

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

Брестский инженерно-строительный
институт

КАФЕДРА ФИЗИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ
РАБОТАМ ПО МЕХАНИКЕ И МОЛЕКУЛЯРНОЙ
ФИЗИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
1202, 1205, 1206, 1209, 1511

/Выпуск II/

БРЕСТ 1981

Методические указания к лабораторным работам
по механике и молекулярной физике рассмотрены
на заседании кафедры физики БИСИ /протокол
№ 5 от 12 марта 1979 г./



Лабораторная работа № II

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ВОЗДУХА

I. Цель работы. Изучение явления теплопроводности в газах и определение коэффициента теплопроводности воздуха.

II. Приборы и принадлежности. Установка для измерения коэффициента теплопроводности воздуха.

III. Методика и порядок выполнения работы.

Если температура заключенного в сосуд газа зависит от координат, в газе возникают процессы, приводящие к ее выравниванию. Обычно среди этих процессов наибольшую роль играет конвекция, при которой легкий теплый газ стремится подняться вверх, а на его место опускаются более холодные части газа. Конвекция не возникает, если: 1/ температура газа повышается с высотой; 2/ объем газа и перепад температур невелик; 3/ объем, занимаемый газом, разбит на небольшие ячейки. В последнем случае возникновению конвекционных потоков препятствует вязкость. Если постепенно увеличивать перепад температур или величину объема, то в некоторый момент скачком возникает конвекция.

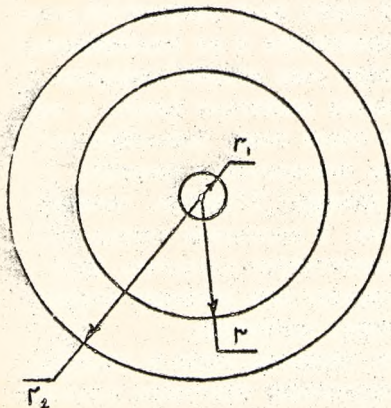
При отсутствии конвекции процесс переноса тепла в газе замедляется, но не прекращается. Он происходит благодаря теплопроводности газа, связанной с тепловым движением молекул. Выравнивание температуры происходит при этом вследствие непрерывного перемешивания "горячих" /быстрых/ и "холодных" /медленных/ молекул, происходящего в процессе их теплового движения и не сопровождающегося макроскопическим движением. В работе рассматривается именно такой механизм теплопередачи.

В случае, когда температура T газа зависит только от одной координаты X , $T = T(x)$, количество теплоты dQ , проходящей через перпендикулярную оси X площадку S за время $d\tau$ определяется формулой /закон Фурье/

$$dQ = - \alpha S \frac{dT}{dx} d\tau \quad /II-I/$$

где α - коэффициент теплопроводности. Знак "-" означает, что поток теплоты направлен в сторону убывания температуры.

Применим уравнение /II-1/ к задаче с аксиальной симметрией. Рассмотрим два длинных коаксиальных цилиндра, пространство между которыми заполнено газом, коэффициент теплопроводности которого α нужно найти. Пусть T_1 - температура поверхности внутреннего цилиндра, r_1 - его радиус, T_2 - температура внешнего цилиндра, r_2 - его радиус. На рис. II-1 показано поперечное сечение этих цилиндров. В качестве внутреннего цилиндра может служить натянутая металлическая нить. Мысленно окружим нить



цилиндрической оболочкой радиуса r . Тогда, если L - длина цилиндра, то поверхность S оболочки будет равна

$$S = 2\pi r L \quad /II-2/$$

Считая радиус цилиндра много меньшим его длины ($r \ll L$), можно пренебречь потоком тепла через торцы по сравнению с потоком через боковую поверхность. Тогда из /II-1/ получим

$$dQ = -\alpha 2\pi L r \frac{dT}{dr} dr \quad /II-3/$$

Величина $\Phi = \frac{dQ}{dt}$, определяющая количество теплоты, проходящей через площадку в единицу времени, называется потоком теп-

Рис. II-1
лоты. Тогда для Φ имеем

$$\Phi = -\alpha 2\pi L r \frac{dT}{dr} \quad /II-4/$$

Уравнение /II-4/ справедливо для любого $R_1 < r < R_2$ причем его левая часть для стационарного режима не зависит от r и является постоянной величиной. Разделяя переменные в /II-4/, получим

$$\frac{dr}{r} = - \frac{2\pi \alpha L}{\Phi} dt \quad /II-5/$$

Интегрируя, находим

$$\int_{R_1}^r \frac{dr}{r} = - \frac{2\pi \alpha L}{\Phi} \int_{T_1}^T dT$$

откуда

$$\ln \frac{r}{R_1} = - \frac{2\pi \alpha L (T - T_1)}{\Phi} \quad /II-6/$$

Из /II-6/ находим температуру T как функции r

$$T = T_1 - \frac{\Phi}{2\pi \alpha L} \ln \frac{r}{R_1} \quad /II-7/$$

При $r = R_2$ имеем

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{2\pi \alpha L}{\Phi} (T_1 - T_2)$$

Выражая α , получим

$$\alpha = \frac{\Phi \ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi L (T_1 - T_2)} \quad /II-8/$$

Формулу /II-8/ можно использовать для вычисления α по известной длине цилиндров L , радиусам R_1 и R_2 и разности температур $(T_1 - T_2)$

Нить можно нагревать электрическим током, а изменение ее температуры определять по изменению сопротивления нити. После установления стационарного режима тепловой поток Φ можно принять равным энергии, выделяющейся в нити за t с при прохождении по ней тока. Следует иметь ввиду, что вблизи стенок цилиндра и нити распределение температур несколько отличается от того, которое описывается формулой /II-7/. Это обусловлено тем, что передача тепла от твердой стенки газу и от газа стенке происходит иначе, чем между слоями газа.

Размер области аномального распределения температуры и средняя длина свободного пробега молекул $\langle \lambda \rangle$ имеют одинаковый порядок. Следовательно, в хорошем приближении можно считать, что при атмосферном давлении температура слоя воздуха, прилегающего к нити, равна T_1 , а прилегающего к стенке цилиндра $- T_2$ ($\langle \lambda \rangle \sim 60 \text{ нм}$). Температуру нити T_1 можно опреде-

лить, измеряя ее сопротивление, а температура стенок цилиндра T_2 практически равна комнатной.

Схема установки приведена на рис. II-2.

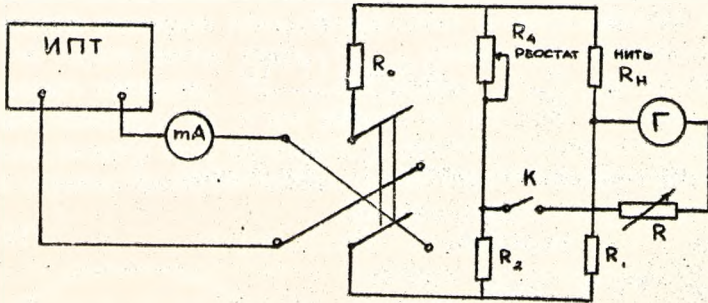


Рис. II-2.

Это обычный электрический мост, в одно из плеч которого включена вольфрамовая нить в цилиндре, а в другое плечо включен реостат, предназначенный для измерения сопротивления нити. В данной работе нить изготовлена из вольфрама, имеющего достаточно большой термический коэффициент сопротивления, а три других сопротивления моста R_1 , R_2 , R_4 изготовлены из материала с очень малым термическим коэффициентом сопротивления. Сопротивление R_0 ограничивает ток через мост. Переключатель Π служит для изменения направления тока через мост, ключ K включает цепь гальванометра, переменное сопротивление R позволяет регулировать чувствительность гальванометра и тем самым предохранять его от повреждения. Ток, протекающий через мост, измеряется миллиамперметром. Сопротивления моста подобраны так, что при малых токах /при ненагретой нити/ все они с достаточной точностью равны между собой, поэтому ток через нить I_H равен

$$I_H = \frac{I}{2} \quad /II-9/$$

где I - ток, измеряемый миллиамперметром. Если ток увеличить, то нить нагреется и ее сопротивление увеличится. Процесс измерения сопротивления нити сводится к тому, что ползунок реостата передвигают до тех пор, пока ток через гальванометр не станет равным нулю. При этом условии сопротивление нити оказывается

равным сопротивлению введенной части реостата и, как нетрудно видеть, условие /II-9/ по-прежнему оказывается выполненным. При комнатной температуре t_2 и при другой, более высокой температуре t_1 , для сопротивления нити имеет

$$R_{H_2} = R_0(1 + \alpha t_2)$$

$$R_{H_1} = R_0(1 + \alpha t_1)$$

где R_0 - сопротивление нити при 0°C , α - термический коэффициент сопротивления. Исключая из этих уравнений R_0 , находим

$$t_1 - t_2 = T_1 - T_2 = \frac{R_{H_1} - R_{H_2}}{R_{H_2} \cdot \alpha} (1 + \alpha t_2)$$

/II-10/

Поток теплоты Φ для установившегося теплового режима будет равен мощности, выделяющейся в нити

$$\Phi = I_H^2 \cdot R_{H_1}$$

или, с учетом /II-9/

$$\Phi = \frac{I^2}{4} R_{H_1}$$

/II-11/

Из /II-8/, /II-10/, /II-11/ окончательно получаем

$$\alpha = \frac{I^2 R_{H_2} \cdot \alpha \cdot R_{H_1} \cdot \ln \frac{D_2}{D_1}}{8 \pi L (R_{H_1} - R_{H_2}) (1 + \alpha t_2)}$$

/II-12/

Диаметры цилиндра D_2 и нити D_1 , а также длина цилиндров L и термический коэффициент сопротивления α приведены на лабораторной установке.

Порядок выполнения работы.

1. Измерить комнатную температуру t_2
2. Ручку регулировки выходного напряжения на ИИТ поставить на нуль, после чего включить его в сеть.
3. Ползунок реостата поставить на минимальное сопротивление, ключ K разомкнуть, установить минимальный предел измерения гальванометра, ручку сопротивления R повернуть до отказа по часовой стрелке /максимальное сопротивление и минимальная чувствительность гальванометра/.
4. Ручкой регулировки выходного напряжения на ИИТ установить минимальный ток I_{min} через систему / I_{min} указав на уста-

новке/.

Выждать 2-3 минуты и замкнуть ключ K ; плавным передвижением движка реостата добиться установки стрелки гальванометра на нуль. Повернув немного ручку сопротивления R против часовой стрелки, вновь добиться установки стрелки гальванометра на нуль передвижением ползунка реостата. Наконец, проделать эту операцию установки на нуль при положении ручки R в крайнем левом положении. Против указателя ползунка реостата прочесть сопротивление нити R_{H_2} при комнатной температуре /при токе I_{min} нить практически не нагревается и ее температура равна комнатной/. Данные занести в таблицу.

Ручку сопротивления R повернуть вправо до упора!

6. Разделить диапазон рабочих токов от I_{min} до I_{max} / I_{max} указано на установке/ так, чтобы получить 10 значений токов.

7. Согласно пп. 4,5 измерить сопротивления нити для 10 значений токов от I_{min} до I_{max} , поворачивая после каждого измерения ручку сопротивления R вправо до упора.

8. Переключателем Π изменить направление тока и для тех же значений токов вновь измерить сопротивления нити, начиная от максимального тока и заканчивая минимальным.

9. Для каждого значения тока взять среднее значение соответствующих сопротивлений $\langle R_n \rangle$

10. Заполнить таблицу , рассчитав α для каждого из опытов. По полученным данным определить, происходил ли в газе переход к конвекционному механизму теплопроводности. Если он произошел, то по формуле /II-10/ найти перепад температур, ему соответствующий.

11. Найдите среднее значение коэффициента теплопроводности $\langle \alpha \rangle$ для молекулярного механизма теплопередачи.

12. Рассчитайте погрешности измерения α

13. По формуле $\langle \lambda \rangle = \frac{3\alpha}{iP} \sqrt{\frac{\pi \mu T}{2R}}$, где i - число степеней свободы молекул газа, P - давление, T - температура, рассчитайте среднюю длину свободного пробега молекул воздуха при комнатной температуре T_2 .

Принять для воздуха $i=5$, $\mu = 29 \text{ кг/кмоль}$, $P = 10 \cdot 10^5 \text{ Па}$.
Рассчитайте также эффективный диаметр молекул воздуха по фор-

муле при $T = T_2$

$$d = \sqrt{\frac{kT}{\sqrt{2} \pi p \langle \lambda \rangle}}$$

где k - постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$

Таблица.

номер:	I	$R_{н1}$ (Ом)	$\langle R_{н1} \rangle$	$\langle \lambda \rangle$
измер:	(А)	прямой ток	противополож. ток	(Ом), (Вт/м·К), (Вт/м·К)
I				
:				
:				
Ю				

IV. Вопросы для самопроверки.

1. Почему длина цилиндра должна быть много больше его диаметра?
2. Можно ли проводить измерения, если все плечи моста изготовлены из одинаковой проволоки?
3. Можно ли по формуле /II-12/ вычислить λ для давлений, при которых длина свободного пробега молекулы сравнима с радиусом цилиндра?
4. В чем различие между конвекционным переносом тепла и теплопроводностью?
5. Выведите формулы /II-12/ и формулу для $\langle \lambda \rangle$ из п.13.
6. Почему нельзя температуру нити доводить до очень больших значений?
7. Выведите формулу для расчета погрешности измерения λ

V. Литература.

1. Савельев И.В. Курс общей физики, т.1, М., Наука, 1977 § 131.
2. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики, т.1, М., Наука, 1974, § 29.

Лабораторная работа № 12

ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ПУЛИ

I. Цель работы. Измерение скорости пули с помощью баллистического маятника и прибора Поля.

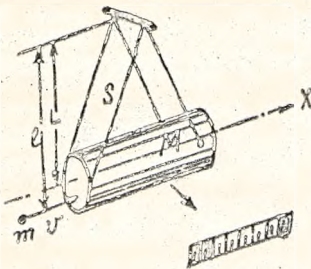
II. Приборы и принадлежности. Духовое ружье, баллистический маятник, прибор Поля, измерительная линейка, тахометр.

III. Методика и порядок выполнения работы.

a/ Метод баллистического маятника.

Баллистический маятник представляет собой тяжелое тело массы M , подвешенное на двойном бифилярном подвесе с длиной нитей S /рис. 12-1/. Пуля массы "m" после выстрела в горизонтальном направлении вдоль оси X застревает в маятнике /абсолютно неупругий удар/.

Считая, что система замкнута по направлению X и время торможения пули в корпусе маятника τ много меньше периода колебаний маятника $T / \tau \ll T /$, можно воспользоваться законом сохранения момента импульса:



$$l m v = L M V + l m V \quad /12-1/$$

где V - скорость маятника после удара;

Рис. 12-1

v - скорость пули;

L - расстояние между центром массы маятника и его точкой подвеса;

l - расстояние от точки подвеса маятника до линии пролета пули.

Если потери энергии за время подъема /четверть периода/ из-за трения о воздух, не вполне жесткого закрепления точек подвеса и др. малы по сравнению с запасом колебательной энергии маятника; т.е. $\frac{1}{2} \Delta W \ll M g h$ /12-2/

где ΔW - потери энергии за период, тогда можно применить закон сохранения механической энергии, рассматривая маятник после соударения, т.е.

$$\frac{(M+m)V^2}{2} = (M+m)gH \quad /12-3/$$

где H - высота, на которую поднимется маятник после удара.

Справедливость формулы /12-2/ можно проверить, измерив число полных колебаний маятника N , которое соответствует уменьшению угловой амплитуды φ в два раза, если окажется, что $N \gg 1$ /12-4/

то колебания затухают слабо, и формулой /12-3/ можно пользоваться.

Между высотой поднятия маятника H и углом отклонения φ существует простая связь

$$H = 2L \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad /12-5/$$

которую легко получить, рассмотрев рис.12-2. Из него же можно получить и связь между смещением центра тяжести маятника по горизонтали d и углом φ :



Рис. 12-2

$$\varphi = \arcsin \frac{d}{L} \quad /12-6/$$

Из /12-1/, /12-3/ и /12-5/ получаем окончательную формулу для определения скорости пули, если $M \gg m$

$$v = \frac{2LM}{2m} \sqrt{Lg} \sin \frac{\varphi}{2} \quad /12-7/$$

Порядок выполнения упражнения

1. Произвести несколько холостых выстрелов, установить ружье на таком расстоянии от маятника, при котором он не реагирует на удар воздушной струи.

2. Проверить справедливость неравенства /12-4/.

3. Произвести несколько выстрелов, измеряя отклонение d при каждом выстреле.

4. По формуле /12-7/ определить скорости пули при каждом выстреле, данные усреднить.

5. Рассчитать погрешность опыта.

6. Данные занести в таблицу.

б/ Метод врагающихся дисков.

Прибор Поля представляет собой /рис.12-3/ два тонких бумажных диска А и В, закрепленных на общей оси на расстоянии L друг от друга. Ось приводится во вращение мотором С.

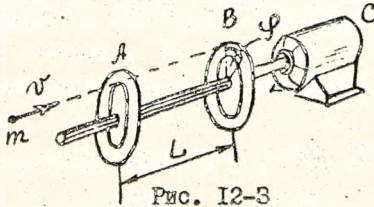


Рис. 12-3

Пуля, летящая после выстрела параллельно оси вращения, пробивает оба диска. За время пролета пули расстояния L между дисками, последние успевают повернуться на некоторый угол φ . Пренебрегая сопротивлением воздуха, движение пули можно считать равномерным, тогда $L = v \cdot t$ /12-8/

где t - время пролета пули между дисками.

Угол поворота дисков равен $\varphi = \omega t$ /12-9/
где ω - угловая скорость вращения дисков, равная $\omega = 2\pi n$
где n - число оборотов мотора в единицу времени /определяется по показаниям тахометра/.

Из /12-8/ и /12-9/ находится скорость пули

$$v = \frac{L}{\varphi} 2\pi n \quad /12-10/$$

Ствол ружья и ось вращения дисков могут не лежать в одной плоскости, из-за чего может появиться дополнительная погрешность в определении скорости пули. Чтобы ее учесть, надо произвести три выстрела по неподвижным дискам, и при дальнейших расчетах совмещать соответствующие пробойны на обоих дисках.

Порядок выполнения упражнения 2.

1. Изготовить диски. Укрепить диски на оси.
2. Произвести три выстрела при неподвижных дисках, отметить пробойны, пронумеровав их.
3. Включить мотор и выждать некоторое время, пока скорость вращения дисков не станет постоянной, записать по тахо-

метру величину скорости /в оборотах в секунду/.

4. Произвести три выстрела, отметить пробойны.
5. Сняв диски, совместить пробойны, полученные при выстрелах по неподвижным дискам, найти центр дисков. Определить угловые смещения пробойн в радианах.
6. По формуле /I2-I0/ рассчитать скорость пули, результаты усреднить.
7. Рассчитать погрешность опыта.
8. Повторить опыт для другой скорости вращения мотора.
9. Данные занести в таблицу.

IV. Вопросы для самопроверки.

1. Объяснить правомочность использования законов сохранения момента импульса и механической энергии в упр. I.
2. Можно ли использовать теорию упражнения I, если скорость пули направлена не по оси X?
3. Как зависит точность экспериментов в упр. 2 от скорости пули, скорости дисков, от толщины бумаги; от расстояния между дисками? Как можно учесть каждый из этих факторов?
4. Вывести расчетные формулы и формулы погрешностей.

V. Литература.

1. А.А. Детлаф и др. Курс физики, т. I, "Высшая школа", М., 1973, §§ 2.5; 3.3; 4.3.
2. И.В. Савельев, Курс общей физики, "Наука", 1977, §§ 18, 27-29.
3. С.Э. Хайкин, Физические основы механики, "Наука", 1971, §§ 22, 26, 27, 68, 89, 95.

Лабораторная работа № 13

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВЯЗКОСТИ ГАЗА

I. Цель работы. Определение коэффициента вязкости воздуха по истечению его через капилляр.

II. Приборы и принадлежности. Установка для измерения коэффициента вязкости газа.

III. Методика и порядок выполнения работы.

Вязкость, или внутреннее трение — это свойство жидких или газообразных тел, проявляющееся либо при движении самой жидкости, либо при движении какого-либо тела в этой жидкости. Явление вязкости связано с перемещением слоев жидкости или газа, обладающих различной скоростью упорядоченного движения, относительно друг друга, при этом молекулы слоев обмениваются импульсами, проникая, благодаря хаотическому тепловому движению внутри слоев, в другие слои. При этом более быстрые молекулы стремятся ускорить более медленный слой, а молекулы с меньшей скоростью — затормозить более быстрый.

Рассмотрим течение вязкого газа по прямолинейной цилиндрической трубе.

Предположим, что: течение ламинарно, т.е. слои газа движутся без перемешивания; газ при небольших изменениях давления несжимаем; движение установившееся; газ полностью "смачивает" стенки трубы, т.е. скорость у стенок равна нулю, а в центре трубы — максимальная. Скорость газа вдоль линии тока в трубе постоянна, она может меняться только вдоль радиуса, т.е. $v = v(r)$. Рассмотрим участок трубы длиной l и радиуса R /рис.13-1/. Выберем ось трубы за ось X , направленную

в сторону течения. Выделим в трубе произвольную бесконечно короткую цилиндрическую часть длины dx и радиуса r . На ее боковую поверхность действует касательная сила внутреннего трения

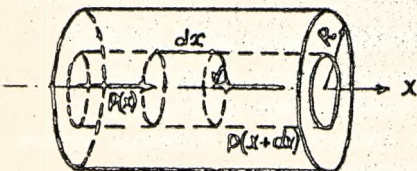


Рис. 13-1

$$dF = -2\pi r \eta \frac{dv}{dr} dx \quad /13-1/$$

На основании цилиндра в том же направлении действует сила разности давлений

$$dF_1 = \pi r^2 (P(x) - P(x+dx)) = -\pi r^2 \frac{dP}{dx} \cdot dx \quad /13-2/$$

При установившемся течении сумма этих сил должна обращаться в нуль, поэтому

$$2\eta \frac{dv}{dr} = r \frac{dP}{dx} \quad /13-3/$$

Производная $\frac{dv}{dr}$ как и скорость не меняется по x , поэтому должна быть постоянной и производная $\frac{dP}{dx}$, равная $\frac{P_2 - P_1}{l}$,

где P_1 и P_2 - соответственно давления на входе и выходе тру-

В результате приходим к уравнению

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta l} r, \quad /13-4/$$

интегрируя которое, получим

$$v = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta l} r^2 + C$$

На стенке трубы, т.е. при $r = R$, скорость $v = 0$, поэтому

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} (R^2 - r^2) \quad /13-5/$$

Из /13-5/ видно, что при удалении от оси скорость меняется по параболическому закону.

Объем газа, вытекающего через кольцевую площадку с внутренним радиусом r и внешним $r + dr$ за время τ равен

$$dQ = v \tau 2\pi r dr = \frac{\pi(P_1 - P_2)}{2\eta l} (R^2 - r^2) r dr \tau$$

Объем газа, вытекающего через поперечное сечение всей трубы за время τ , найдем путем интегрирования этого выражения от 0 до R , т.е.

$$Q = \int_0^R \frac{\pi \tau (P_1 - P_2)}{2\eta l} (R^2 r - r^3) dr = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi R^4 (P_1 - P_2) \tau}{8\eta l} \quad /13-6/$$

Из /13-6/ находим коэффициент вязкости

$$\eta = \frac{\pi R^4 (P_1 - P_2) \tau}{8\eta l Q} \quad /13-7/$$

Это выражение называется формулой Пуазейля.

Предложения, которые были сделаны при выводе /13-7/, не совсем справедливы для реальных газов.

Поправку на неполное смачивание стенок капилляра газом, как очень маленькую, рассматривать не будем. Проверим законность предложений о несжимаемости газа и о ламинарности течения.

В основу проверки допущения о несжимаемости газа можно положить следующее соображение: уравнение Бернулли, связывающее гидродинамическое давление со скоростью течения газа в горизонтальной трубе имеет вид:

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2) \quad /13-8/$$

Но неподвижный манометр, введенный в газ, если он повернут отверстием навстречу потоку, исказит характер потока, т.е. скорость молекул газа перед манометром станет равной нулю / $v_2 = 0$ /, тогда /13-8/ примет вид:

$$P_2 = P_1 + \frac{\rho v^2}{2} \quad /13-9/$$

Итак, неподвижный манометр покажет давление на $\frac{\rho v^2}{2}$ большее, чем манометр, движущийся вместе с потоком. Это избыточное давление возникает вследствие того, что частицы газа, останавливаясь перед манометром, сближаются: поэтому давление повышается, это дополнительное сжатие газа тем менее заметно, чем меньше $\frac{\rho v^2}{2}$ по сравнению с измеряемым давлением /но не по сравнению с разностью давлений/. Поэтому после проведения опыта необходимо проверить, существенную ли ошибку вносит предположение о несжимаемости газа, для чего определяют скорость истечения газа v и убеждаются, что $\frac{\rho v^2}{2} \ll P_{атм}$ /13-10/ под которым находится газ, входящий в капилляр.

В основу проверки законности допущения о ламинарности течения газа можно положить следующие соображения: характер потока газа, т.е. характер распределения скоростей по сечению трубы, определяется величиной соотношения между запасом энергии движущегося потока и энергией, необходимой для преодоления сил внутреннего трения. Это соотношение носит название числа Рейнольдса:

$$Re = \frac{\text{Аббревиатура}}{\text{Атмосфера}} \quad /13-11/$$

Рассмотрим движение газа в трубке длиной l и радиуса R положив, что $R \ll l$. Средняя скорость текущего газа равна

$$v_{cp} = \frac{Q}{St} = \frac{Q}{\pi R^2 l} \quad /13-12/$$

Подставив сюда значение Q из /13-6/, получим:

$v_{cp} = \frac{\pi R^2 (P_1 - P_2) \epsilon}{8 \eta l \pi R^2 v}$, откуда $\pi R^2 (P_1 - P_2) = 8 \eta l \pi v_{cp}$, здесь $\pi R^2 (P_1 - P_2)$ разность сил давления, равная силе трения F , действующей на весь столб газа длиной l со стороны трубы, т.е. $F = 8 \eta l \pi v_{cp}$. При перемещении этого столба на расстояние l эта сила трения совершит работу $A_T = 8 \eta l^2 \pi v_{cp}$ /13-13/

С другой стороны, кинетическая энергия единицы движущегося объема газа равна $\frac{\rho v_{cp}^2}{2}$, а энергия всей массы газа равна

$$A_{об} = \frac{\rho v_{cp}^2}{2} l \pi R^2 = \frac{\rho v_{cp}^2}{2} \pi l^3 \quad /13-14/$$

Следовательно, число Рейнольдса примет вид:

$$Re = \frac{\rho v_{cp} R}{16 \eta} \quad /13-15/$$

Обычно коэффициент $1/16$ отбрасывают и числом Рейнольдса называют выражение $Re = \frac{\rho v_{cp} R}{\eta}$

/13-16/

Чем меньше Re , тем большую роль играют силы вязкости в движении газа. Опытным путем установлено, что при $Re < 1100$ течение ламинарно, при $1100 < Re < 2000$ - неустойчиво, а при $Re > 2000$ - турбулентно. Рассчитав после опыта Re , зная критическое значение $Re = 1100$, можно определить режим течения.

Описание установки.

Установка для измерения коэффициента вязкости газа состоит из /рис.13-2/: капилляра К, манометра М, осушителя С и газометра Г. Капилляр вставляется на резиновых пробках в

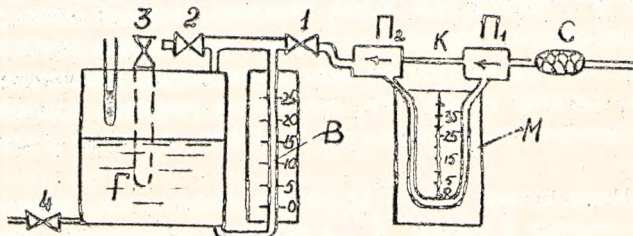


Рис.13-2

патрубки Π_1 и Π_2 . Патрубок Π_1 соединен с атмосферой через

осушитель С, наполненный хлористым кальцием для поглощения паров воды из воздуха, протекающего через кран 1 в газометр Г. Водяной манометр М соединены с патрубками и измеряет разность давлений $P_1 - P_2$ на входе и выходе капилляра. Кран 2 соединяет газометр с атмосферой, кран 3 подает воду в газометр, кран 4 служит для слива воды из газометра. Водомерная трубка „В“ со шкалой позволяет следить за наполнением газометра и за вытекающим из газометра объемом воды, равным объему Q , протекающего через капилляр газа при условии, что температура воздуха в комнате $t_0^{\circ}\text{C}$ и в газометре $t_1^{\circ}\text{C}$ одинакова.

Если $t_0 \neq t_1$, следует ввести такую поправку. Пусть $Q(t_1)$ - объем воды, вытекающей из газометра, равный объему газа при температуре t_1 , вошедшему в газометр на ее место, $Q(t_0)$ - объем газа, протекающего через капилляр в газометр при комнатной температуре t_0 . Этот газ будет занимать в газометре объем $Q(t_1)$, следовательно можно записать:

$$Q(t_1) = Q_0(1 + \alpha t_1) \quad \text{и} \quad Q(t_0) = Q_0(1 + \alpha t_0)$$

где Q_0 - объем газа при 0°C , α - коэффициент объемного расширения газа. Отсюда будем иметь:

$$Q_0 = \frac{Q(t_1)}{1 + \alpha t_1} \quad \text{и} \quad Q(t_0) = \frac{Q(t_1)(1 + \alpha t_0)}{1 + \alpha t_1} \quad /13-47/$$

Порядок выполнения работы.

1. При открытом кране 2, открывая кран 3, наполнить газометр водой, закрыть краны 2 и 3.

2. Открыть кран 1 и отрегулировать, открывая очень медленно кран 4, расход газа через капилляр, который равен расходу воды в газометре. Скорость истечения воды должна быть очень малой. Необходимо следить за уровнем воды в манометре, недопуская ее переброса. Следует учесть, что постоянная разность уровней /стационарное течение/ устанавливается не сразу, а спустя некоторое время.

3. Когда уровни воды в манометре установятся, заметить положение мениска в трубке „В“ и включить секундомер. Измерить время истечения некоторого объема жидкости $Q(t_1)$, одновременно надо следить за показаниями манометра М и в случае малых изме-

нений его показаний брать среднее из показаний в начале и конце опыта. Опыт повторить не менее 10 раз.

4. Рассчитать коэффициент вязкости по формуле /13-7/.

5. По /13-12/ определить среднюю скорость и проверить /13-10/, рассчитать число Рейнольдса.

6. Данные усреднить, рассчитать погрешность опыта.

7. Данные занести в таблицу.

IV. Вопросы для самопроверки.

1. Объяснить происхождение вязкости.
2. Вывести формулу Пуазейля.
3. В каких случаях законно применение формулы Пуазейля?
4. Как проверить законность предположений о несжимаемости газа и ламинарности течения? Смысл числа Рейнольдса.
5. Как вводить поправку, связанную с разностью температур воздуха и жидкости в газометре?
6. Как зависит коэффициент вязкости от температуры, давления?

V. Литература.

1. А.А. Детлаф и др. Курс физики, т. I, "Высшая школа", М., 1978, §§ 11.7, 11.8, 16.1-16.3.
2. И.В. Савельев, Курс общей физики, "Наука", т. I, 1977, §§ 72-77, 128-130.
3. Д.В. Сивухин, Общий курс физики, т. I, "Наука", М., 1974, §§ 89, 94, 96, 97.

Лабораторная работа № 14

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ

I. Цель работы. Изучение поверхностного натяжения жидкостей и определение коэффициента поверхностного натяжения.

II. Приборы и принадлежности. Установка для определения коэффициента поверхностного натяжения жидкостей.

III. Методика и порядок выполнения работы.

Обычно жидкости характеризуют как тела, имеющие определенный собственный объем, но не сохраняющие определенной формы. По своим свойствам жидкости занимают промежуточное состояние между газами и твердыми телами. Этот двойственный характер связан с особенностью движения молекул жидкости. Если в твердом теле частицы колеблются около своих положений равновесия /узлов кристаллической решетки/, то в жидкостях среднее расстояние между молекулами больше, чем у кристаллов, и они могут отходить на большое расстояние от прежних "соседей"; молекулы жидкости совершают колебания около временных локальных положений равновесия. Просуществовав некоторое время в одном положении, молекулы "перескакивают" в другое место, где остаются на некоторое время. Если принять, что соседние молекулы расположены симметрично относительно данной молекулы, то равнодействующая всех сил, приложенных к ней, равняется нулю. Однако из-за теплового движения равновесие нарушается, и молекула приходит в движение под действием равнодействующей силы, не равной уже нулю /происходит "перескок" в новое положение/. Силы межмолекулярного взаимодействия быстро убывают с расстоянием, их действие практически прекращается на расстояниях порядка 10^{-9} м, поэтому энергия каждой молекулы практически определяется только взаимодействием с ближайшими соседями. Молекулы в жидкости можно условно разбить на два класса: молекулы внутри жидкости, имеющие полный набор соседей, и молекулы на поверхности, имеющие неполный набор соседей. Молекулы этих классов отличаются друг от друга тем, что у поверхностных молекул число соседей меньше, чем у внутренних. Действие молекул жидкости на поверхностные молекулы больше, чем со стороны молекул пара или воздуха, поэтому

равнодействующая всех действующих на эти молекулы сил направлена внутрь жидкости нормально к ее поверхности /рис.14-1/. На все молекулы поверхностного слоя действуют силы, стремящиеся втя-

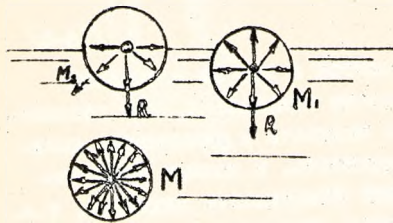


Рис. 14-1

нуть или внутрь жидкости, следовательно чему поверхностный слой давит на жидкость, создавая в ней так называемое внутреннее давление. Это давление очень велико, например, для воды около $11 \cdot 10^8$ Па. В соответствии с этим молекулы поверхностного слоя обладают дополнительной энергией, если их сравнить с внутренними.

Отсюда следует, что, перемещаясь

из поверхностного слоя внутрь жидкости, молекулы совершают положительную работу, и наоборот, переход молекул в поверхностный слой сопровождается отрицательной работой, т.е. требует внешней работы. Если поверхность жидкости увеличивается, то некоторое количество внутренних молекул переходит в поверхностный слой, а для этого надо совершить внешнюю работу. Иными словами, увеличение поверхности жидкости сопровождается отрицательной работой, и наоборот, при сокращении поверхности совершается положительная работа. Пусть изотермическим обратимым образом площадь поверхности изменили на бесконечно малую величину ds , для этого необходима работа

$$dA = -\sigma ds$$

/14-1/

Знак /-/ указывает на то, что увеличение поверхности / $ds > 0$ / сопровождается отрицательной работой. Коэффициент σ является основной величиной, характеризующей свойства поверхности жидкости, и называется коэффициентом поверхностного натяжения. Он измеряется работой, необходимой для изотермического изменения площади поверхности жидкости на единицу. Измеряется σ в Дж/м².

Избыточная энергия поверхностного слоя называется свободной поверхностной энергией. Известно, что работ dA при изотермическом процессе равно изменению свободной энергии $d\phi$, поэтому

Если изменение поверхности жидкости провести адиабатическим образом, то ее температура изменится, например, если каплю жидкости разлить, температура понизится. Коэффициент поверхностного натяжения жидкости можно определить как свободную энергию единицы площади этой поверхности:

$$\sigma = \frac{d\varphi}{ds} \quad /14-2/$$

Всякая система при равновесии находится в том из возможных состояний для нее, при котором энергия минимальна, для рассматриваемого случая это означает, что жидкость в равновесии должна иметь минимально возможную поверхность, и должны существовать силы, препятствующие увеличению поверхности жидкости, т.е. стремящиеся сократить эту поверхность. Очевидно, что эти силы должны быть направлены вдоль самой поверхности, т.е. по

касательной к ней /рис.14-2/
Эти силы называются силами поверхностного натяжения. Коэффициент поверхностного натяжения численно равен силе F ; действующей на единицу длины произвольной линии l ; мысленно проведенной на поверхности жидкости.

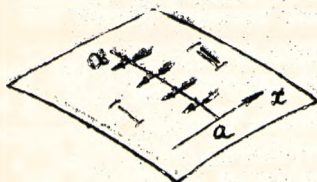


Рис. 14-2

$$\sigma = \frac{F}{l} \quad /14-3/$$

В этом случае единицей измерения будет Н/м.

Коэффициент поверхностного натяжения зависит от рода жидкости, температур, степени чистоты поверхности, растворения в жидкости поверхностно-активных веществ, адсорбирующихся на поверхности и уменьшающих свободную поверхностную энергию.

а/ Метод отрыва кольца.

Сущность метода определения σ состоит в измерении силы, которую надо приложить, чтобы оторвать тонкое металлическое кольцо от поверхности жидкости. Установка изображена на рисунке 14-3. Тонкое кольцо K , изготовленное из материала, который хорошо смачивается жидкостью, подвешено на пружине Π так, что ось кольца вертикальна. Пружина Π прикреплена к кронштейну, жестко связанно-

му с корпусом Б, вдоль которого при помощи микрометрического винта М передвигается столик С. На столике устанавливается со-

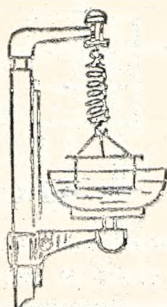


Рис. 14-3

суд с исследуемой жидкостью. Удлинение пружины /тем самым и силу ее натяжения/ определяется по миллиметровой шкале А. Если подвести снизу сосуд с жидкостью к кольцу так, чтобы оно слегка коснулось поверхности жидкости, то вода /в случае нашего опыта/ начнет подниматься по стенкам кольца, и кольцо несколько втянется внутрь воды, что зафиксируется небольшим

растяжением пружины в момент соприкосновения. При медленном опускании сосуда с помощью микрометрического винта пружина будет растягиваться, пока кольцо не оторвется от поверхности. Орыв /разрыв поверхности жидкости/ происходит по двум окружностям, диаметры которых d_1 и d_2 равны внешнему и внутреннему диаметрам кольца /рис. 14-4/. Общая длина линий разрыва равна $\Delta = \pi(d_1 + d_2)$. Обозначив толщину стенок кольца через h и используя формулу /14-3/, получим

$$\sigma = \frac{F}{2\pi(d_2 - h)} \quad /14-4/$$

Порядок выполнения упражнения.

1. При помощи разновесов от 0,5 до 10 г исследовать зависимость длины пружины от натяжения. По данным построить график.
 2. Тщательно протереть кольцо.
 3. Наполнить сосуд водой, поставить его на столик, поднимать его, пока кольцо не соприкоснется с поверхностью воды.
 4. Медленно опуская столик, зафиксировать удлинение пружины, при котором кольцо оторвется от поверхности воды.
 5. Определить положение кольца после отрыва. Найти
 6. Повторить измерения не менее 10 раз. Данные усреднить, рассчитать погрешность измерений и величину
 7. Данные занести в таблицу.
- б/ Метод Ребиндера.

Идея метода Ребиндера состоит в следующем: если разность

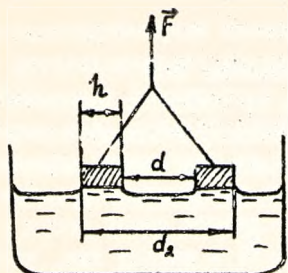


Рис. I4-4

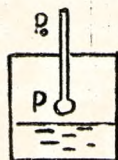


Рис. I4-5

давлений на входе в капилляр и в сосуде с жидкостью, в которую опущен конец капилляра /рис. I4-5/ не равна нулю, на конце капилляра возникает воздушный пузырек /воздух продавливается через капилляр/. По мере увеличения ΔP этот пузырек постепенно увеличивается, причем его радиус /рис. I4-6/ вначале уменьшается, и

растущая разность давлений уравнивается поверхностным натяжением в соответствии с формулой Лапласа

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{r} \quad /I4-5/$$

где r - радиус пузырька.

Уменьшение радиуса скоро прекращается и начинается рост пузырька. Очевидно, что радиус пу-

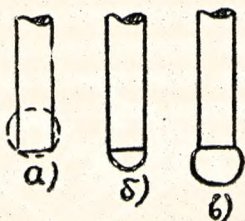


Рис. I4-6

зырька не может быть меньше радиуса капилляра. Давление, которое компенсируется поверхностным натяжением, следовательно, не превосходит

$$\Delta P_{max} = \frac{2\sigma}{r_0} \quad /I4-6/$$

В связи с трудностью определения радиуса капилляра формулу /I4-6/ лучше представить в виде

$$\sigma = k \Delta P \quad /I4-7/$$

где k - параметр, определяемый из опыта с известной жидкостью. В работе k определяется из опыта с дисциллированной водой и задается в таблице на панели работы.

Схема установки изображена на рисунке I4-7. Она состоит из

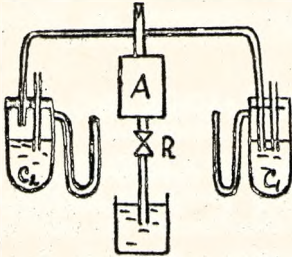


Рис. 14-7.

двух капилляров K_1 и K_2 , вставленных через резиновые уплотнители в сосуды C_1 и C_2 так, что они касаются поверхности жидкостей, которые подлежат определению. Вторыми концами капилляры сообщаются с атмосферой. Для создания разрежения в сосудах служит аспиратор A , в который наливается вода. Аспиратор сое-

динен с C_1 и C_2 системой трубок. Кран 1 служит для подключения одного, либо другого капилляра, краном 2 регулируется скорость вытекания воды из аспиратора, тем самым и разрежение в сосудах, измеряемое манометрами M_1 и M_2 .

Найдем условия, необходимые для работы установки. Объем воды в аспираторе должен быть достаточен для создания в сосудах разности давлений $\Delta p > \Delta p_{max}$. Обозначим через V_0^*

- начальный объем воздуха в аспираторе, сосуде и соединительных трубках; P_0 - начальное давление, равное атмосферному; V - объем, занимаемый воздухом при вытекании всей воды; P - давление. По закону Бойля-Мариотта $PV = P_0V_0$

/14-8/

Очевидно, что $P_0 - P > \frac{2\sigma}{r_0}$

/14-9/

тогда

$$P_0(V - V_0) > V_0 \frac{2\sigma}{r_0} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta V}{V} > \frac{2\sigma}{r_0 P_0}$$

/14-10/

где $\Delta V = V - V_0$ объем жидкости в аспираторе.

Кроме того, столб воды в аспираторе должен быть достаточно высок, чтобы вода вообще могла вытекать при образующейся разности давлений, т.е. необходимо, чтобы

$$\rho g h > \frac{2\sigma}{r_0}$$

/14-11/

где h - высота столба жидкости в аспираторе; ρ - плотность воды; g - ускорение силы тяжести.
Условия /I4-I0/ и /I4-II/ являются необходимыми для работы установок.

Порядок выполнения упражнения.

I. Залить воду в аспиратор. Ключом I соединить аспиратор с сосудом C.

2. Краном 2 отрегулировать скорость истечения воды из аспиратора, чтобы пузырьки в капилляре K, образовывались примерно один раз в 10-15 с.

3. Замерить давление манометром M.

4. Опыт повторить не менее 10 раз.

5. По формуле /I4-7/ рассчитать σ . Данные усреднить.

6. Рассчитать погрешность опыта.

7. По формулам /I4-I0/ и /I4-II/ показать, что они выполняются с большим запасом.

8. Данные занести в таблицу.

IV. Вопросы для самопроверки.

I. Какой характер движения частиц при различных агрегатных состояниях вещества? 2. Особенности поведения частиц жидкости. 3. Причины появления сил поверхностного натяжения.

4. Что называется коэффициентом поверхностного натяжения? В каких единицах его можно измерять? 5. Сущность методов определения σ . 6. При каких условиях может работать установка Ребиндера? 7. От чего зависит величина коэффициента поверхностного натяжения и почему?

V. Литература.

I. А.А.Детлеф и др. Курс физики, т. I, "Высшая школа", М., 1973, §§ 14.1, 14.2, 14.4, 14.5, 14.6.

2. И.В.Савельев, Курс общей физики, т. I, "Наука", М., 1977, §§ 115, 116, 117, 109.

3. А.К.Кикоин, И.К.Кикоин, Молекулярная физика, "Наука", М., 1976, §§ 83, 95, 98; 100, 102.

Лабораторная работа № 15

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ УПРУТОГО УДАРА

I. Цель работы. Определение времени соударения шаров и средней силы удара.

II. Приборы и принадлежности. Набор шаров различных диаметров из разных материалов. Запоминающий осциллограф. Установка для исследования удара шаров.

III. Методика и порядок выполнения работы.

Введение. Основные определения, относящиеся к удару, даны в описании работы № I. При абсолютно упругом ударе выполняются законы сохранения импульса и механической энергии. Опыт показывает, что время удара очень мало, поэтому перемещением соударяющихся тел за это время можно пренебречь. Потенциальная энергия этих тел во внешнем силовом поле, поэтому за время удара не изменяется, и суммарная кинетическая энергия тел до и после удара одинакова. В данной работе рассматривается прямой удар двух шаров, являющихся в силу их однородности центральным. Рассмотрим процесс соударения. При сближении шаров, начиная с момента их первоначального соприкосновения, возрастают силы деформации, соответственно, возрастают и упругие силы, препятствующие деформациям. Скорости тел при этом изменяются, пока не станут равными, в этот момент деформации максимальны, максимальны и упругие силы взаимодействия. В системе отсчета, где центр масс шаров покоится, полная кинетическая энергия шаров равна нулю, т.е. кинетическая энергия, которой обладали шары до соударения, полностью переходит в потенциальную энергию упругих деформаций шаров. Затем силы деформации расталкивают шары до тех пор, пока они не разойдутся. При этом потенциальная энергия деформаций шаров целиком переходит обратно в их кинетическую энергию, шары восстанавливают свою форму и оказываются недеформированными. Фактически, процесс удара намного сложнее, так как при соударении в шарах возбуждаются упругие волны, распространяющиеся в шарах и после удара, поэтому кинетическая энергия шаров после удара меньше, чем до удара, на величину энергии этих волн. Ввиду малости энергии волн, как показывают

расчеты, учитывать ее не будем.

Потенциальная энергия деформированных шаров при их сближении на расстояние h /рис.15-1/, равна

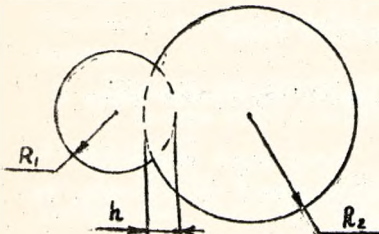


Рис. 15-1

$$U = \frac{2}{5D} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} h^{5/2} \quad /15-1/$$

$$\text{где: } D = \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \sigma_1^2}{E_1} + \frac{1 - \sigma_2^2}{E_2} \right)$$

R_1 и R_2 - радиусы шаров; σ_1 и σ_2 - коэффициенты Пуассона; E_1 и E_2 - модули Юнга материалов шаров. Полная энергия шаров до соударения равна в системе отсчета, где центр масс шаров покоится, кинетической энергии относительного движения

$$T = \frac{\mu V^2}{2} \quad /15-2/$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ приведенная масса; V - относительная скорость шаров в момент начала соударения. В процессе соударения полная энергия шаров равна сумме кинетической энергии и потенциальной энергии деформаций. Если кинетическую энергию записать в виде $T = \mu \frac{h^2}{2}$, где $h = \frac{dh}{dt}$ - относительная скорость соударяющихся шаров в процессе соударения, то по закону сохранения механической энергии имеем:

$$\frac{\mu V^2}{2} = \mu \frac{h^2}{2} + \frac{2}{5D} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} h^{5/2} \quad /15-3/$$

Из /15-3/ можно определить время τ , в течение которого h меняется от 0 до h_{max} и обратно до нуля. Интегрирование дает

$$\tau = 2,94 \left(\frac{\mu^2}{\kappa^2 V} \right)^{1/5}, \quad \text{где } \kappa = \frac{4}{5D} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad /15-4/$$

Если соударяются шары из одинакового материала и одинаковых радиусов / $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $E_1 = E_2 = E$, $R_1 = R_2 = R$ /, то с учетом того, что $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = V_0$ - скорости звука в материале шара, /15-4/ приводится к виду:

$$\tau = 5,85 (1 - \sigma)^{2/5} \frac{R}{V_0} \left(\frac{V_0}{V} \right)^{1/5} \quad /15-5/$$

В данной работе используются стальные и алюминиевые шары, для которых $\sigma = 0,28$ и $\sigma = 0,33$, поэтому в обоих случаях можно принять $(1 - \sigma)^{2/5} = 0,95$, тогда время соударения будет

равным $\gamma = 5,6 \frac{R_0}{V_0} \left(\frac{V_c}{V} \right)^{1/5}$ /15-6/

Как было указано выше, силы, возникающие при деформациях шаров в процессе соударения, как-то меняются со временем.

Найдем среднюю по времени силу, действующую на один из шаров. По определению $\langle \vec{F} \rangle = \frac{\int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt}{t_1 - t_0}$, где t_0 - момент начала соударения; t_1 - момент конца соударения; \vec{F} - мгновенная сила взаимодействия шаров. Согласно второму закону Ньютона:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \text{ тогда } \langle \vec{F} \rangle = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{p}}{dt} dt$$

откуда $\langle \vec{F} \rangle = \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta \vec{p}}{\tau}$, здесь \vec{p}_0 - импульс шара до удара; \vec{p}_1 - импульс шара после удара; $\tau = t_1 - t_0$ - время соударения. Модуль средней силы равен

$$|\langle \vec{F} \rangle| \equiv \langle F \rangle = \frac{|\Delta \vec{p}|}{\tau}$$

Если шары одинаковы и один из них до удара покоился, то можно показать, что налетающий шар после удара останавливается, а ранее покоящийся начинает движение с той скоростью, какую имел налетающий шар в момент начала удара. В этом случае для первоначально покоящегося шара имеем $p_0 = 0$, $p_1 = mv$, где m - масса шара. Тогда $\langle F \rangle = \frac{mv}{\tau}$ /15-7/

В данной работе предполагается измерить время соударения для различных пар одинаковых шаров, исследовать его зависимость от радиусов шаров, скорости звука в шарах и относительной скорости соударения, вычислить модуль средней силы удара и определить графически ее зависимость от относительной скорости шаров.

Описание установки и теория метода.

Установка для изучения удара шаров состоит из прибора, схематически изображенного на рисунке 15-2, и электроннолучевого осциллографа с памятью. На планке, к которой подвешиваются шары, имеется ряд прорезей. Провода, на которых висят шары, пропускаются через те прорези, для которых расстояния $10,0''$ равно диаметру шаров, при этом они висят, соприкасаясь друг с

другом, а провода параллельны.

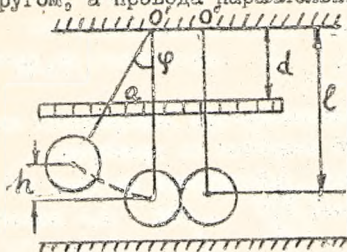


Рис. 15-2

Один из шаров отводится от положения равновесия на угол φ и отпускается. Происходит удар, и второй шар начинается с той скоростью, которую имел первый в начальный момент удара. Заметив отклонение "а" нити по шкале перед ударом, можно определить скорость шара непосредственно перед соударением. Из закона сохранения

энергии имеем
$$mgh = T = \frac{mV^2}{2} \quad /15-8/$$

где m - масса шара; h - высота подъема шара в крайнем положении; V - скорость шара непосредственно перед соударением. Из рис. 15-2 видно что: $V = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\varphi}{2}$, поэтому

$$h = l(1 - \cos \varphi) = 2l \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad /15-9/$$

Поскольку один шар покоился, можно считать, что определяемая по /15-9/ скорость, есть относительная скорость соударяющихся шаров. Угол φ определяется соотношением $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{d} \quad /15-10/$

При установлении связи между скоростью V и кинетической энергией T следует иметь ввиду, что движение шара является наложением поступательного движения по окружности радиуса l и вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через центр шара, с угловой скоростью ω . В этом случае кинетическая энергия складывается из энергии поступательного движения $\frac{mV^2}{2}$ и энергии вращательного движения $\frac{J_0 \omega^2}{2}$, где J_0 - момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр. Расчет, однако, показывает, что учет энергий вращения дает ошибку, не превышающую 1%, поэтому формула /15-8/ достаточно верна.

Измерение времени соударения производится с помощью осциллографа с памятью.

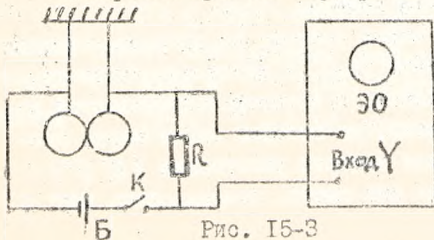


Рис. 15-3

Шары, висят на проводах, включены в электрическую цепь /рис.15-3/. Она состоит из батареи B и сопротивления /резистора/ R . Ключ K служит для отключения батареи

от R . Во время удара шары соприкасаются и замыкают цепь. Через R протекает ток, а на его концах возникает разность потенциалов U_R , практически равная ЭДС батареи \mathcal{E} /сопротивление R много меньше внутреннего сопротивления батареи/. Напряжение U_R подается на вход Y осциллографа. В момент t начала соударения по R начинает течь ток и напряжение на входе осциллографа скачком достигает величины \mathcal{E} . Осциллограф настроен так, что луч начинает перемещаться по горизонтали в момент подачи на вход Y напряжения, т.е. в момент t_1 . После окончания соударения /в момент t_2 / шары расходятся и напряжение U_R становится равным нулю /цепь размыкается/. Таким образом, длительность импульса напряжения на сопротивлении R /на входе Y осциллографа/ равна времени $\tau = t_2 - t_1$ соударения. Длительность импульса напряжения измеряется с помощью осциллографа. Под действием U_R электронный луч на экране осциллографа описывает кривую, показанную на рис. 15-4 /вертикальные отрезки обычно просматриваются слабо/. Длительность импульса по кривой на экране определяется

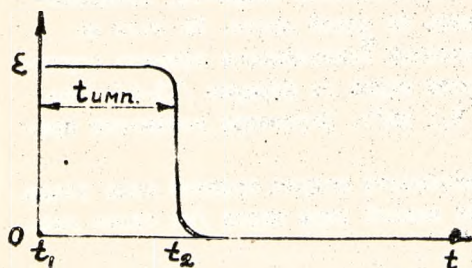


Рис. 15-4

следующим образом. Измеряется ширина импульса $t_{имп}$ в см по сетке на экране, тогда длительность импульса

$$\tau = k t_{имп} \quad /15-11/$$

где k — множитель длительности развертки, позволяющий длительность импульса шириной в 1 см.

Способ определения k указан в инструкции по работе с осциллографом, расположенной на панели работы.

Порядок выполнения работы.

1. Тщательно изучить инструкции по работе с осциллографом, расположенную на панели стола. Убедившись в том, что положения ручек осциллографа соответствуют п.1 инструкции, включить шнур осциллографа в сеть и нажать кнопку "сеть". Осциллограф должен прогреться 25-30 минут.

2. Подвесить исследуемую пару шаров так, как указано в Описании установки. Поставить ручки осциллографа в положения, указанные в п.2 инструкции. Нажать кнопку "Стирание" осциллографа. Отклонить шар на некоторый угол, измерив "а" согласно рис. 15-2. Удерживая шар в этом положении, закинуть ключ K

и нажать кнопку "готов" осциллографа. Отпустить шар без толчка и остановить шары после удара. Измерить длительность импульса $t_{имп}/в см/$ на экране. Повторить измерения при каждом "а" 3-5 раз. Отводя шар в очередной раз, следует нажать кнопку "стирание", затем "готов" и после этого отпустить шар. Аналогичные измерения провести при различных "а" /не менее 5-ти значений/. По окончании измерений разомкнуть ключ K . Результаты записать в таблицу I.

3. Повторить измерения п.2 для трех остальных пар шаров. Закончив измерения, разомкнуть ключ K , нажать кнопку "выкл" осциллографа и поставить его ручки в соответствии с п.1 инструкции. Выключить шнур осциллографа из сети.

4. Найти согласно п.3 инструкции R и для каждой пары шаров и каждого "а" определить:

а/ время соударения шаров по формуле /15-II/;

б/ модуль средней силы по /15-7/, определив предварительно φ по /15-10/ и V по /15-9/. Данные занести в таблицу 2.

5. Для каждой пары шаров построить график зависимости времени соударения шаров от их относительной скорости, вычисляемой по /15-9/. График построить на одном листе. На этом же листе нанести график теоретической зависимости времени соударения от относительной скорости шаров по формуле /15-6/. Скорость звука в стали $V_0 = 5,1 км/с$. Параметры установки приведены на панели стола.

6. Построить графики зависимости модуля средней силы удара от относительной скорости для каждой пары шаров /на одном листе/.

7. При построении графиков надо указать области погрешности для каждой экспериментальной точки. В данной работе можно учитывать только погрешности градуировки приборов. Погрешность длительности импульса $t_{имп}/в см/$ на экране принять равной $\Delta t_{имп} = 1 мм$, погрешностью R можно пренебречь. Погрешность скорости оценивается обычным образом из формулы /15-9/.

IV. Вопрос для самопроверки.

1. Закон сохранения при абсолютной упругом ударе.

2. Описать упругий удар с точки зрения закона сохранения и превращения энергии.

3. Вывод формул /15-6/ и /15-7/.
4. Принцип работы установки.
5. Оцените величину энергии вращательного движения шара в работе.
6. Почему шары подвешиваются так, что они должны соприкасаться и нити подвесов должны быть параллельны?
7. Могут ли скорости шаров после прямого центрального абсолютно упругого удара стать равными между собой?
8. Доказать, что при абсолютно упругом ударе двух одинаковых шаров они обмениваются скоростями.

§. Литература.

1. А.А. Пестерев и др., Курс физики, "Высшая школа", М., 1973, § 5, § 2 т.1
2. И.В. Савельев, Курс общей физики, "Наука", М., 1977, §§ 24-26, т. I

**ОСНОВЫ
ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ.**

Введение. Основным методом получения информации об изучаемых явлениях в физике является опыт, т.е. наблюдение явления в точно контролируемых условиях позволяющих следить за его ходом и воссоздавать его каждый раз при повторении этих условий. Количественную информацию о явлении получают, измеряя ту или иную физическую величину, характеризующую данное явление прямым или косвенным образом.

Обычно предполагается, что для измеряемой величины x существует ее точное, или истинное, значение x_0 .

Измеренное значение $x_{изм}$ всегда отличается от x_0

Совершенствование методики эксперимента дает возможность лишь приблизиться к x_0 с определенной степенью точности, т.е. всегда существует некая ошибка, или погрешность, в определении x

Без информации о точности измерения его результат совершенно бесполезен.

§ I. Общие сведения об ошибках.

Ошибкой δx_i -го измерения называется разность

$$\delta x_i = x_{изм i} - x_0 \quad /I/$$

Все ошибки можно подразделить на:

а/ систематические - постоянные или изменяющиеся по определенному закону на протяжении всей серии измерений; они являются следствием неисправности или конструктивных недостатков прибора или установки, ошибочностью метода измерений и т.п.

б/ случайные - возникающие из-за несохранения постоянства условий опыта /ошибки разброса/, несовершенства органов чувств наблюдателя /субъективные ошибки/ и т.д.;

в/ промахи - резко отличающиеся от ожидаемых и возникающие при неправильном отсчете по шкале прибора, неточной записи и т.д.

Систематические ошибки можно устранить или учесть сверкой используемого прибора с эталонным изменением методики опыта и сравнением данных, полученных различными способами.

Неучтенная систематическая ошибка сдвигает результат изме-

рения в ту или другую сторону от истинного.

Случайные ошибки обнаруживаются путем повторных измерений и, поскольку они в отличие от систематических изменяют, вообще говоря, величину и знак от опыта к опыту, то с помощью методов математической статистики можно уменьшить их влияние на точность результата измерения. При этом оказывается, что чем больше измерений проведено, тем меньше может быть сделана случайная погрешность окончательного результата измерения. Поэтому всякое измерение должно быть многократно /не меньше трех раз/ повторено!

Промахи обычно устраняются отбрасыванием результатов, резко отличающихся от средних.

В связи с тем, что истинное значение x_0 обычно неизвестно, разность $|I|$ также становится неизвестной, поэтому важной задачей становится оценка δx . Одним из путей решения этой задачи является указание верхнего предела модуля возможной

Погрешностью измерения величины x называется такая величина Δx , что

$$|\delta x| \leq \Delta x \quad /2/$$

Из /1/ и /2/ получаем

$$x_{изм} - \Delta x \leq x_0 \leq x_{изм} + \Delta x \quad /3/$$

Результат измерения всегда должен указываться с погрешностью

тью

$$x = x_{изм} \pm \Delta x \quad /4/$$

При одинаковой величине Δx точность метода измерений может быть различна, например, из двух измерений длины

$$L_1 = /1,0 \pm 0,1/ \text{ м} \quad \text{и} \quad L_2 = /100,0 \pm 0,1/ \text{ м}$$

второй результат несомненно точнее, хотя Δx у них одинаково. В связи с этим, а также из-за неудобства сравнения точности измерения различных величин, например, длины и времени, вводят относительную погрешность.

Относительной погрешностью E физической величины называется отношение

$$E = \frac{\Delta x}{|x_{изм}|} \quad /5/$$

Обычно E выражают в процентах.

Погрешность Δx нельзя вводить как строгий и абсолютно надежный предел возможной ошибки. Например, измерение длины ма-

ятника дало величину $L = /108 \pm 1/$ мм, это означает, что, согласно /3/, длина лежит в пределах от 107 до 109 мм. На самом деле неравенство /3/ имеет вероятностный смысл, т.е. нельзя с полной уверенностью утверждать, что величина лежит именно в таких пределах, но имеется определенная вероятность этого, называемая доверительной вероятностью, или надежностью интервала

$$[x_{изм} - \Delta x, x_{изм} + \Delta x]$$

Если надежность требуется очень большая, в /3/ придется выбирать Δx очень большим - экспериментальные данные окажутся расплывчатыми, например, в записи $L = /108 \pm 108/$ мм надежность очень большая, однако, информация здесь минимальна: длина меньше 216 мм. Если выбрать очень малым Δx , делая очень точные предсказания относительно x_0 , данные могут оказаться ложными, например, $L = /108,0000 \pm 0,0001/$ мм, и надежность будет малой.

В связи с этим приходится искать компромисс между требованиями надежности и определенности предсказаний.

В курсе физпрактикума БИСИ надежность устанавливается на уровне 80%, и является достаточно высокой.

§ 2. Обработка результатов прямых измерений.

Прямыми называются такие измерения, в которых результат считается непосредственно со шкалы прибора.

Вычисления при этом сводятся к учету цены деления шкалы или других переводных множителей. К прямым измерениям относятся измерения длин линейкой, микрометром, штангенциркулем; времени - секундомером, массы - весами, давления - барометром или манометром и др.

Учет ошибок при прямых измерениях.

I. Систематические ошибки.

Учет точности показаний приборов из-за погрешностей изготовления, нанесения шкал и др., т.е. ошибки градуировки, характеризуются предельной погрешностью градуировки Δx_{grad} . Для наиболее часто употребляемых приборов в лабораториях ниже приведена таблица I погрешностей градуировки /надежность не ниже

60%.

Таблица I.

Характеристики мер.

Наименование	Мера	Значение меры	Пределы допускаемой погрешности
I:	2	3	4
1. Линейки металлические ГОСТ 427-86		150; 300 мм 500; 1000 мм	0,10 мм 0,20 мм
2. Линейки деревянные ГОСТ 12646-67		200; 250; 300; 400 500; 600; 750	0,1 мм на каждые 100 мм
3. Гири для технических анализов обычной точности ГОСТ 7328-65		10, 20, 50, 100 мг 200 мг 500 мг 1 кг 2 кг 5 кг 10 кг 20 кг 50 кг 100 кг	1 мг 2 мг 4 мг 6 мг 8 мг 12 мг 20 мг 30 мг 40 мг
4. Мензурки 2-го класса ГОСТ 1770-64		100 мл 200 мл	5,00 мл
<u>Характеристики измерительных приборов.</u>			
5. Штангенциркули ГОСТ 166-63		0-125 мм 0-200 мм 0-320 мм	0,05 мм в за- 0,1 мм виси- МРС- ти от цены де- ления номинала.
6. Микрометры с ценой деления 0,01 мм ГОСТ 6507-60		0-25 мм	4 мкм
7. Индикатор часового типа с ценой деления 0,01 мм, ГОСТ 577-68		0-2 мм 0-5 мм 0-10 мм	1 2 мкм 16 мкм 20 мкм
8. Весы лабораторные ГОСТ 14704-69		10-200 г 5-100 г	три значения цены деления отсчетной шка- лы.
9. Весы школьные		10-200 г	100 мг
10. Секундомеры механические ГОСТ 5072-72		Емкость шкалы 30-60 мин	Средняя погреш- ность за 30 мин ± 0,7 с.
II. Секундомеры электрические			0,5 значения цены деления прибора за один

1:	2	3	4
			оборот секунд- ной стрелки.
12. Термометры стеклянные жид- костные /нертутные/ ГОСТ 9177-59	Интервал измере- мых температур от -20 до 100°С		Значение цены деления шкалы, если она рав- на 1, 2, 5 и две цены де- ления, если она равна 0, 2; 0, 5
13. Термометры ртутные стек- лянные ГОСТ 2045-71	Интервал измер. температур от -35°С до 100°С.		
14. Электроизмерительные при- боры.			0,01 К·Х <i>прег</i> где <i>Хпрег</i> - пре- дельное значе- ние величины которое может быть измерено прибором; - класс точности прибора, указы- ваемый на его шкале /обычно от 0,05 до 4,0/.

П. Случайные ошибки.

1. Субъективные ошибки /ошибки отсчитывания/.

Природа таких ошибок - несовершенство органов чувств наблюдателя. К ошибкам отсчитывания ведет неидеальность выполнения процедуры измерений, например, неточное совмещение линейки с концами бруска, неточное включение секундомера в момент начала движения, неперпендикулярное шкале прибора наблюдение за стрелкой-указателем и т.п. Эти ошибки характеризуются предельной погрешностью отсчитывания Δz_{ome}

Поскольку учесть влияние на предельную погрешность субъективные особенности наблюдателя трудно, вводится следующее правило:

если цена деления прибора равна d , то

$$\Delta z_{ome} = \begin{cases} 0,5d & \text{при округлении отсчета до целых делений} \\ 0,3d & \text{при возможности отсчета целых делений} \\ & \text{и половины.} \end{cases}$$

Надежность этих оценок также порядка 80%.

2. Ошибки разброса.

Природа этих ошибок - неконтролируемые, изменяющиеся от опыта к опыту причины, приводящие к тому, что результаты аналогичных измерений в практически неизменных условиях оказываются, в принципе, различными. Появляются они при совместном действии большого числа независимых причин, каждая из которых оказывает на результат опыта малое влияние.

Пусть проводится серия из "n" измерений величины x при отсутствии систематических и субъективных ошибок, тогда несомнение x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) будет вызвано только ошибками разброса.

В качестве наиболее вероятного значения измеряемой величины принимается среднее арифметическое значение из измеренных значений

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad /6/$$

Для оценки погрешности, допускаемой при использовании в качестве истинного значения, вводится средняя погрешность по разбросу

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \langle x \rangle|}{n}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad /7/$$

При отсутствии $\Delta x_{\text{рад}}$ и $\Delta x_{\text{отс}}$ надежность интервала $[\langle x \rangle - r, \langle x \rangle + r]$, т.е. вероятность выполнения двойного неравенства

$$\langle x \rangle - r \leq x_0 \leq \langle x \rangle + r \quad /8/$$

при числе измерений $n \geq 4$ не менее 80%.

При меньшем числе измерений гарантия надежности указанного интервала уменьшается. Для сохранения надежности в 80% в этом случае результат вместо /8/ необходимо записать в виде:

$$\langle x \rangle - \Delta x_{\text{рад}} \leq x_0 \leq \langle x \rangle + \Delta x_{\text{рад}} \quad /9/$$

где $\Delta x_{\text{рад}} = K \cdot r$ - погрешность среднего по разбросу;

K - коэффициент надежности.

$$\Delta x_{\text{рад}} = \begin{cases} r & \text{при } n \geq 4 \quad (K = 1) \\ 1,5r & \text{при } n = 3 \quad (K = 1,5) \\ 3r & \text{при } n = 2 \quad (K = 3) \end{cases} \quad \circ$$

Полная погрешность при учете всех типов ошибок определяется как

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{зад}})^2 + (\Delta x_{\text{отв}})^2 + (\Delta x_{\text{рег}})^2} \quad /II/$$

Окончательный результат записывается в виде

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x \quad /I2/$$

и имеет надежность на уровне 80%.

По приведенной выше упрощенной методике величину Δx необходимо округлять до одной значащей цифры. Если в результате округления эта цифра равна 1, необходимо удержать в Δx две значащих цифры, округлив вторую из них до 0 или 5. Другие двузначные числа, например, 1,7; 2,5; 2,7 и т.п. в записи погрешности не допускаются. При первоначальной записи погрешности должны приводиться со всеми известными цифрами.

Пример № 1.

№:	Δx	округленная:
1.	0,12	0,10
2.	0,13	0,15
3.	0,16	0,15
4.	0,18	0,2
5.	0,23	0,2
6.	0,35	0,4
7.	3,48	3

III. Промахи.

Иногда во время обработки данных выясняется, что один или несколько результатов резко отличается от большинства других. По-видимому, при этих наблюдениях допущена грубая ошибка - промах. При вычислении среднего такие результаты следует отбросить. Однако это можно сделать только в том случае, если число наблюдений не меньше четырех; из трех наблюдений, конечно, нельзя выбрасывать ни одного.

Пример № 2.

При шестикратном измерении времени движения груза с помощью электрического секундомера были получены следующие значения

20,56; 20,64с; 20,74с; 20,36 с; 20,70; 17,58 с;

Требуется определить время движения груза t . Цена деления

шкалы секундомера $d = 0,01$ с.

1. Результат 17,58 с отбрасывается как промах.

2. Согласно /6/ имеем

$$\langle t \rangle = \frac{20,56 + 20,64 + 20,74 + 20,86 + 20,70}{5} = 20,60 \text{ с}$$

3. Согласно /10/ $\kappa = 1$ при $n \gg 4$, поэтому

$$\Delta x_{\text{рег}} = \kappa = \frac{0,04 + 0,04 + 0,14 + 0,24 + 0,10}{5} = 0,11 \text{ с}$$

После округления получим

$$\Delta x_{\text{рег}} = 0,10 \text{ с}$$

4. Находим $\Delta x_{\text{фад}} = \frac{d}{2} = 0,005$ с

5. Судя по записи, результат округляется до целых делений шкалы прибора, поэтому

$$\Delta x_{\text{отс}} = \frac{1}{2} d = 0,005 \text{ с}$$

6. Полная погрешность

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{фад}})^2 + (\Delta x_{\text{рег}})^2 + (\Delta x_{\text{отс}})^2} = 0,10 \text{ с}$$

7. Окончательный результат записывается в виде

$$t = 20,60 \pm 0,10 / \text{с}$$

Практический совет: Если оказывается, что одна из величин $\Delta x_{\text{рег}}$, $\Delta x_{\text{отс}}$, $\Delta x_{\text{фад}}$ в три и более раз превышает два другие, то можно положить полную погрешность равной этой большей погрешности.

§ 3. Обработка результатов косвенных измерений.

Косвенными называются такие измерения, при которых интересующая величина вычисляется как функции одно или нескольких прямым образом измеряемых величин.

Например: измерение плотности материала полого цилиндра, определяемой как $\rho = m/V$, где $V = \pi R^2 (R_1^2 - R_2^2)$, является косвенным и $\rho = \rho(m, R, R_1, R_2)$

I. Функция одной переменной.

Пусть W - функция одной переменной, например, $S = L^2$

или $L = \sqrt[3]{V}$. В общем виде $W = W(x)$. Здесь x — прямая образом измеренная величина.

Если $\langle x \rangle$ — среднее значение величины x , то $\langle W \rangle = W(\langle x \rangle)$ — среднее значение величины W /рис. I/.

Ошибка ΔW , обусловлена ошибкой Δx в величине x .

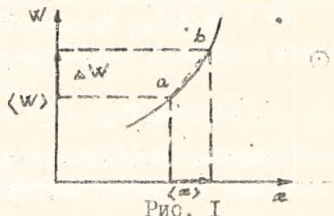


Рис. I

Ошибке $\Delta x = |x_{изм} - \langle x \rangle|$ соответствует ошибка

$$\Delta W = |W(\langle x \rangle + \Delta x) - W(\langle x \rangle)| \approx \left| \frac{dW}{dx} \right| \Delta x \quad /I3/$$

Производная $\frac{dW}{dx}$ взята в точке $x = \langle x \rangle$. Знак приближенного равенства в /I3/ связан с предположением, что ошибка Δx достаточно мала и в интервале измеренных значений x функцию $W(x)$ можно представить прямой /от т. a до т. b на рис. I/.

При вычислениях сначала рассчитывается дифференциал функции $dW = \frac{dW}{dx} dx$, а затем дифференциал независимой переменной заменяется на погрешность, причем производная берется по модулю и в выражение для нее подставляется

$$\Delta W_{погр} = \pm \left| \left(\frac{dW}{dx} \right)_{x = \langle x \rangle} \right| \Delta x \quad /I4/$$

Пример 3.

Объем куба $V = a^3$ / a — длина ребра/, $\langle a \rangle = 4,52$ см, $\Delta a = 0,04$ см; необходимо определить ΔV .

1. Дифференциал: $dV = 3a^2 da$
2. Замена дифференциалов на погрешности $\Delta V = 3\langle a \rangle^2 \Delta a$
3. Подстановка: $\langle a \rangle = 4,52$ см и $\Delta a = 0,04$ см.
 $\Delta V = 3 \cdot 4,52^2 \cdot 0,04 = 2,4516 \approx 2,45 / \text{см}^3 /$. Округлим погрешность до одной значащей цифры. Получим $\Delta V = 2 \text{ см}^3$.
4. Объем $\langle V \rangle = \langle a \rangle^3 = 4,52^3 \approx 92,34 \text{ см}^3 \approx 92 \text{ см}^3$.
5. Результат записывается в виде
 $V = 92 \pm 2 / \text{см}^3$

2. Функция нескольких переменных.

Пусть физическая величина W является функцией прямых физических величин x_i ($i = 1 + n$),

$$W = W(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad /15/$$

причем результаты измерения каждой из величин x_i записаны в виде /12/:

$$x_i = \langle x_i \rangle \pm \Delta x_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad /16/$$

В математической статистике доказывается, что наиболее вероятное значение величины W можно получить по формуле

$$\langle W \rangle = W(\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \dots, \langle x_n \rangle) \quad /17/$$

а погрешность ΔW величины W из выражения

$$\Delta W = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right)_{x_i = \langle x_i \rangle} \cdot \Delta x_1 \right]^2 + \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_2} \right)_{x_i = \langle x_i \rangle} \cdot \Delta x_2 \right]^2 + \dots + \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_n} \right)_{x_i = \langle x_i \rangle} \cdot \Delta x_n \right]^2} \quad /18/$$

где значок $\frac{\partial W}{\partial x_i}$ означает частную производную, т.е. производную от W по переменной x_i , взятую в предположении, что остальные переменные постоянны. Окончательный результат вычисления величины W записывается в виде

$$W = \langle W \rangle \pm \Delta W \quad /19/$$

Если доверительная вероятность результатов измерений всех в /16/ порядка 80%, то на том же уровне находится и доверительная вероятность записи /19/.

Относительная погрешность величины W

$$E = \frac{\Delta W}{\langle W \rangle} \quad /20/$$

Пример 4.

Объем цилиндра равен $V = \pi R^2 H$, где H его высота, R - радиус основания. Тогда $\frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi R H$, $\frac{\partial V}{\partial H} = \pi R^2$

Если R и H - прямые физические величины, то результаты их измерений записаны в виде:

Поэтому

$$\langle V \rangle = \pi \langle R \rangle^2 \langle H \rangle$$

$$\Delta V = \sqrt{(2\pi \langle R \rangle \langle H \rangle \Delta R)^2 + (\pi \langle R \rangle^2 \Delta H)^2}$$

и окончательный результат должен быть записан в виде

$$V = \langle V \rangle \pm \Delta V$$

Пример 5.

Ускорение свободного падения, измеряемое с помощью математического маятника, определяется по формуле

$$g = \frac{4\pi^2(L_1 - L_2)}{T_1^2 - T_2^2}$$

Результаты опыта: $\langle L \rangle = 1,59$ м $\langle L_2 \rangle = 0,94$ м

$\Delta L_1 = \Delta L_2 = 0,01$ м $\langle T \rangle = 2,5$ с $\langle T_2 \rangle = 1,9$ с $\Delta T_1 = \Delta T_2 = 0,1$ с.

Нужно найти g . Имеем последовательно

1.

$$\langle g \rangle = \frac{4\pi^2(\langle L_1 \rangle - \langle L_2 \rangle)}{\langle T_1 \rangle^2 - \langle T_2 \rangle^2} = \frac{4(3,14)^2(1,59 - 0,94)}{(2,5)^2 - (1,9)^2} = 9,71 \left(\frac{м}{с^2} \right) \quad /21/$$

2. Находим далее частные производные

$$\frac{\partial g}{\partial L_1} = \frac{4\pi^2}{T_1^2 - T_2^2}; \quad \frac{\partial g}{\partial L_2} = -\frac{4\pi^2}{T_1^2 - T_2^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial T_1} = \frac{4\pi^2(L_1 - L_2)}{(T_1^2 - T_2^2)^2} \cdot 2T_1; \quad \frac{\partial g}{\partial T_2} = -\frac{4\pi^2(L_1 - L_2) \cdot 2T_2}{(T_1^2 - T_2^2)^2}$$

Поэтому согласно /18/ имеем

$$\begin{aligned} \Delta g &= \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{\langle T_1 \rangle^2 - \langle T_2 \rangle^2} \Delta L_1 \right)^2 + \left(\frac{4\pi^2}{\langle T_1 \rangle^2 - \langle T_2 \rangle^2} \right)^2 +} \\ &+ \left(\frac{8\pi^2 \langle T_1 \rangle (\langle L_1 \rangle - \langle L_2 \rangle)}{(\langle T_1 \rangle^2 - \langle T_2 \rangle^2)^2} \Delta T_1 \right)^2 + \left(\frac{8\pi^2 \langle T_2 \rangle (\langle L_1 \rangle - \langle L_2 \rangle)}{(\langle T_1 \rangle^2 - \langle T_2 \rangle^2)^2} \Delta T_2 \right)^2} \\ &= \sqrt{2 \left(\frac{4\pi^2 \Delta L}{\langle T_1 \rangle^2 - \langle T_2 \rangle^2} \right)^2 + \left[\frac{8\pi^2 \langle T_1 \rangle (\langle L_1 \rangle - \langle L_2 \rangle)}{\langle T_1 \rangle^2 - \langle T_2 \rangle^2} \Delta T_1 \right]^2 + \left[\frac{8\pi^2 \langle T_2 \rangle (\langle L_1 \rangle - \langle L_2 \rangle)}{\langle T_1 \rangle^2 - \langle T_2 \rangle^2} \Delta T_2 \right]^2} \quad /22/ \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $\Delta L_1 = \Delta L_2 = \Delta L$, $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T$

Подставляя численные значения, получим

$$\begin{aligned} \Delta g &= \sqrt{2 \left(\frac{38,44 \cdot 0,01}{2,64} \right)^2 + \frac{(76,88 \cdot 0,65 \cdot 0,01)^2}{(2,64)^4} \cdot 9,86} \\ &= \sqrt{0,04 + 0,05} = 0,3 \left(\frac{м}{с^2} \right) \end{aligned}$$

3. Окончательный результат записываем в виде

$$g = (9,70 \pm 0,3) \frac{M}{C^2}$$

4. Относительная погрешность результата

$$E = \frac{0,3}{9,70} = 0,03 = 3\%$$

Если функция W имеет однокленную /логарифмируемую/ форму, т.е. содержит переменные в виде произведений, частных или степеней, целесообразно использовать метод логарифмической производной, находя вначале относительную погрешность. Из /17/, /18/, /20/ получим

$$E = \frac{\Delta W}{\langle W \rangle} = \sqrt{\left[\frac{\left(\frac{\partial W}{\partial x_1} \right) x_1 = \langle x_1 \rangle}{\langle W \rangle} \Delta x_1 \right]^2 + \dots + \left[\frac{\left(\frac{\partial W}{\partial x_n} \right) x_n = \langle x_n \rangle}{\langle W \rangle} \Delta x_n \right]^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial \langle W \rangle}{\langle W \rangle \partial \langle x_1 \rangle} \Delta x_1 \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \langle W \rangle}{\langle W \rangle \partial \langle x_n \rangle} \Delta x_n \right)^2}$$

$$= \sqrt{\left[\left(\frac{\partial \ln W}{\partial x_1} \right) x_1 = \langle x_1 \rangle \right]^2 + \dots + \left[\left(\frac{\partial \ln W}{\partial x_n} \right) x_n = \langle x_n \rangle \right]^2}$$

Найдя E , погрешность ΔW находим затем по формуле

$$\Delta W = E \langle W \rangle$$

В качестве примера на применение этого правила опять рассмотрим определение g с помощью математического маятника /пример № 5/ Имеем

$$\ln g = \ln 4\pi^2 + \ln(L_1 - L_2) - \ln(T_1^2 - T_2^2)$$

Согласно /23/ получим

$$\frac{\Delta g}{\langle g \rangle} = \sqrt{\left(\frac{\Delta L_1}{\langle L_1 \rangle - \langle L_2 \rangle} \right)^2 + \left(\frac{\Delta L_2}{\langle L_1 \rangle - \langle L_2 \rangle} \right)^2 + \left(\frac{2\langle T_1 \rangle \Delta T_1}{\langle T_1 \rangle^2 - \langle T_2 \rangle^2} \right)^2 + \left(\frac{2\langle T_2 \rangle \Delta T_2}{\langle T_1 \rangle^2 - \langle T_2 \rangle^2} \right)^2}$$

$$= \sqrt{2 \left(\frac{\Delta L}{\langle L_1 \rangle - \langle L_2 \rangle} \right)^2 + 8 \left(\frac{\Delta T}{\langle T_1 \rangle^2 - \langle T_2 \rangle^2} \right)^2 (\langle T_1 \rangle^2 + \langle T_2 \rangle^2)}$$

Если воспользоваться выражением /21/ для $\langle g \rangle$, то для Δg опять получим выражение /22/. Рассмотрим еще довольно часто встречающийся случай, когда удается провести измерения одной и той же физической величины W /вообще говоря, косвенной/ в разных условиях или разными методами. В этом случае появляется возможность проверить правильность оценки погрешностей. Пусть мы провели различными методами или в разных условиях измерений величины W и получили

$$W = \langle W \rangle^{(1)} \pm \Delta W^{(1)}$$

$$W = \langle W \rangle^{(2)} \pm \Delta W^{(2)}$$

$$W = \langle W \rangle^{(n)} \pm \Delta W^{(n)} \quad /25/$$

причем каждое из $\langle W \rangle^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) получено согласно методике, изложенной выше /формулы /17/ и /18//. Мы должны решить, согласуются ли результаты /25/, полученные в разных условиях между собой, найти наиболее вероятное значение величины W и его погрешность ΔW .

За наиболее вероятное значение величины W принимается среднее из всех значений $\langle W \rangle^{(i)}$, полученных разными методами

$$\langle W \rangle = \frac{\langle W \rangle^{(1)} + \dots + \langle W \rangle^{(m)}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m \langle W \rangle^{(i)}}{m} \quad /26/$$

Чтобы судить о согласованности результатов, вычислим среднее из погрешностей $\Delta W^{(i)}$, которое назовем "теоретической" погрешностью

$$\Delta W_{теор} = \frac{\Delta W^{(1)} + \Delta W^{(2)} + \dots + \Delta W^{(m)}}{m} \quad /27/$$

и сравним эту величину с "практической" погрешностью - наблюдаемым на практике разбросом результатов отдельных измерений

$$\Delta W_{практ} = \frac{|\langle W \rangle^{(1)} - \langle W \rangle| + \dots + |\langle W \rangle^{(m)} - \langle W \rangle|}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m |\langle W \rangle^{(i)} - \langle W \rangle|}{m} /28/$$

В хорошо проведенном эксперименте должно быть $\Delta W_{теор} \approx \Delta W_{практ}$. Максимально допустимое отношение большей из них к меньшей равно 2. За погрешность окончательного результата следует при-

нять большую из величин $\Delta W_{теор}$, $\Delta W_{практ}$, т.е.

$$\Delta W = \max \{ \Delta W_{теор}, \Delta W_{практ} \} \quad /29/$$

Окончательный результат записывается в обычной форме

$$W = \langle W \rangle \pm \Delta W \quad /30/$$

причем запись /30/ имеет надежность не ниже 80%, если надежность каждого из результатов /25/ того же порядка.

Пример 6.

Ускорение a груза определялось по формуле $a = \frac{Ls}{Lt}$ где s - путь, проходимый грузом, t - время его движения. Ускорение определялось при трех значениях s : 30 см, 40 см, 50 см, причем при каждом значении s время t движения измерялось 5 раз. При обработке результатов измерений были получены следующие значения a :

При $s = 30$ см При $s = 40$ см При $s = 50$ см
 $a = 0,25 \pm 0,02$ м/с²; $a = 0,24 \pm 0,02$ м/с² $a = 0,26 \pm 0,02$ м/с²
 Согласно /26/, /27/, /28/ находим

$$\langle a \rangle = \frac{0,25 + 0,24 + 0,26}{3} = 0,25 \text{ м/с}^2$$

$$\Delta a_{теор} = \frac{0,02 + 0,02 + 0,02}{3} = 0,02 \text{ м/с}^2$$

$$\Delta a_{практ} = \frac{0,01 + 0,01}{3} = 0,01 \text{ м/с}^2$$

Эксперимент проведен нормально, ибо $\frac{\Delta a_{теор}}{\Delta a_{практ}} = 2$
 Далее, $\Delta a = \max \{ \Delta a_{теор}, \Delta a_{практ} \} = 0,02$ м/с². Окончательный результат записывается в виде

$$a = \langle a \rangle \pm \Delta a = 0,25 \pm 0,02 \text{ м/с}^2$$

При вычислении погрешностей косвенных измерений часто приходится в расчетные формулы подставлять различные константы / π , e и др./ и постоянные приборов и установок. Их значения также содержат ошибки. Погрешности констант указываются неявно в записи таким образом, что выписываются только надежно известные значения цифр числового значения, а ненадежные отбрасываются с применением обычных правил округления. Например:

запись $C = 2,998 \cdot 10^8$ м/с означает, что

$$C = /2,9980 \pm 0,0005/ \cdot 10^8 \text{ м/с};$$

запись $L = 1,2$ м читается 1 к

$$L = /1,20 \pm 0,05/ \text{ м и т.д.}$$

§ 4. Графическая обработка результатов.

1. Выбор координатных осей. По оси абсцисс всегда откладывается аргумент, по оси ординат - функция. Иными словами, по горизонтальной оси откладывается причина, по вертикальной оси - следствие.

2. Выбор масштаба. При выборе масштаба необходимо придерживаться следующих рекомендаций:

а/ шкалы на осях должны легко читаться, поэтому одна клеточка миллиметровой бумаги должна соответствовать удобному числу единиц измеряемой величины $/1, 2, 5, 10 \dots/$;

б/ экспериментальные точки не должны сливаться друг с другом /рис.2/;

в/ масштаб вдоль осей следует выбирать так, чтобы основная часть графика имела наклон близкий к 45° и лежала в средней части между осями;

г/ если на графике не обязательно иметь начало координат, начало и конец разметки по осям должны соответствовать минимальным и максимальным значениям аргумента и функции;

д/ десятичные множители удобнее отнести к единице измерения, тогда деления на графике можно помечать цифрами 1, 2, 3, а не 10000, 20000, или 0,0001, 0,0002 и т.д.

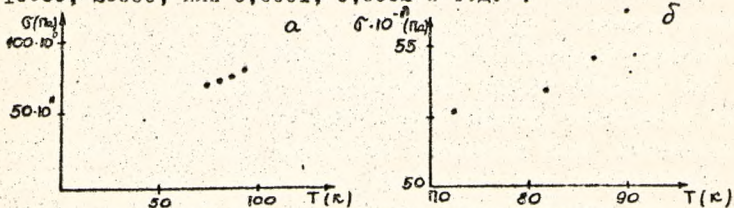


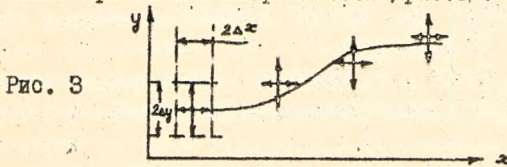
Рис. 2. а/ - неудачный выбор масштаба;

б/ - удачный выбор масштаба.

3. Построение графика. На график наносятся все полученные

в измерениях точки /выносные линии не проводятся/. Через экспериментальные точки проводится наилучшая плавная кривая. Непосредственное соединение экспериментальных точек ломаной линией не допускается. Точки должны располагаться как можно ближе к кривой так, чтобы по обе стороны от нее находилось по возможности одинаковое число точек.

4. Нанесение ошибок на график. Ошибка в экспериментальном значении указывается в виде крестиков, размеры которых в выбранном масштабе дают удвоенное значение погрешностей в этом масштабе. Кривая графика должна пересекать прямоугольники, образованные крестиками погрешностей /рис.3/.



5. Оформление графиков. Каждый график выполняется на миллиметровой бумаге, снабжается заголовком, содержащим точное описание зависимости, показываемой на нем, и вклеивается в отчет.

§ 5. Основные правила приближенных вычислений.

Значащими цифрами числа называются все его цифры, кроме нуля, если он стоит в начале. Пример 0,03010 – 4 знач. цифр.

Общее правило – при вычислении сумм, разности, произведений, частных результат не должен содержать больше значащих цифр, чем наименее точное из слагаемых, сомножителей и т.п.

При вычислении функций ограничиваются числом значащих цифр аргумента. Если результат вычисления является промежуточным и используется при дальнейших вычислениях, нужно сохранить в нем на одну значащую цифру больше, чем это требуется предыдущим правилом. Если в вычисляемое выражение входят постоянные типа π , e , константы приборов и т.д., следует для них брать значащих цифр на одну больше, чем в самом неточном из

участвующих в выражении чисел. Это делается для того, чтобы вычисления с постоянными не вносили дополнительной ошибки.

Если это по каким-либо причинам невозможно /например, значение постоянной прибора известно недостаточно точно/, то соответствующую константу в выражении для физической величины W следует рассматривать наравне с другими переменными и в окончательное выражение для ΔW будет входить ΔC - погрешность соответствующей константы.

Абсолютную погрешность следует всегда выражать в тех же единицах, что и саму измеряемую величину. Например,

$$L = (1,572 \pm 0,004) \text{ м}$$

Но не

$$L = 1,572 \pm 4 \text{ мм}$$

Число и его погрешность всегда записываются так, чтобы их последние цифры принадлежали к одному и тому же десятичному разряду.

Нельзя писать $24 \pm 0,2$ или $21,62 \pm 0,2$. Правильная запись $24,0 \pm 0,2$ или $21,6 \pm 0,2$. Нуль писать так же обязательно, как и любую другую цифру: $25,30 \pm 0,02$, но не $25,3 \pm 0,02$

Приближенные числа рекомендуется представлять в нормальном виде, для чего первая значащая цифра записывается в разряде единиц, а остальные - в разряде десятых, сотых и т.д. долей. Например: $(3,56 \pm 0,04) \cdot 10^{-4}$

§ 6. Запись результатов измерений.

Вторая половина тетради студента отводится под лабораторный журнал наблюдений. Страницы лабораторного журнала должны быть пронумерованы. Вырывание листов и вымарывание записей, а также запись карандашом запрещаются!

В журнал вносятся следующее:

а/ результат теоретической подготовки в работе: схем, порядок измерений, рабочие формулы с обязательной расшифровкой обозначений, вывод формулы для погрешностей;

б/ данные, полученные в результате измерений;

в/ расчет результата и погрешностей, при этом рекомендует-

ся на левой странице журнала записать экспериментальные данные, а на правой странице оставить место для вычислений.

§ 7. Формирование отчета.

Формирование отчета проводить в первой половине тетради студента в соответствии с образцом, имеющимся в лаборатории.

Литература:

1. Дж. Сквайрс, Практическая физика, М. "Мир", 1971;
2. Х.Н.Сотская, А.С.Кузнецов, Обработка результатов лабораторных измерений, "Вышая школа", 1971.

Методические указания составлены коллективом преподавателей кафедр физики:

Гербутов В.А., Чопчик Н.И.

Общее руководство и редактирование осуществлял Гербутов В.А.

Подписано к печати 16.02.81 г. Формат 60x84/16, объем 3,0
уч. издательства. зак. № 124, тираж 1000 экз. Бесплатно.
Отпечатано на ротапринте Брестского инженерно-строительного
института.