалярного произведения векторов  $\vec{V}$  и  $\vec{a}$  к произведению их модулей:

$$\cos(\vec{V}, \vec{a}) = \frac{\vec{V}\vec{a}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{V}|} = \frac{V_x a_x + V_y a_y + V_z a_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{V}|}.$$

Подставляя выражение для  $\cos(\vec{V}, \vec{a})$  в (1.27), получим еще одну формулу, с помощью которой можно определить модуль тангенциального ускорения:

$$a_\tau = |\vec{a}| \cdot \frac{\vec{V}\vec{a}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{V}|} = \frac{\vec{V}\vec{a}}{|\vec{V}|} = \frac{V_x a_x + V_y a_y + V_z a_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}. \quad (1.28)$$

**Нормальное ускорение** показывает, как быстро изменяется направление вектора скорости  $\vec{V}$  частицы в данный момент времени. Вектор нормального ускорения определяется следующим образом:

$$\vec{a}_n = \frac{|\vec{V}|^2}{R} \vec{n}, \quad (1.29)$$

где  $|\vec{V}|^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$  — квадрат модуля мгновенной скорости  $\vec{V}$ ,  $R$  — радиус кривизны участка траектории частицы, равный радиусу соприкасающейся с ней окружности,  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали к траектории, направленный к центру соприкасающейся окружности. *Соприкасающейся окружностью* называют окружность, которая касается кривой в данной точке на бесконечно малом ее участке с точностью до величин второго порядка малости. Нормальное ускорение направлено в сторону центра соприкасающейся окружности.

Согласно **второму закону Ньютона** скорость изменения вектора импульса  $\vec{p}(t)$  материальной точки равна действующей на тело геометрической сумме сил:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (1.30)$$

Силу  $\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$  называют равнодействующей. Уравнение (1.30) называется **уравнением движения материальной точки**.

Если масса  $m$  частицы не изменяется, то второй закон Ньютона можно представить в виде:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (1.31)$$

В том случае, если ускорение зависит только от пространственной координаты, то от дифференцирования по времени можно перейти к дифференцированию по координате:

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dt} \cdot \left( \frac{dx}{dx} \right) = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = V \frac{dV}{dx}. \quad (1.32)$$

## Задания (1)

В таблице вариантов (1) указана зависимость координат частицы от времени  $t$ .

**А 1.** Найти зависимость от времени радиус-вектора частицы, вектора ее мгновенной скорости и векторов полного, тангенциального и нормального ускорений.

**В 1.** Изобразить на чертеже траекторию движения частицы до ее возвращения в исходную точку, радиус-вектор частицы, векторы мгновенной скорости, полного, тангенциального и нормального ускорения в момент времени  $t_1$ , указанный в таблице вариантов (1). Показать на том же чертеже векторы средней скорости перемещения и среднего ускорения частицы за промежуток времени от 0 до  $t_1$ .

На тележку массой  $m$ , установленную на горизонтально расположенных рельсах, в течение промежутка времени от 0 до  $t_1$  действует сила  $F$ . Коэффициент трения между телом и плоскостью равен  $\mu$ .

**А 2.** Найти скорость тележки в момент прекращения действия силы  $F = f_0 t$ .

**В 2.** Определить полное время движения тележки и путь до остановки.

На высоте  $y_0$  к стене прикреплен при помощи шарнира стержень длиной  $L$ . По стержню, расположенному под углом  $\alpha$  по отношению к горизонтали, может свободно скользить шарик с отверстием массой  $m_1$ . Между шариком и стеной на стержне находится пружина длиной  $L_0$ , не прикрепленная к шарiku. Длину  $L_1$  пружины в сжатом состоянии и коэффициент жесткости пружины выбирают так, чтобы шарик после полного выпрямления пружины пролетел расстояние большее половины начальной высоты полета.

**А 3.** Определить с помощью уравнения движения значение скорости шарика в момент прекращения действия пружины, если стержень расположен горизонтально и трение между шариком и стержнем не учитывается.

**В 3.** Найти высоту подъема, дальность полета и время движения шарика при  $\alpha \neq 0$  и коэффициенте трения между шариком и стержнем, равным  $\mu$ .

**С 1.** Определить при тех же условиях время движения шарика с учетом того, что в конце полета шарик попадает в бассейн глубиной  $H$ , заполненный водой. Считать, что сила сопротивления воды пропорциональна скорости движения шарика. Коэффициент сопротивления равен  $r$ . Перед попаданием в воду шарик испытывает абсолютно упругое соударение с закрепленной подставкой, наклоненной так, чтобы после соударения шарик двигался вертикально. Найти также этот угол.

**Таблица вариантов (1)**

Номер варианта  $N$  равен порядковому номеру студента в журнале группы. Размеры в таблице исходных данных проставляются студентами самостоятельно. Если при подстановке численных значений не удастся получить требуемый результат, то необходимо соответствующим образом самостоятельно подобрать исходные данные, уведомив об этом преподавателя.

$N$	$m$	$f_o$	$F_o$	$\tau$	$\alpha$	$y_o$	$L$	$m_1$	$L_o$	$L_1$	$H$
	$N$	$N$	$N+k$	$(N+k)t_1$	$N(5 \pm k)^\circ$	$N$	$N$	$N+k$			$\frac{N}{N+k}$

$N$	$x(t)$	$y(t)$	$t_1, c$	$\mu$	$r$
1.	$3 \sin kt$	$2 \cos kt$	$\pi/4$	$(1+k)/100$	$(1+k)10^{-3}$
2.	$2 \sin kt$	$3 \cos kt$	$3\pi/4$	$(2+k)/100$	$(2+k)10^{-3}$
3.	$3 \sin kt$	$2 \cos kt$	$5\pi/4$	$(3+k)/100$	$(3+k)10^{-3}$
4.	$2 \sin kt$	$3 \cos kt$	$7\pi/4$	$(4+k)/100$	$(4+k)10^{-3}$
5.	$3 \sin kt$	$2 \cos kt$	$\pi/4$	$(5+k)/100$	$(5+k)10^{-3}$
6.	$2 \sin kt$	$3 \cos kt$	$3\pi/4$	$(6+k)/100$	$(6+k)10^{-3}$
7.	$3 \sin kt$	$2 \cos kt$	$5\pi/4$	$(7+k)/100$	$(7+k)10^{-3}$
8.	$4 \sin kt$	$3 \cos kt$	$7\pi/4$	$(8+k)/100$	$(8+k)10^{-3}$
9.	$4 \sin kt$	$2 \cos kt$	$\pi/4$	$(9+k)/100$	$(9+k)10^{-3}$
10.	$5 \sin kt$	$4 \cos kt$	$3\pi/4$	$(10+k)/100$	$(10+k)10^{-3}$
11.	$5 \sin kt$	$3 \cos kt$	$5\pi/4$	$(11+k)/100$	$(11+k)10^{-3}$
12.	$4 \sin kt$	$3 \cos kt$	$7\pi/4$	$(12+k)/100$	$(12+k)10^{-3}$
13.	$\sin kt$	$\sin 2kt$	$\pi/4$	$(13+k)/100$	$(13+k)10^{-3}$
14.	$\sin kt$	$\sin 2kt$	$3\pi/4$	$(14+k)/100$	$(14+k)10^{-3}$
15.	$\sin kt$	$\sin 2kt$	$5\pi/4$	$(15+k)/100$	$(15+k)10^{-3}$
16.	$\sin kt$	$\sin 2kt$	$7\pi/4$	$(16+k)/100$	$(16+k)10^{-3}$
17.	$\sin 2kt$	$\sin kt$	$\pi/4$	$(17+k)/100$	$(17+k)10^{-3}$
18.	$\sin 2kt$	$\sin kt$	$3\pi/4$	$(18+k)/100$	$(18+k)10^{-3}$
19.	$\sin 2kt$	$\sin kt$	$5\pi/4$	$(19+k)/100$	$(19+k)10^{-3}$
20.	$\sin 2kt$	$\sin kt$	$7\pi/4$	$(20+k)/100$	$(20+k)10^{-3}$
21.	$\sin kt$	$\sin(2kt + \pi/2)$	$\pi/4$	$(21+k)/100$	$(21+k)10^{-3}$
22.	$\sin kt$	$\sin(2kt + \pi/2)$	$3\pi/4$	$(22+k)/100$	$(22+k)10^{-3}$

23.	$\sin kt$	$\sin(2kt + \pi/2)$	$5\pi/4$	$(23+k)/100$	$(23+k)10^{-3}$
24.	$\sin kt$	$\sin(2kt + \pi/2)$	$7\pi/4$	$(24+k)/100$	$(24+k)10^{-3}$
25.	$\sin kt$	$\sin(2kt - \pi/2)$	$\pi/4$	$(25+k)/100$	$(25+k)10^{-3}$
26.	$\sin kt$	$\sin(2kt - \pi/2)$	$3\pi/4$	$(26+k)/100$	$(26+k)10^{-3}$
27.	$\sin kt$	$\sin(2kt - \pi/2)$	$5\pi/4$	$(27+k)/100$	$(27+k)10^{-3}$
28.	$\sin kt$	$\sin(2kt - \pi/2)$	$7\pi/4$	$(28+k)/100$	$(28+k)10^{-3}$
29.	$\sin kt$	$\sin 0,5kt$	$\pi/4$	$(29+k)/100$	$(29+k)10^{-3}$
30.	$3 \sin kt$	$3 \cos kt$	$3\pi/4$	$(30+k)/100$	$(30+k)10^{-3}$

## Примеры (1)

### ПРИМЕР 1.1

Координаты  $x$  и  $y$  частицы зависят от времени  $t$  следующим образом:

$$x(t) = \cos t \text{ и } y(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

**А 1.** Найти зависимость от времени радиус-вектора частицы, вектора ее мгновенной скорости и векторов полного, тангенциального и нормального ускорений.

**Решение примера 1.1.** Радиус-вектор частицы в соответствии с формулой (1.1) можно записать следующим образом:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = \vec{i} \cos t + \vec{j} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

Вектор мгновенной скорости запишется в соответствии с формулой (1.9) в виде:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \vec{i} \cos t + \vec{j} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right] = \\ &= \frac{d}{dt} [\vec{i} \cos t] + \frac{d}{dt} \left[ \vec{j} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right] = \\ &= \vec{i} \frac{d}{dt} [\cos t] + \vec{j} \frac{d}{dt} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right] = -\vec{i} \sin t + \vec{j} \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right).\end{aligned}$$

Вектор полного ускорения вычисляем по формуле (1.17):

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt} \left[ -\vec{i} \sin t + \vec{j} \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right] = -\vec{i} \cos t - \vec{j} \frac{\pi^2}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).\end{aligned}$$

Вектор тангенциального ускорения находится по формуле (1.25):

$$\vec{a}_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} \vec{\tau}.$$

Используя результаты предыдущих вычислений, можем записать, что:

$$V_x = -\sin t, \quad a_x = -\cos t, \quad V_y = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), \quad a_y = -\frac{\pi^2}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

Вектор  $\vec{\tau}$  — единичный вектор в направлении вектора скорости в соответствии с формулой (1.3) можно записать следующим образом:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{V_x \vec{i} + V_y \vec{j}}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}.$$

Следовательно, вектор тангенциального ускорения равен:

$$\vec{a}_\tau = \frac{\sin t \cos t - \frac{\pi^3}{8} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\sqrt{\sin^2 t + \frac{\pi^2}{4} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)}} \cdot \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} =$$

$$= \frac{[\sin t \cos t - \frac{\pi^3}{8} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)][-\vec{i} \sin t + \vec{j} \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)]}{\sin^2 t + \frac{\pi^2}{4} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)}$$

Выражение для вектора нормального ускорения находим из соотношения, которое может быть получено из формулы (1.21):

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_\tau = -\vec{i} \cos t - \vec{j} \frac{\pi^2}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) -$$

$$\frac{[\cos t \sin t - \frac{\pi^3}{8} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)][-\vec{i} \sin t + \vec{j} \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)]}{\sin^2 t + \frac{\pi^2}{4} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)}$$

### ПРИМЕР 1.2

На тележку массой  $m$ , установленную на горизонтально расположенных рельсах, в течение промежутка времени от 0 до  $t_1$  действует сила, зависящая от времени. Коэффициент трения между телом и плоскостью равен  $\mu$ .

**А 2.** Найти величину скорости в момент прекращения действия силы  $\vec{F} = \vec{f}_0 t$ .

**Решение примера 1.2.** При увеличении силы  $\vec{F}$  увеличивается и сила трения покоя до тех пор, пока ее значение не станет равным значению силы трения скольжения  $\mu N$ . Исходя из условия равенства этих сил, определяем время  $t_0$  начала движения. Это время равно:

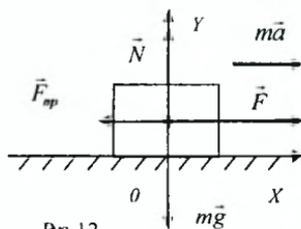


Рис. 12

$t_0 = \frac{\mu mg}{f_0}$ , где  $f_0$  — постоянная величина.

После начала движения на материальную точку действуют: сила  $\vec{F}$ , сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила трения скольжения  $\vec{F}_{mp}$  и сила реакции опоры  $\vec{N}$ . Результирующая этих сил, в соответствии со вторым законом Ньютона, сообщает телу ускорение  $\vec{a}$ :

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_{mp} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

Проецируя это уравнение на оси координат, получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} F - F_{mp} = ma, \\ -mg + N = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение системы перепишем в виде:

$$f_0 t - \mu N = m \frac{dV}{dt}.$$

Выражая из второго уравнения системы величину силы реакции опоры  $N$ , и подставляя это значение в первое уравнение системы, приведем его к виду, удобному для интегрирования:

$$\left( \frac{f_0}{m} t - \mu g \right) dt = dV.$$

После интегрирования получим:

$$V = \frac{f_0}{m} \frac{t^2}{2} - \mu g t + C,$$

где  $C$  — постоянная интегрирования. Применяя начальные условия:  $V(t_0) = 0$ ,

находим, что  $C = \frac{(\mu m g)^2}{2 m f_0}$ . Следовательно, скорость движения до момента прекращения действия силы зависит от времени по закону:

$$V = \frac{f_0}{m} \frac{t^2}{2} - \mu g t + \frac{(\mu m g)^2}{2 m f_0}.$$

### ПРИМЕР 1.3

На высоте  $y_0$  к стене прикреплен при помощи шарнира стержень длиной  $L$ . По стержню, расположенному под углом  $\alpha$  по отношению к горизонтالي, может свободно скользить шарик массой  $m_1$ . На стержне между шариком и стеной находится пружина длиной  $L_0$ , не прикрепленная к шарiku. Длину  $L_1$  пружины в сжатом состоянии и коэффициент жесткости пружины выбирают так, чтобы шарик не остался на стержне после выпрямления пружины.

**А 3.** Определить с помощью уравнения движения значение скорости шарика в момент прекращения действия пружины, если стержень расположен горизонтально и трение между шариком и стержнем не учитывается.

*Решение примера 1.3.* До прекращения действия пружины, на шарик действуют: сила упругости  $\vec{F}$  со стороны пружины, сила тяжести  $m_1 \vec{g}$  и сила реакции опоры  $\vec{N}$ . Согласно второму закону Ньютона, результирующая этих сил сообщает шарiku ускорение  $\vec{a}$ :

$$\vec{F} + m_1 \vec{g} + \vec{N} = m_1 \vec{a}.$$

Составляя проекции этого уравнения на оси координат, получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} F = m_1 a, \\ -m_1 g + N = 0. \end{cases}$$

Сила упругости, согласно закону Гука, пропорциональна величине деформации пружины, которая в нашем случае равна  $L_0 - x$ , где  $x$  — координата правого конца пружины. Первое уравнение системы переписывается в виде:

$$k(L_0 - x) = m_1 \frac{dV}{dt}.$$

Если умножить это уравнение на величину  $\frac{dx}{dx}$ , то получим, что

$$k(L_0 - x) = m_1 \frac{dV}{dt} \cdot \frac{dx}{dx}.$$

После несложных преобразований с учетом того, что  $V = \frac{dx}{dt}$ , запишем уравнение в виде, пригодном для интегрирования:

$$-\frac{k}{m_1} \cdot (L_0 - x) d(L_0 - x) = V dV.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим:

$$\frac{V^2}{2} = -\frac{k}{m} \cdot \frac{(L_0 - x)^2}{2} + C.$$

При  $x = L_1$  скорость  $V = 0$ , поэтому:  $C = \frac{k}{m_1} \cdot \frac{(L_0 - L_1)^2}{2}$ . Следовательно, до прекращения действия пружины скорость движения зависит от координаты  $x$  следующим образом:

$$\frac{V^2}{2} = -\frac{k}{m_1} \cdot \frac{(L_0 - x)^2}{2} + \frac{k}{m_1} \cdot \frac{(L_0 - L_1)^2}{2}.$$

Подставляя в последнее уравнение вместо координаты  $x$  значение длины ненагруженной пружины  $L_0$ , определим величину скорости шарика в момент прекращения действия пружины:

$$V = \sqrt{\frac{k}{m_1}} (L_0 - L_1).$$

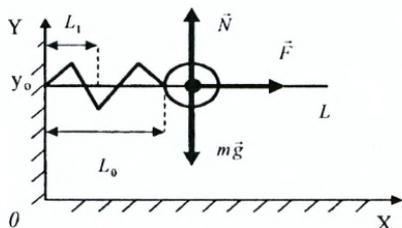


Рис. 1.3

## ТЕМА (2): «Кинематика и динамика вращательного движения. Законы сохранения. Элементы механики колебательного движения»

### Информационный блок (2)

#### КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Закон движения  $\varphi(t)$  материальной точки по окружности радиуса  $r$  задается уравнением:

$$\varphi = \varphi(t), \quad (2.1)$$

где  $\varphi$  — угол поворота радиус-вектора  $\vec{r}$  материальной точки,  $t$  — время движения.

**Поворот тела** на некоторый угол  $\varphi$  можно задать при помощи псевдовектора<sup>2</sup>, длина которого равна величине угла  $\varphi$ , а направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта, вращаемого в ту же сторону.

Псевдовектор *угловой скорости*  $\vec{\omega}$  характеризует процесс изменения вектора угла поворота:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad (2.2)$$

где  $\Delta \vec{\varphi}$  — вектор угла поворота, направление которого связывается с поступательным движением правого винта при вращении его в ту же сторону.

Псевдовектор *углового ускорения*  $\vec{\varepsilon}$  характеризует процесс изменения вектора угловой скорости:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (2.3)$$

В том случае, если угловое ускорение зависит только от угла поворота, то от дифференцирования по времени можно перейти к дифференцированию по угловой координате:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi}. \quad (2.4)$$

Вектор *линейной скорости*  $\vec{V}$  связан с вектором угловой скорости  $\vec{\omega}$  посредством операции векторного произведения:

$$\vec{V} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.5)$$

Модуль вектора линейной скорости равен:

$$|\vec{V}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \sin \alpha, \quad (2.8)$$

где  $\alpha$  — угол между вектором угловой скорости  $\vec{\omega}$  и радиус-вектором  $\vec{r}$ .

Направление вектора векторного произведения определяется направлением поступательного движения правого винта при вращении от первого сомножителя ко второму по кратчайшему пути.

<sup>2</sup> Псевдовекторами называют векторы, направление которых связывают с направлением вращения.

Существует связь между модулями линейных и угловых величин, характеризующих движение точки по окружности радиуса  $R$ :

$$V = \omega R \quad a_t = \varepsilon R \quad a_n = \omega^2 R = \frac{V^2}{R}, \quad (2.6)$$

где  $V$  — линейная скорость,  $\omega$  — угловая скорость,  $a_t$  — тангенциальное ускорение,  $a_n$  — нормальное ускорение.

Псевдовектор *момента силы*  $\vec{M}$  определяется как векторное произведение радиус-вектора  $\vec{r}$  точки приложения силы и вектора силы  $\vec{F}$ :

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.7)$$

*Модуль момента силы* равен:

$$M = r F \sin \alpha, \quad (2.8)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ .

Псевдовектор *момента импульса материальной точки* определяется как векторное произведение радиус-вектора  $\vec{r}$  материальной точки и вектора импульса  $\vec{p}$ :

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (2.9)$$

*Модуль момента импульса материальной точки* равен:

$$L = rp \sin(\vec{r}, \vec{p}). \quad (2.10)$$

*Уравнение динамики вращательного движения* имеет вид:

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = [\vec{r}, \vec{F}], \quad (2.11)$$

где  $I$  — момент инерции тела,  $\vec{\omega}$  — вектор угловой скорости,  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки приложения силы  $\vec{F}$ .

*Уравнение динамики вращательного движения в обобщенной форме* формулируется следующим образом: скорость изменения момента импульса системы равна моменту внешних сил:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (2.12)$$

*Момент инерции*  $I$  материальной точки массой  $m$ , находящейся на расстоянии  $R$  от оси вращения, равен:

$$I = mR^2. \quad (2.13)$$

*Момент инерции твердого тела* вычисляется по формуле:

$$I = \int_m r^2 dm = \int_V \rho(r) r^2 dV, \quad (2.14)$$

где  $dm = \rho dV$  — масса малого элемента тела, отстоящего от оси вращения на расстоянии  $r$ ,  $\rho(r)$  — зависимость плотности тела от расстояния  $r$  выделенного элемента объема  $dV$  тела до оси вращения.

*Момент инерции обруча* относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр симметрии обруча, вычисляется по формуле (2.13).

**Момент инерции диска** радиусом  $R$  относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр симметрии диска, определяется по формуле:

$$I = \frac{1}{2} mR^2, \quad (2.15)$$

где  $m$  — масса диска.

**Момент инерции стержня** длиной  $L$  относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину, можно определить по формуле:

$$I = \frac{1}{12} mL^2, \quad (2.16)$$

где  $m$  — масса стержня.

**Теорема Гюйгенса-Штейнера** позволяет определить момент инерции  $I$  тела относительно оси, не проходящей через его центр инерции:

$$I = I_o + md^2, \quad (2.17)$$

где  $I_o$  — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр инерции,  $m$  — масса тела,  $d$  — расстояние между осями.

### ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Из второго закона Ньютона для поступательного движения:  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ , следует **закон сохранения импульса**:

➤ Если система замкнута, т.е. сумма внешних сил, действующих на систему материальных точек, равна нулю, то импульс системы сохраняется:  $\vec{p}(t) = const$ ;

➤ Если система не замкнута, но проекция суммы внешних сил на некоторое направление  $OX$  равна нулю, то проекция импульса системы на это направление сохраняется:  $p_x(t) = const$ .

Из второго закона Ньютона для вращательного движения:  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ , следует **закон сохранения момента импульса системы**:

➤ Если система замкнута, т.е. сумма моментов внешних сил равна нулю, то момент импульса системы сохраняется:  $\vec{L}(t) = const$ ;

➤ Если система не замкнута, но проекция суммы моментов внешних сил на какое-либо направление  $OZ$  равна нулю, то проекция момента импульса системы на это направление сохраняется:  $L_z(t) = const$ .

**Закон сохранения момента импульса системы** тел можно записать в виде:

$$L_z = I_z \omega_z = const, \quad (2.18)$$

где  $I_z$  — момент инерции системы тел относительно оси  $OZ$ ,  $\omega_z$  — угловая скорость вращения тел системы вокруг оси  $OZ$ .

**Элементарная работа  $dA$  момента сил  $M$**  при повороте тела на угол  $d\varphi$  равна:

$$dA = Md\varphi. \quad (2.19)$$

Полная работа  $A$  момента сил  $M$  при повороте тела на угол  $\varphi_2 - \varphi_1$  равна:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi. \quad (2.20)$$

Механическая энергия системы тел  $E$  равна:

$$E = E_{\Pi} + E_K, \quad (2.21)$$

где  $E_{\Pi}$  — потенциальная энергия системы,  $E_K$  — кинетическая энергия тела, поступательно движущегося со скоростью  $V$  и вращающегося вокруг оси  $OZ$  с угловой скоростью  $\omega$ :

$$E_K = \frac{mV^2}{2} + \frac{I_z \omega^2}{2}. \quad (2.22)$$

Закон изменения механической энергии системы  $\Delta E$ :

$$\Delta E = A_{\text{внеш}} + A_{\text{некон}}, \quad (2.23)$$

где  $A_{\text{внеш}}$  — работа внешних сил, действующих на систему,  $A_{\text{некон}}$  — работа внутренних неконсервативных сил.

Из закона изменения механической энергии системы следуют **законы сохранения механической энергии системы**:

➤ Если система замкнута и в ней отсутствуют внутренние неконсервативные силы, то ее механическая энергия сохраняется, т.е.  $E(t) = \text{const}$ ;

➤ Если система не является замкнутой и консервативной, но выполняется условие:  $A_{\text{внеш}} + A_{\text{некон}} = 0$ , то ее механическая энергия сохраняется.

## ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Уравнением гармонических колебаний называют уравнение вида:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (2.24)$$

где  $A = x_{\text{max}} = \text{const} > 0$  — максимальное значение колеблющейся величины  $x$ ,

называемое **амплитудой колебаний**,  $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} = \text{const}$  — циклическая (кру-

говая) частота гармонических колебаний,  $\varphi_0$  — постоянная величина, называемая **начальной фазой колебаний**,  $T$  — **период колебаний**, равный времени полного колебания,  $\nu$  — частота колебаний, равная числу полных колебаний, совершающихся за единицу времени.

**Период гармонических колебаний  $T$  физического маятника** находится по формуле:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL_c}}, \quad (2.25)$$

где  $I$  — момент инерции физического маятника,  $m$  — его масса,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $L_c$  — расстояние от оси качания до центра инерции физического маятника.

Координаты  $X_c$  и  $Y_c$  *центра инерции* системы материальных точек находятся по формулам:

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^n X_i m_i}{m}, \quad (2.26)$$

$$Y_c = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i m_i}{m}, \quad (2.27)$$

где  $X_i$  и  $Y_i$  — координаты  $i$ -й материальной точки системы,  $m_i$  — ее масса,  $n$  — число материальных точек,  $m$  — масса системы материальных точек.

## Задания (2)

Диск или обруч массой  $m$  и радиусом  $R$  вращается с угловой скоростью  $\omega_0$ . В момент времени  $t_0 = 0$  к ободу диска (обруча) прижимают тормозную колодку с силой  $F_0$ , направленной перпендикулярно оси вращения. Коэффициент трения между диском и колодкой равен  $\mu$ .

**A 1.** Сколько оборотов сделает диск или обруч до остановки, если к нему жестко прикрепить элементы, указанные в таблице вариантов (2)?

**B 1.** Найти работу сил трения от начала торможения до остановки диска или обруча и время торможения.

**C 2.** Определить число оборотов диска от начала торможения до остановки, время торможения и работу сил трения за это время, если прижимающая сила, действующая на двустороннюю прижимную колодку, зависит от времени по закону:  $F = F_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ , где  $F_0$ ,  $\omega_0$  и  $\varphi_0$  указаны в таблице вариантов (2).

Однородный стержень массой  $m$  и длиной  $L$  может вращаться без трения в вертикальной плоскости вокруг оси, проходящей через его конец. В другой конец вертикально висящего стержня попадает летящий горизонтально со скоростью  $V$  шарик массой  $m_1$  и прилипает к нему.

**A 2.** Определить начальную угловую скорость и угол максимального отклонения стержня после попадания шарика.

**B 2.** Найти угол максимального отклонения стержня и выделившееся при ударе количество теплоты, если шарик попадает в стержень под углом  $\alpha$ . Для нечетных вариантов — шарик летит сверху, для четных — снизу.

**C 3.** К стержню жестко прикрепляют элементы, указанные в таблице вариантов (2). Определить начальную угловую скорость системы после попадания шарика в стержень под углом  $\alpha$ , количество выделившейся при ударе теплоты, угол максимального отклонения системы и период установившихся малых колебаний.

### Таблица вариантов (2)

Номер варианта  $N$  равен порядковому номеру студента в журнале группы. Различия в таблице исходных данных проставляются студентами самостоятельно. Если при подстановке численных значений не удастся получить требуемый результат, то необходимо соответствующим образом самостоятельно подобрать исходные данные, уведомив об этом преподавателя.

$N$	$m$	$R$	$\omega_0$	$F_0$	$\mu$	$\varphi_0$	ЭЛЕМЕНТЫ	$L$	$V$	$m_I$	$\alpha$
1.	$m_{0,1}$	$R_{0,2}$	$\omega_0$ 1	$F_0$ 2	$\mu$ 0,7	$\varphi_0$ 0	диск 	$L$ 0,4	$V$ 0,1	$m_I$ 0,11	$\alpha$ 45°
2.	$m_{0,2}$	$R_{0,1}$	$\omega_0$ 1	$F_0$ 2	$\mu$ 0,6	$\varphi_0$ $\frac{\pi}{2}$	обруч 	$L$ 0,2	$V$ 0,2	$m_I$ 0,22	$\alpha$ 30°
3.	$m_{0,3}$	$R_{0,2}$	$\omega_0$ 1	$F_0$ 2	$\mu$ 0,5	$\varphi_0$ $\pi$	диск 	$L$ 0,3	$V$ 0,1	$m_I$ 0,31	$\alpha$ 45°
4.	$m_{0,4}$	$R_{0,3}$	$\omega_0$ 1	$F_0$ 2	$\mu$ 0,4	$\varphi_0$ $\frac{3\pi}{2}$	обруч 	$L$ 0,4	$V$ 0,2	$m_I$ 0,41	$\alpha$ 30°
5.	$m_{0,5}$	$R_{0,4}$	$\omega_0$ 1	$F_0$ 2	$\mu$ 0,3	$\varphi_0$ $2\pi$	ДИСК 	$L$ 0,5	$V$ 0,3	$m_I$ 0,52	$\alpha$ 30°
6.	$m_{0,6}$	$R_{0,5}$	$\omega_0$ 2	$F_0$ 2,2	$\mu$ 0,7	$\varphi_0$ 0	обруч 	$L$ 0,6	$V$ 0,1	$m_I$ 0,61	$\alpha$ 45°
7.	$m_{0,7}$	$R_{0,6}$	$\omega_0$ 2	$F_0$ 2,3	$\mu$ 0,6	$\varphi_0$ $\frac{\pi}{2}$	диск 	$L$ 0,7	$V$ 0,2	$m_I$ 0,72	$\alpha$ 30°
8.	$m_{0,8}$	$R_{0,7}$	$\omega_0$ 2	$F_0$ 2,4	$\mu$ 0,5	$\varphi_0$ $\pi$	Обруч 	$L$ 0,8	$V$ 0,3	$m_I$ 0,81	$\alpha$ 30°
9.	$m_{0,9}$	$R_{0,8}$	$\omega_0$ 2	$F_0$ 2,5	$\mu$ 0,4	$\varphi_0$ $\frac{3\pi}{2}$	диск 	$L$ 1,2	$V$ 0,1	$m_I$ 0,91	$\alpha$ 45°
10.	$m_{1,0}$	$R_{0,9}$	$\omega_0$ 2	$F_0$ 2,6	$\mu$ 0,3	$\varphi_0$ $2\pi$	обруч 	$L$ 1,2	$V$ 0,2	$m_I$ 1,1	$\alpha$ 45°

11.	$m_{1,1}$	R 0,1	$\omega_0$ 1	$F_0$ 2	$\mu$ 0,7	$\varphi_0$ 0	диск 	$L$ 0,2	$V$ 0,3	$m_I$ 1,2	$\alpha$ 30°
12.	$m_{1,2}$	R 0,1	$\omega_0$ 1	$F_0$ 2	$\mu$ 0,6	$\varphi_0$ $\frac{\pi}{2}$	обруч 	$L$ 0,3	$V$ 0,1	$m_I$ 1,3	$\alpha$ 30°
13.	$m_{1,3}$	R 0,2	$\omega_0$ 1	$F_0$ 2	$\mu$ 0,5	$\varphi_0$ $\pi$	диск 	$L$ 0,4	$V$ 0,2	$m_I$ 1,4	$\alpha$ 30°
14.	$m_{1,4}$	R 0,3	$\omega_0$ 1	$F_0$ 2	$\mu$ 0,4	$\varphi_0$ $\frac{3\pi}{2}$	обруч 	$L$ 0,4	$V$ 0,3	$m_I$ 1,2	$\alpha$ 45°
15.	$m_{1,5}$	R 0,4	$\omega_0$ 1	$F_0$ 2	$\mu$ 0,3	$\varphi_0$ $2\pi$	диск 	$L$ 0,5	$V$ 0,1	$m_I$ 1,1	$\alpha$ 30°
16.	$m_{1,6}$	R 0,5	$\omega_0$ 2	$F_0$ 2,2	$\mu$ 0,7	$\varphi_0$ 0	диск 	$L$ 0,7	$V$ 0,2	$m_I$ 1,2	$\alpha$ 45°
17.	$m_{1,7}$	R 0,6	$\omega_0$ 2	$F_0$ 2,3	$\mu$ 0,7	$\varphi_0$ $\frac{\pi}{2}$	обруч 	$L$ 0,8	$V$ 0,3	$m_I$ 1,3	$\alpha$ 30°
18.	$m_{1,8}$	R 0,7	$\omega_0$ 2	$F_0$ 2,4	$\mu$ 0,6	$\varphi_0$ $\pi$	диск 	$L$ 0,9	$V$ 0,1	$m_I$ 1,2	$\alpha$ 30°
19.	$m_{1,9}$	R 0,8	$\omega_0$ 2	$F_0$ 2,5	$\mu$ 0,5	$\varphi_0$ $\frac{3\pi}{2}$	обруч 	$L$ 1,1	$V$ 0,2	$m_I$ 1,1	$\alpha$ 45°
20.	$m_{2,0}$	R 0,9	$\omega_0$ 2	$F_0$ 2,6	$\mu$ 0,4	$\varphi_0$ $2\pi$	ДИСК 	$L$ 1,2	$V$ 0,3	$m_I$ 1,0	$\alpha$ 30°

21.	$m_{2,1}$	R 0,2	$\omega_0$ 1	$F_0$ 2	$\mu$ 0,3	$\varphi_0$ 0	Обруч 	$L$ 0,5	$V$ 0,1	$m_I$ 1,1	$\alpha$ 45°
22.	$m_{2,2}$	R 0,1	$\omega_0$ 1	$F_0$ 2	$\mu$ 0,7	$\varphi_0$ $\frac{\pi}{2}$	Диск 	$L$ 0,4	$V$ 0,2	$m_I$ 1,2	$\alpha$ 45°
23.	$m_{2,3}$	R 0,2	$\omega_0$ 1	$F_0$ 2	$\mu$ 0,7	$\varphi_0$ $\pi$	Обруч 	$L$ 0,6	$V$ 0,2	$m_I$ 1,3	$\alpha$ 45°
24.	$m_{2,4}$	R 0,3	$\omega_0$ 1	$F_0$ 2	$\mu$ 0,6	$\varphi_0$ $\frac{3\pi}{2}$	диск 	$L$ 0,5	$V$ 0,3	$m_I$ 1,4	$\alpha$ 45°
25.	$m_{2,5}$	R 0,4	$\omega_0$ 1	$F_0$ 2	$\mu$ 0,5	$\varphi_0$ $2\pi$	обруч 	$L$ 0,6	$V$ 0,1	$m_I$ 1,5	$\alpha$ 45°
26.	$m_{2,6}$	R 0,5	$\omega_0$ 2	$F_0$ 2,2	$\mu$ 0,7	$\varphi_0$ 0	диск 	$L$ 0,7	$V$ 0,2	$m_I$ 1,6	$\alpha$ 30°
27.	$m_{2,7}$	R 0,6	$\omega_0$ 2	$F_0$ 2,3	$\mu$ 0,6	$\varphi_0$ $\frac{\pi}{2}$	обруч 	$L$ 0,9	$V$ 0,3	$m_I$ 1,7	$\alpha$ 30°
28.	$m_{2,8}$	R 0,7	$\omega_0$ 2	$F_0$ 2,4	$\mu$ 0,5	$\varphi_0$ $\pi$	диск 	$L$ 1,1	$V$ 0,1	$m_I$ 1,8	$\alpha$ 30°
29.	$m_{2,9}$	R 0,8	$\omega_0$ 2	$F_0$ 2,5	$\mu$ 0,4	$\varphi_0$ $\frac{3\pi}{2}$	 обруч	$L$ 1,2	$V$ 0,2	$m_I$ 1,9	$\alpha$ 45°
30.	$m_{3,0}$	R 0,9	$\omega_0$ 2	$F_0$ 2,6	$\mu$ 0,3	$\varphi_0$ $2\pi$	диск 	$L$ 1,2	$V$ 0,3	$m_I$ 1,0	$\alpha$ 30°

## Примеры (2)

### ПРИМЕР 2.1

Диск массой  $m$  и радиусом  $R$  вращается с угловой скоростью  $\omega_0$ . В момент времени  $t_0 = 0$  к ободу диска прижимают тормозную колодку с силой  $\vec{F}_0$ , направленной перпендикулярно оси вращения. Коэффициент трения между диском и колодкой равен  $\mu$ .

**А 1.** Сколько оборотов сделает диск до остановки, если вещество, из которого изготовлен диск, распределено по нему равномерно?

*Решение примера 2.1.* Замедление скорости вращения происходит под действием силы трения. Поэтому уравнение вращательного движения тела с моментом инерции  $I$  относительно оси  $OZ$  выглядит следующим образом:

$$I \frac{d\omega}{dt} = -RF_{mp} \sin \frac{\pi}{2},$$

где  $F_{mp}$  — сила трения,  $R$  — радиус диска. Знак “минус” указывает на то, что направления вектора угловой скорости и момента силы трения противоположны. Сила трения пропорциональна прижимающей силе:  $F_{mp} = \mu F$ . Следовательно, уравнение вращательного движения диска переписывается в виде:

$$I \frac{d\omega}{dt} = -R\mu F.$$

Разделяя переменные и интегрируя последнее уравнение, получим:

$$\omega(t) = -\frac{R\mu F}{I}t + C.$$

Учитывая начальное условие:  $\omega(0) = \omega_0$ , находим, что  $C = \omega_0$ . Следовательно, угловая скорость зависит от времени по закону:

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{R\mu F}{I}t.$$

Зависимость от времени  $t$  угла поворота  $\varphi$  получим, разделяя переменные в выражении:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - \frac{R\mu F}{I}t.$$

После интегрирования, получим:

$$\varphi(t) = \omega_0 t - \frac{R\mu F}{2I}t^2 + C'.$$

С учетом начального условия:  $\varphi(0) = \varphi_0$ , находим, что  $C' = \varphi_0$ . Следовательно, угол поворота зависит от времени по закону:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t - \frac{R\mu F}{2I}t^2,$$

где  $\varphi_0$  — значение угла в начальный момент времени.

Время  $\tau$  до остановки диска определяем из условия равенства угловой скорости нулю:

$$0 = \omega_0 - \frac{R\mu F}{I} \tau,$$

откуда находим, что

$$\tau = \frac{\omega_0 I}{R\mu F}.$$

Число оборотов диска  $n$  до остановки определяется из выражения:

$$n = \left( \omega_0 \tau - \frac{R\mu F}{2I} \tau^2 \right) / 2\pi,$$

где  $I$  — момент инерции однородного диска. Кроме того, здесь учтено, что в данном случае  $\varphi_0 = \theta$ .

### ПРИМЕР 2.2

Однородный стержень массой  $m$  и длиной  $L$  может вращаться без трения в вертикальной плоскости вокруг оси, проходящей через его конец. В другой конец вертикально висящего стержня попадает летящий горизонтально со скоростью  $\vec{V}$  шарик массой  $m_1$  и прилипает к нему.

**А 2.** Определить начальную угловую скорость и угол максимального отклонения стержня после попадания шарика.

*Решение примера 2.2.* В данной ситуации происходит неупругое взаимодействие шарика и стержня. Время взаимодействия относительно мало, следовательно, закон сохранения момента импульса можно считать выполняющимся с достаточной степенью точности. Из закона сохранения момента импульса:

$$m_1 V_1 L = I_2 \omega_2,$$

следует, что начальная угловая скорость  $\omega_2$  стержня с шариком может быть найдена из уравнения:

$$\omega_2 = \frac{m_1 V_1 L}{I_2}$$

где  $I_2 = \frac{1}{3} m L^2 + m_1 L^2$  — момент инерции стержня с шариком относительно оси вращения, определяемый в соответствии с теоремой Гюйгенса-Штейнера.

Угол  $\beta$  отклонения стержня с шариком найдем, применив закон сохранения механической энергии

$$\frac{I_2 \omega_2^2}{2} = (m + m_1) g \Delta h_c,$$

и дополнительные соотношения:

$$\begin{cases} \Delta h_c = r_c (1 - \cos \beta), \\ r_c = \frac{\frac{L}{2} m + L m_1}{m + m_1}, \end{cases}$$

где  $\Delta h_c$  — высота подъема центра инерции стержня с шариком при отклонении на угол  $\beta$ , а  $r_c$  — расстояние от оси вращения до центра инерции стержня с шариком, определяемое по формуле (2. 27).

### ТЕМА (3): «Молекулярная физика и термодинамика»

#### Информационный блок (3)

Уравнения состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона):

$$pV = \frac{m}{M}RT = \nu RT,$$

где  $m$  — масса газа;  $M$  — молярная масса газа;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $\nu$  — количество вещества;  $T$  — термодинамическая температура.

Закон Дальтона для давления смеси газов:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n,$$

где  $p_i$  — парциальное давление  $i$ -го компонента смеси;  $i=1, 2, 3, \dots, n$ ;  $n$  — число компонентов.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории:

$$p = nkT,$$

где  $n = \frac{N}{V}$  — концентрация, численно равная количеству частиц в единице объёма;

$k = \frac{R}{N_A}$  — постоянная Больцмана,  $N_A$  — число Авогадро.

Молярная масса смеси газов

$$M = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n},$$

где  $m_i$  — масса  $i$ -го компонента смеси;  $\nu_i = \frac{m_i}{M_i}$  — количество вещества  $i$ -го компонента смеси;  $n$  — число компонентов смеси.

Первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A,$$

где  $Q$  — теплота, сообщенная системе;  $\Delta U$  — изменение внутренней энергии системы;  $A$  — работа, совершаемая системой против внешних сил.

Внутренняя энергия идеального газа:

$$U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT,$$

где  $i$  — число степеней свободы молекулы идеального газа.

Работа расширения газа:

в общем случае	при изобарном процессе	при изотермическом процессе	при адиабатном процессе
$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$	$A = p(V_2 - V_1)$	$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$	$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{M} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]$

Показатель адиабаты  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  равен отношению теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме.

Удельные теплоемкости газа при постоянном объеме  $c_v$  и постоянном давлении  $c_p$  определяются по формулам:

$$c_v = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{M}, \quad c_p = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{R}{M},$$

где  $i$  — число степеней свободы молекулы,  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $M$  — молярная масса газа.

Различные формы уравнения Пуассона  $pV^\gamma = const$ , связывающего параметры идеального газа при адиабатном процессе, выглядят следующим образом:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Термический КПД цикла:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где  $Q_1$  — количество теплоты, полученное рабочим телом тепловой машины от теплоотдатчика;  $Q_2$  — количество теплоты, переданное рабочим телом теплоприемнику.

Термический КПД цикла Карно вычисляется по формуле:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где  $T_1$  — термодинамическая температура теплоотдатчика;  $T_2$  — термодинамическая температура теплоприемника.

Распределение Больцмана:

$$n_h = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right),$$

где  $n_0$  — концентрация молекул при  $h=0$ ,  $n_h$  — концентрация молекул на высоте  $h$ ,  $m$  — масса молекулы,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура,  $M$  — молярная масса газа,  $R$  — универсальная газовая постоянная.

Наиболее вероятная скорость:

$$V_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_M}} = \sqrt{2 \frac{RT}{M}}.$$

Средняя арифметическая скорость:

$$\langle V \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_M}} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{RT}{M}}.$$

Средняя квадратичная скорость:

$$\langle V_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_M}} = \sqrt{3 \frac{RT}{M}}.$$

Вероятность  $dP_V$  того, что скорость молекулы окажется в пределах от  $V$  до  $V + dV$  равна:

$$dP_V = 4\pi V^2 f(V) dV,$$

где  $f(V)$  — плотность распределения Максвелла молекул по скоростям:

$$f(V) = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{mV^2}{kT} \right).$$

С другой стороны, вероятность  $dP_V$  можно выразить в виде отношения:

$$dP_V = \frac{dN_V}{N},$$

где  $dN_V$  — число молекул, значения скоростей которых находится в пределах от  $V$  до  $V + dV$ ,  $N$  — общее число молекул.

### Задания (3)

В цилиндре под поршнем массой  $m$  и площадью основания  $S$  находится идеальный газ массой  $m_1$  под давлением  $p_1$  в объеме  $V_1$  при температуре  $T_1$ . Характеристики газа приведены в таблице вариантов (3).

**A 1.** Определить давление  $p_1$  и неизвестную величину из таблицы вариантов (3).

К цилиндру с помощью трубки с медленно открывающимся краном присоединяют баллон объемом  $V_2$  с другим газом массой  $m_2$ , находящимся под давлением  $p_2$  при той же температуре.

**B 1.** Определить молярную массу и давление смеси

После выравнивания концентрации смеси газов, кран в трубке, соединяющей цилиндр и баллон закрывают. Смесь газов в цилиндре нагревают при постоянном давлении до объема  $V_3$ , а затем при постоянном объеме до давления  $p_3$ .

**A 2.** Найти теплоту  $Q$ , переданную газу. Какая часть молекул газа обладает скоростями, значения которых превышают наиболее вероятную скорость при давлении  $p_3$ ?

На поршень цилиндра медленно высыплют песок массой  $\Delta m$  и нагревают смесь газов до температуры  $T_4$ , в результате чего поршень оказался на высоте  $h$  относительно первоначального положения. Атмосферное давление считать нормальным.

**C 1.** Определить высоту  $h$  и построить график всех процессов, происходящих со смесью газов.

Примем, что поле силы тяжести, температура и молярная масса воздуха с высотой не изменяется. Давление воздуха на поверхности Земли считаем нормальным.

**A 3.** Определить давление воздуха на высоте  $N$  км.

**B 2.** На какой высоте давление уменьшится в  $N + 1$  раз?

### Таблица вариантов (3)

Номер варианта  $N$  равен порядковому номеру студента в журнале группы. Размерности в таблице исходных данных проставляются студентами самостоятельно. Если при подстановке численных значений не удастся получить требуемый результат, то необходимо соответствующим образом самостоятельно подобрать исходные данные, уведомив об этом преподавателя.

$N$	$m$ кг	$S$ $M^2$	1-й газ	$m_1$ кг	$V_1$ л	$T_1$ К	2-й газ	$V_2$ $M^3$	$m_2$ кг	$P_2$ Па	$V_3$ $M^3$	$P_3$ Па	$\Delta m$ кг	$T_4$ К
1	10	0,1	$O_2$	?	3000	273	$C_2$	0,12	0,1	130970,3	0,22	392910,8	5	373
2	20	0,11	$H_2$	0,521	?	275	$Ne$	0,13	0,2	145316,6	0,24	435949,9	10	375
3	30	0,12	$He$	0,755	2800	?	$Ar$	0,14	0,3	96700,41	0,26	290101,2	15	?
4	40	0,13	$Ar$	?	2700	279	$N_2$	0,15	0,4	115887,3	0,28	347662	20	379
5	50	0,14	$N_2$	1,163	?	281	$He$	0,16	0,5	502523	0,3	1507569	30	381
6	60	0,15	$Ne$	1,338	2500	?	$H_2$	0,17	0,6	941679,1	0,32	2825037	20	?
7	70	0,16	$C_2$	?	2400	285	$O_2$	0,18	0,7	106121,3	0,34	318364	30	385
8	80	0,17	$O_2$	1,629	?	287	$H_2$	0,19	0,8	921572,7	0,36	2764718	40	387
9	90	0,18	$H_2$	1,746	2200	?	$O_2$	0,2	0,9	105476,6	0,38	316429,7	50	?
10	100	0,19	$He$	?	2100	291	$C_2$	0,21	1	123055,3	0,4	369165,9	50	391
11	110	0,2	$N_2$	1,922	?	293	$Ne$	0,22	1,1	136896,5	0,42	410689,6	60	393
12	120	0,21	$Ne$	1,982	1900	?	$Ar$	0,23	1,2	94337,77	0,44	283013,3	60	?
13	130	0,22	$Ar$	?	1800	297	$N_2$	0,24	1,3	112276,1	0,46	336828,4	70	397
14	140	0,23	$C_2$	2,049	?	299	$He$	0,25	1,4	470734,8	0,48	1412204	70	399
15	150	0,24	$O_2$	2,055	1600	?	$N_2$	0,26	1,5	112070,3	0,5	336211	70	?
16	160	0,25	$H_2$	?	1500	303	$He$	0,27	1,6	468323,1	0,52	1404969	80	403
17	170	0,26	$He$	2,017	?	305	$C_2$	0,28	1,7	121854,7	0,54	365564,1	80	405
18	180	0,27	$N_2$	1,972	1300	?	$Ne$	0,29	1,8	135627,8	0,56	406883,4	80	?
19	190	0,28	$C_2$	?	1200	309	$Ar$	0,3	1,9	94261,82	0,58	282785,5	80	409
20	200	0,29	$Ar$	1,834	?	311	$N_2$	0,31	2	112011,1	0,6	336033,4	90	411
21	210	0,3	$Ne$	1,741	1000	?	$He$	0,32	2,1	465939,3	0,62	1397818	90	?
22	220	0,31	$O_2$	?	900	315	$H_2$	0,33	2,2	878717	0,64	2636151	90	415
23	230	0,32	$H_2$	1,509	?	317	$O_2$	0,34	2,3	104823,3	0,66	314469,9	90	417
24	240	0,33	$He$	1,370	700	?	$H_2$	0,35	2,4	879285,6	0,68	2637857	100	?

25	250	0,34	$N_2$	?	600	321	$O_2$	0,36	2,5	105004,1	0,7	315012,2	100	421
26	260	0,35	$Ar$	1,048	?	323	$C_2$	0,37	2,6	136132,1	0,72	408396,2	100	423
27	270	0,36	$Ne$	0,866	400	?	$Ar$	0,38	2,7	122475,5	0,74	367426,6	100	?
28	280	0,37	$C_2$	?	300	327	$Ne$	0,39	2,8	94974,2	0,76	284922,6	120	427
29	290	0,38	$Ne$	0,460	?	329	$N_2$	0,4	2,9	112883,8	0,78	338651,3	140	429
30	300	0,39	$C_2$	0,236	100	?	$He$	0,41	3	469590,4	0,8	1408771	150	?

### Примеры (3)

#### **ПРИМЕР 3.1**

В баллоне объемом 26,2 л содержится кислород массой 80 г при температуре 300 К.

**А 1.** Определить давление кислорода в баллоне, считая его идеальным газом.

**Решение примера 3.1.** Поскольку газ считается идеальным, то запишем уравнение Менделеева-Клапейрона, которое является уравнением состояния идеального газа:  $p_1 V_1 = \frac{m_1}{M_1} RT_1$ . Из этого уравнения получим искомое выражение:

$$p_1 = \frac{m_1}{M_1} \cdot \frac{RT_1}{V_1}.$$

Произведем вычисления, учитывая, что молярная масса кислорода  $M_1 = 2 \times 16 \cdot 10^{-3}$  кг/моль, а его объем  $V_1 = 0,0262$  м<sup>3</sup>. Давление  $p_1$  газа равно

$$p_1 = \frac{m_1}{M_1} \cdot \frac{RT_1}{V_1} = \frac{0,08}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{8,31 \cdot 300}{0,0262} = 100524 \text{ Па}.$$

#### **ПРИМЕР 3.2**

Кислород массой  $m_1=2$  кг занимает объем  $V_1=1000$  л и находится под давлением  $p_1=0,2$  МПа. Сначала газ был нагрет при постоянном давлении до объема  $V_2=3000$  л, а затем при постоянном объеме до давления  $p_3=0,5$  МПа.

**А 2.** Найти изменение  $\Delta U$  внутренней энергии газа, совершенную работу  $A$  и теплоту  $Q$ , переданную газу. Построить график процессов. Какая часть молекул газа обладает скоростями, значения которых превышают наиболее вероятную скорость при температуре  $T_1$ ?

**Решение примера 3.2.** Внутренняя энергия газа находится по формуле:

$$U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT,$$

где  $i$  — число степеней свободы молекул идеального газа,  $R$  — универсальная газовая постоянная. Для одноатомной молекулы  $i=3$ , для двухатомной —  $i=5$ . Изменение внутренней энергии газа запишется следующим образом:

$$\Delta U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R \Delta T,$$

где  $\Delta T = T_3 - T_1$  — разность температур в конечном и начальном состояниях.

Значения температуры в начальном и конечном состояниях определим из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M} RT.$$

Выражая из последнего уравнения температуру  $T$ , получим

$$T = \frac{pVM}{mR}.$$

Если при изменении температуры и объема, масса и давление газа остаются постоянными, то процесс называется изобарным. В случае изобарного процесса работа вычисляется по формуле  $A_1 = p_1(V_2 - V_1)$ .

Работа газа, нагреваемого при постоянном объеме, равна нулю:

$$A_2 = 0.$$

Тогда полная работа, выполняемая газом, равна

$$A = A_1 + A_2 = A_1 = p_1(V_2 - V_1).$$

В соответствии с первым началом термодинамики, количество теплоты  $Q$ , переданное газу, равно сумме изменения  $\Delta U$  внутренней энергии и работы  $A$ :

$$Q = \Delta U + A.$$

Подставляя численные значения в расчетные формулы, получим:

$$T_1 = \frac{p_1 V_1 M}{mR} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8,31} = 385 \text{ K};$$

$$T_2 = \frac{p_1 V_2 M}{mR} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8,31} = 1155 \text{ K};$$

$$T_3 = \frac{p_3 V_2 M}{mR} = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8,31} = 2887 \text{ K};$$

$$A = A_1 = 0,2 \cdot 10^6 (3 - 1) = 0,4 \text{ МДж};$$

$$\Delta U = \frac{2}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,31 (2887 - 385) = 3,24 \text{ МДж};$$

$$Q = \Delta U + A = 3,24 + 0,4 = 3,64 \text{ МДж}.$$

Здесь учтено, что молекулы кислорода являются двухатомными. Поэтому относительная молярная масса кислорода равна 32, а число степеней свободы молекулы  $i=5$ .

График процесса приведен на рисунке 3.2. На этом же рисунке показана работа, совершенная газом.

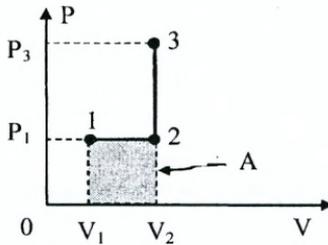


Рис. 3.2

Вероятность  $dP_V$  того, что скорость молекулы окажется в пределах от  $V$  до  $V + dV$  равна:

$$dP_V = 4\pi V^2 f(V) dV,$$

где  $f(V)$  — плотность распределения Максвелла молекул по скоростям:

$$f(V) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mV^2}{kT}\right).$$

С другой стороны, вероятность  $dP_V$  того, что скорость молекулы окажется в пределах от  $V$  до  $V + dV$ , можно записать в виде отношения:

$$dP_V = \frac{dN_V}{N},$$

где  $dN_V$  — число молекул, значения скоростей которых находится в пределах от  $V$  до  $V + dV$ ,  $N$  — общее число молекул. Следовательно, вероятность  $dP_V$  переписывается в виде

$$\frac{dN_V}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} V^2 \exp\left(-\frac{mV^2}{kT}\right) dV,$$

а искомое число  $N_V$  молекул, скорости которых превышают наиболее вероятную скорость, найдем при помощи интеграла:

$$N_V = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} N \int_{V_1}^{V_2} V^2 \exp\left(-\frac{mV^2}{kT}\right) dV.$$

Введя обозначение

$$u = \frac{V}{V_{\text{вер}}},$$

выражение для вероятности  $dP_V$  того, что скорость молекулы окажется в пределах от  $V$  до  $V + dV$ , можно переписать в более простой форме:

$$\frac{dN_V}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2} du.$$

Тогда искомая часть молекул, значение скорости которых превышает наиболее вероятную скорость, выразится через интеграл

$$\frac{N_V}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} u^2 e^{-u^2} du.$$

Здесь учтено, что  $u$  равна 1 при  $V_1 = V_{вер}$ , а  $V_2 = \infty$ .

Для того, чтобы избежать математических трудностей, связанных с вычислением несобственного интеграла, воспользуемся тем очевидным фактом, что скорости всех молекул лежат в интервале от 0 до  $\infty$ . Тогда очевидно, что

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u^2 e^{-u^2} du = 1.$$

Последнее выражение можно переписать в виде

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 u^2 e^{-u^2} du + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} u^2 e^{-u^2} du = 1$$

или

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 u^2 e^{-u^2} du + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} u^2 e^{-u^2} du = 1.$$

Тогда, с учетом обозначений, введенных выше, получим что

$$\frac{N_V}{N} = 1 - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 u^2 e^{-u^2} du.$$

Так как полученный интеграл не относится к элементарным, то можно воспользоваться методом приближенного вычисления, раскладывая подынтегральную функцию  $u^2 e^{-u^2}$  в известный из курса высшей математики ряд Маклорена:

$$e^{-u^2} = 1 - \frac{u^2}{1} + \frac{(u^2)^2}{2!} - \frac{(u^2)^3}{3!} + \frac{(u^2)^4}{4!} - \dots$$

Тогда

$$u^2 e^{-u^2} = u^2 - \frac{u^4}{1} + \frac{u^6}{4} - \frac{u^8}{6} + \frac{u^{10}}{24} - \dots$$

Проводя теперь почленно элементарное интегрирование, легко определяем, что искомая часть молекул, значения скоростей которых превышают наиболее вероятную скорость, равна:

$$\frac{N_V}{N} = 1 - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{14} - \frac{1}{54} + \frac{1}{264} \right) = 0,571.$$

### ПРИМЕР 3.3

Идеальный газ находится в высоком вертикальном цилиндрическом сосуде высотой  $H$  в однородном поле силы тяжести. Считать, что температура и молярная масса воздуха с высотой не изменяются. Давление на поверхности Земли равно  $p_0$ .

**А 3.** Определить давление воздуха на высоте  $H$ .

*Решение примера 3.3.*

Рассмотрим на высоте  $h$  слой воздуха толщиной  $dh$ . Разность давлений между верхней и нижней границей слоя пропорциональна его толщине:

$$dp = -\rho g dh,$$

где  $\rho$  — плотность воздуха,  $g$  — ускорение силы тяжести. Знак «-» показывает, что давление воздуха уменьшается с ростом высоты над поверхностью Земли.

Плотность воздуха определим при помощи уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{M} RT,$$

откуда получаем, что

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}.$$

Разность давлений между верхней и нижней границей слоя воздуха запишется в виде:

$$dp = -\frac{pMg}{RT} dh.$$

Разделяя переменные и проводя интегрирование по  $h$  от 0 до  $H$ , найдем, что

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT} h}.$$

Подставляя в полученную формулу числовые данные, найдем искомое значение давления.

## ТЕМА (4): «Электростатика»

### Информационный блок (4)

Закон Кулона позволяет рассчитать величину силы взаимодействия  $F$  между двумя точечными зарядами  $q_1$  и  $q_2$ , находящимися на расстоянии  $r_{12}$ :

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$

где  $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Нм}^2}{\text{Кл}^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  — коэффициент пропорциональности. Величина

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м называется электрической постоянной. Сила взаимодействия направлена вдоль линии, соединяющей заряды. Одноименные заряды — отталкиваются, разноименные — притягиваются.

В векторной форме закон Кулона выглядит следующим образом:

$$\vec{F}_{12} = -k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}},$$

где  $\vec{r}_{12}$  — вектор, проведенный от заряда  $q_1$  к заряду  $q_2$ ,  $r_{12}$  — модуль вектора  $\vec{r}_{12}$ .

Напряженность электрического поля равна отношению силы, действующей на заряд, к величине заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Напряженность электрического поля численно равна силе, действующей на единичный положительный заряд. Напряженность является силовой характеристикой электрического поля. Вектор напряженности электрического поля направлен вдоль касательной к силовой линии в данной точке.

Напряженность электрического поля точечного заряда  $q$  вычисляется по формуле:

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

где  $\vec{r}$  — вектор, проведенный от заряда  $q$  к точке наблюдения,  $r$  — модуль вектора  $\vec{r}$ .

Потенциал электрического поля в данной точке равен отношению к величине заряда  $q$  потенциальной энергии  $W$  взаимодействия с электрическим полем заряда, помещенного в данную точку:

$$\varphi = \frac{W}{q}.$$

Потенциал электрического поля в данной точке численно равен потенциальной энергии помещенного в данную точку единичного положительного заряда. Совокупность точек с одинаковым потенциалом называется эквипотенциальной поверхностью. Величина потенциала вдоль эквипотенциальной поверхности остается постоянной.

Потенциал электрического поля точечного заряда  $q$  вычисляется по формуле:

$$\varphi = k \frac{q}{r},$$

где  $r$  — расстояние от заряда  $q$  до точки наблюдения.

Между напряженностью электрического поля и его потенциалом существует соотношение:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi,$$

где  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$  — дифференциальный оператор,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы, направленные вдоль осей  $OX, OY$  и  $OZ$ .

Разность потенциалов между точками 1 и 2 пространства равна криволинейному интегралу от скалярного произведения вектора напряженности  $\vec{E}$  электрического поля и элемента длины  $d\vec{L}$  линии, вычисленного вдоль произвольной линии, проведенной от точки 1 до точки 2:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{L}.$$

Циркуляция напряженности электрического поля вычисляется как криволинейный интеграл вдоль некоторого замкнутого контура  $L$  от скалярного произведения вектора напряженности  $\vec{E}$  электрического поля и элемента длины  $d\vec{L}$  контура:

$$C = \oint_L \vec{E} d\vec{L}.$$

Циркуляция напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю.

Закон сохранения электрического заряда: в замкнутой системе зарядов их алгебраическая сумма не изменяется.

Емкость  $C$  уединенного проводника определяется отношением сообщенного проводнику заряда  $dq$ , к вызванному этим зарядом изменению потенциала  $d\varphi$ :

$$C = \frac{dq}{d\varphi}.$$

Емкость плоского конденсатора вычисляется по формуле:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

где  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость диэлектрика между обкладками конденсатора,  $S$  — площадь обкладок конденсатора,  $d$  — расстояние между обкладками конденсатора.

Емкость батареи конденсаторов при параллельном соединении равна сумме емкостей отдельных конденсаторов:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n,$$

где  $n$  — число конденсаторов в соединении.

Емкость батареи конденсаторов при последовательном соединении определяется из выражения:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}.$$

#### Задания (4)

В точках  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$  закреплены два заряда  $q_1$  и  $q_2$ , соответственно.

**A 1.** Найти положение точки  $C(x_3, y_3)$ , в которой напряженность суммарного электростатического поля зарядов  $q_1$  и  $q_2$  равна нулю.

В точке  $C(x_3, y_3)$  закрепляется точечный заряд  $q_3$ , а в точку  $D(x_4, y_4)$  помещается незакрепленный точечный заряд  $q_4$ . Точка  $D(x_4, y_4)$  находится на одинаковом расстоянии от точек  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$ , в  $k+1$  раз большем расстоянии  $AB$  между ними. Масса заряда  $q_4$  равна  $m$ .

**B 1.** Определить ускорение заряда  $q_4$  в начальный момент времени.

Контур  $L_1$ , в виде квадрата со стороной  $a$ , размещают так, чтобы заряд  $q_1$  оказался на пересечении диагоналей квадрата.

**A 2.** Найти разность потенциалов между ближайшими вершинами квадрата.

**B 2.** Показать, что циркуляция вектора напряженности электростатического поля заряда  $q_1$ , вычисленная вдоль контура  $L_1$ , равна нулю.

Контур  $L_2$ , в виде прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$ , размещают так, чтобы заряд  $q_2$  оказался на пересечении диагоналей прямоугольника.

**B 3.** Определить разность потенциалов между противоположными вершинами прямоугольника и работу по перемещению заряда  $q_5$  из одной вершины в другую, противоположную ей.

Контур  $L_3$ , в виде равностороннего треугольника со стороной  $a$ , размещают так, чтобы заряд  $q_3$  оказался на пересечении медиан треугольника.

**C 1.** Показать, что разности потенциалов между любыми двумя точками контура в прямом и обратном направлении равны по модулю и противоположны по знаку.

Тонкий равномерно заряженный стержень длиной  $L$  размещают так, чтобы заряд  $q_1$  находился на оси, проходящей вдоль стержня. Эта ось не должна проходить через заряды  $q_2$  и  $q_3$ .

**A 3.** Найти силу, с которой стержень действует на заряд  $q_1$ .

**B 4.** Определить силу, с которой стержень действует на заряд  $q_2$ .

**C 2.** Найти силу, с которой заряды  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$  действуют на стержень.

### Таблица вариантов (4)

N	x <sub>1</sub>	y <sub>1</sub>	q <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y <sub>2</sub>	q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub>	q <sub>4</sub>	m	a	b	q <sub>5</sub>	L

Номер варианта  $N$  равен порядковому номеру студента в журнале группы. Размеры в таблице исходных данных проставляются студентами самостоятельно. Если при подстановке численных значений не удастся получить требуемый результат, то необходимо соответствующим образом самостоятельно подобрать исходные данные, уведомив об этом преподавателя.

### Примеры (4)

#### **ПРИМЕР 4.1**

В точках  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$  закреплены два заряда  $q_1$  и  $q_2$ , соответственно.

**А 1.** Определить положение точки  $C(x_3, y_3)$ , в которой напряженность суммарного электростатического поля зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , равна нулю.

#### **Решение примера 4.1.**

Рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 4.1.

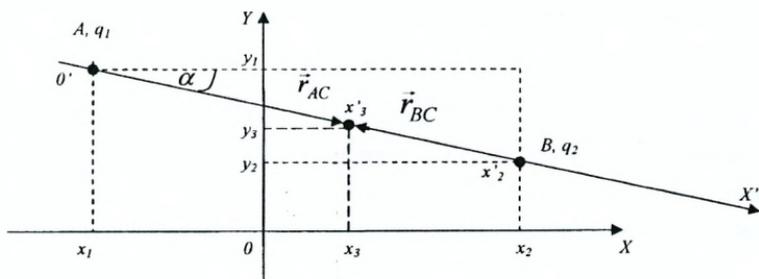


Рис. 4.1.

Вектор напряженности  $\vec{E}_1$  электростатического поля, создаваемого в точке  $C(x_3, y_3)$  точечным зарядом  $q_1$ , находящимся в точке  $A(x_1, y_1)$ , определяется следующим образом:

$$\vec{E}_1 = k \frac{q_1}{r_{AC}^2} \frac{\vec{r}_{AC}}{r_{AC}},$$

где  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ,  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\vec{r}_{AC}$  — вектор, проведенный от точки  $A(x_1, y_1)$  до точки  $C(x_3, y_3)$ ,  $r_{AC} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$  — его модуль. Так как вектор  $\vec{r}_{AC}$  можно представить в виде:

$$\vec{r}_{AC} = (x_3 - x_1)\vec{i} + (y_3 - y_1)\vec{j},$$

где  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  — единичные векторы, направленные вдоль осей ОХ и ОУ, соответственно, то зависимость от координат вектора напряженности  $\vec{E}_1$  электрического поля, создаваемого зарядом  $q_1$ , запишется следующим образом:

$$\vec{E}_1 = kq_1 \frac{(x_3 - x_1)\vec{i} + (y_3 - y_1)\vec{j}}{\left[ (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Вектор напряженности  $\vec{E}_2$  электростатического поля, создаваемого в точке  $C(x_3, y_3)$  точечным зарядом  $q_2$ , находящимся в точке  $B(x_2, y_2)$ , определяется аналогично:

$$\vec{E}_2 = kq_2 \frac{(x_3 - x_2)\vec{i} + (y_3 - y_2)\vec{j}}{\left[ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}.$$

По условию задачи, в точке  $C(x_3, y_3)$  должно выполняться соотношение:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0.$$

Для этого необходимо, чтобы вектора  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  были равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Приравнявая почленно значения проекций векторов  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  на оси координат, получим систему уравнений, решение которой позволяет определить неизвестные координаты точки  $C(x_3, y_3)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{q_1(x_3 - x_1)}{\left[ (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{q_2(x_3 - x_2)}{\left[ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = 0, \\ \frac{q_1(y_3 - y_1)}{\left[ (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{q_2(y_3 - y_2)}{\left[ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = 0. \end{array} \right.$$

Решение данной системы уравнений существенно упростится, если перейти в систему координат  $O'X'$ , показанную на рис. 4.1. В новой системе координат система уравнений сводится к одному уравнению:

$$\frac{q_1}{x_3'^2} = \frac{q_2}{(x_3' - x_2')^2},$$

где  $x_3'$  и  $x_2'$  — новые координаты точек С и В, соответственно. Одно из решений этого уравнения даст следующее значение координаты  $x_3'$ :

$$x_3' = \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}} x_2'.$$

Координата  $x_2'$  равна расстоянию между точками  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$ :

$$x_2' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Обратный переход осуществляется по формулам, определяемым из рис. 4.1:

$$x_3 = x_1 + x_3' \cos \alpha,$$

$$y_3 = y_1 - x_3' \sin \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{x_2'}.$$

#### ПРИМЕР 4.2

Контур  $L_1$ , в виде квадрата со стороной  $a$ , размещают так, чтобы заряд  $q_1$  оказался на пересечении диагоналей квадрата, а его стороны располагают параллельно осям координат.

**А 2.** Найти разность потенциалов между ближайшими вершинами квадрата, расположенными вдоль оси  $OX$ .

*Решение примера 4.2.*

Разность потенциалов  $\varphi_2 - \varphi_1$  между любыми точками, лежащими на кривой  $L$ , по определению равна криволинейному интегралу вдоль кривой  $L$  от скалярного произведения вектора напряженности  $\vec{E}$  электрического поля и элемента длины  $d\vec{L}$  контура:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_L \vec{E} d\vec{L}.$$

Расположим систему координат так, чтобы заряд  $q_1$  находился в начале координат. Тогда вектор напряженности электростатического поля точечного заряда  $q_1$  запишется следующим образом:

$$\vec{E}_1 = kq_1 \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\left[x^2 + y^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Так как вершины квадрата расположены вдоль оси  $Ox$ , то вектор  $d\vec{L}$  элемента длины контура в данном случае равен:

$$d\vec{L} = dx\vec{i}.$$

Скалярное произведение  $\vec{E}d\vec{L}$  запишется в виде:

$$\vec{E}d\vec{L} = kq_1 \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\left[x^2 + y^2\right]^{\frac{3}{2}}} \cdot dx\vec{i} = kq_1 \frac{xdx}{\left[x^2 + y^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Здесь учтено, что скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  равно нулю.

Таким образом, разность потенциалов запишется в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 &= kq_1 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{xdx}{\left[x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{kq_1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dx^2}{\left[x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{kq_1}{2} \frac{\frac{a}{2} \left[ x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} d \left[ x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right]}{-\frac{3}{2} + 1} \Bigg|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \\ &= -kq_1 \frac{l}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} \Bigg|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = -kq_1 \left( \frac{l}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} - \frac{l}{\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} \right) = 0. \end{aligned}$$

### ПРИМЕР 4.3

Тонкий равномерно заряженный стержень длиной  $L$  размещают так, чтобы заряд  $q_1$  находился на оси, проходящей вдоль стержня на расстоянии  $a$  от одного из его концов. Общий заряд стержня равен  $q_1$ .

**А 3.** Найти силу, с которой стержень действует на заряд  $q_1$ .

*Решение примера 4.3.*

Для нахождения силы взаимодействия точечного заряда  $q_1$  и стержня с таким же по величине зарядом нельзя непосредственно воспользоваться законом Кулона, применимым только к взаимодействию точечных зарядов. Поэтому выделим на стержне достаточно малый участок длиной  $dx$  и зарядом  $dq = \tau \cdot dx$ , где  $\tau = \frac{dq}{L} = \frac{q_1}{L}$  — линейная плотность распределения заряда по стержню.

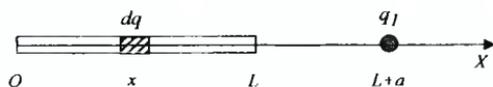


Рис. 4.2

Если заряд  $dq$  достаточно мал, то его можно рассматривать как точечный. Поэтому, для нахождения силы взаимодействия двух точечных зарядов  $dq$  и  $q_1$  правомерно применение закона Кулона:

$$dF = \frac{\tau q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dx}{(L+a-x)^2},$$

где  $(L+a-x)$  — расстояние между зарядами  $dq$  и  $q_1$ .

Интегрируя это выражение в пределах от 0 до  $L$ , получим выражение для силы, с которой стержень действует на заряд  $q_1$ :

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\tau q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_0^L \frac{dx}{(L+a-x)^2} = \frac{\tau q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_0^L \frac{d(L+a-x)}{(L+a-x)^2} = \frac{\tau q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{L+a-x} \Big|_0^L = \\ &= \frac{\tau q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{L+a-L} - \frac{1}{L+a-0} \right) = \frac{\tau q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{L+a} \right). \end{aligned}$$

## ТЕМА (5): «Электрический ток»

### Информационный блок (5)

Сила тока  $I$  равна отношению заряда  $dq$ , прошедшего через поперечное сечение проводника за время  $dt$ , к величине этого промежутка времени:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Электродвижущей силой (ЭДС)  $\mathcal{E}$  источника тока называют отношение к величине заряда  $q$  работы сторонних сил  $A_{\text{стор}}$  по перемещению этого заряда против сил электростатического поля:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{стор}}}{q}.$$

Закон Ома для неоднородного участка цепи

$$I = \frac{U_{12}}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R},$$

где  $I$  — сила тока,  $U_{12}$  — напряжение на участке цепи 1—2,  $\varphi_1$  — потенциал точки 1, а  $\varphi_2$  — потенциал точки 2,  $\mathcal{E}_{12}$  — величина ЭДС на участке цепи 1—2.

Закон Ома для однородного участка цепи

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}.$$

Закон Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

где  $R$  — сопротивление внешней цепи,  $r$  — внутреннее сопротивление источника ЭДС  $\mathcal{E}$ .

Мощность тока

$$P = UI = \frac{U^2}{R} = I^2 R.$$

Закон Джоуля-Ленца

$$Q = I^2 R t.$$

Законы Кирхгофа:

$$\sum_k I_k = 0, \quad \sum_n I_n R_n = \sum_i \mathcal{E}_i.$$

Общее сопротивление при последовательном соединении равно сумме отдельных сопротивлений:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n,$$

где  $n$  — число сопротивлений в соединении.

Общее сопротивление при параллельном соединении определяется из выражения:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$

### Задания (5)

На рис. 5.1 изображена электрическая цепь. Значения сопротивлений и ЭДС задаются в таблице исходных данных (5).

**A 1.** Найти значения сил токов в ветвях.

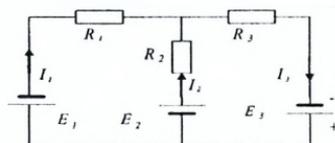


Рис. 5.1

В таблице вариантов (5) на схеме 1 указаны соединения проводников и ЭДС. Значения ЭДС и сопротивлений задаются в таблице исходных данных (5).

**B 1.** Определите значения токов во всех ветвях.

В проводнике сопротивлением  $R_1$  за промежуток времени от  $0$  до  $t$  сила тока изменилась от  $I_1$  до  $I_2$ . Зависимость силы тока от времени указана в таблице вариантов (5).

**A 2.** При какой силе постоянного тока в проводнике за то же время выделится такое же количество теплоты?

**B 2.** Постройте графики зависимости от времени силы тока и электрического заряда.

На схеме 2 показан конденсатор емкостью  $C$ , подключенный к источнику постоянного напряжения  $U$ . После зарядки конденсатора переключатель  $\Pi$  переводится с контакта 1 на контакт 2.

**B 3.** Найти закон изменения токов, текущих через сопротивления.

**C 1.** Определить величину заряда, прошедшего через сопротивления за время  $t$ .

**C 2.** Найти количество тепла  $Q$ , выделившееся на каждом из сопротивлений за время  $t$ .

На рис. 5.2 изображена электрическая цепь, состоящая из ЭДС, конденсатора и сопротивления.

**B 4.** Определите закон изменения силы тока  $I_1$  через сопротивление после замыкания ключа  $K_1$ .

**C 3.** Найдите время релаксации цепи  $\tau_1$  и вычертите кривые зависимости тока и напряжения от времени.

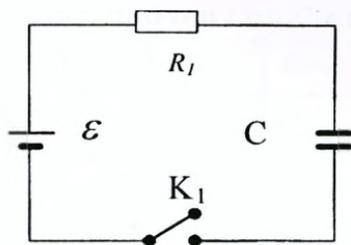


Рис. 5.2

**Таблица вариантов (5)**

$N$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$t$	$I_1$	$I_2$	$C, \text{мкФ}$	$U$
	$N$	$(N+k)$	$Nk$	$(N+k)$	$\frac{(N+k)}{N}$	$\frac{(N+k)}{k}$	$N$	$(N+k)$	$(N+k)$	$(N+k)$	$N$	$\frac{(N+k)}{N}$	$N$

Номер варианта  $N$  равен порядковому номеру студента в журнале группы. Размеры в таблице исходных данных проставляются студентами самостоятельно. Если при подстановке численных значений не удастся получить требуемый результат, то необходимо соответствующим образом самостоятельно подобрать исходные данные, уведомив об этом преподавателя.

ТАБЛИЦА ВАРИАНТОВ (5)

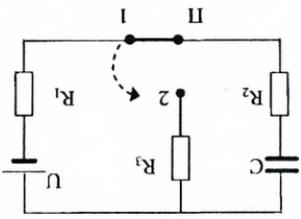
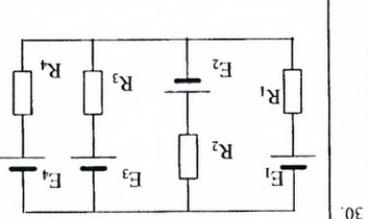
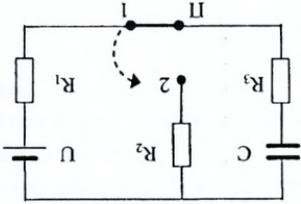
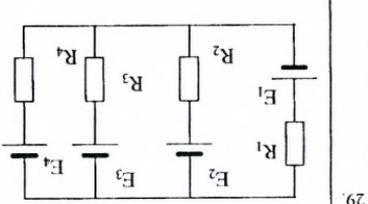
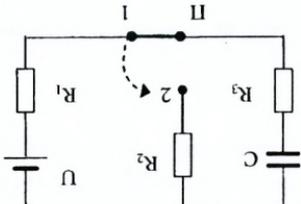
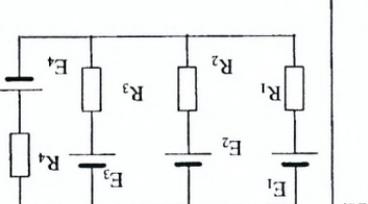
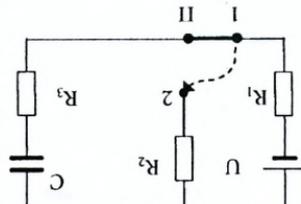
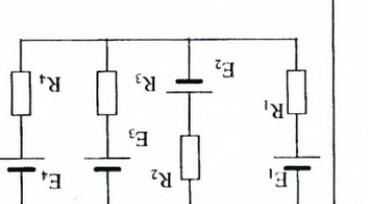
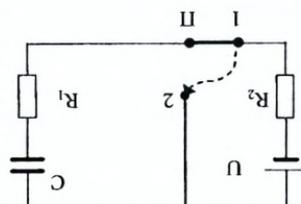
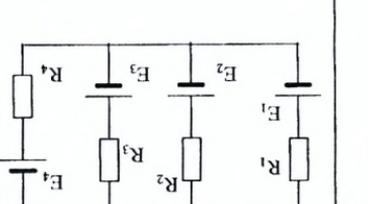
N	Схема 1	Схема 2	Зависимость силы тока от времени
1.			$I = I_0 e^{-\frac{t}{1+k}}$
2.			$I = I_0 e^{\frac{t}{N+k^2}}$
3.			$I = I_0 \sin(\alpha t + \pi/2)$
4.			$I = I_0 \sin(\alpha t + \pi/4)$
5.			$I = I_0 \sin(\alpha t + \pi/2)$

<p>6.</p>		$I = I_0 \sin(\alpha t + 3\pi/4)$
<p>7.</p>		$I = I_0 \sin(\alpha t + 3\pi/5)$
<p>8.</p>		$I = I_0 \sin(\alpha t + 5\pi/4)$
<p>9.</p>		$I = I_0 \sin(\alpha t + 3\pi/2)$
<p>10.</p>		$I = I_0 \sin(\alpha t + 7\pi/4)$

11.			$I = I_o \cos \alpha t$
12.			$I = I_o \cos(\alpha t + \pi/4)$
13.			$I = I_o \cos(\alpha t + 5\pi/7)$
14.			$I = I_o \cos(\alpha t + 3\pi/4)$
15.			$I = I_o \cos(\alpha t + \pi)$

<p>16.</p>		$I = I_0 \cos(\alpha t + 5\pi/4)$
<p>17.</p>		$I = I_0 \cos(\alpha t + 3\pi/4)$
<p>18.</p>		$I = I_0 \cos(\alpha t + 7\pi/4)$
<p>19.</p>		$I = (\alpha t + 1)t + I_0$
<p>20.</p>		$I = (\alpha t^{1/2} + 1)t + I_0$

21.			$I = (\alpha t^{1/3} + 1)t + I_0$
22.			$I = (\alpha t^{2/3} + 1)t + I_0$
23.			$I = (\alpha t^{4/3} + 1)t + I_0$
24.			$I = (\alpha t^{5/3} + 1)t + I_0$
25.			$I = (\alpha t^{1/4} + 1)t + I_0$

$I = I^0 (1 - e^{-I+k}) / t$			30.
$I = (\alpha t^{7/4} + \lambda) I + I_0$			29.
$I = (\alpha t^{6/4} + \lambda) I + I_0$			28.
$I = (\alpha t^{5/4} + \lambda) I + I_0$			27.
$I = (\alpha t^{3/4} + \lambda) I + I_0$			26.

## Примеры (5)

### ПРИМЕР 5.1

На рисунке изображена электрическая цепь. Сопротивления и ЭДС известны.

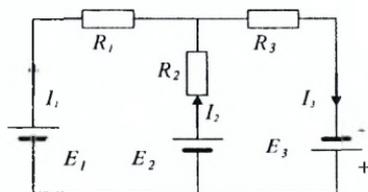
**А 1.** Найти значения сил токов в ветвях.

**Решение примера 5.1.** Запишем выражения для первого и второго законов Кирхгофа с учетом правил знаков для токов и ЭДС:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ I_1(R_1 + r_1) - I_2(R_2 + r_2) = E_1 - E_2, \\ I_1(R_1 + r_1) + I_3(R_3 + r_3) = E_1 + E_3. \end{cases}$$

Токи, входящие в узел, считаются положительными. Направление обхода контуров выбрано одинаковым для всех контуров — по часовой стрелке. Знак ЭДС считается положительным, если при обходе сначала встречается “-”, а затем “+”.

Полученная система из трех уравнений содержит три неизвестных величины. Решив систему, найдем ответ на вопрос задачи.



### ПРИМЕР 5.2

В проводнике сопротивлением  $R$  за промежуток времени от  $0$  до  $t_2$  сила тока возросла линейно от значения  $I_1$  до значения  $I_2$ .

**А 2.** При каком значении постоянного тока в проводнике выделится такое же количество теплоты за время  $t$ ?

**Решение примера 5.2.** Запишем закон Джоуля-Ленца для элементарного количества теплоты:

$$dQ = I^2 R dt.$$

Так как сила тока в приведенном примере линейно зависит от времени, то  $I = I_0 + \alpha t$ . Положив значение времени равным нулю, получим:

$$I_1 = I_0.$$

В момент времени  $t$  значение силы тока станет равным

$$I_2 = I_1 + \alpha t,$$

откуда находим, что

$$\alpha = \frac{I_2 - I_1}{t}.$$

Формула закона Джоуля-Ленца примет вид:  $dQ = (I_1 + \alpha t)^2 R dt$ .

После интегрирования в пределах от 0 до  $t$ , получим:

$$Q = R \int_0^t (I_1 + \alpha t)^2 dt = \frac{R}{\alpha} \int_0^t (I_1 + \alpha t)^2 d(I_1 + \alpha t) = \frac{R (I_1 + \alpha t)^3}{\alpha \cdot 3} \Big|_0^t = \frac{R}{\alpha} \left( \frac{(I_1 + \alpha t_2)^3}{3} - \frac{(I_1)^3}{3} \right)$$

Применяя закон Джоуля-Ленца в виде, справедливом для постоянного тока:

$$Q = I^2 R t_2,$$

легко найдем требуемое значение  $I$  постоянного тока.

## ТЕМА (6): «Магнитное поле. Электромагнитная индукция»

### Информационный блок (6)

Закон Био-Савара-Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[Id\vec{L}, \vec{r}]}{r^3},$$

где  $d\vec{B}$  — индукция магнитного поля, создаваемого на расстоянии  $r$  элементарным током  $Id\vec{L}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м — магнитная постоянная.

Принцип суперпозиции для магнитных полей можно записать в виде:

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B},$$

где символ  $L$  означает, что интегрирование распространяется на всю длину провода.

Сила Лоренца равна

$$\vec{F} = q[\vec{V}, \vec{B}],$$

где  $q$  — величина заряда частицы,  $\vec{V}$  — скорость движения частицы,  $\vec{B}$  — индукция магнитного поля.

Сила Ампера  $d\vec{F}$ , действующая на элемент провода длиной  $dL$  с током  $I$ , вычисляется как векторное произведение элемента тока  $Id\vec{L}$  и вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$ :

$$d\vec{F} = [Id\vec{L}, \vec{B}].$$

Закон Фарадея для ЭДС индукции  $E_i$ :

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = BS \cos \alpha \quad \begin{array}{l} \text{магн поток} \\ \text{через площ} \\ \text{пов-ть} \end{array}$$

где  $d\Phi = B \cos \alpha dS$  — поток магнитной индукции  $B$  через площадку  $dS$ ,  $\alpha$  — угол между вектором магнитной индукции и положительной нормалью к площадке  $dS$ .

$$F_H = BIL \sin \alpha \quad \begin{array}{l} \text{сила Ампера, } l - \text{длина проводника} \\ \alpha - \text{угол между } B \text{ и } l \end{array}$$

$$M = BILl \sin \alpha \quad \text{вращающ. момент}$$

$$F_L = qvB \sin \alpha \quad \text{Лоренца}$$

$$\Phi = BS \cos \alpha \quad \begin{array}{l} \text{собств. магн. поток} \\ \text{через контур, } l - \text{индукт} \end{array}$$

### Задания (6)

Ток  $I$  течет по тонкому прямолинейному проводнику длиной  $L$ .

**A 1.** Найдите значение магнитной индукции, создаваемой этим током в точке, равноудаленной от концов проводника и отстоящей на расстоянии  $h$  от его середины.

Ток  $I$  течет по тонкому проводнику, который имеет вид правильного  $(N+k)$ -угольника, вписанного в окружность радиуса  $R$ .

**B 1.** Найдите значение магнитной индукции в центре правильного  $(N+k)$ -угольника. На сколько отличается значение магнитной индукции в центре правильного  $(N+k)$ -угольника от предельного значения при  $N \rightarrow \infty$ .

Ток  $I$  течет по контуру, изображенному в таблице вариантов (6).

**C 1.** Найдите индукцию в точке  $O$ .

Частица с зарядом  $q$  и массой  $m$  начинает движение из точки с координатами  $x_0, y_0, z_0$  и начальной скоростью  $\vec{V}_0 = V_{0x}\vec{i} + V_{0y}\vec{j} + V_{0z}\vec{k}$  под действием электростатического поля с потенциалом  $\varphi = (E_x x + E_y y + E_z z)$ . По истечении промежутка времени  $t_1$  электрическое поле выключается и одновременно включается однородное магнитное поле с индукцией  $B$  Тл, перпендикулярное направлению скорости частицы в этот момент.

**A 2.** Определите промежуток времени  $t_2$ , за который направление скорости частицы изменится под действием магнитного поля на противоположное.

**B 2.** Определите промежуток времени  $t_3$ , за который направление скорости частицы изменится под действием магнитного поля так, что после выключения в этот момент магнитного поля частица возвратится в исходную точку.

**C 2.** Найдите время возврата  $t_4$  частицы в исходную точку после начала движения.

На рисунке 6.2 изображена электрическая цепь, состоящая из ЭДС, катушки индуктивности и сопротивления.

**B 3.** Определите закон изменения силы тока  $I_1$  через сопротивление после размыкания ключа  $K_1$ .

**C 3.** Найдите время релаксации цепи  $\tau_1$  и вычертите кривые зависимости тока и напряжения от времени.

На рисунке 6.3 изображена электрическая цепь, состоящая из ЭДС, конденсатора, катушки индуктивности и сопротивления.

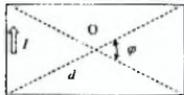
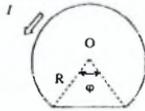
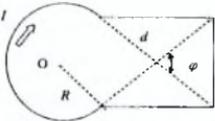
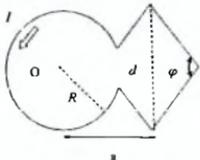
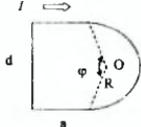
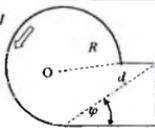
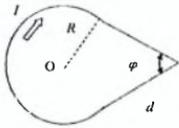
**B 4.** Определите закон изменения силы тока  $I_2$  через сопротивление после переключения ключа  $K_2$ .

**C 4.** Найдите время релаксации цепи  $\tau_2$  и вычертите кривые зависимости тока и напряжения от времени.

**Таблица вариантов (6)**

$N$	$I$	$L$	$R$	$h$	$q$	$m$	$x_0$	$y_0$	$z_0$	$V_{ox}$	$V_{oy}$	$V_{oz}$	$E_x$	$E_y$	$E_z$	$t_1$	$B$	$\mathcal{E}$	$C$	$L_1$	$R_1$	

Номер варианта  $N$  равен порядковому номеру студента в журнале группы. Размеры в таблице исходных данных проставляются студентами самостоятельно. Если при подстановке численных значений не удастся получить требуемый результат, то необходимо соответствующим образом самостоятельно подобрать исходные данные, уведомив об этом преподавателя.

$N$	Вид контура	Геометрические параметры (заполняются по указанию преподавателя)
1.		$d =$ $\varphi =$
2.		$R =$ $\varphi =$
3.		$R =$ $d =$ $\varphi =$
4.		$R =$ $d =$ $\varphi =$ $a =$
5.		$R =$ $d =$ $\varphi =$ $a =$
6.		$R =$ $d =$ $\varphi =$
7.		$R =$ $d =$ $\varphi =$

8.		$R =$ $d =$ $\varphi =$ $a =$
9.		$R =$ $a =$ $d =$
10.		$R =$ $\varphi =$ $d =$ $a =$
11.		$R =$ $\varphi =$ $a =$
12.		$R =$ $\varphi =$ $a =$ $b =$
13.		$R =$ $\varphi =$ $a =$
14.		$R =$ $a =$ $b =$
15.		$R =$ $\varphi =$ $a =$ $b =$
16.		$R =$ $\varphi =$ $a =$ $b =$

17.		$R =$ $\varphi =$ $a =$ $b =$ $c =$
18.		$R =$ $\varphi =$ $a =$ $b =$
19.		$R =$ $\varphi =$ $a =$ $b =$
20.		$R =$ $\varphi =$ $a =$ $b =$
21.		$R =$ $\varphi =$ $a =$ $b =$
22.		$R =$ $\varphi =$ $a =$ $b =$ $c =$
23.		$R =$ $a =$
24.		$R =$ $a =$ $\varphi =$
25.		$R =$ $a =$ $\varphi =$

26.		$R =$ $a =$ $b =$
27.		$R =$ $\varphi =$ $a =$
28.		$R =$ $\varphi =$ $a =$ $b =$ $c =$
29.		$R =$ $\varphi =$ $a =$ $b =$ $c =$
30.		$R =$ $\varphi =$ $a =$

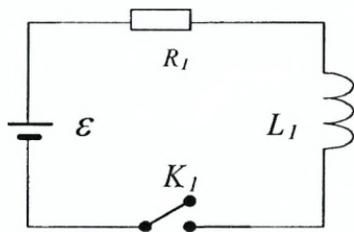


Рис. 6.2

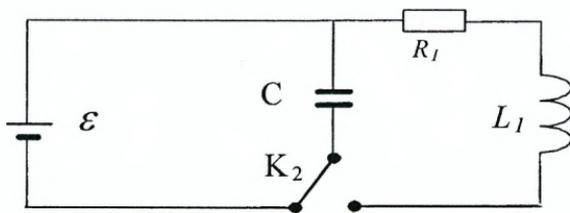


Рис. 6.3

## Примеры (6)

### ПРИМЕР 6.1

Ток  $I$  течет по тонкому прямолинейному проводнику длиной  $L$ .

**А 1.** Найдите значение магнитной индукции, создаваемой этим током в точке, равноудаленной от концов проводника и отстоящей на расстоянии  $h$  от его середины.

**Решение примера 6.1.**

Для нахождения значения магнитной индукции, создаваемой током, текущим по проводнику, воспользуемся законом Био-Савара-Лапласа и принципом суперпозиции магнитных полей.

Закон Био-Савара-Лапласа позволяет определить магнитную индукцию  $d\vec{B}$ , создаваемую элементом тока  $I d\vec{l}$ , в точке, определяемой радиус-вектором  $\vec{r}$ , по формуле:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[I d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{r^3}.$$

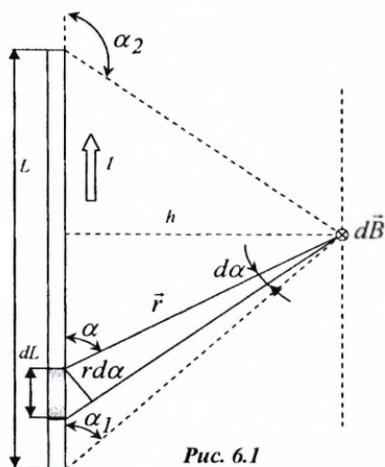


Рис. 6.1

вектором  $\vec{r}$ .

Направление вектора  $d\vec{B}$  определяется по правилу правого винта. В рассматриваемой точке вектор  $d\vec{B}$  направлен за плоскость чертежа. Векторы  $d\vec{B}$  от различных элементов тока при одинаковом направлении тока направлены в одну и ту же сторону, поэтому принцип суперпозиции для магнитных полей можно переписать в скалярной форме:

$$B = \int_L dB,$$

где  $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\sin \alpha}{r^2} dL$ ,  $\alpha$  — угол между элементом тока  $I d\vec{l}$  и радиус-

Таким образом, значение магнитной индукции  $B$ , создаваемой током, текущим по проводнику, определяется по формуле:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int_L \frac{\sin \alpha}{r^2} dL.$$

Подынтегральное выражение необходимо преобразовать так, чтобы была только одна переменная — угол  $\alpha$ . Поскольку  $\sin \alpha = \frac{rd\alpha}{dL}$ , то  $dL = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha}$ . Подставив это выражение под знак интеграла, получим:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int_L \frac{\sin \alpha}{r^2} \cdot \frac{rd\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int_L \frac{d\alpha}{r}.$$

Кроме того, из рис. 6.1 видно, что  $\sin \alpha = \frac{h}{r}$ . Следовательно,  $r = \frac{h}{\sin \alpha}$ . Подставляя это выражение под знак интеграла и выполняя интегрирование, получим:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = -\frac{\mu_0 I}{4\pi h} \cos \alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

При симметричном расположении точки, в которой определяется значение индукции магнитного поля, выполняется соотношение:

$$\cos \alpha_2 = -\cos \alpha_1.$$

С учетом этого предыдущая формула переписывается в виде:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi h} \cos \alpha_1.$$

Из рис. 6.1 следует, что

$$\cos \alpha_1 = \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + h^2}} = \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4h^2}}.$$

Таким образом, искомое значение индукции магнитного поля вычисляется по формуле:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi h} \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4h^2}}.$$

Направлен вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  перпендикулярно плоскости чертежа вниз.

### ПРИМЕР 6.2

Частица с зарядом  $q$  Кл и массой  $m$  кг начинает движение из точки с координатами  $x_0, y_0, z_0$  и начальной скоростью  $\vec{V}_0 = V_{0x}\vec{i} + V_{0y}\vec{j} + V_{0z}\vec{k}$  под действием электростатического поля с потенциалом  $\varphi = (E_x x + E_y y + E_z z)$ . По истечении промежутка времени  $t_1$  электрическое поле выключается и одновременно включается магнитное поле  $B$  Тл, перпендикулярное скорости частицы.

**А 2.** Определите промежуток времени  $t_2$ , за который направление скорости частицы изменится под действием магнитного поля на противоположное.

*Решение примера 6.2.*

Найдем силу, действующую на частицу со стороны электрического поля (знак «—» указывает на то, что сила, действующая на положительный заряд, направлена в сторону убывания потенциала):

$$\begin{cases} F_x = -q \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -qE_x \\ F_y = -q \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -qE_y \\ F_z = -q \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -qE_z \end{cases}$$

По второму закону Ньютона:

$$\begin{cases} ma_x = -qE_x \\ ma_y = -qE_y \\ ma_z = -qE_z \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} m \frac{dV_x}{dt} = -qE_x \\ m \frac{dV_y}{dt} = -qE_y \\ m \frac{dV_z}{dt} = -qE_z \end{cases}$$

откуда, после интегрирования, находим

$$\begin{cases} V_x = V_{0x} - \frac{q}{m} E_x t_2 \\ V_y = V_{0y} - \frac{q}{m} E_y t_2 \\ V_z = V_{0z} - \frac{q}{m} E_z t_2 \end{cases}$$

Найдем время полного разворота частицы, движущейся в магнитном поле, по окружности. В этом случае сила Лоренца играет роль центростремительной силы:  $qVB \sin \alpha = m \frac{v^2}{R}$  где  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ . Определив из последнего уравнения радиус окружности, можно найти длину половины окружности и время разворота.



$$r = \frac{S}{P_{\text{ABC}}} = \frac{\frac{1}{2} a \cdot h}{\frac{a+b+c}{2}}$$

## ТЕМА (7): «Интерференция света»

### Информационный блок (7)

Ширина интерференционной полосы  $\Delta x$  вычисляется по формуле

$$\Delta x = \frac{L}{d} \lambda,$$

где  $L$  — расстояние от источников до экрана,  $d$  — расстояние между источниками.

Максимальное значение  $m_{\max}$  порядка интерференционного максимума, при котором интерференционная картина еще остается различимой, определяется по формуле:

$$m_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda},$$

где  $\Delta\lambda$  — интервал длин волн от  $\lambda$  до  $\lambda + \Delta\lambda$ .

Длина когерентности  $L_{\text{ког}}$  определяется следующим образом:

$$L_{\text{ког}} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \lambda \cdot m_{\max}.$$

Радиус когерентности  $\rho_{\text{ког}}$  находится из выражения:

$$\rho_{\text{ког}} = \frac{\lambda}{\varphi},$$

где  $\varphi$  — угловой размер источника, видимый из точки наблюдения.

Условие максимумов при интерференции света, отраженного под углом  $\theta$  от тонкой пластинки толщиной  $d$ :

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\theta} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda,$$

где  $m$  — целое число.

Радиусы  $r_k$  колец Ньютона, появляющихся при отражении света от поверхностей воздушной прослойки, образующейся между плоской стеклянной пластинкой и соприкасающейся с ней выпуклой поверхностью линзы радиуса  $R$ , вычисляются по формуле:

$$r_k = \sqrt{\lambda R k / 2},$$

где  $k$  — порядковый номер кольца. Значению  $k=0$  соответствует середина центрального темного пятна.

## Задания (7)

Однонаправленные когерентные электромагнитные волны светового диапазона с длиной волны  $\lambda$  приходят в некоторую точку М, расположенную на расстоянии  $L$  от источников света  $S_1$  и  $S_2$ , расстояние между которыми равно  $d$ .

**А 1.** Определить два последовательных значения оптической разности хода  $\Delta_{min}$ , для которых выполняются условия минимума и три последовательных значения оптической разности хода  $\Delta_{max}$ , для которых выполняются условия максимума.

**В 1.** Определить расстояние  $\Delta x$  между ближайшими интерференционными максимумами и найти положения точки М на экране, соответствующие вычисленным значениям оптической разности хода  $\Delta_{max}$  и  $\Delta_{min}$ .

**В 2.** Определить положение на экране точки М, в которой интерференционная картина еще остается различимой, если в эту точку приходят волны с интервалом длин волн от  $\lambda$  до  $\lambda + \Delta\lambda$ . Найти также длину и радиус когерентности света.

**С 1.** Найти изменение разности хода лучей, идущих от источников света до точки М на экране, отстоящей от центральной осевой линии на расстоянии  $x$ , если ход одного из лучей перекрывает стеклянной пластинкой толщиной  $L_1$  с показателем преломления  $n$ ?

На рис. 7.1 изображена схема интерферометра, используемого для измерения показателя преломления прозрачных веществ. Здесь  $S$  — точечный источник света с длиной волны  $\lambda$ , 1 и 2 — две одинаковые трубки с воздухом, длиной  $L$ , Д — диафрагма с двумя щелями. Когда воздух в одной из трубок заменили на другой газ, то интерференционная картина на экране Э сместилась на  $N$  полос.

**С 2.** Определить показатель преломления исследуемого газа, если показатель преломления воздуха равен 1,00029.

В тонкой клиновидной пластинке в отраженном свете при нормальном падении наблюдаются интерференционные полосы. Расстояние между соседними темными полосами равно  $\Delta x$ , длина волны падающего света  $\lambda$ , показатель преломления пластинки  $n$ .

**В 3.** Найти угол  $\alpha$  между гранями пластинки.

В опыте Ллойда световая волна, исходящая из источника  $S$  света в виде узкой щели, интерферирует с волной, отраженной от зеркала  $Z$ . В результате на экране Э образуется система интерференционных полос. Расстояние от источника до экрана равно  $L$ . При некотором положении источника ширина интерференционной полосы на экране равна  $\Delta x$ , а после того как источник отодвинули от плоскости зеркала на  $\Delta h$ , ширина полос уменьшилась в  $k + 1$  раз.

**С 3.** Найти длину волны света.

На тонкую прозрачную пленку с показателем преломления  $n$  падает под углом  $\alpha$  параллельный пучок белого света.

**А 2.** При какой толщине пленки отраженный свет будет наиболее сильно окрашен в цвет, соответствующий длине волны  $\lambda$ .

Для уменьшения потерь света из-за отражения от поверхности прозрачного диэлектрика с показателем преломления  $n$ , диэлектрик покрывают тонким слоем вещества с показателем преломления  $\sqrt{n}$ .

**С 4.** При какой толщине этого слоя пропускная способность оптической системы в направлении нормали к поверхности диэлектрика будет максимальной для света с длиной волны  $\lambda$ ?

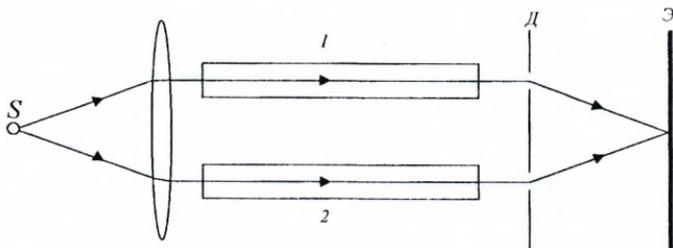


Рис. 7.1

Таблица вариантов (7)

$N$	$\lambda, \text{нм}$	$L, \text{м}$	$d, \text{мм}$	$\Delta\lambda, \text{нм}$	$n$
	$370 + 10(N + k)$	$N + k$	$N(1 + k)$	$N + k$	$1 + \frac{k}{N + 1}$

Номер варианта  $N$  равен порядковому номеру студента в журнале группы. Размеры в таблице исходных данных проставляются студентами самостоятельно. Если при подстановке численных значений не удастся получить требуемый результат, то необходимо соответствующим образом самостоятельно подобрать исходные данные, уведомив об этом преподавателя.

Примеры (7)

**ПРИМЕР 7.1**

Однонаправленные когерентные электромагнитные волны светового диапазона с длиной волны  $\lambda$  приходят в некоторую точку  $M$ , расположенную на расстоянии  $L$  от источников света  $S_1$  и  $S_2$ , расстояние между которыми равно  $d$ .

**А 1.** Определить два последовательных значения оптической разности хода  $\Delta_{min}$ , для которых выполняются условия минимума, и три последовательных значения оптической разности хода  $\Delta_{max}$ , для которых выполняются условия максимума.

### Решение примера 7.1.

Рассмотрим в качестве примера получения когерентных источников света способ разделения световых волн на когерентные системы при помощи так называемых бизеркал Френеля: двух плоских зеркал, расположенных под углом, близким к развернутому. Схема получения когерентных световых волн показана на рис. 7.2.

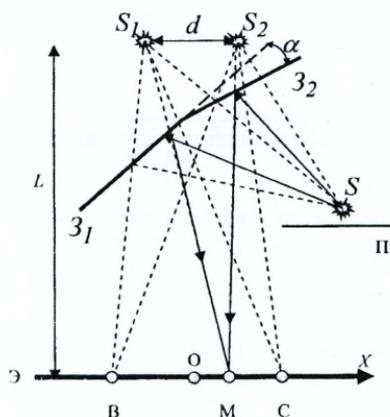


Рис. 7.2

Свет от точечного источника  $S$  после отражения от зеркал  $Z_1$  и  $Z_2$  распространяется в виде двух пучков с центрами в точках  $S_1$  и  $S_2$ , которые являются мнимыми изображениями источника  $S$  в зеркалах. Угол  $\alpha$  — мал и поэтому расстояние  $d$  между мнимыми источниками также мало по сравнению с расстоянием до экрана. Эти пучки являются когерентными потому, что они получены из одного и того же пучка света. Поэтому при наложении их друг на друга в пространстве возникает поле интерференции, — та часть пространства, в котором происходит перераспределение энергии световых волн. Поле интерференции отделено от источника  $S$  непрозрачной перегородкой  $\Pi$ . Оптическая разность хода волн от когерентных источников  $S_1$  и  $S_2$  до точки  $M$  определяется по формуле:

$$\Delta = n(r_2 - r_1),$$

где  $n$  — показатель преломления среды,  $r_1 = |MS_1|$  — расстояние от точки  $M$  до мнимого источника  $S_1$ ,  $r_2 = |MS_2|$  — расстояние от точки  $M$  до мнимого источника  $S_2$ . В одних местах волны усиливают друг друга, в других — ослабляют. Так как длины волн и начальные фазы колебаний источников  $S_1$  и  $S_2$  одинаковы, то результат интерференции в точке  $M$  зависит от соотношения между оптической разностью хода  $\Delta$  и длиной волны  $\lambda$ .

Если в оптической разности хода укладывается нечетное число полуволн, то волны гасят друг друга:

$$\Delta_{\min} = \pm (2m - 1) \cdot \frac{\lambda}{2},$$

где  $m = 1, 2, \dots$  — целые числа, называемые порядком минимумов.

Если же в оптической разности хода укладывается четное число полувольт, то волны усиливают друг друга:

$$\Delta_{max} = \pm 2m \cdot \frac{\lambda}{2},$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$  — целые числа, называемые *порядком максимумов*.

Подставляя указанные значения  $m$ , находим соответствующие значения  $\Delta_{max}$  и  $\Delta_{min}$ .

### ПРИМЕР 7.2

На тонкую прозрачную пленку с показателем преломления  $n$  падает под углом  $\alpha$  параллельный пучок белого света.

**А 2.** При какой толщине  $d$  пленки отраженный свет будет наиболее сильно окрашен в цвет, соответствующий длине волны  $\lambda$ .

#### Решение примера 7.2.

Как видно из рис. 7.3, оптическая разность хода интерферирующих волн 1 и 2, отраженных от верхней и нижней грани пленки, равна:

$$\Delta = 2nS_2 - (S_1 + \frac{\lambda}{2}),$$

где  $S_2 = \frac{d}{\cos \beta}$ ,  $S_1 = (2d \cdot \operatorname{tg} \beta) \sin \alpha$ . Дополнительная разность хода  $\frac{\lambda}{2}$  возникает у волны 1 из-за отражения от оптически более плотной среды.

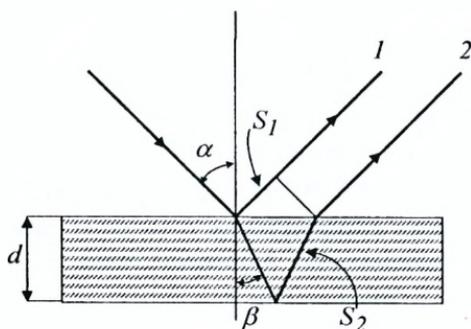


Рис. 7.3

Так как, в соответствии с законом преломления, показатель преломления равен:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n,$$

то  $S_I = (2d \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta}) \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 2dn \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta &= 2n \frac{d}{\cos \beta} - 2dn \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} - \frac{\lambda}{2} = 2dn \left( \frac{1}{\cos \beta} - \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} \right) - \frac{\lambda}{2} = 2dn \cos \beta - \frac{\lambda}{2} = \\ &= 2dn \sqrt{1 - \sin^2 \beta} - \frac{\lambda}{2} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Интерференционный максимум наблюдается в том случае, если в разности хода  $\Delta$  укладывается четное число полуволн:

$$\Delta = 2m \frac{\lambda}{2}.$$

Приравнивая правые части двух последних выражений, получим:

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2} = 2m \frac{\lambda}{2},$$

где  $m = 1, 2, \dots$  — целое число. Из последней формулы легко находится искомое значение  $d$ .

## ТЕМА (8): «Дифракция и поляризация света»

### Информационный блок (8)

Радиус внешней границы  $m$ -й зоны Френеля равен:

$$r_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}},$$

где  $a$  — расстояние от точечного источника света до отверстия;  $b$  — расстояние от отверстия до точки наблюдения;  $\lambda$  — длина волны.

Классическое соотношение между интенсивностью  $I$  и амплитудой  $E$  световой волны:

$$I = E^2.$$

Суммарная амплитуда результирующих колебаний находится следующим образом:

$$E = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \dots,$$

где  $E_i$  — амплитуда колебаний, возбуждаемых  $i$ -й зоной Френеля.

Величина  $E_i$  зависит от площади  $i$ -й зоны Френеля и от угла, под которым данная зона Френеля видна из точки наблюдения. Площадь любой зоны Френеля вычисляется по формуле:

$$\sigma = \pi\lambda \frac{ab}{a+b}.$$

Приближенная зависимость амплитуды  $E_i$  колебаний, возбуждаемых  $i$ -й зоной Френеля, от номера  $i$  зоны дается следующим выражением:

$$E_i = \alpha - \beta i,$$

Дифракция Фраунгофера от щели при нормальном падении света характеризуется уравнением:

$$b \cdot \sin \theta = \pm m\lambda,$$

где  $b$  — ширина щели;  $\theta$  — угол дифракции;  $m$  — порядок дифракционного максимума.

Дифракция Фраунгофера от дифракционной решетки при нормальном падении света характеризуется уравнением:

$$d \cdot \sin \theta = \pm m\lambda,$$

где  $d$  — период решетки.

Угловая дисперсия  $D$  дифракционной решетки вычисляется по формуле:

$$D = \frac{\delta\theta}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta}.$$

Разрешающая способность  $R$  дифракционной решетки определяется из выражения:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN_p,$$

где  $N_p$  — число штрихов решетки.

Закон Малюса формулируется следующим образом:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha,$$

где  $I_0$  — интенсивность света, падающего на поляризатор,  $I$  — интенсивность света, прошедшего через поляризатор,  $\alpha$  — угол между плоскостью пропускания анализатора и направлением колебаний электрического вектора света, падающего на анализатор.

Угол поворота плоскости поляризации в оптически активных средах пропорционален толщине  $L$  слоя вещества:

$$\varphi = \alpha_o L,$$

где  $\alpha_o$  — удельное вращение среды.

В оптически активных растворах угол поворота плоскости поляризации вычисляется по формуле:

$$\varphi = \alpha_p CL,$$

где  $C$  — концентрация оптически активного вещества в растворе;  $\alpha_p$  — удельное вращение раствора, зависящее от природы оптически активного вещества и растворителя, длины волны света и температуры.

### Задания (8)

Плоская световая волна с интенсивностью  $I_0$  падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием. Длина волны  $\lambda$ .

Построить векторную диаграмму и найти интенсивность света  $I$  за непрозрачным экраном в точке наблюдения, для которой радиус отверстия равен радиусу:

- A 1.** первой зоны Френеля;
- B 1.** внутренней половины первой зоны Френеля;
- B 2.** внешней половины первой зоны Френеля;
- C 1.** половины первой зоны Френеля, перекрытой по диаметру;
- C 2.** первой зоны Френеля, перекрытой так, что остается открытым сектор с углом раствора  $\varphi$ .

Световая волна с длиной волны  $\lambda$  от точечного источника света падает на диафрагму с отверстием, форма которого и число зон Френеля, укладываемых в нем, указаны в таблице вариантов (8). При отсутствии диафрагмы интенсивность света в точке наблюдения равна  $I_0$ .

**C 3.** Определить интенсивность света в точке наблюдения и построить векторную диаграмму, если поочередно открыть первую и вторую, первую и третью, вторую и третью, а также все зоны.

Монохроматический свет с длиной волны  $\lambda$  падает нормально к поверхности дифракционной решетки с периодом  $d$ .

- A 2.** Определить наибольший порядок дифракционного максимума.
- B 3.** Определить ширину спектра  $N$ -го порядка в том случае, если решетку осветить светом с длиной волны от  $\lambda$  до  $400 \text{ нм}$ . Расстояние от решетки до экрана равно  $b$ .

Между параллельными николями поместили пластинку кварца толщиной  $L$ , в результате чего плоскость поляризации монохроматического света повернулась на угол  $\varphi$ .

**A 3.** На какую величину необходимо изменить толщину пластинки для того, чтобы поле зрения поляриметра стало совершенно темным?

Плоскость поляризации света, прошедшего через трубку длиной  $L_1$ , содержащую раствор сахара концентрацией  $C_1$ , повернулась на угол  $\varphi$ . В налитом в трубку длиной  $L_2$  растворе сахара с другой концентрацией, плоскость поляризации повернулась на угол  $\varphi_1$ .

**B 4.** Определить концентрацию второго раствора.

**Таблица вариантов (8)**

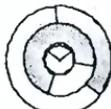
$N$	$I_o$	$\lambda, \text{нм}$	$\varphi$	$d, \text{нм}$
	$N+k$	$800-10(N+k)$	$11^\circ(N+k)$	$N+k$

$b, \text{см}$	$L$	$L_1$	$C_1$	$\varphi_1$	$L_2$
$10(N+k)$	$N$	$N+k$	$N$	$22^\circ(N+k)$	$N+2k$

Номер варианта  $N$  равен порядковому номеру студента в журнале группы. Раз-  
мерности в таблице исходных данных проставляются студентами самостоя-  
тельно. Если при подстановке численных значений не удастся получить тре-  
буемый результат, то необходимо соответствующим образом самостоятельно  
подобрать исходные данные, уведомив об этом преподавателя.

<b>1.</b>	$I_o$ 17	$\lambda$ 800	$\varphi$ 30°		$\varphi_1 = 330^\circ$ $\varphi_2 = 150^\circ$ $\varphi_3 = 140^\circ$	$m$ 3	$L_1$ 0,21	$C_1$ 10%	$\varphi_1$ 20°	$L_2$ 0,31	$\varphi_2$ 20°
<b>2.</b>	$I_o$ 18	$\lambda$ 790	$\varphi$ 130°		$\varphi_1 = 90^\circ$ $\varphi_2 = 130^\circ$ $\varphi_3 = 120^\circ$	$m$ 4	$L_1$ 0,22	$C_1$ 20%	$\varphi_1$ 30°	$L_2$ 0,32	$\varphi_2$ 21°
<b>3.</b>	$I_o$ 19	$\lambda$ 780	$\varphi$ 40°		$\varphi_1 = 300^\circ$ $\varphi_2 = 60^\circ$ $\varphi_3 = 270^\circ$	$m$ 2	$L_1$ 0,23	$C_1$ 30%	$\varphi_1$ 20°	$L_2$ 0,43	$\varphi_2$ 22°
<b>4.</b>	$I_o$ 20	$\lambda$ 770	$\varphi$ 310°		$\varphi_1 = 320^\circ$ $\varphi_2 = 300^\circ$ $\varphi_3 = 140^\circ$	$m$ 5	$L_1$ 0,24	$C_1$ 15%	$\varphi_1$ 21°	$L_2$ 0,34	$\varphi_2$ 22°
<b>5.</b>	$I_o$ 30	$\lambda$ 760	$\varphi$ 60°		$\varphi_1 = 310^\circ$ $\varphi_2 = 290^\circ$ $\varphi_3 = 300^\circ$	$m$ 10	$L_1$ 0,25	$C_1$ 25%	$\varphi_1$ 30°	$L_2$ 0,35	$\varphi_2$ 23°
<b>6.</b>	$I_o$ 29	$\lambda$ 750	$\varphi$ 10°		$\varphi_1 = 90^\circ$ $\varphi_2 = 270^\circ$ $\varphi_3 = 310^\circ$	$m$ 9	$L_1$ 0,26	$C_1$ 35%	$\varphi_1$ 32°	$L_2$ 0,36	$\varphi_2$ 24°

7.	$I_o$ 28	$\lambda$ 740	$\varphi$ 20°		$\varphi_1 = 270^\circ$ $\varphi_2 = 100^\circ$ $\varphi_3 = 240^\circ$	$m$ 8	$L_1$ 0,27	$C_1$ 11%	$\varphi_1$ 30°	$L_2$ 0,37	$\varphi_2$ 25°
8.	$I_o$	$\lambda$ 730	$\varphi$ 30°		$\varphi_1 = 280^\circ$ $\varphi_2 = 260^\circ$ $\varphi_3 = 120^\circ$	$m$ 7	$L_1$ 0,28	$C_1$ 12%	$\varphi_1$ 33°	$L_2$ 0,48	$\varphi_2$ 25°
9.	$I_o$ 2	$\lambda$ 720	$\varphi$ 40°		$\varphi_1 = 80^\circ$ $\varphi_2 = 240^\circ$ $\varphi_3 = 110^\circ$	$m$ 6	$L_1$ 0,29	$C_1$ 13%	$\varphi_1$ 30°	$L_2$ 0,12	$\varphi_2$ 26°
10.	$I_o$ 1	$\lambda$ 710	$\varphi$ 50°		$\varphi_1 = 90^\circ$ $\varphi_2 = 100^\circ$ $\varphi_3 = 220^\circ$	$m$ 5	$L_1$ 0,3	$C_1$ 14%	$\varphi_1$ 34°	$L_2$ 0,26	$\varphi_2$ 27°
11.	$I_o$ 11	$\lambda$ 700	$\varphi$ 60°		$\varphi_1 = 300^\circ$ $\varphi_2 = 70^\circ$ $\varphi_3 = 260^\circ$	$m$ 4	$L_1$ 0,31	$C_1$ 15%	$\varphi_1$ 20°	$L_2$ 0,35	$\varphi_2$ 28°
12.	$I_o$ 12	$\lambda$ 690	$\varphi$ 70°		$\varphi_1 = 310^\circ$ $\varphi_2 = 290^\circ$ $\varphi_3 = 150^\circ$	$m$ 5	$L_1$ 0,32	$C_1$ 16%	$\varphi_1$ 20°	$L_2$ 0,23	$\varphi_2$ 29°
13.	$I_o$ 13	$\lambda$ 680	$\varphi$ 80°		$\varphi_1 = 300^\circ$ $\varphi_2 = 280^\circ$ $\varphi_3 = 310^\circ$	$m$ 6	$L_1$ 0,33	$C_1$ 17%	$\varphi_1$ 21°	$L_2$ 0,13	$\varphi_2$ 30°
14.	$I_o$ 14	$\lambda$ 670	$\varphi$ 90°		$\varphi_1 = 80^\circ$ $\varphi_2 = 275^\circ$ $\varphi_3 = 300^\circ$	$m$ 7	$L_1$ 0,34	$C_1$ 18%	$\varphi_1$ 20°	$L_2$ 0,13	$\varphi_2$ 22°

15.	$I_o$ 15	$\lambda$ 660	$\varphi$ 15°		$\varphi_1 = 260^\circ$ $\varphi_2 = 110^\circ$ $\varphi_3 = 230^\circ$	$m$ 8	$L_1$ 0,35	$C_1$ 19%	$\varphi_1$ 20°	$L_2$ 0,13	$\varphi_2$ 21°
16.	$I_o$ 16	$\lambda$ 650	$\varphi$ 25°		$\varphi_1 = 270^\circ$ $\varphi_2 = 265^\circ$ $\varphi_3 = 150^\circ$	$m$ 9	$L_1$ 0,36	$C_1$ 20%	$\varphi_1$ 30°	$L_2$ 0,13	$\varphi_2$ 23°
17.	$I_o$ 10	$\lambda$ 640	$\varphi$ 35°		$\varphi_1 = 270^\circ$ $\varphi_2 = 250^\circ$ $\varphi_3 = 150^\circ$	$m$ 10	$L_1$ 0,37	$C_1$ 21%	$\varphi_1$ 20°	$L_2$ 0,23	$\varphi_2$ 24°
18.	$I_o$ 9	$\lambda$ 630	$\varphi$ 45°		$\varphi_1 = 70^\circ$ $\varphi_2 = 260^\circ$ $\varphi_3 = 140^\circ$	$m$ 11	$L_1$ 0,38	$C_1$ 22%	$\varphi_1$ 30°	$L_2$ 0,23	$\varphi_2$ 20°
19.	$I_o$ 8	$\lambda$ 620	$\varphi$ 50°		$\varphi_1 = 90^\circ$ $\varphi_2 = 270^\circ$ $\varphi_3 = 130^\circ$	$m$ 12	$L_1$ 0,39	$C_1$ 23%	$\varphi_1$ 30°	$L_2$ 0,23	$\varphi_2$ 23°
20.	$I_o$	$\lambda$ 610	$\varphi$ 55°		$\varphi_1 = 80^\circ$ $\varphi_2 = 260^\circ$ $\varphi_3 = 120^\circ$	$m$ 2	$L_1$ 0,40	$C_1$ 34%	$\varphi_1$ 20°	$L_2$ 0,23	$\varphi_2$ 20°
21.	$I_o$ 7	$\lambda$ 600	$\varphi$ 65°		$\varphi_1 = 270^\circ$ $\varphi_2 = 260^\circ$ $\varphi_3 = 140^\circ$	$m$ 3	$L_1$ 0,41	$C_1$ 24%	$\varphi_1$ 20°	$L_2$ 0,12	$\varphi_2$ 19°
22.	$I_o$ 6	$\lambda$ 590	$\varphi$ 70°		$\varphi_1 = 90^\circ$ $\varphi_2 = 230^\circ$ $\varphi_3 = 220^\circ$	$m$ 4	$L_1$ 0,42	$C_1$ 27%	$\varphi_1$ 20°	$L_2$ 0,14	$\varphi_2$ 10°

23.	$I_o$ 5	$\lambda$ 580	$\varphi$ 80°		$\varphi_1 = 250^\circ$ $\varphi_2 = 100^\circ$ $\varphi_3 = 150^\circ$	$m$ 5	$L_1$ 0,43	$C_1$ 38%	$\varphi_1$ 20°	$L_2$ 0,25	$\varphi_2$ 10°
24.	$I_o$ 4	$\lambda$ 570	$\varphi$ 90°		$\varphi_1 = 230^\circ$ $\varphi_2 = 250^\circ$ $\varphi_3 = 220^\circ$	$m$ 6	$L_1$ 0,44	$C_1$ 26%	$\varphi_1$ 20°	$L_2$ 0,3	$\varphi_2$ 15°
25.	$I_o$ 26	$\lambda$ 560	$\varphi$ 100°		$\varphi_1 = 90^\circ$ $\varphi_2 = 240^\circ$ $\varphi_3 = 220^\circ$	$m$ 7	$L_1$ 0,45	$C_1$ 25%	$\varphi_1$ 20°	$L_2$ 0,31	$\varphi_2$ 20°
26.	$I_o$ 25	$\lambda$ 550	$\varphi$ 40°		$\varphi_1 = 80^\circ$ $\varphi_2 = 100^\circ$ $\varphi_3 = 140^\circ$	$m$ 8	$L_1$ 0,46	$C_1$ 36%	$\varphi_1$ 20°	$L_2$ 0,32	$\varphi_2$ 30°
27.	$I_o$ 24	$\lambda$ 540	$\varphi$ 50°		$\varphi_1 = 240^\circ$ $\varphi_2 = 120^\circ$ $\varphi_3 = 120^\circ$	$m$ 9	$L_1$ 0,47	$C_1$ 12%	$\varphi_1$ 20°	$L_2$ 0,33	$\varphi_2$ 32°
28.	$I_o$ 23	$\lambda$ 530	$\varphi$ 40°		$\varphi_1 = 90^\circ$ $\varphi_2 = 265^\circ$ $\varphi_3 = 160^\circ$	$m$ 10	$L_1$ 0,48	$C_1$ 13%	$\varphi_1$ 20°	$L_2$ 0,34	$\varphi_2$ 21°
29.	$I_o$ 22	$\lambda$ 520	$\varphi$ 30°		$\varphi_1 = 270^\circ$ $\varphi_2 = 100^\circ$ $\varphi_3 = 120^\circ$	$m$ 11	$L_1$ 0,49	$C_1$ 14%	$\varphi_1$ 20°	$L_2$ 0,35	$\varphi_2$ 22°
30.	$I_o$ 21	$\lambda$ 510	$\varphi$ 35°		$\varphi_1 = 260^\circ$ $\varphi_2 = 240^\circ$ $\varphi_3 = 180^\circ$	$m$ 12	$L_1$ 0,50	$C_1$ 17%	$\varphi_1$ 20°	$L_2$ 0,36	$\varphi_2$ 20°

## Примеры (8)

### ПРИМЕР 8.1

Плоская световая волна с интенсивностью  $I_0$  падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием. Длина волны  $\lambda$ .

Построить векторную диаграмму и найти интенсивность света  $I$  за непрозрачным экраном в точке наблюдения, для которой радиус отверстия равен радиусу:

**А 1.** первой зоны Френеля.

*Решение примера 8.1.*

Известно, что суммарный амплитудный вклад от всех зон Френеля равен половине амплитудного вклада от первой зоны Френеля:

$$E_{\forall} = \frac{E_1}{2}.$$

Если убрать экран, то интенсивность света в точке наблюдения станет равной  $I_0$ . По классической теории интенсивность плоской линейно поляризованной монохроматической бегущей волны пропорциональна квадрату амплитуды колебаний вектора напряженности электрического поля волны:

$$I_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_{\forall}^2, \quad I_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_1^2,$$

где  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м — магнитная постоянная,  $\mu$  — магнитная проницаемость среды.

Возводя обе части исходного равенства в квадрат, получим, что  $I_0 = \frac{I_1}{4}$ . Из последнего соотношения находим искомую интенсивность:  $I_1 = 4I_0$ . Векторная диаграмма амплитудного вклада от первой зоны Френеля представлена на рис. 8.1:

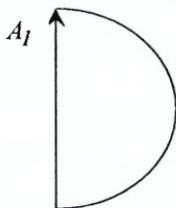


Рис. 8.1

## ПРИМЕР 8.2

Монохроматический свет с длиной волны  $\lambda$  падает нормально к поверхности дифракционной решетки с периодом  $d$ .

**А 2.** Определить наибольший порядок  $m_{\max}$  дифракционного максимума.

*Решение примера 8.2.*

Из формулы для дифракционной решетки  $d \cdot \sin \theta = \pm m \lambda$ , следует, что  $m_{\max} = \frac{d}{\lambda}$ , поскольку очевидно, что наибольший порядок дифракционного максимума будет наблюдаться при  $\theta \rightarrow 90^\circ$ .

## ПРИМЕР 8.3

Между параллельными николями поместили пластинку кварца толщиной  $L$ , в результате чего плоскость поляризации монохроматического света повернулась на угол  $\varphi$ .

**А 3.** Пластинку какой наименьшей толщины необходимо поместить между николями для того, чтобы поле зрения поляриметра стало совершенно темным?

*Решение примера 8.3.*

Из условия  $\varphi = \alpha_o L$  найдем величину удельного вращения:  $\alpha_o = \frac{\varphi}{L}$ . Из закона Малюса следует, что для того чтобы поле зрения поляриметра стало совершенно темным, необходимо, чтобы поворот плоскости поляризации был равен величине прямого угла. Следовательно, новая толщина пластинки найдется из соотношения:  $L_1 = \frac{\pi L}{2\varphi}$ .

## ТЕМА (9): «Элементы квантовой физики»

### Информационный блок (9)

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + T_{\text{max}},$$

где  $h\nu$  — энергия фотона,  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж·с — постоянная Планка,  $\nu$  — частота излучения;  $A_{\text{вых}}$  — работа выхода;  $T_{\text{max}}$  — максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов.

Обобщенная формула Бальмера

$$\frac{1}{\lambda_{mn}} = RZ \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где  $\lambda_{mn}$  — длина волны излучения при переходе между энергетическими уровнями с квантовыми числами  $m$  и  $n$ ,  $R$  — постоянная Ридберга,  $Z$  — порядковый номер водородоподобного атома.

Дебройлевская длина волны  $\lambda$  частицы с импульсом  $p$  равна

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p}.$$

Кинетическая энергия частицы в нерелятивистском случае равна

$$E_k = \frac{p^2}{2m},$$

где  $m$  — масса частицы.

Стационарное уравнение Шредингера

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U)\psi = 0,$$

где  $\psi$  — координатная часть полной волновой функции,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа,  $E$  — полная энергия частицы,  $U$  —

ее потенциальная энергия.

Вероятность обнаружения частицы в интервале от  $x_1$  до  $x_2$  равна

$$\omega = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx.$$

### Задания (9)

На металлическую пластинку, указанную в таблице вариантов (9), падает монокромоатический свет с длиной волны  $\lambda$ .

**A 1.** Найти красную границу фотоэффекта и задерживающую разность потенциалов. Если фотоэффекта при длине волны  $\lambda$  не может быть, то произвести замену  $\lambda = \lambda_{кр} - \Delta\lambda$ .

Поверхность некоторого металла поочередно освещалась светом с длинами волн  $\lambda$  и  $\lambda - \Delta\lambda$ .

**B 1.** Найти во сколько раз максимальные скорости фотоэлектронов отличаются друг от друга?

После прохождения ускоряющей разности потенциалов  $U$  налетающее ядро летит по направлению к центру покоящегося ядра из металла, участвовавшего в фотоэффекте.

**B 2.** Определить минимальное расстояние между ядрами.

Основное состояние микрочастицы в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме шириной  $L$  характеризуется волновой функцией

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi}{L} x.$$

**A 1.** Найти вероятность нахождения микрочастицы в интервале  $\Delta L$  вблизи стенки ямы.

**B 3.** Определить во сколько раз отличается вероятность нахождения микрочастицы в интервале  $\Delta L$  вблизи стенки ямы и посередине ее. Построить график зависимости вероятности нахождения микрочастицы и указать на нем обе вероятности.

Электрон находится в одномерной бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме шириной  $L$  в состоянии с главным квантовым числом  $n = N + 1$ .

**C 1.** Во сколько раз значение энергии электрона в состоянии с главным квантовым числом  $n$  отличается от значения энергии в основном состоянии.

**Таблица вариантов (9)**

Номер варианта  $N$  равен порядковому номеру студента в журнале группы. Размеры в таблице исходных данных проставляются студентами самостоятельно. Если при подстановке численных значений не удается получить требуемый результат, то необходимо соответствующим образом самостоятельно подобрать исходные данные, уведомив об этом преподавателя.

$N$	Металл	$\lambda, \text{нм}$	$\Delta\lambda, \text{нм}$	Налетающее ядро	$U, \text{В}$	$L, \text{нм}$	$\Delta L, \text{нм}$
1	Калий	420	10	Платина	10	10	2
2	Литий	430	12	Рубидий	20	11	1,65
3	Платина	440	14	Серебро	30	12	1,2
4	Рубидий	450	16	Цезий	40	13	2,6
5	Серебро	460	18	Цинк	50	14	2,1
6	Цезий	470	20	Алюминий	60	15	1,5
7	Цинк	480	22	Барий	70	16	3,2
8	Алюминий	490	24	Висмут	80	17	2,55
9	Барий	500	26	Вольфрам	90	18	1,8
10	Висмут	510	28	Железо	100	19	3,8
11	Вольфрам	520	30	Золото	110	20	3
12	Железо	530	32	Кобальт	120	21	2,1
13	Золото	540	34	Литий	130	22	4,4
14	Кобальт	550	36	Медь	140	23	3,45
15	Литий	560	38	Молибден	150	24	2,4
16	Медь	570	40	Натрий	160	25	5
17	Молибден	580	42	Никель	170	26	3,9
18	Натрий	590	44	Титан	180	27	2,7
19	Никель	600	46	Калий	190	28	5,6
20	Титан	610	48	Молибден	200	29	4,35
21	Калий	620	50	Медь	210	30	3
22	Молибден	630	52	Натрий	220	31	6,2
23	Медь	640	54	Висмут	230	32	4,8
24	Натрий	650	56	Литий	240	33	3,3
25	Висмут	660	58	Алюминий	250	34	6,8
26	Литий	670	60	Кобальт	260	35	5,25
27	Алюминий	680	62	Барий	270	36	3,6
28	Кобальт	690	64	Железо	280	37	7,4
29	Барий	700	66	Калий	290	38	5,7
30	Железо	710	68	Литий	300	39	3,9

## Примеры (9)

### ПРИМЕР 9.1

На металлическую пластинку падает монохроматический свет с длиной волны  $\lambda$ . Поток, вырывающихся с поверхности металла фотоэлектронов, полностью задерживается при разности потенциалов тормозящего поля, равной  $U_3$ .

**А 1.** Определить работу выхода и красную границу фотоэффекта.

*Решение примера 9.1.*

Для фотоэффекта справедливо уравнение Эйнштейна:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + T_{\text{max}},$$

где  $h\nu$  — энергия фотона,  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж  $\cdot$  с — постоянная Планка,  $\nu$  — частота излучения;  $A_{\text{вых}}$  — работа выхода;  $T_{\text{max}}$  — максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов.

Поскольку частота  $\nu$  излучения связана с длиной волны  $\lambda$  соотношением:

$$\nu = \frac{c}{\lambda},$$

где  $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$  — скорость света, то уравнение Эйнштейна для фотоэффекта переписывается в виде:

$$\frac{hc}{\lambda} = A_{\text{вых}} + \frac{m_e V_{\text{max}}^2}{2}.$$

Так как электрическое поле тормозит даже самые быстрые электроны, которые пролетели в нем расстояние, соответствующее разности потенциалов  $U_3$ , то кинетическая энергия равна:

$$\frac{m_e V_{\text{max}}^2}{2} = e \cdot U_3.$$

Следовательно,

$$\frac{hc}{\lambda} = A_{\text{вых}} + e \cdot U_3.$$

Из последнего выражения находим работу выхода:

$$A_{\text{вых}} = \frac{hc}{\lambda} - e \cdot U_3.$$

Красной границе соответствует значение  $T_{\text{max}}$  равное нулю. Поэтому длина волны соответствующая красной границе равна:

$$\lambda_{\text{красн}} = \frac{hc}{A_{\text{вых}}}.$$

## ПРИМЕР 9.2

Основное состояние частицы в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме шириной  $L$  характеризуется волновой функцией

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi}{L} x.$$

**А 2.** Найти вероятность нахождения частицы в интервале  $\Delta L$  вблизи стенки ямы.

### Решение примера 9.2.

Вероятность обнаружения частицы в интервале от  $x$  до  $x+dx$  пропорциональна произведению квадрата модуля волновой функции  $\psi(x)$  и самого интервала  $dx$ :

$$d\omega = |\psi(x)|^2 dx.$$

Следовательно, вероятность нахождения частицы в интервале  $\Delta L$  вблизи стенки ямы определится из выражения:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2}{L} \int_0^{\Delta L} \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \cdot \frac{L}{\pi} \int_0^{\frac{\Delta L}{L}} \sin^2 \frac{\pi x}{L} d\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\Delta L}{L}} \sin^2 \frac{\pi x}{L} d\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi x}{2L} - \frac{1}{4} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right) \Bigg|_0^{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi \Delta L}{2L} - \frac{1}{4} \sin\left(\frac{2\pi \Delta L}{L}\right) \right) = \frac{\Delta L}{L} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi \Delta L}{L}\right) \end{aligned}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Анисимов О.С. Основы методологического мышления.— М.: Внешторгиздат, 1989. — 412 с.
2. Громько Ю.В. Мыследеятельностная педагогика (теоретико-практическое руководство по освоению высших образцов педагогического искусства). — Мн.: Технопринт, 2000. — 376 с.
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики: Учеб. пособие для втузов.— М.: Высш. шк., 1989. — 608 с.
4. Каролинский В.Г., Чопчиц Н.И. Задания по физике для студентов I курса и методические указания по их решению (По разделу: “Физические основы классической механики”). — Брест, Издание БИСИ, 1984. — 47 с.
5. Мурзов В.И. и др. Общая физика в задачах и решениях: Учеб. пособие для инж.-техн. спец. вузов / В.И. Мурзов, А.Ф. Кононенко, Л.Г. Филиппова. — Мн.: Выш. шк., 1986. — 164 с.
6. Иродов И. Е. Задачи по общей физике. — М.: Наука, 1979. — 368 с.
7. Иродов И. Е., Савельев И. В., Замша О. И. Сборник задач по общей физике / Под редакцией И. В. Савельева — М.: Наука, 1975. — 320 с.
8. Савельев И. В. Курс общей физики, т. 1. Механика. Молекулярная физика. — М.: Наука 1989. — 350 с.
9. Савельев И. В. Курс общей физики, т. 2. Электричество и магнетизм.— М.: Наука, 1982. — 496 с.
10. Савельев И. В. Курс общей физики, т. 3. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц.— 3-е изд., испр., 1987. — 317 с.
11. Физика для втузов. Механика. Молекулярная физика: Учеб. пособие / И.И. Наркевич, Э.И. Волмянский, С.И. Лобко. — Мн.: Выш. шк., 1992. — 432 с.
12. Физика: Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических специальностей вузов (включая сельскохозяйственные вузы) / А. А. Воробьев, В. П. Иванов, В. Г. Кондакова, А. Г. Чертов — М.: Высш. шк., 1987. — 208 с.
13. Фирганг Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики. — Учеб. пособие для втузов.— М.: Высшая школа, 1977.— 351 с.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### *РАБОТА ВЫХОДА ЭЛЕКТРОНОВ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ АТОМНЫЕ МАССЫ НЕКОТОРЫХ МЕТАЛЛОВ*

<i>N</i>	<b>Металл</b>	<b>Работа выхода электронов, эВ</b>	<b>Порядковый номер</b>	<b>Относительная атомная масса, а.е.м.</b>
<i>1</i>	Калий	2,2	19	39,100
<i>2</i>	Литий	2,3	3	6,940
<i>3</i>	Платина	5,3	78	195,09
<i>4</i>	Рубидий	2,1	37	85,48
<i>5</i>	Серебро	4,3	47	107,88
<i>6</i>	Цезий	1,9	55	132,91
<i>7</i>	Цинк	3,7	30	65,38
<i>8</i>	Алюминий	3,7	13	26,98
<i>9</i>	Барий	2,3	56	137,36
<i>10</i>	Висмут	4,6	83	209,00
<i>11</i>	Вольфрам	4,5	74	183,86
<i>12</i>	Железо	4,4	26	55,85
<i>13</i>	Золото	4,6	79	197
<i>14</i>	Кобальт	4,3	27	58,94
<i>15</i>	Литий	2,4	3	6,940
<i>16</i>	Медь	4,5	29	63,54
<i>17</i>	Молибден	4,3	42	95,95
<i>18</i>	Натрий	2,3	11	22,991
<i>19</i>	Никель	4,8	28	58,71
<i>20</i>	Титан	3,9	22	47,90
<i>21</i>	Калий	2,2	19	39,100
<i>22</i>	Молибден	4,3	42	95,95
<i>23</i>	Медь	4,5	29	63,54
<i>24</i>	Натрий	2,3	11	22,991
<i>25</i>	Висмут	4,6	83	209,00
<i>26</i>	Литий	2,4	3	6,940
<i>27</i>	Алюминий	3,7	13	26,98
<i>28</i>	Кобальт	4,3	27	58,94
<i>29</i>	Барий	2,3	56	137,36
<i>30</i>	Железо	4,4	26	55,85

## ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ АТОМНЫЕ МАССЫ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Газ	Относительная атомная масса элементов (округленно)
Азот	14
Аргон	40
Водород	1
Гелий	4
Кислород	16
Неон	20
Углерод	12

Учебное издание

*Гладковский Виктор Иванович*

# ПОСОБИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО КУРСУ «ФИЗИКА»

*Рекомендовано Советом Брестского государственного технического университета  
в качестве пособия для студентов специальностей:*

*1-36 01 01 «Технология машиностроения»*

*1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства»*

*1-37 01 06 «Техническая эксплуатация автомобилей»*

*1-37 01 07 «Автосервис»*

*1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств»*

**Издание второе, исправленное и дополненное**

✓ Ответственный за выпуск: Гладковский В.И.

Редактор: Строкач Т.В.

Компьютерная верстка: Боровикова Е.А.

Корректор: Никитчик Е.В.

Лицензия № 02330/0549435 от 8.04.2009 г.

Подписано к печати 21.10.2009 г. Бумага «Снегурочка».

Усл. п. л. 5,8. Уч.-изд.л. 6,25. Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Тираж 200 экз. Заказ № 949.

Отпечатано на ризографе учреждения образования  
«Брестский государственный технический университет».  
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

ISBN 978-985-493-129-6



9 789854 931296