МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра физики

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ
«ЗАДАЧИ ЧОПЧИЦА»

Брест 2014

УДК 538.91, 548.73,378.147:53
ББК 74.265.1 я 73
Ч 75

Рецензент:
Ревинский А.Ф., доктор физико-математических наук,
профессор БрГУ им. А.С. Пушкина

Ч 75 [Чопчиц Н.И.] Задачи Чопчица. – Брест: Из-во БрГТУ, 2014. – 40 с.

ISBN 978-985-493-475-302-3

Настоящий сборник – попытка изложить основной круг идей, представлений о внутренней структуре физических задач, которые придумал Н.И. Чопчиц в разное время для проведения различных экзаменов, олимпиад, тестирования. Ограниченный объем пособия не позволил включить в него все задачи, однако даже те задачи, которые вошли в этот сборник, дают представление об огромном таланте их автора.

Сборник предназначен для всех, кто интересуется физикой.

ISBN 978-985-493-475-302-3

Задачи Чопчица

Задачи по физике, изложенные в этом сборнике, названы ***задачами Чопчица***. Это дань уважения талантливому педагогу, физику, Человеку, который за время своей трудовой деятельности придумал, разработал и составил такое количество оригинальных задач, что их хватило бы для нескольких сборников. Сам он всегда был против издания такого сборника из-за своей природной скромности.

Будучи физиком-теоретиком высокого класса, Николай Игнатьевич всегда был требователен и к себе, и к коллегам, а при составлении задач (и для студентов, для школьников-абитуриентов) всегда был против безыдейных (в физическом смысле) задач. Он также был против физических задач, решение которых сводилось к подстановке каких-то данных в нужные формулы с целью получения ответа. По мнению Николая Игнатьевича, такого типа задачи не выявляют и, тем более, не развивают творческие способности испытуемого. Более того, он считал, что задачу надо ставить без конкретных числовых данных, давая испытуемому возможность самостоятельно выбирать количество необходимых величин и их числовые значения, исходя из реальной физической ситуации, описанной в задаче.

Николай Игнатьевич активно сотрудничал с Брестскими лицеями и гимназиями, работал с одаренными школьниками. Многие его подопечные впоследствии становились студентами ведущих вузов Москвы, Санкт-Петербурга, Киева, Минска и других городов, не говоря уже о вузах города Бреста.

Активно участвовал он и в проведении республиканских, областных и городских олимпиад по физике: был бессменным членом оргкомитетов по их проведению и лично составлял множество «олимпиадных» задач. Кроме того, он рецензировал сборники задач и пособия, присланные из разных городов Беларуси.

Настоящий сборник – попытка изложить основной круг идей, представлений о внутренней структуре физических задач и подходов к их решению. Ограниченный объем издания не позволил включить в него все задачи, которые придумал Н.И. Чопчиц в разное время для проведения различных экзаменов, олимпиад, тестирования, однако даже те задачи, которые вошли в это пособие дают представление об огромном таланте их автора.

Пособие предназначено для всех, кто интересуется физикой.

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Задача 1.

Две лодки переправляются навстречу друг другу через реку шириной 300 м, двигаясь вдоль прямой, составляющей угол 60° с берегом. Скорость течения реки $\sqrt{3}$ м/с, скорости лодок относительно воды одинаковы и равны 3 м/с. Насколько раньше начала движение одна лодка по сравнению с другой, если они встретились на середине реки?

Дано:
H = 300 м
$\alpha = 60^{\circ}$
$U=\sqrt{3}$ м/с
V=3 м/с

$\tau - ?$

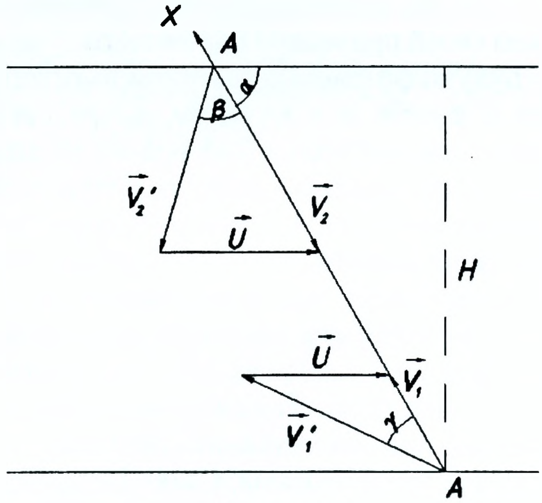


Рисунок 1

Решение.

На рисунке 1 AB – линия переправы, причем |AB| = H/sinα, где H – ширина реки, $\vec{V_2'}$ – скорость лодки, отправляющейся из точки B, относительно воды, $\vec{U}$ – скорость течения, $\vec{V_2}$ – скорость той же лодки относительно берега (земли). Аналогичный смысл имеют величины $\vec{V_1'}$ и $\vec{V_1}$. По закону сложения скоростей имеем:

$$\vec{V}_2 = \vec{V}'_2 + \vec{U}; \quad \vec{V}_1 = \vec{V}'_1 + \vec{U}. \tag{1}$$

Для модулей скоростей $\vec{V_2}$ и $\vec{V_1}$ из рисунка находим

$$V_2 = V'_2 \cos\beta + U\cos\alpha; \quad V_1 = V'_1 \cos\gamma - U\cos\alpha, \tag{2}$$

где по условию $V_2' = V_1' = V$. Используя теорему синусов для треугольников скоростей, соответствующих выражениям (1), получим:

$$\frac{U}{\sin\beta} = \frac{V'_2}{\sin\alpha} = \frac{V}{\sin\alpha}; \quad \frac{U}{\sin\gamma} = \frac{V'_1}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{V}{\sin\alpha}.$$

Поскольку по смыслу $\beta \in (0;\frac{\pi}{2}), \gamma \in (0;\frac{\pi}{2})$, то отсюда вытекает, что $\beta = \gamma$, причем $\sin\hat{\beta} = \sin\gamma = \dfrac{U\sin\alpha}{V}$. Тогда (2) примет вид:

$$V_2 = V\sqrt{1 - \frac{U^2}{V^2}\sin^2\alpha} + U\cos\alpha = \sqrt{V^2 - U^2\sin^2\alpha} + U\cos\alpha; \tag{3}$$

$$V_1 = V\sqrt{1 - \frac{U^2}{V^2}\sin^2\alpha} - U\cos\alpha = \sqrt{V^2 - U^2\sin^2\alpha} - U\cos\alpha. \tag{4}$$

- Обычно в учебниках рекомендуется все выкладки до самого конца проводить в общем виде, а численные значения подставлять лишь в окончательную формулу. Это хорошее правило, но в целях экономии времени при получении достаточно громоздких промежуточных выражений допускается производить подстановку численных значений на промежуточных этапах.

Воспользуемся этим правом и подставим в (3), (4) численные значения. Получим:

$$V_2 = \sqrt{9 - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (м/с)},$$

$$V_1 = \sqrt{9 - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ (м/с)}.$$

Начало системы координат выберем в точке А, ось X направим к точке В (рис. 1). Поскольку $V_1 < V_2$, для встречи в средней точке лодка из А должна отправиться раньше. Считая, что в момент ее отправления t=0, получим для ее координаты выражение:

$$x_1 = x_A + V_1 t = \sqrt{3}t. \tag{5}$$

Лодка из В отправляется на τ секунд позже, поэтому для ее координаты x_2 имеем:

$$x_2 = x_B - V_2(t-\tau) = \frac{2H}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}(t-\tau), \quad t \geq \tau. \tag{6}$$

В момент встречи $x_1 = x_2$, или

$$\sqrt{3}t = \frac{2H}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}(t-\tau)$$

откуда для момента t_0 встречи получим

$$t_0 = \frac{2H}{9} + \frac{2\tau}{3}. \tag{6'}$$

Подставляя значение t_0 в любое из выражений (5), (6), получим следующее выражение для координаты точки встречи:

$$x_0 = \sqrt{3}t_0 = (\frac{2H}{9} + \frac{2\tau}{3})\sqrt{3}.$$

Так как по условию $x_0 = |AB|/2 = H/\sqrt{3}$, то получим:

$$(\frac{2H}{9} + \frac{2\tau}{3})\sqrt{3} = \frac{H}{\sqrt{3}},$$

откуда $\tau = \frac{H}{6} = \frac{300}{6} = 50$ (с), т.е. для встречи на середине реки лодка из В должна отправиться на 50 секунд позже. Разумеется, все выкладки можно провести и в общем виде, но они станут несколько более громоздкими.

- Вас не должно пугать кажущееся нарушение размерностей в формуле (6). Дело в том, что постоянная 2/9, стоящая перед Н имеет размерность (с/м). <u>Такие веши постоянно будут случаться, если Вы подставляете численные значения в промежуточные формулы.</u>

Отметим еще одно очень полезное при решении кинематических задач правило.

- Если в задаче движется несколько тел и они начали двигаться неодновременно, то начало отсчета времени выбирается в момент начала движения тела, начавшего двигаться первым. Для этого тела справедливы стандартные кинематические формулы. Для тела, начавшего двигаться на τ секунд позже, кинематические формулы $t \geq \tau$ получаются из стандартных путем замены t на $(t-\tau)$.

В задачах второго типа эксплуатируется следующая простая идея. Если в некоторой системе отсчета рассматривается движение двух тел и требуется найти характеристики, не зависящие от системы отсчета (например, промежутки времени, расстояния и т.д.), то целесообразно решать задачу <u>в той системе отсчета, в которой одно из тел покоится.</u>

<u>Задача 2.</u>

Два спортсмена одной команды бегут друг за другом с одинаковой скорость V_1=5м/с, находясь на расстоянии l_1=20 м друг от друга. Навстречу им бегут два спортсмена другой команды, расстояние между которыми l_2= 40 м, а скорость V_2=7 м/с. Каждый из спортсменов, поравнявшись со спортсменом другой команды, разворачивается и бежит в противоположном направлении с прежней скоростью. Найти расстояние между спортсменами обоих команд после разворота.

Дано:
l_1=20 м
V_1=5 м/с
l_2=40 м
V_2=7 м/с

---

l_1', l_2' – ?

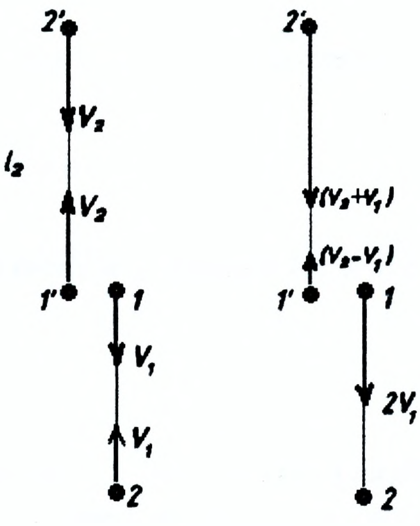


Рисунок 2

<u>Решение:</u>

На рис. 2 слева показаны скорости спортсменов сразу после встречи передних спортсменов в системе отсчета, связанной с землей, а справа – скорости тех же спортсменов в системе отсчета, в которой последний спортсмен 2 первой команды до встречи с партнером покоится. <u>Именно в этой системе отсчета (или аналогичной, связанной с другими спортсменами) решение получается наиболее прос-тым</u>. На рисунке рядом с каждой стрелкой, изобра-жающей соответствующий вектор скорости, указан ее модуль. Считая, что встреча спортсменов 1 и 1' про-зошла при $t=0$, находим, что встреча спортсменов 2 и 2' произойдет в момент времени $\frac{l_1+l_2}{V_1+V_2}$, ибо спорт-смен 2 покоится, а спортсмен 2' бежит со скоростью (V_1+V_2) ему на-встречу, и ему нужно пробежать расстояние (l_1+l_2). Все это время спортсмен 1' убегает со скоростью (V_2-V_1), так что он убежит от места встречи на $\frac{(l_1+l_2)(V_2-V_1)}{V_1+V_2}$, а расстояние между спортсменами второй команды после разворота будет равно:

$$l_2' = l_1 + \frac{(l_1+l_2)(V_1-V_2)}{V_1+V_2} = 30 \text{ (м)}.$$

Рассуждая аналогично, находим:

$$l_1' = 2V_1\frac{l_1+l_2}{V_1+V_2} - l_1 = 30 \text{ (м)}.$$

Проверка единиц: $[l'_1]=[l'_2]=1(м \cdot м \cdot c^{-1})/(м \cdot c^{-1})=1$ *м*.

Ответ: $l'_1 = l'_2 = 30$ м.

- Рекомендуем самостоятельно решить задачу в случае, когда $V_1 > V_2$, а также разобрать решение задачи в системах отсчета, связанных с другими спортсменами. Как будет выглядеть ответ для l_1', если $l_1 > 2V_1\frac{l_1+l_2}{V_1+V_2}$?

В задачах третьего типа рассматривается движение с постоянным ускорением, в частности, под действием силы тяжести в отсутствие сопротивления воздуха.

Задача 3.

Ракета длиной $l=50$ м стартует вертикально с ускорением $a=20$ м/с². Сначала от ракеты отделяется головной обтекатель, а спустя еще некоторое время – последняя ступень. Найти это время, если через 1 секунду после отделения ступени расстояние между ней и головным обтекателем равно 70 м. Сопротивление не учитывать. Принять $g=10$ м/с². Размерами обтекателя и ступени пренебречь.

Дано:
$l=50$ м
$a=20$ м/с^2
$\Delta t_2=1$ с
$S_1=70$ м

Δt_1 - ?

Решение:
Систему отсчета свяжем с землей. Начало координат выберем на земле, ось Оу направим вертикально вверх (рис. 3). Считая, что в момент старта $t=0$, для координаты головного обтекания при $t>\tau$ имеем выражение:

$$y_1 = l + \frac{a\tau^2}{2} + a\tau(t-\tau) - g\frac{(t-\tau)^2}{2}. \qquad (1)$$

Пусть, далее, Δt_1 - искомый промежуток времени между отделением обтекателя и ступени. Тогда ступень отделяется в мо-

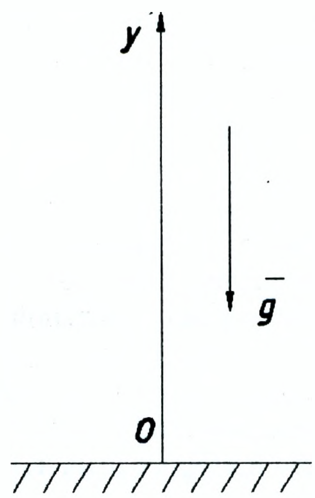


Рисунок 3

мент времени $(\tau+\Delta t_1)$ и ее координата при $t>\tau+\Delta t_1$, запишется в виде:

$$y_2=\frac{a(\tau+\Delta t_1)^2}{2}+a(\tau+\Delta t_1)(t-\tau-\Delta t_1)-g\frac{(t-\tau-\Delta t_1)^2}{2}. \qquad (2)$$

Расстояние между обтекателем и ступенью в любой момент времени $t>\tau+\Delta t_1$ будет равно:

$$S=|y_1-y_2|=\left|l+\frac{a\tau^2}{2}+a\tau(t-\tau)-\frac{g(t-\tau)^2}{2}-\frac{a(\tau+\Delta t_1)^2}{2}-a(\tau+\Delta t_1)(t-\tau-\Delta t_1)+\frac{g(t-\tau-\Delta t_1)^2}{2}\right|.$$

В задаче это расстояние S_1 задано в момент времени $t_1=\tau+\Delta t_1+\Delta t_2$. Подставляя значение t_1 и полагая $S=S_1$, получим после преобразований следующее уравнение для Δt_1:

$$\left|\frac{g+a}{2}\Delta t_1^2+(g+a)\Delta t_1\Delta t_2-l\right|=S_1.$$

Решая уравнение с учетом того, что $S_1>l$ и $\Delta t_1>0$, получим для искомого времени:

$$\Delta t_1=-\Delta t_2+\sqrt{\Delta t_2{}^2+\frac{2(S_1+l)}{g+a}}=-1+\sqrt{1+\frac{2\cdot 120}{30}}=2\ c.$$

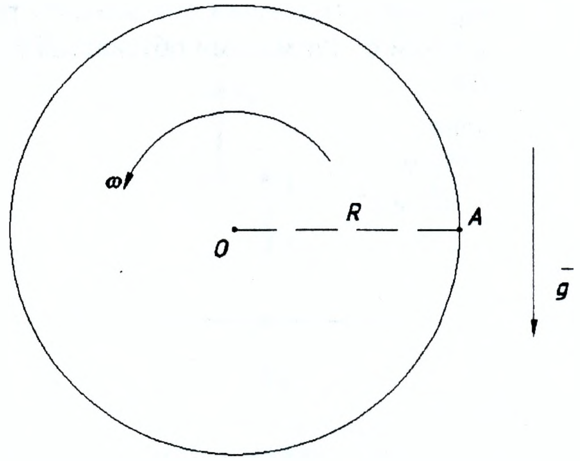
Проверим единицу:

$$[\Delta t_1]=1(м/м\cdot c^{-2})^{1/2}=1(c^2)^{1/2}=1\ c.$$

Ответ: $\Delta t_1=2\ c$

Задачи для самостоятельной работы:

1. Кабина лифта, высота которой $H=3{,}0$ *м*, начала двигаться вертикально вверх с постоянным ускорением $a=2$ *м/с*^{2}. Спустя время $\tau=2{,}0$ *с* после начала движения с потолка кабины стал падать болт. Найти время свободного падения болта, его перемещение и путь, пройденный болтом за это время в системе отсчета, связанной с шахтой лифта. Принять: $g=10$ *м/с*^{2}.



2. Колесо радиуса $R=0{,}2$ *м* равномерно вращается с угловой скоростью $\omega=3$ *рад/с* вокруг горизонтальной оси. Когда радиус ОА колеса горизонтален, из точки А вылетает (по одному) без начальной скорости относительно этой точки шарики. Центр колеса движется относительно земли равномерно вверх со скоростью $v=0{,}8$ *м/с*. В тот момент, когда центр колеса находится на высоте $H=1{,}2$ *м*, а радиус ОА занимает положение, показанное на рисунке, вылетает первый шарик. Найти промежуток времени между моментами падения первого и второго шариков. Сопротивлением воздуха пренебречь.

ДИНАМИКА ТОЧКИ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

В задачах первой группы рассматриваются традиционные задачи на применение законов Ньютона для описания движения тел под действием сил тяжести и трения при наличии связей, которые предполагаются идеальными (невесомые нерастяжимые нити, стержни и т.д.).

Задача 4.

Груз массой m_1, скользит вверх вдоль наклонной плоскости высотой $H=1$ *м* с углом наклона $\alpha=30^o$, будучи связанным с грузом массой $m_2 = 0{,}8m_1$, невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок, укрепленный на вершине наклонной плоскости (рис. 4). Известно, что если система начинает движение из состояния покоя, то груз m_1 проходит расстояние от подножия плоскости и до ее вершины за время t_1=2 с.

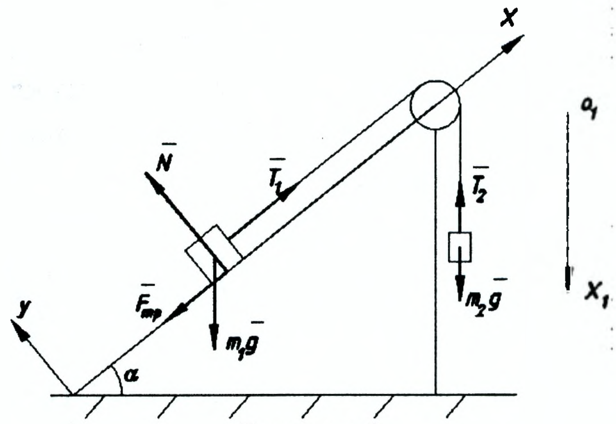


Рисунок 4

Найти 1) время, прошедшее от начала движения до возвращения груза массой m_1 к подножию наклонной плоскости, если обрыв нити произойдет на середине наклонной плоскости; 2) наименьший коэффициент трения между клином, играющим роль наклонной плоскости и горизонтальной опорой, при которой он не будет скользить по горизонтальной опоре при движении грузов, если масса клина $M=5$ *кг*. Принять $m_1 = 1$ *кг*.

Решение:

1) Движение груза массой m_1 разобьем на 3 этапа. На первом этапе он скользит вверх с ускорением $a_{1x} = 2H/(t_1^2 \sin\alpha)$. Этап заканчивается на середине наклонной плоскости, т.е. в точке с координатой $x' = H/(2\sin\alpha) = 1$ м. Время движения на этапе $t' = \sqrt{\dfrac{2x'}{a_{1x}}} = \dfrac{t_1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ (c)$, а скорость в конце этапа $V' = a_{1x}t' = \dfrac{\sqrt{2}H}{t_1 \sin\alpha} = \sqrt{2}$ (м/с). Чтобы избежать громоздких выкладок, будем производить промежуточные вычисления. На втором этапе ускорение равно $a_{1x}' = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$, что дает

$$a'_{1x} = -g\left[\frac{m_2}{m_1} - \frac{2H\left(1+\dfrac{m_2}{m_1}\right)}{g t_1^2 \sin\alpha}\right] = -6{,}2\ (\text{м/с}^2).$$

Скорость $V' = \sqrt{2}$ *м/с* и координата $x' = 1$ *м* будут начальными для второго этапа. Второй этап заканчивается в момент остановки тела, поэтому время движения на этом этапе равно $t'' = \dfrac{V'}{a_1'} = 0{,}23$ (с), а координата точки остановки $x'' = x' + \dfrac{(V')^2}{2a'_1} = 1{,}16$ (м). На третьем этапе тело скользит вниз с ускорением $a''_1 = 3{,}8$ *(м/с²)*. Время движения на этом этапе равно:

$$t'''=\sqrt{\frac{2x''}{a_1''}}=0{,}78\ (\text{с}).$$

Таким образом, время, прошедшее от начала движения до возвращения груза массой m_1 в исходную точку, равно $\Delta t = t'+t''+t'''= 2{,}43$ (с).

2) На клин со стороны груза массой m_1 по третьему закону Ньютона действуют силы $\vec{N}'=-\vec{N},\ \vec{F}'_{тр}=-\vec{F}_{тр}$, так что $N'=m_1 g\cos\alpha,\ \ F'_{тр}=\mu m_1 g\cos\alpha$. Далее со стороны нитей, перекинутых через блок, на клин действуют силы $\vec{T'}_1=-\vec{T}_1, \vec{T'}_2=-\vec{T}_2$, модули которых одинаковы и равны:

$$T'_1=T'_2=m_2(g-a_{1x})=m_2\left(g-\frac{2H}{t_1^2\sin\alpha}\right).$$

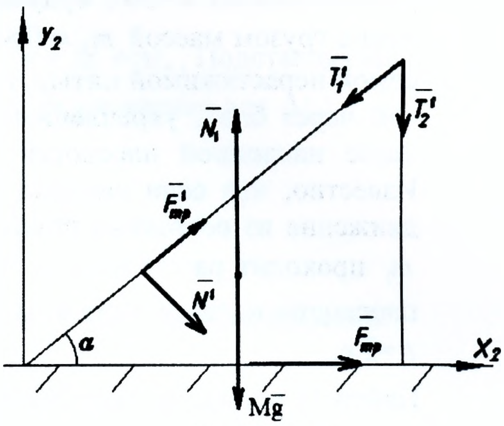


Рисунок 5

Кроме того, на клин действует сила тяжести $M\vec{g}$, сила нормальной реакции $\vec{N}_1$ со стороны горизонтальной опоры и сила трения $\vec{F}_{1тр}$. Записывая условия равновесия клина в проекции на ось X_2, Y_2 (рис. 5), получим:

$$F_{1тр}+N'\sin\alpha+F'_{тр}\cos\alpha-T'_1\cos\alpha=0,\ -Mg+N_1-N'\cos\alpha+F'_{тр}\sin\alpha-T'_1\sin\alpha-T'_2=0$$

или

$$\begin{cases} F_{1тр}+m_1 g\cos\alpha\sin\alpha+\mu m_1 g\cos^2\alpha-m_2\cos\alpha\left(g-\dfrac{2H}{t_1^2\sin\alpha}\right)=0 \\ -Mg+N_1-m_1 g\cos^2\alpha+\mu m_1\sin\alpha\cos\alpha-m_2(\sin\alpha+1)\left(g-\dfrac{2H}{t_1^2\sin\alpha}\right)=0 \end{cases}$$

Выражая из первого уравнения $F_{1тр}$, а из второго N_1, а затем учитывая, что при минимальном коэффициенте трения сила трения покоя достигает предельного значения $F_{1тр}=\mu_1 N_1$, получим:

$$m_2 g\cos\alpha\left(g-\frac{2H}{t_1^2\sin\alpha}\right)-m_1 g\cos\alpha(\mu\cos\alpha+\sin\alpha)=\mu_1\left[\begin{matrix} Mg+m_1 g\cos\alpha(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)+ \\ +m_2(1+\sin\alpha)\left(g-\dfrac{2H}{t_1^2\sin\alpha}\right)\end{matrix}\right].$$

Откуда для минимального коэффициента трения μ_1 имеем

$$\mu_1=\frac{m_2\cos\alpha(1-\dfrac{2H}{gt_1^2\sin\alpha})-m_1\cos\alpha(\mu\cos\alpha+\sin\alpha)}{M+m_1\cos\alpha(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)+m_2(1+\sin\alpha)\left(1-\dfrac{2H}{gt_1^2\sin\alpha}\right)}.$$

Мы не будем выписывать окончательное выражение для μ_1 с учетом значения μ: здесь, как и в других подобных случаях, целесообразно провести промежуточное вычисление μ по формуле:

$$\mu = \frac{0,8 \cdot 2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2(1+0,8)}{10 \cdot 4 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{3}/2} = 0,14 .$$

Тогда, производя вычисления, получим:

$$\mu_1 = 0,013 .$$

Проверим единицу: $[\mu_1]$= *1кг/кг* = безразмерная величина.

- Внимание. Не следует бояться громоздкости задачи 4: на задачи этого пособия следует смотреть не как на примеры экзаменационных задач – экзаменационные задачи значительно менее громоздки – эти задачи призваны фиксировать круг идей и представлений, используемых в экзаменационных задачах. Это же относится и к другим задачам.

В задачах второй группы рассматривается применение закона сохранения импульса и закона сохранения энергии или изменения механической энергии для процессов типа столкновений.

- При решении всех задач, связанных с взаимодействием тел типа соударений (выстрелы, разрывы и т.д.), предполагается всегда, что время взаимодействия столь мало, что за это время тела не успевают сместиться заметно из положений, которые они занимали непосредственно перед ударом, так что сразу после соударения тела начинают движение из этих положений с новыми скоростями. Это утверждение носит название баллистической идеи. Отметим также, что для процессов типа абсолютно неупругих соударений, т.е. таких, после которых тела движутся вместе, с одной скоростью, не применим закон сохранения механической энергии: часть механической энергии при таких соударениях превращается во внутреннюю энергию соударяющихся тел.

Задача 5.

Если игрушечная пружинная пушка массой *M=0,5 кг* (без снаряда) закреплена, то при выстреле снаряд массой *m=5 г* вылетает из нее со скоростью *V=10 м/с*. Эта пушка соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкой наклонной плоскости высотой *H=2,5 м* и углом наклона *α=30°*. Когда пушка находится на середине плоскости, производят выстрел, при котором ствол пушки наклонен под углом *β=30°* к горизонту. Чему равна скорость пушки сразу после выстрела?

Дано:
M=0,5 кг
m=0,05 кг
V=10 м/с
H=2,5 м
α=30°
β=30°

U - ?

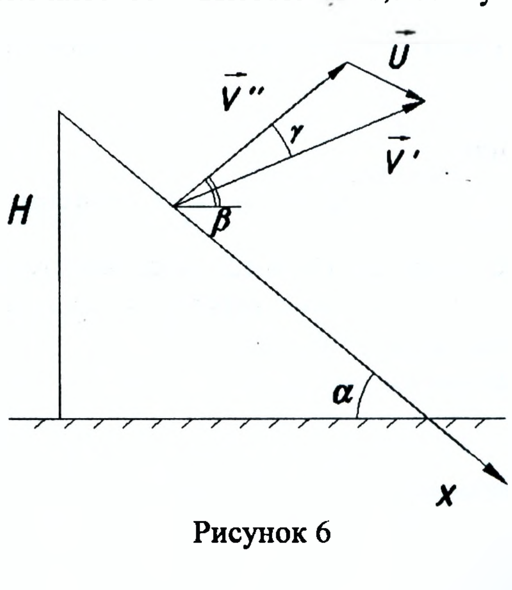


Рисунок 6

Решение:
Систему отсчета свяжем с землей. Когда пушка закреплена, после выстрела она продолжает покоиться, а снаряд приобретает кинетическую энергию $mV^2/2$ за счет потенциальной энергии сжатой пружины (разумеется, считаем пружину невесомой). Потенциальная энергия пружины не зависит от состояния ее движения. Поэтому закон сохранения механической энергии для процесса выстрела запишется в виде (напомним, плоскость гладкая)

$$\frac{(M+m)V_0^2}{2}=\frac{mV'^2}{2}+\frac{MU^2}{2}-\frac{mV^2}{2}, \qquad (1)$$

где $V_0=\sqrt{2g\frac{H}{2}}=\sqrt{gH}$ – скорость пушки вместе со снарядом непосредственно перед выстрелом, V' – скорость снаряда относительно земли сразу после выстрела, U – скорость пушки сразу после выстрела. Закон сохранения импульса для выстрела в предположении малости времени процесса, справедлив приближенно лишь для проекции импульса системы на ось X, направленную вдоль наклонной плоскости. При записи этого закона, однако, следует иметь в виду, что направлена под углом β к горизонту не скорость $\overrightarrow{V'}$ снаряда относительно земли, а скорость $\overrightarrow{V''}$ снаряда относительно пушки (рис. 6).
По закону сложения скоростей имеем:

$$\overrightarrow{V'}=\overrightarrow{V''}+\overrightarrow{U}.$$

Рис. 6 выполнен в предложении, что сразу после выстрела пушка продолжает двигаться в прежнем направлении.

- Сделайте рисунок для случая, когда пушка после выстрела движется вверх. Как изменятся нижеприведенные выкладки?

Из треугольника скоростей, показанного на рисунке, находим:

$$\frac{U}{\sin\gamma}=\frac{V'}{\sin(\alpha+\beta)}, \text{ откуда } \sin\gamma=\frac{U\sin(\alpha+\beta)}{V'}.$$

Тогда $V'_x=V'\cos(\alpha+\beta-\gamma)=V'[\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma]=$

$$=V'\left[\cos(\alpha+\beta)\sqrt{1-\frac{U^2\sin^2(\alpha+\beta)}{V'^2}}+\sin(\alpha+\beta)\frac{U\sin(\alpha+\beta)}{V'}\right].$$

Таким образом, закон сохранения для проекции импульса системы на ось X имеет вид:

$$(M+m)V_0=MU+mV'_x$$

или

$$(M+m)V_0=MU+m\cos(\alpha+\beta)\sqrt{V'^2-U^2\sin^2(\alpha+\beta)}+mU\sin^2(\alpha+\beta). \qquad (2)$$

Выражение (1) и (2) дают вместе систему уравнений для определения двух неизвестных: V',U. Довольно неразумно решать эту систему в общем виде, целесообразно подставить численные значения.
Получим:

$$0,2U^2+0,05V'^2=18,75;$$
$$11-2,15U=0.03\sqrt{V'^2-3U^2}. \qquad (3)$$

Решая систему, находим $U = 4{,}54$ (м/с). Мы не будем производить проверку размерностей, ибо, очевидно, в (1) и (2) размерности левой и правой частей совпадают.

- Разберите самостоятельно случай, когда β – тупой угол, а также вариант, когда пушке у подножия сообщают заданную скорость, направленную вверх. Здесь так же могут быть заданы дополнительно чисто кинематические вопросы, например, о времени движения пушки по наклонной плоскости, о скорости у подножия и т.д.

Число различных ситуаций, требующих для своего анализа применения законов сохранения очень велико, поэтому рассмотрим еще задачу, в которой используются те же идеи.

В задаче 6, в отличие от предыдущей задачи, не выполняется закон сохранения импульса даже приближенно.

Задача 6.

Тело массой *M=1 кг* покоится на наклонной плоскости с углом наклона *α=30º*. Коэффициент трения тела о плоскость *μ=0,2*. К телу прикреплена одним концом пружина с коэффициентом жесткости *k=100 Н/м* (рис. 7) так, что сила трения, действующая на тело, равна нулю. В тело попадает горизонтально летящая со скоростью *V=100 м/с* пуля массой *m=10 г* и застревает в теле. Найти максимальное смещение тела из первоначального положения.

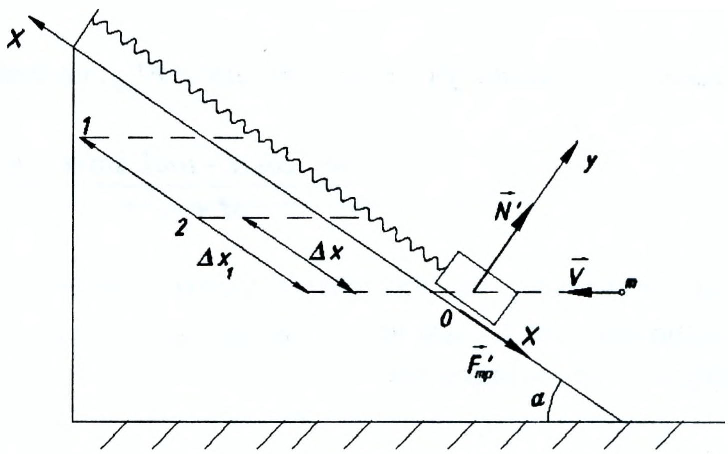


Рисунок 7

Дано:
M=1 кг
α=30º
μ=0,2
k=100 Н/м
V=100 м/с
m=10 г

Δx - ?

Решение:

На тело до удара действуют силы нормальной реакции $\overrightarrow{N_1}$, тяжести – $M\vec{g}$ и упругости – $\vec{F}_{упр}$ (на рис. 7 не показаны); сила трения по условию равна нулю. Записывая условие равновесия тела в проекциях на оси xOy, получим $N = Mg\cos\alpha, k\Delta x_1 = Mg\sin\alpha$, где Δx_1 – удлинение пружины в положения равновесия тела. В момент удара, вследствие его кратковременности, сила нормальной реакции ($\overrightarrow{N'}$) резко возрастает, а вследствие наличия трения появляется и большая сила $\vec{F}'_{тр}$, направленная так, как показано на рис. 7. Эти силы на порядок и больше превосходят силу $M\vec{g}$, а следова-тельно, и $\vec{F}_{упр}$ (вследствие баллистической гипотезы за время удара сила $\vec{F}_{упр}$ заметно не изменяется). Поэтому влиянием силы тяжести и силы упругости на процесс удара можно пренебречь. Поскольку силы $\overrightarrow{N'}$ и $\vec{F}_{упр}$ в момент удара велики и не существует направления, для которого обе их проекции были бы малы, закон сохранения импульса для процесса удара не выполняется, и следует воспользоваться более общей формулировкой: изменение импульса системы равно сумме импульсов внешних сил, действующих на тела системы (т.е. сумме произведений внешних сил на время взаимодействия, предполагаемое малым):

$$(M+m)\vec{U}-m\vec{V}=\left(\vec{N}'+\vec{F}'_{тр}\right)\Delta t\,, \tag{1}$$

где учтено, что тело до удара покоилось, $\vec{U}$ - общая скорость тела и пули после удара. Проектируя (1) на оси хОу, получим:

$$(M+m)U-mV\cos\alpha=-F'_{тр}\,\Delta t\,; \tag{2}$$

$$0-(-mV\sin\alpha)=N'\Delta t\,. \tag{3}$$

Умножая (3) на μ и учитывая, что $\mu N'=F'_{тр}$, находим из (2) и (3):

$$U=\frac{mV\cos\alpha-\mu mV\sin\alpha}{M+m}=\frac{mV(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)}{M+m}\,. \tag{4}$$

Из (4) вытекает, что при $\cos\alpha\le\mu\sin\alpha$ тело после удара останется стоять на месте. Далее воспользуемся законом изменения механической энергии (сила трения $\left(F_{тр}=\mu(M+m)g\cos\alpha\right)$).

Получим:

$$\left[\frac{k(\Delta x_1-\Delta x)^2}{2}+(M+m)g\Delta x\sin\alpha\right]-\left[\frac{(M+m)U^2}{2}+\frac{k\Delta x_1^2}{2}\right]=$$
$$=-\mu(M+m)\Delta xg\cos\alpha, \tag{5}$$

где Δx – искомое смещение (на рис. 7 уровень 1 соответствует положению при недеформированной пружине, уровень 2 – положению остановки, уровень 0 – первоначальному положению тела). Используя (4) и подставляя выражение для Δx_1, полученное ранее, преобразуем (5) к виду

$$(\Delta x)^2+\frac{2mg}{k}\left[\sin\alpha+\mu\left(1+\frac{M}{m}\right)\cos\alpha\right]\Delta x-\frac{m^2V^2(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)^2}{k(M+m)}=0\,.$$

Удобно вначале подставить численные значения, а затем решать уравнение:

$$(\Delta x)^2+3{,}600\cdot10^{-2}\Delta x-5{,}810\cdot10^{-3}=0\,.$$

Решая уравнение, находим

$$\Delta x=4{,}2\cdot10^{-2}\,(\text{м})=4{,}2\,(\text{см}).$$

Ответ: Δx=4,2 см

Рассмотрим, наконец, применение законов сохранения в ситуациях, отличных от соударений.

Задача 7.

Маленький кубик массой *m=100 г* прикреплен к вершине клина массой *M=1 кг* с углом наклона $\alpha = 30^o$ посредством пружины (рис. 8), длина которой *l =2 м* в недеформированном состоянии равна длине гипотенузы клина. Коэффициент упругости пружины *k=20 Н/м*. Клин без трения может скользить по горизонтальной опоре. Какое количество теплоты *Q* выделится при соскальзывании кубика с вершины клина до его середины, если движение начинается без начальной скорости, а в средней точке кубик имеет относительно земли скорость *V =10 м/с*?

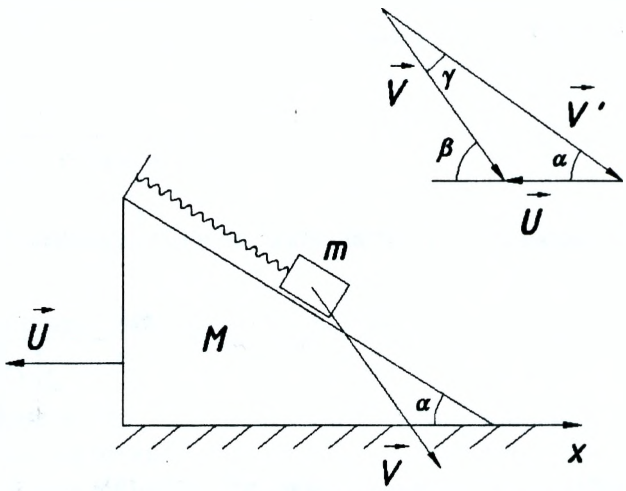


Рисунок 8

Дано:
m=0,1 кг
M=1 кг
$\alpha = 30^o$
l =2 м
k=10 Н/м
V =10 м/с

Q - ?

Решение:

Когда кубик находится на вершине клина, длина пружины мала и, следовательно, ее деформация равна l. В средней точке деформация пружины равна $l/2$. Закон изменения механической энергии для процесса соскальзывания запишется в виде

$$\frac{kl^2}{2} + mgl\sin\alpha = \frac{mV^2}{2} + \frac{k(l/2)^2}{2} + mg\frac{l}{2}\sin\alpha + \frac{MU^2}{2} + Q, \qquad (1)$$

где U – скорость клина в тот момент, когда кубик находится на его середине.

Внешние силы, действующие на систему (кубик + клин) вертикальны (это силы тяжести $m\vec{g}, M\vec{g}$ и сила нормальной реакции горизонтальной опоры), поэтому они не имеют проекции на горизонтальную ось X. Сохраняется, следовательно, проекция импульса системы на ось X. Это дает:

$$-MU + mV_x = 0. \qquad (2)$$

Из треугольника скоростей, показанного на рис. 11, следует, что

$$\frac{U}{\sin\gamma} = \frac{V}{\sin\alpha},$$

откуда $\sin\gamma = \frac{U}{V}\sin\alpha$.

Тогда для проекции на ось X скорости кубика относительно земли имеем:

$$V_x = V\cos\beta = V\cos(\alpha+\gamma) = V(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma) =$$

$$= V\left[\cos\alpha\sqrt{1-\frac{U^2}{V^2}\sin^2\alpha} - \sin\alpha\frac{U}{V}\sin\alpha\right] = \cos\alpha\sqrt{V^2-U^2\sin^2\alpha} - U\sin^2\alpha.$$

Теперь из (2) находим:

$$MU = m\cos\alpha\sqrt{V^2 - U^2\sin^2\alpha} - mU\sin^2\alpha.$$

Выражая U^2, получим:

$$U^2 = \frac{m^2\cos^2\alpha V^2}{(M + m\sin^2\alpha)^2 + m^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha}.$$

Подставляя найденное выражение в (1), находим искомое количество выделившейся теплоты Q:

$$Q = \frac{3kl^2}{8} + mg\frac{l}{2}\sin\alpha - \frac{mV^2}{2} - \frac{MV^2\cos^2\alpha}{2\left[(\frac{M}{m} + \sin^2\alpha)^2 + \cos^2\alpha\sin^2\alpha\right]}.$$

Подставляя численные значения, находим

Q=15,1 (Дж).

Проверим единицу:

$$[Q] = 1\left(Н \cdot м^{-1} \cdot м^2 + \frac{кг \cdot м}{с^2} \cdot м\right) = 1Н \cdot м = 1Дж$$

<u>Ответ:</u> *Q=15,1 Дж.*

<u>Задача 8.</u>

На штативе массой *M=1 кг* подвешен на нити длиной *l=0,5 м* шарик массой *m=100 г*. Штатив без трения может перемещаться по горизонтальной опоре. Шарик массой *3m* висит на нити длиной *L* так, что оба шарика соприкасаются. Шарик массой *3m* отводят от положения равновесия так, что нить составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с вертикалью, и без толчка отпускают. При какой наименьшей длине нити *L* шарик на штативе после абсолютно упругого соударения опишет окружность относительно штатива?

Дано:
M=1 кг
l =0,5 м
m=0,1 кг
$\alpha = 60^\circ$

L - ?

<u>Решение:</u>

Перед соударением с шариком, висящим на штативе, шар массой *3m* имеет скорость V_0, которая элементарно находится из закона сохранения механической энергии:

$$3mgL(1 - \cos\alpha) = \frac{3mV_0^2}{2},$$

откуда

$$V_0 = \sqrt{2gL(1 - \cos\alpha)} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{gL}.$$

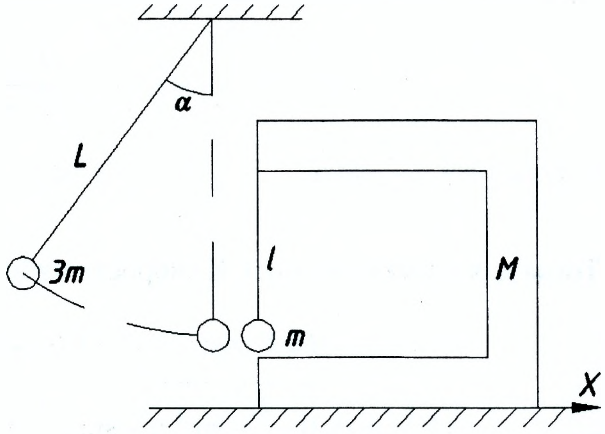


Рисунок 9

(1)

Рассмотрим процесс упругого соударения шаров. Поскольку соударение упругое, выполняется закон сохранения механической энергии. Внешними силами для системы из двух шаров будут силы тяжести $m\vec{g}, 3m\vec{g}$ и силы, действующие на шарик со стороны нитей. Вследствие постоянно предполагаемой справедливости баллистической гипотезы нити в процессе удара можно считать вертикальными. Поэтому сохраняется в процессе удара проекция импульса системы из <u>двух шариков</u> на горизонтальную ось. Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} &\frac{3mV_0^2}{2} = \frac{3mV^2}{2} + \frac{mU^2}{2}; \\ &3mV_0 = 3mV + mU. \end{aligned} \tag{2}$$

где V и U – <u>проекции на ось X скоростей</u> шариков массой $3m$ и m соответственно сразу после удара.

- Обращаем Ваше внимание на то, что штатив в балансе энергий и импульсов не участвует. Это следствие баллистической гипотезы. Его роль становится существенной при дальнейшем движении шарика массой m.

Решая систему (2), находим:

$$U = \frac{3V_0}{2} = 3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{gL}. \tag{3}$$

Для дальнейшего движения системы (шарик массой m + штатив) также выполняются законы сохранения механической энергии (нет трения) и проекции импульса на ось X (внешние силы $m\vec{g}, M\vec{g}$ и нормальной реакции опоры вертикальны).

- Обратите внимание на то, что в системе отсчета, связанной с землей, траектория движения шарика – сложная кривая, но в системе отсчета, связанной со штативом – это окружность. Система отсчета, связанная со штативом, почти все время неинерциальная (почему?). Однако в тот момент, когда шарик оказывается <u>в критическом верхнем положении, она становится инерциальной.</u> Разберитесь в этом! Следовательно, в тот момент мы имеем право писать второй закон Ньютона для движения шарика относительно штатива и заметим, что в верхней точке <u>минимальная скорость шарика относительно штатива</u> должна быть равна $V' = \sqrt{gl}$ (по второму закону Ньютона, минимальная скорость в верхней точке $\frac{mV^2}{l} = T + mg$; $V = \sqrt{\frac{(T+mg)l}{m}}$; $T \geq 0$, $V_{\min} = \sqrt{gl}$. Пусть $V_ш$ – скорость штатива в этот момент. Законы сохранения запишутся в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{mU^2}{2} = \dfrac{MV_ш^2}{2} + mg2l + \dfrac{m(V_ш - V')^2}{2} \\ mU = MV_ш + m(V_ш - V') \end{cases}, \tag{4}$$

где учтено, что проекция скорости шарика относительно земли в верхней точке на ось X равна *($V_ш$-V')*. Выражая из второго уравнения $V_ш$ и подставляя в первое, получим с учетом значения $V' = \sqrt{gl}$.

$$U^2 = gl(5 + 4\frac{m}{M}). \qquad (5)$$

Тогда из (3) и (5) получим окончательно для наименьшей длины L:

$$L = \frac{2l\left(5 + 4\dfrac{m}{M}\right)}{9(1 - \cos\alpha)} = 1{,}2 \text{ (м)}.$$

Проверка единиц очевидна.

Задача 9.

Два космических аппарата одинаковой массы $m=10$ т связаны невесомым тросом длиной $l=10$ *км* и движутся равномерно по круговым орбитам так, что трос направлен все время к центру Земли, а ближайший аппарат находится на расстоянии $H=500$ *км* от ее поверхности. На этом аппарате включен двигатель, так что период обращения тандема в $n=1{,}001$ раз меньше, чем в случае свободного полета. Найти силу тяги двигателя и силу натяжения троса. Считать известным радиус Земли $R=6400$ *км* и ускорение свободного падения на ее поверхности $g=10$ *м/с*^{2}. Изменением массы аппарата с работающим двигателем пренебречь.

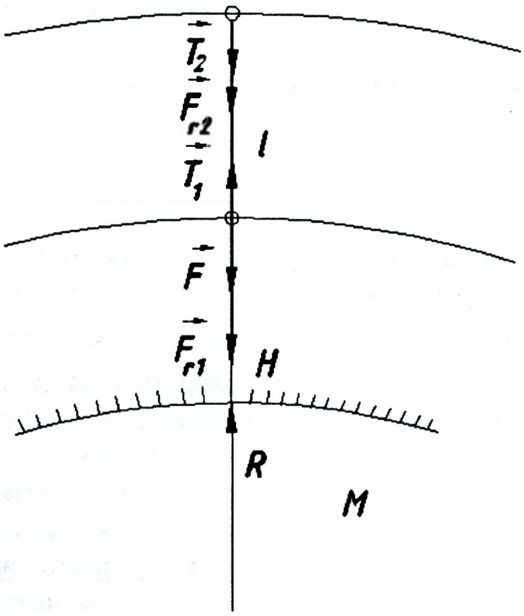


Рисунок 10

Дано:
$m=10^4$ *кг*
$l=10^4$ *м*
$H=5\cdot10^5$ *м*
$n=1{,}001$
$R=6{,}4\cdot10^6$ *м*
$g=10$ *м/с*^{2}

F, T - ?

Решение:

Запишем второй закон Ньютона для каждого из аппаратов в случае отсутствия силы тяги, учитывая, что по условию угловые скорости их одинаковы:

$$m\omega^2(R+H) = \frac{mgR^2}{(R+H)^2} - T', \qquad (1)$$

$$m\omega^2(R+H+l) = \frac{mgR^2}{(R+H+l)^2} + T', \qquad (2)$$

где T' – силы натяжения троса: учтено, что $GM = gR^2$, где M – масса Земли, G – гравитационная постоянная. Сложив (1) и (2), выразим квадрат угловой скорости свободного движения тандема:

$$\omega^2 = \frac{gR^2}{2(R+H)+l}\left[\frac{1}{(R+H)^2} + \frac{1}{(R+H+l)^2}\right].$$

Поскольку период при включении двигателя в $n=1{,}001$ раз меньше, угловая скорость в n раз больше. Записывая второй закон Ньютона для этого случая, получим $(T_1 = T_2 = T)$.

$$\begin{aligned} &\frac{mn^2gR^2}{2(R+H)+l}\left[\frac{1}{(R+H)^2}+\frac{1}{(R+H+l)^2}\right](R+H)=\frac{mgR^2}{(R+H)^2}-T+F, \\ &\frac{mn^2gR^2}{2(R+H)+l}\left[\frac{1}{(R+H)^2}+\frac{1}{(R+H+l)^2}\right](R+H+l)=\frac{mgR^2}{(R+H+l)^2}+T. \end{aligned} \qquad (3)$$

Второе уравнение дает выражение для T, а сложив уравнения, находим F:

$$F=(n^2-1)mgR^2\left[\frac{1}{(R+H)^2}+\frac{1}{(R+H+l)^2}\right].$$

Подставляя численные значения, находим

$$T=358{,}6\ H, \qquad F=343{,}8\ H.$$

Проверим единицы:

$$[T]=[F]=1\frac{кг\cdot м\cdot с^{-2}\cdot м^2\cdot м}{м\cdot м^2}=1\frac{кг\cdot м}{с^2}=1H\ .$$

Ответ: T=358,6 Н; F=343,8 Н.

- Рекомендуем самостоятельно рассмотреть случай, когда работает двигатель более удаленного корабля, а также ситуацию, когда облет совершится за время, большее чем в свободном полете. Самостоятельно рассмотрите определение силы тяги одиночного аппарата и тандема для полета на заданной высоте параллельно широте φ.

Задачи для самостоятельной работы:

1. Космический аппарат массой $m=10$ т движется по круговой орбите на высоте $h=200$ км над Землей, оставаясь все время над одной и той же точкой земной поверхности, находящейся на широте 60° (широта отсчитывается от экватора). Найти силу тяги двигательного аппарата. Изменением массы аппарата пренебречь. Считать известным ускорение свободного падения вблизи Земли $g=10$ м/с^2 и радиус земли $R=6400$ км.

2. На горизонтальной гладкой поверхности стола находится клин с углом при вершине $\alpha=90°$ и углами при основании $\beta=30°$ и $\gamma=60°$. Будет ли клин скользить по столу, если по его боковым граням одновременно начнут скользить (без трения) два одинаковых бруска равной массы? Определить силу нормального давления клина на стол, если масса каждого из грузов $m=2$ кг.

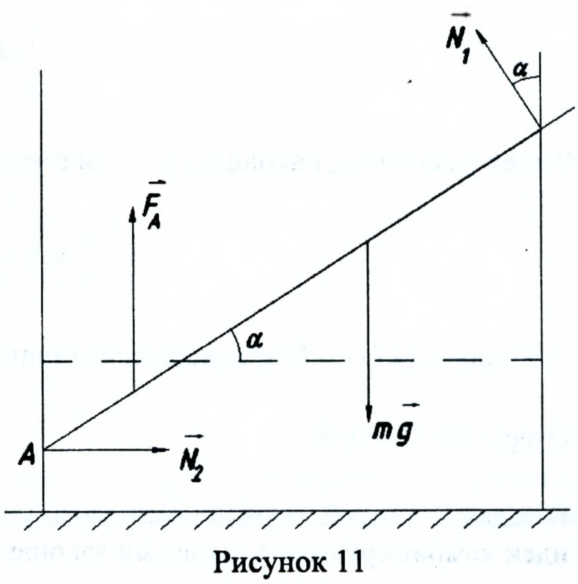


Рисунок 11

СТАТИКА. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ

Традиционными для вступительного экзамена являются две группы задач. В задачах первого типа рассматривается равновесие тала в ситуации, когда одной из действующих на тело сил является сила Архимеда.

<u>Задача 10.</u>
Тонкий стержень расположен в цилиндрическом сосуде с гладкими стенками, содержащем жидкость так, что он составляет угол $\alpha = 60^o$ с горизонтом и за пределами сосуда находится ¼ часть длины стержня (рис. 10). Какая часть длины погружена в жидкость, если плотность стержня второе меньше плотности жидкости?

Дано:
$\alpha = 60^o$

$\frac{x}{l} - ?$

<u>Решение:</u>
Условие равновесия стержня имеет вид:

$$\frac{\rho_ж mg}{\rho_{cm} l} \cdot \frac{x}{2}\cos\alpha - mg\frac{l}{2}\cos\alpha + N_1\frac{3}{4}l = 0$$

$$N_2 - N_1 \sin\alpha = 0$$

$$\frac{\rho_ж mgx}{\rho_{cm} l} - mg + N_1\cos\alpha = 0$$

где ρ_{cm} – плотность материала, из которого сделан стержень, $\rho_ж$ – плотность жидкости.

Выражая из третьего уравнения N_1 и подставляя в первое, получим после преобразований следующее уравнение относительно искомого отношения (x/l):

$$\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{3}{2\cos^2\alpha}\cdot\left(\frac{x}{l}\right) + \frac{\rho_{cm}}{\rho_ж}\cdot\left(\frac{3}{2\cos^2\alpha} - 1\right) = 0 .$$

Подставляя численные значения, получим:

$$\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 6\left(\frac{x}{l}\right) + \frac{5}{3} = 0 .$$

Решая уравнение, находим с учетом очевидного ограничения

$$\frac{x}{l} = 3 - \sqrt{9 - 5/3} = 0{,}29 .$$

Очевидно, (x/l) – безразмерная величина.

<u>Ответ</u>: $(x/l) = 0.29$.

В задачах второй группы эксплуатируются либо только гидростатические идеи, либо эти идеи комбинируются с газовыми законами.

Задача 11.

Цилиндрические сосуды высотой H_0 и диаметрами d_1, d_2 соединены внизу трубой пренебрежимо малого объема, образуя сообщающиеся сосуды. В систему залита ртуть массой m_{pm}. В один из сосудов брошен стальной шарик массой m_{cm} и поверх налита вода массой $m_в$. Считая все плотности известными, найти все величины, которые могут быть найдены в этой ситуации.

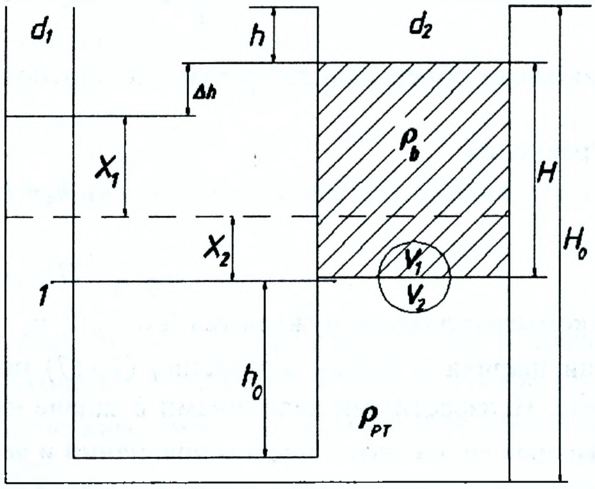


Рисунок 12

Решение:

На рис. 11 штриховой горизонтальной линией показан уровень ртути в сосудах до опускания шарика в сосуд диаметром d_2 и доливания туда воды.

Обозначения:

X_1 – высота подъема ртути в левом сосуде относительно этого уровня при опускании шарика в правый сосуд и доливании туда воды, X_2 – высота, на которую опустится ртуть в правом сосуде, при тех же условиях, Δh – разность уровней ртути в левом и воды в правом сосудах, V_1 – объем части стального шарика, находящейся в воде, V_2 – в ртути, H – высота столбы воды. Уравнение:

$$p_a + \rho_{pm} g(x_1 + x_2) = \rho_в g H + p_a, \tag{1}$$

выражает равенство давлений в точках 1 и 2 на рис. 20 (p_a – атмосферное давление).

Уравнение

$$m_{cm} g = (\rho_{cm} V_2 + \rho_в V_1) g, \tag{2}$$

выражает условие плавания стального шарика на границе раздела ртути с водой, а условие

$$V_1 + V_2 = \frac{m_{cm}}{\rho_{cm}} \tag{3}$$

связывает объем шарика с его массой и плотностью.

Уравнение

$$H \frac{\pi d_2^{\,2}}{4} - V_1 = \frac{m_в}{\rho_в}, \tag{4}$$

связывает объем залитой воды с ее массой и плотностью.

Уравнение

$$\frac{\pi d_2^2}{4} X_2 + V_2 = \frac{\pi d_1^2}{4} X_1 \tag{5}$$

выражает условие несжимаемости ртути: слева стоит объем ртути, ушедшей из первого сосуда при опускании шарика и доливания воды, а справа – объем ртути, вошедшей в левый сосуд при этой операции.

Уравнение

$$\frac{\pi d_1^{\,2}}{4}(h_0 + X_1 + X_2) + \frac{\pi d_2^{\,2}}{4}h_0 - V_2 = \frac{m_{pm}}{\rho_{pm}} \tag{6}$$

связывает объем налитой ртути с ее плотность и массой.

Уравнения

$$h_0 + H + h = H_0, \tag{7}$$

$$H = X_1 + X_2 + \Delta h \tag{8}$$

в комментариях не нуждаются (рис. 20; h_0 – высота столба ртути в правом сосуде при наличии шарика и воды). Уравнения (1)–(7) полностью описывают экспериментальную ситуацию. Неизвестными величинами в задаче являются $X_1, X_2, h_0, V_1, V_2, \Delta h, H, h$, т.е. число неизвестных совпадают с числом уравнений и все неизвестные могут быть определены.

1) Найти объемы шарика, погруженного в ртуть V_2 и в воду V_1.

Для этого используем выражения (2) и (3):

$$V_1 = \frac{m_{cm}(\rho_{pm} - \rho_{cm})}{\rho_{cm}(\rho_{pm} - \rho_в)},$$

$$V_2 = \frac{m_{cm}(\rho_{pm} - \rho_в)}{\rho_{cm}(\rho_{pm} - \rho_в)}. \tag{9}$$

2) Найти высоту столба воды *H*.

Из (4) и (9) получим:

$$H = \frac{4}{\pi d_2^{\,2}}\left[\frac{m_в}{\rho_в} + \frac{m_{cm}(\rho_{pm} - \rho_{cm})}{\rho_{cm}(\rho_{pm} - \rho_в)}\right]. \tag{10}$$

3) Найти разность уровней ртути в сосудах $(X_1 + X_2)$.

Из (1) находим

$$X_1 + X_2 = \frac{\rho_в H}{\rho_{pm}} = \frac{4\rho_в}{\rho_{pm}\pi d_2^{\,2}}\left[\frac{m_в}{\rho_в} + \frac{m_{cm}(\rho_{pm} - \rho_{cm})}{\rho_{cm}(\rho_{pm} - \rho_в)}\right]. \tag{11}$$

4) Найти X_1 и X_2.

Из (11) и (5) с учетом (9) находим X_1 и X_2. Их найдите самостоятельно.

5) Найти Δh. Из (8) имеем $\Delta h = H - (X_1 + X_2) = H\left(1 - \frac{\rho_в}{\rho_{pm}}\right)$, что вместе с (10) дает окончательный ответ.

6) Найти h_0. Значение h_0 находится из (6) с учетом ранее найденных величин.

7) Найти *h*. Значение *h* находится из (7) с учетом ранее найденных величин.

Укажем еще одну идею, которая может использоваться в подобных задачах. Представим, что правый сосуд накрыли герметичной крышкой, а затем через отверстие в трубке, соединяющей сосуды, слили ртуть массой m'_{pm}. Как изменятся все величины, которые определялись выше? Пусть y_1 и y_2 – понижение уровней жидкости в сосудах. Уравнение

$$\frac{\pi d_1^2}{4} y_1 + \frac{\pi d_2^2}{4} y_2 = \frac{m'_{pm}}{\rho_{pm}} \qquad (12)$$

выражает связь между массой слитой ртути, ее плотностью и уменьшением объема ртути в правом и левом сосудах. Уравнение

$$p_a + \rho_{pm} g(x_1 - y_1 + x_2 + y_2) = \rho_e g H + p \qquad (13)$$

аналогично уравнению (1) с тем отличием, что давление воздуха над жидкостью в правом сосуде отличается теперь от атмосферного p_a. Наконец, считая процесс расширения воздуха между крышкой и водой в правом сосуде изотермическим, имеем по закону Бойля-Мариотта

$$p_a h = p(h + y_2). \qquad (14)$$

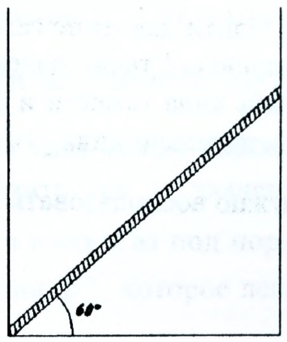
В уравнения (12)–(14) входят три дополнительных неизвестных величины: y_1, y_2, p и они легко могут быть определены из этих уравнений.

- Разумеется, задания по определению этих величин могут встречаться только на письменном экзамене.

Задачи для самостоятельной работы:

1. Если игрушечная пружинная пушка массой $M=0,5$ *кг* (без снаряда) закреплена, то при выстреле снаряд массой $m=50$ *г* вылетает со скоростью $V=20$ *м/с*. С какой скоростью вылетит снаряд, если пушка покоится на гладкой горизонтальной опоре (не закреплена), а ее ствол направлен под углом $\alpha=60°$ к горизонту?

2. Тонкая палочка из материала с плотностью $\rho_1=0,4\cdot10^3$ *кг/м³* длиной $l=40$ *см* прикреплена шарнирно к дну цилиндрического стакана, опираясь другим концом на гладкую вертикальную стенку так, что угол между палочкой и дном равен $60°$. Найти минимальную массу воды, которую нужно налить в сосуд, чтобы палочка оторвалась от правой стенки. Плотность воды $\rho_2=1,0\cdot10^3$ *кг/м³*.



ГАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ. ПЕРВЫЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ

В задачах этого раздела рассматриваются изопроцессы, происходящие с идеальным одноатомным газом и применение к ним первого закона термодинамики. В задаче, предлагаемой ниже, рассматривается весь комплекс идей и подходов по данной теме, которые используются при составлении экзаменационных задач.

Задача 12.

В вертикальном цилиндрическом сосуде высотой $0,5$ *м* и площадью основания $S = 5\cdot10^3$ *см²* могут без трения скользить два тяжелых поршня массой $M=100$ *кг* каждый. Начальное равновесное расположение поршней показано на рис. 12, вертикальные размеры поршней пренебрежимо малы. Через отверстие 3 в верхней части сосуд сообщается с атмосферой, давление которой $p_a = 1,01\cdot10^5$ Па, температура $T_a = 300\,K$, относительная влажность $\varphi = 80\%$. Перемещение поршня 1 ограничено выступами, показанными на рис. 13. Под поршнем 1 находится гелий массой $m=8$ *г*, между поршнями находится также гелий. В начальный момент времени температура гелия всюду равна T_a. Стенки сосуда в нижней части длиной $1,5h$ и поршни нетеплопроводны, основание и остальная часть стенок – слаботеплопроводны. Сосуд ставят основанием на нагреватель с температурой $2T_a$. По истечении достаточно длительного времени через отверстие 3 насосом с производительностью *6 л/мин* закачивают наружный воздух до тех пор, пока поршень 1 не возвратится в первоначальное положение, после чего сосуд снимают с нагревателя. Выполнить следующие задания:

1) Найти массу гелия между поршнями.

Поскольку поршень 2 находится в равновесии, то $p_1S = Mg + p_aS$, где p_1 – давления гелия между поршнями. Тогда $p_1 = p_a + Mg/S$.

Записывая уравнение Менделеева-Клапейрона $p_1S(2h+0.5h) = \dfrac{m_1}{M_{He}}RT_a$, получим для искомой массы m_1:

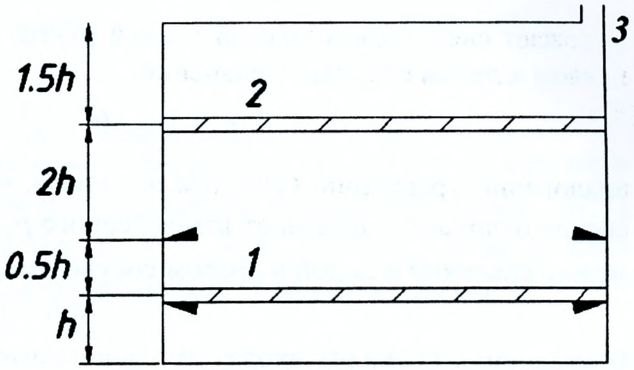


Рисунок 13

$$m_1 = \frac{p\cdot S\cdot 2{,}5h\cdot M_{He}}{RT_a} = \frac{(p_a + Mg/S)\cdot 2{,}5h\cdot M_{He}}{RT_a} = 4{,}13\cdot 10^{-2}\ (кг) = 41{,}3\ (г).$$

При вычислении учтено, что молярная масса гелия $M_{He} = 0{,}004$ *кг/моль*, а $h=0{,}1$ *м* (рис. 13).

2) Найти давление гелия под поршнем 1.

Поршень 1 также находится в равновесии, однако, в отличие от поршня 2, на который действуют лишь сила тяжести и силы давления газа сверху и снизу, на поршень 1 может действовать дополнительно сила реакции выступов, так что для нахождения давления гелия под поршнем 1 нужно воспользоваться уравнение Менделеева-Клапейрона $pSh = \dfrac{m}{M_{He}}RT_a$, откуда

$$p = \frac{mRT}{ShM_{He}} = 9{,}97\cdot 10^4\ \text{Па}.$$

3) Какое количество теплоты получит гелий под поршнем 1 на этапе расширения?

Поскольку давление газа над поршнем 1 больше вначале давления газа под поршнем $(p_1 > p)$, то поршень 1 прижат к выступу. При повышении температуры газа под поршнем 1 его давление будет повышаться, но до тех пор, пока давление не достигнет величины $p' = p_1 + \dfrac{Mg}{S} = p_a + \dfrac{2Mg}{S}$, поршень 1 будет стоять на месте, т.е. процесс нагрева будет изохорным. Вычислим при какой температуре T' поршень 1 сдвинется с места:

$$p'Sh = \frac{m}{M_{He}}RT',$$

откуда $T' = \dfrac{\left(p_a + \dfrac{2Mg}{S}\right)ShM_{He}}{mR} = 315.9K$.

Поскольку нагревание газа осуществляется до температуры $2T_a = 600K$, поршень 1 сдвинется с места и начнет перемещаться вверх. Начиная с этого момента и до момента касания поршнем 1 верхних выступов, давление газа остается равным p'. Выясним, дойдет ли поршень до верхних выступов. Температура, при которой это может произойти, равна:

$$T'' = \frac{\left(p_a + \frac{2Mg}{S}\right) S \cdot 1.5h \cdot M_{He}}{mR} = 473.9K = 1.5T'.$$

Таким образом, поршень 1 коснется выступов и будет нагреваться от температуры T'' до температуры $2T_a = 600K$ изохорно, имея объем ($S \cdot 1.5h$). На этом этапе расширения газа подъем поршня 1 заканчивается. Заметим, что расстояние между поршнями при этом сохраняется неизменным и равным *2.5h.* По первому закону термодинамики количество теплоты, полученное газом, будет равно:

$$Q = \frac{m}{M_{He}} \cdot \frac{3}{2} R \cdot (T' - T_a) + \frac{m}{M_{He}} \cdot \frac{3}{2} \cdot R \cdot (T'' - T') + p' \cdot (1{,}5hS - Sh) + \frac{m}{M_{He}} \cdot \frac{3}{2} \cdot R \cdot (2T_a - T'') =$$

$$= \frac{m}{M_{He}} \cdot \frac{3}{2} \cdot R \cdot (2T_a - T_a) + \left(p_a + \frac{2Mg}{S}\right) \cdot S \cdot 0{,}5 \cdot h = 1040 \text{ Дж}$$

4) Изобразить графики всех процессов, происходящих с газом под поршнем 1, на *(p,V) – (p,T) – (V,T)* диаграммах.

Опишем, что будет происходить с газом под поршнем 1 после достижения им температуры $2T_a = 600K$ и давления $p'' = p' \frac{2T_a}{T''} = \left(p_a + \frac{2Mg}{S}\right) \cdot \frac{2T_a}{T''} = 1{,}33 \ 10^5$ Па. При закачивании наружного воздуха через отверстие 3 поршень 2 начнет опускаться, давление газа между поршнями 1 и 2 будет изотермически при температуре T_a возрастать до значения $p'' - Mg/S = 1{,}31 \cdot 10^5$ Па, после чего поршень 1 также начнет двигаться вниз. Газ под поршнем 1 будет изотермически при температуре $2T_a$ сжиматься до давления p''', которое легко находится из уравнения закона Бойля-Мариотта:

$$p''' \cdot S \cdot h = p'' \cdot S \cdot 1{,}5h,$$

откуда $p''' = 1{,}5p'' = 1{,}99 \cdot 10^5$ Па.

Поршень 1 в этот момент касается выступа, дальнейший процесс нагнетания воздуха через отверстие 3 прекращается, а газ под поршнем 1 изохорно охлаждается до первоначального давления p и температуры T_a. Графики процессов, происходящих с газом под поршнем 1, показаны на *(p,V)* – диаграмме на рис. 14. Постройте самостоятельно их на остальных двух диаграммах.

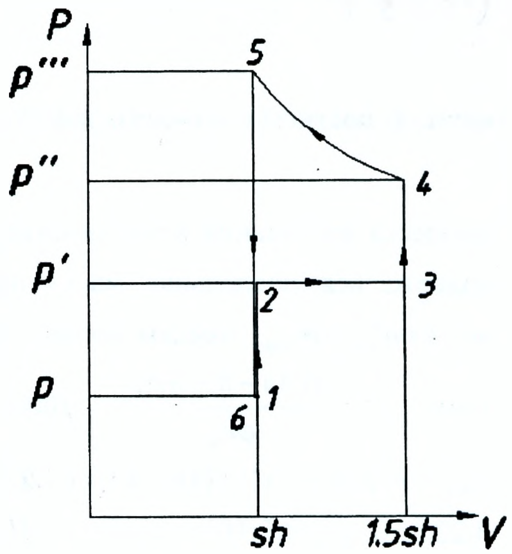


Рисунок 14

5) Сколько времени будет продолжаться процесс 5-4 изотермического сжатия газа под поршнем 1?

Когда газ 1 находился в состоянии 4, давление воздуха под поршнем 2 было равно атмосферному p_a, а объем Sh. Парциальное давление насыщенного водяного пара при температуре $T_a = 300\ K$ равно $p_H = 3{,}565$ кПа=$3{,}565 \cdot 10^3$ Па. Относительной влажности $\varphi = 80\%$ соответствует парциальное давление $p_n = \varphi \cdot p_H = 0{,}8 \cdot 3{,}565 \cdot 10^3$ Па = $2{,}85 \cdot 10^3$ Па. Поэтому над поршнем находилась масса сухого воздуха, равная

$$m = \frac{(p_a - p_n)ShM_в}{RT_a},$$

и пара

$$m'_n = \frac{p_n ShM_{H_20}}{RT_a}.$$

В конце процесса изотермического сжатия газа под поршнем 1 (состояние 5) давление газа между поршнями равно $(p'''- Mg/S)$, а воздуха над поршнем 2 – $(p'''- 2Mg/S)$. За единицу времени насос захватывает объем $V_0 = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{60} = 10^{-4}\ м^3$ атмосферного воздуха, т.е. массу $m'_0 = (p_a - p_n)V_0 M_B / RT_a$ сухого воздуха и $m'_{n0} = p_n V_0 M_{H_20} / RT_a$ водяного пара. Через время t в сосуде будет находиться масса воздуха:

$$m' + t \cdot m'_0 = \frac{(p_a - p_n)M_в}{RT_a}(Sh + V_0 t),$$

и воды:

$$m'_n + tm'_{n0} = \frac{p_n M_{H_2O}}{RT_a}(Sh + V_0 t).$$

Поскольку процесс накачки протекает достаточно медленно, а стенки теплопроводны, можно считать процессы, происходящие с воздухом над поршнем 2 и гелием между поршнями изотермическими. По закону Бойля-Мариотта для газа между поршнями:
$\left(p_a + \frac{Mg}{S}\right)2h = \left(p''' - \frac{Mg}{S}\right)h'$, где h' – расстояние между поршнями в тот момент, когда поршень 1 достигает нижнего выступа. Тогда $h' = \frac{\left(p_a + \frac{Mg}{S}\right)2h}{\left(p''' - \frac{Mg}{S}\right)} = 0{,}105\ м$. Поэтому в конце процесса нагнетания воздуха объем воздуха будет равен $S(4h - h')$. В этом объеме может содержаться предельная масса пара $m_{n\max} = p_H S(4h - h')M_{H_20} / RT_a$. Тогда из выражения $m'_n + tm'_{n0} = m_{n\max}$ найдем время t' работы насоса, в течение которого пар ненасыщен. Получим $t' = \frac{S(4h - h' - h\varphi)}{\varphi V_0}$. Давление сухого воздуха в этот момент равно $(p_a - p_n)(Sh + V_0 t)/S(4h - h') = 1{,}226 \cdot 10^5\ Па$. Давление над поршнем в этот момент равно $1{,}226 \cdot 10^5 + 3{,}565 \cdot 10^3 = 1{,}262 \cdot 10^5\ Па$. Поскольку это меньше, чем конечное давление $p''' - \frac{2Mg}{S} = 1{,}95 \cdot 10^5\ Па$, то процесс будет продолжаться дальше, но над поршнем 2 будет конденсироваться вода. Время нагнетания определяется теперь из очевидного соотношения:

$$\left(p'''-\frac{2Mg}{S}-p_H\right)S(4h-h')=\frac{m'+tm'_0}{M_в}RT_a,$$

откуда

$$t=\frac{1}{V_0}\left[\frac{\left(p'''-\frac{2Mg}{S}-p_H\right)S(4h-h')}{p_a-p_n}-Sh\right]=2376.9c.$$

6) Определите массу конденсировавшейся воды в конце процесса нагнетания.
Имеем, очевидно,

$$m_{воды}=m'_{n0}(t-t').$$

Вычисление проведите самостоятельно.

- Рекомендуем самостоятельно разобраться с процессом медленной откачки воздуха из сосуда при наличии в нем воды.

7) Предположим, что при начальном равновесном расположении поршней в поршне 1 образовалось большое отверстие. Насколько при этом переместиться поршень 2?

Поскольку давление гелия над поршнем 1 вначале равно $p'=p_a+\frac{Mg}{S}$, что больше давления p под поршнем 1, а температуры газа одинаковы и равны T_a, начнется процесс выравнивания давлений. При большом отверстии этот процесс происходит достаточно быстро, так что при слаботеплопроводных стенках теплообмен с окружающей средой не успевает произойти – процесс будет адиабатическим. После выравнивания давлений давление гелия всюду будет равным (p_a+Mg/S).

Пусть X – смещение поршня 2. Тогда из уравнения состояния имеем

$$(p_a+Mg/S)(2.5h-X)S=(m+m')RT'/M_{He},$$

где T' – температура газа после выравнивания давлений. Записывая первый закон термодинамики для адиабатного процесса, получим:

$$(p_a+Mg/S)SX=\frac{m+m'}{M_{He}}\frac{3}{2}R(T'-T_a).$$

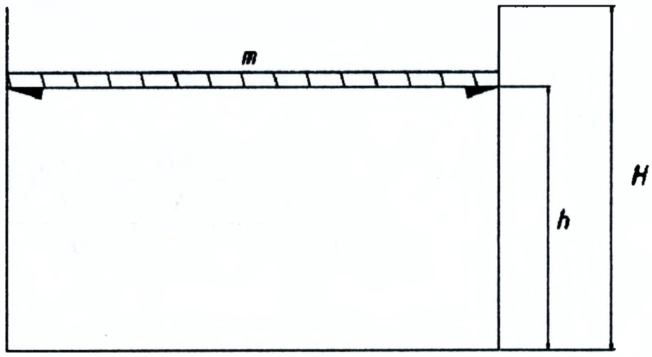
Решая систему из двух выписанных уравнений, получим:

$$X=1.5h-\frac{3}{5}\frac{(m+m')RT_a}{M_{He}(p_aS+Mg)}.$$

Вычисления проведите самостоятельно.

Традиционными также являются задачи, в которых используется закон сохранения энергии для тепловых процессов в ситуациях, когда он сводится к балансу количества теплоты.

Задачи для самостоятельной работы:



1. Поршень массой $m=100$ *кг* может без трения перемещаться в вертикальном цилиндрическом сосуде высотой $H=1$ *м*, диаметром $D=20$ *см*. На высоте $h=20$ *см* от дна сосуда расположены выступы, ограничивающие перемещение поршня вниз. Под поршнем находится *0,4 г* гелия при температуре $T=300$ *К*. Какое количество теплоты надо сообщить гелию, чтобы поршень поднялся до края сосуда? Молярная масса гелия $M=4\cdot10^{3}$ *кг/моль*. Атмосферное давление $P=1{,}01\cdot10^{5}$ *Па*.

2. В открытый сосуд объемом $V=10$ *л* налили *20 г* воды, после чего сосуд закрыли крышкой. Насос с производительностью *0,5л/мин* откачивает воздух из сосуда. Считая процесс откачки изотермическим, найти время, по истечении которого вода в сосуде исчезнет. Относительная влажность наружного воздуха *50%*, температура $T=310$ *К*, давление насыщенного пара $P_H=6{,}6$ *кПа*.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

Основные идеи, используемые в задачах электростатики, рассмотрим на примере задачи 13, фиксируя уровень сложности заданий аналогично предыдущим задачам.

Задача 13.

Ангар площадью $S=10^4$ $м^2$ имеет непроводящие стенки и фундамент. Пол ангара состоит из двух тонких металлических первоначально незаряженных пластин, находящихся на расстоянии $d=1$ *м* друг от друга, разделенных изолирующими прокладками; аналогичную конструкцию имеет потолок. Высота ангара внутри $h=3$ *м*. В ангаре в вертикальной плоскости расположена конструкция из непроводящих гладких стержней (рис. 15), где $a=1$ *м*. Напряженность электрического поля Земли равна $E=100$ *В/м* и направлена вертикально вниз. По стержням может скользить маленький шарик массой $m=0{,}5$ *мг*, несущий заряд $q=-100$ *нКл*, а в точке *Д* закреплен заряд *Q*. Выполнить следующие задания:

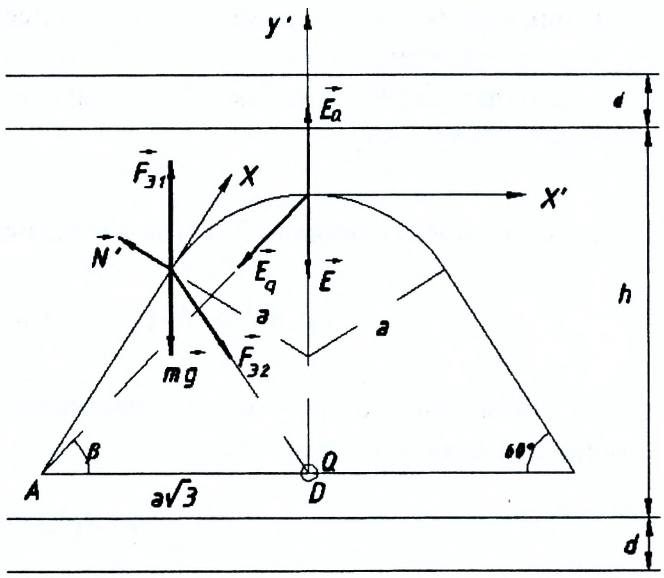


Рисунок 15

1) Найти *Q*, если шарик, помещенный в точку В, находится в равновесии. Очевидно, крыша и пол в таком случае никакой роли не играют. На рис. 15 изображены силы, действующие на шарик в точке В:

$$F_{э1} = |q|E;\ F_{э2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|Q}{3a^2},$$

$\overrightarrow{N'}$ – сила нормальной реакции.

Записывая условие равновесия в проекции на ось X, получим

$$|q|E\cos 30° - mg\cos 30° - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|Q}{3a^2}\cos 60° = 0,$$

откуда

$$Q = \frac{12\pi\sqrt{3}\varepsilon_0 a^2\left(|q|E - mg\right)}{|q|} = 2{,}9\cdot 10^{-8}\text{ Кл}= 29\text{нКл}.$$

Очевидно, что Q>0.

2) Найти модуль и направление напряженности $\overrightarrow{E_c}$ электрического поля в точке C, если заряд q находится в точке A.
По принципу суперпозиции (рис. 15) имеем:

$$E_{cx'} = -E_q\cos\beta = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{|AC^2|}\frac{|AD|}{|AC|} = -84{,}2\text{ В/м},$$

$$E_{cy'} = -E - E_q\sin\beta + E_Q = -E - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{|AC^2|}\frac{|CD|}{|AC|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q|}{|CD^2|} = -131{,}9\text{ В/м},$$

тогда

$$E_c = \sqrt{E_{cx'}^2 + E_{cy'}^2} = 153{,}3\ В/м, \quad \cos\gamma = E_{cx'}/E_c = -0{,}55; \quad \gamma = 236{,}7°,$$

где γ – угол между $\overrightarrow{E_c}$ и осью X'.

3) Шарик начинает движение без начальной скорости из точки A. С какой силой он давит на ступень в точке C, если конструкция закреплена?
По закону сохранения энергии имеем:

$$\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{3}} = \frac{mV_c^2}{2} + mg2a + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 2a} + qE2a.$$

Второй закон Ньютона, записанный для тела находящегося в точке C, дает (N – нормальная реакция, которую считаем направленной к центру окружности)

$$\frac{mV_c^2}{2} = qE + mg + \frac{|q|Q}{4\pi\varepsilon_0(2a)^2} + N \qquad (1)$$

Решая систему, находим:

$$N = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\right) - 5(mg + qE).$$

Искомая сила давления равна по модулю N и направлена вертикально вверх.

4) Найти силу давления в точке C, если конструкция стержней вместе с зарядом Q имеет массу $M=5$ *мг* и может свободно перемещаться по горизонтали.

Пусть V_c – скорость шарика относительно конструкции в точке C, U – скорость конструкции в этот момент. Закон сохранения энергии и проекции импульса системы на горизонтальное направление дает:

$$\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{3}} = \frac{m\left(V_c - U\right)^2}{2} + mg2a + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 2a} + qE2a\,, \tag{2}$$

$$-MV + m(V_c - U) = 0\,. \tag{3}$$

Уравнение (1) остается справедливым. Решите самостоятельно систему уравнений (1)–(3) и найдите N.

5) Внутренние крышу и пол соединяют тонкой проволокой, которую затем удаляют. То же повторяют с наружными пластинами. Какое количество теплоты выделится при этом?

При соединении внутренних пластин их потенциалы выравниваются и напряженность результирующего поля между ними обращается в нуль, т.е. индуцированные заряды создают поле, уничтожающее между платинами поле Земли. При соединении внешних платин разность потенциалов между ними также обращается в нуль. Учитывая, что при втором соединении поле зарядов, индуцированных на внутренних пластинах, не изменяется, получим $E'h + \left(E' - E\right)2d = 0$, откуда $E' = E\dfrac{2d}{h+2d} = 40\,B/м$ (напряженность электрического поля внутри ангара направлена вертикально вверх). Количество выделившейся теплоты проще всего рассчитать через изменение энергии электростатического поля при таком соединении.

$$Q = \frac{\varepsilon_0 E^2 S\left(h + 2d\right)}{2} - \frac{\varepsilon_0 E'^2\, Sh}{2} - 2\frac{\varepsilon_0\left(E - E'\right)^2}{2} Sd\,.$$

Вычисления проведите самостоятельно.

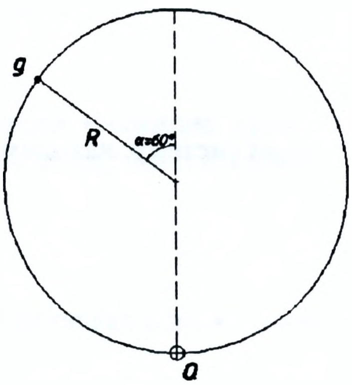
- Разберите самостоятельно изменение напряженности поля внутри ангара, найдите количество выделившейся теплоты в следующих ситуациях.

6) Со вторым удаленным ангаром заданных размеров производят те же манипуляции, а затем соединяют проводниками попарно а) внутренние пол с полом и потолок с потолком, б) внутренний пол одного с потолком другого ангара.

7) Внутренние пол и потолок ангара после манипуляций в п.5 присоединяют к источнику с заданной ЭДС, которая может быть меньше или больше величины $E'h$.

<u>Задачи для самостоятельной работы:</u>

1. В однородном электрическом поле Земли с напряженностью $E=100$ *В/м*, направленной вертикально вниз, находится плоский незаряженный конденсатор, образованный двумя горизонтальными пластинами площадью $S=10^3$ *мм*^{2}, находящимися на расстоянии $d=5$ *см* друг от друга. Какое количество теплоты выделится при соединении этого конденсатора к батарее с ЭДС $E=400$ *В*, если и верхняя пластина присоединяется к положительному полюсу батареи?



2. Непроводящее кольцо радиуса *R=10 см* расположено в вертикальной плоскости. В нижней точке расположен точечный заряд $Q=+20$ *нКл*. По кольцу без трения может скользить шарик с зарядом $q=+10$ *нКл*. Шарик находится в равновесии в положении, показанном на рисунке. Шарик медленно поворачивают в вертикальной плоскости, пока угол α не станет равным 90^0. Найти напряженность электрического поля в центре кольца после поворота. Принять $g=10$ *м/с*^{2}.

Задача 14.

Имеются источник с электродвижущей силой E и внутренним сопротивлением r, амперметр с сопротивлением R_A, вольтметр с сопротивлением R_V и резистор с сопротивлением R. Выполните следующие задания для всех возможных схем соединения указанных элементов, при которых показания амперметра и вольтметра ненулевые (несколько схем показано на рисунке 16).

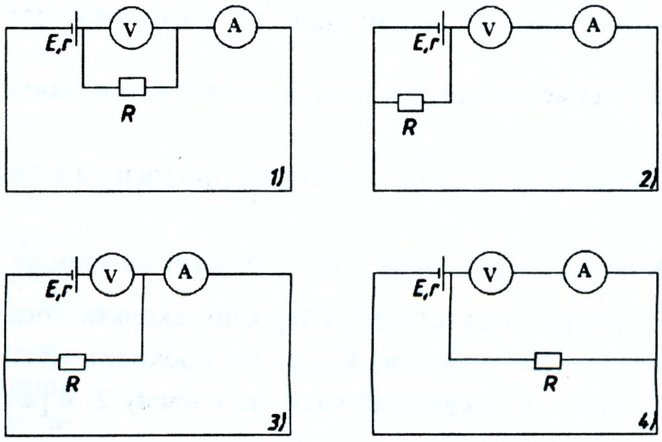


Рисунок 16

1) Считая все параметры заданными, найти показания вольтметра и амперметра.

2) Найти напряжение на зажимах источника.

3) Мощность, выделяемую в резисторе.

4) Мощность потерь (мощность, выделяемую внутри источника, амперметра и вольтметра)

5) Найти КПД схемы, считая полезной мощность, выделяемую в резисторе.

6) При каком сопротивлении $R = R_0$ мощность, выделяемая в нем, максимальна?

7) Найти максимально возможную мощность, выделяемую в резисторе?

8) При каком сопротивлении R мощность потерь минимальна? Чему она равна?

9) Допустим, что сопротивление резистора $R_1 = nR_0$. Резистор какого сопротивления можно подсоединить последовательно или параллельно данному, чтобы мощность, выделяемая на резисторах, не изменилась? Рассмотреть случай $n > 1$ и $n < 1$. Как изменяется при таком подсоединении мощность потерь и КПД?

МАГНЕТИЗМ

Задача 15.

На наклонной плоскости с углом наклона α уложены на расстоянии l друг от друга два параллельных прямолинейных массивных рельса a и b, по которым без нарушения электрического контакта скользит стержень длины l. Рельсы и стержень входят в состав электрической схемы, показанной на рисунке 17. Вся система находится в магнитном поле, индукция которого направлена вертикально вверх. Выполнить следующие задания.

1) Ключ K_1 – разомкнут, K_2 – соединяет клеммы 1 и 2, трение отсутствует, сечение стержня S' в n раз отличается от сечения

$$S = \frac{B\varepsilon}{\rho' gr} ctg\alpha - \rho\frac{l}{r}. \qquad (1)$$

Найти установившуюся скорость стержня и написать баланс мощностей.

Пусть сечение стержня больше. Тогда он будет скользить вниз (почему?). ЭДС индукции $\varepsilon_i = BlV\cos\alpha$ будет создавать ток того же направления, что и батарея, так что $I = (\varepsilon + \varepsilon_i)/\left(r + \frac{\rho l}{S'}\right) = \frac{\varepsilon + BlV\cos\alpha}{r + \rho l / S'}$. В установившемся режиме $BIl\cos\alpha = mg\sin\alpha$. Из этих соотношений находим $V = \frac{-B\varepsilon\cos\alpha + \rho' g\sin\alpha(\rho l + S'r)}{B^2 l\cos^2\alpha}$. Подставьте в это выражение значение $S' = Sn$, где S дается формулой (1) и получите окончательное выражение для V самостоятельно. Баланс мощностей имеет вид: $I^2\left(\rho\frac{l}{S} + r\right) = mg\sin\alpha V + \varepsilon I$. Проверьте его выполнение самостоятельно. Как изменится решение, если n<1?

Выполните предыдущий пункт при наличии трения.

Ключ K_2 – разомкнут, K_1 – замкнут на клемму 1, трение отсутствует. Стержень скользит без начальной скорости. Когда он проходит путь L, ключ K_1 перебрасывают на клемму 2, в результате чего стержень на мгновение останавливается. Чему равна емкость конденсатора? Через какое время после замыкания скорость стержня опять станет равной скорости непосредственно перед замыканием?

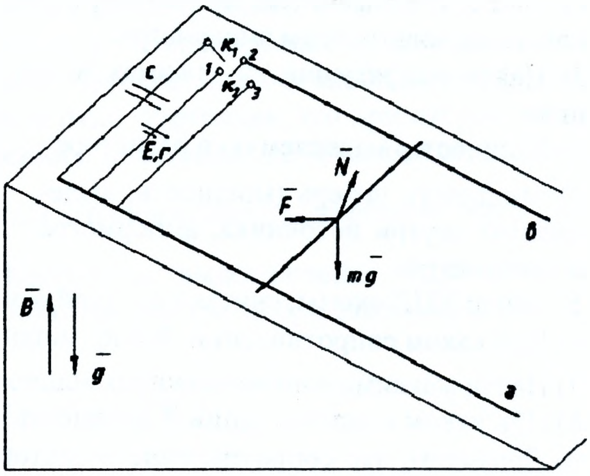
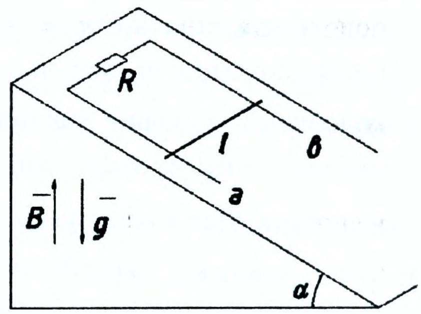


Рисунок 17

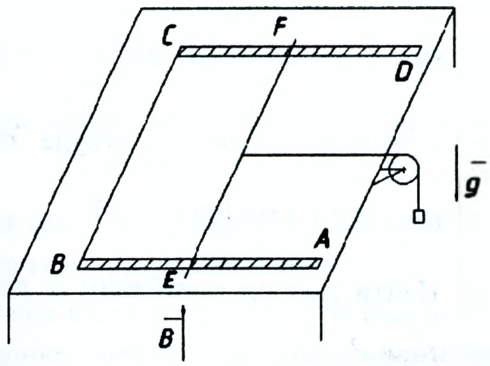
Перед замыканием стержень имеет скорость $V = \sqrt{2gL\sin\alpha}$. Параметры схемы обычно задаются так, что время разряда Δt мало (по порядку величины оно равно RC), поэтому сила Ампера значительно превышает $\overrightarrow{mg}$ и последней можно пренебречь. Записывая второй закон Ньютона в проекции на ось, направленную вдоль плоскости, получим $BIl\cos\alpha\Delta t = m\sqrt{2gL\sin\alpha}$. Но $I\Delta t = q = c\varepsilon$ – заряд конденсатора. Из этих соотношений находим $c = \frac{m\sqrt{2gL\sin\alpha}}{B\varepsilon l\cos\alpha}$. При последующем движении проводника заряд конденсатора равен $q = c\varepsilon_i = cBlV\cos\alpha$, а сила тока в цепи $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = cBla\cos\alpha$. Сила Ампера $F_A = BIl = cB^2l^2a\cos\alpha$. Второй закон Ньютона запишется в виде $ma = mg\sin\alpha - F_A\cos\alpha = mg\sin\alpha - cB^2l^2a\cos^2\alpha$, откуда для ускорения стержня получим $a = \frac{mg\sin\alpha}{\left(m + cB^2l^2\cos^2\alpha\right)}$. Искомое время теперь находим тривиально. Проделайте выкладки самостоятельно. Подумайте, как изменится решение при наличии трения. Как будет выглядеть энергетический баланс?

Задания для самостоятельной работы:

1. Два проводника a и b, уложенные на наклонной плоскости ($\alpha = 60^0$), замкнуты резистором с сопротивлением *R=1 Ом*. По проводникам без нарушения контакта скользит стержень длиной *l=1 м*, массой *m=1 кг*. Коэффициент трения скольжения $\mu = 0.1$. Найти установившуюся скорость стержня, если вся система находится в магнитном поле с индукцией *B=0.1 Тл*, направленной вертикально вверх. Сопротивлением стержня и проводников пренебречь. Принять $g=10$ *м/с*^{2}.



2. На горизонтальном столе расположена конструкция П-образной формы ABCD из массивных рельсов. По конструкции может скользить стержень EF длиной *l=1м*, массой *100 г* из меди с удельным сопротивлением $1{,}6\cdot10^{-8}$ *Ом·м*. Индукция поля направлена вертикально вверх и равна *0,2 Тл*. К стержню прикреплена нерастяжимая нить, переброшенная через блок, на другом конце которой висит груз массой *150 г*. Найти установившуюся скорость стержня, если коэффициент трения о рельсы равен $\mu = 0.1$. Принять $g=10$ *м/с*^{2}. Плотность меди *9800 кг/м*^{3}.



КОЛЕБАНИЯ

В задачах рассматриваются колебания математического, пружинного маятника и колебания в колебательном контуре.

Задача 16.

К маленькому шарику массой *m*, висящему на нити, привязана другая нить, перекинутая через блок, к другому концу которого привязан груз массой *0,1m*. Шарик находится в равновесии, когда нить *1* (рис. 18а) горизонтальна. При *t=0* нить пережигают. Выполните следующие задания:

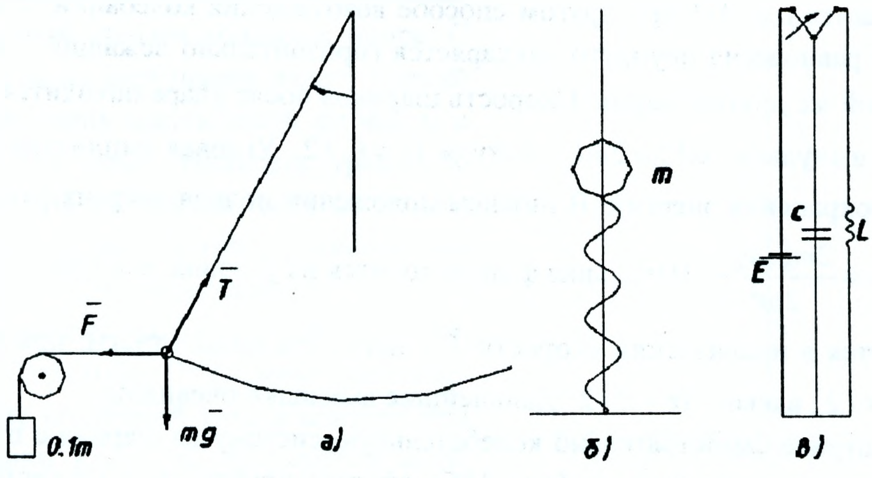


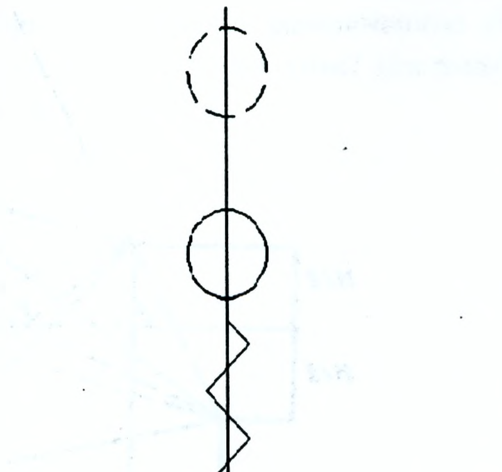
Рисунок 18

1. Написать уравнение колебаний, если известно, что из первоначального положения до положения, при котором угол отклонения уменьшился вдвое, шарик двигался 1 с. Очевидно, модуль начального угла отклонения: φ_m – является угловой амплитудой колебаний. Условие равновесия в проекциях на горизонтальное и вертикальное направление имеет вид: $T\sin\varphi_m - 0.1mg = 0$, $T\cos\varphi_m - mg = 0$. Тогда $tg\varphi_m = 0.1$ – малая величина. Для малых углов $tg\varphi_m \approx sin\varphi_m \approx \varphi_m$, поэтому $\varphi_m = 0.1$ (стандартное приближение малых колебаний). Уравнение колебаний запишется в виде $\varphi = \varphi_m \cos(\omega t + \alpha) = 0.1\cos(\omega t + \alpha)$. Поскольку при t=0, $\varphi = -\varphi_m$ (напомним, что положительные значения угла отсчитываются от вертикали против часовой стрелки), то получим: $-\varphi_m = \varphi_m \cos\alpha$, откуда $\alpha = \pi$. Таким образом, уравнение колебаний примет вид $\varphi = 0.1\cos(\omega t + \pi)$. По условию, при t=1 с, $\varphi = -\frac{\varphi_m}{2}$. Это дает: $-\frac{\varphi_m}{2} = \varphi_m \cos(\omega + \pi)$, откуда $\omega = \pi/3$. Окончательно уравнение колебаний примет вид: $\varphi = 0.1\cos(\pi t/3 + \pi)$.
2. Найти период колебаний и длину математического маятника. Имеем $T = \frac{2\pi}{\omega} = 6c$; $l = g/\omega^2 = 9.1$ (м).
3. Найти кинетическую, потенциальную и полную энергии маятника при $t=2$ c, а также скорость шарика в этот момент. При $t=2$ c имеем для потенциальной энергии: $E_n = mgl/(-\cos\varphi) = mg2l\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{mgl\varphi^2}{2} = \frac{mg^2\varphi_m{}^2}{\omega^2}$, ибо $\varphi = \varphi_m/2$. Полная энергия равна потенциальной при $\varphi = \varphi_m : E = \frac{mg^2\varphi_m{}^2}{2\omega^2}$. Кинетическая энергия $E_K = E - E_n = 3mg^2\varphi_m{}^2/8\omega^2$. Скорость шарика $V = \sqrt{2E_K/m} = \frac{g\varphi_m}{\omega}\sqrt{\frac{3}{2}}$. Вычисления и проверку единиц проведите самостоятельно. Другой способ вычисления скорости: проекция скорости V_x на ось X, направленную вправо, равна $V_x = -\omega(\varphi_m \sin(\omega t + \alpha))$. Почему?
4. Выполнить п.п. 1-3 при другом способе возбуждения колебаний: с шариком в положении равновесия неупруго соударяется горизонтально лежащий с малой скоростью V_0 такой же другой шарик. Скорость шариков после удара находится из закона сохранения импульса: $mV_0 = 2mU$, откуда $U = V_0/2$. Угловая амплитуда находится из закона сохранения энергии. В нижнем положении полная энергия равна кинетической: $\frac{2mU^2}{2} = \frac{2mg^2\varphi_m{}^2}{2\omega^2}$. Начальная фаза находится из условия, что при t=0, $\varphi = 0$ и шарики движутся в направлении скорости $\overrightarrow{V_0}$; приведем лишь ответы: при движении вправо $\alpha = 3\pi/2$, влево – $\alpha = \pi/2$. Дальнейшие выкладки очевидны.
5. Рассмотрите самостоятельно колебательную систему из шарика с пружиной на гладком вертикальном стержне (рис. 18б), сформулируйте для этой системы аналоги способов возбуждения, рассмотренные выше, и выполните все задания.

6. При t=2 c с шариком рис. 18а сталкивается неупруго шарик такой же массы, имеющий ту же по модулю скорость, направленную под заданный углом $\beta \in (-\pi/2; \pi/2)\hat{e}\vec{g}$. Написать уравнение колебаний после соударения. Закон сохранения импульса записывается в данном случае в проекции на касательную к окружности, по которой движется колеблющийся шарик, и имеет вид $mV + mV\sin(\beta - \varphi) = 2mU_x$, где скорость V перед ударом найдена в п. 3. U – скорость сразу после соударения. Новая угловая амплитуда $\varphi_m{}'$ находится из закона сохранения энергии: $\frac{2mg^2\varphi_m{}^2}{2\omega^2} = \frac{2mg^2\varphi^2}{2\omega^2} + \frac{2mU^2}{2}$, где $\varphi = \varphi_m^{'}/2$ при t=2 с (баллистическая гипотеза!). Начальная фаза (новая) α' зависит от выбора начала отсчета времени. Если его сохранить прежним, то α' находится их двух соотношений: $\frac{\varphi_m}{2} = \varphi_m{}'\cos\alpha; U_x = -l\omega\varphi_m{}'\sin\alpha$ (см. п. 3). Выкладки проведите самостоятельно, учитывая, что в приближении гармонических колебаний $\sin(\beta - \varphi) = \sin\beta - \varphi\cos\beta$.
7. Самостоятельно сформулируйте задание п.6 для системы на рис. 18б и выполните его.
8. Изобразите схемы возбуждений колебательного контура, аналогичные рис. 18в и п. 4. Подберите характеристики схем так, чтобы период колебаний в контуре был в 10^4 раз меньше, чем для механического аналога, а мощность потерь в заданном малом сопротивлении $R=10^{-4}$ *Ом* соединительных проводов была равна $P=10^{-5}$ *Вт*. Электрический аналог рис. 18а показан на рис. 18в. При малом R имеем $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Амплитудные значения энергий конденсатора и катушки отличаются на величину порядка 10^{-8} *Дж*, так что приближенно $\frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}$, где $U_m=10$ *В*. Наконец, мощность тепловых потерь равна $P = RI_m^2/2$. Из выписанных соотношений самостоятельно найдите *L, R, C*. Аналог п.4 изобразите самостоятельно.

<u>Задачи для самостоятельной работы:</u>

1. Шарик массой *100 г* надет на вертикальную гладкую спицу и находится в равновесии, будучи прикрепленным к пружине, закрепленной другим концом к опоре. С высоты *1 м* на этот шарик падает одетый на эту же спицу шарик такой же массы и прилипает к нему. Написать уравнение возникающих колебаний, если от нового положения до самого нижнего положения система двигалась одну секунду.
2. В схеме на рисунке $R=0.1$ *Ом*, $r=1$ *Ом*, $E=5$ *В*, $L=1$ *мГн*, $C=10$ *мкФ*. Написать уравнение колебаний тока в контуре при размыкании ключа К. Затуханием колебаний вследствие наличия резистора R пренебречь.



ОПТИКА

Задачи по оптике охватывают следующие темы: отражение и преломление света, тонкие линзы, волновые свойства света и фотоэффект.

Задача 17.

Две маленькие лампочки висят на столбе, расстояние между которыми равно S, а разность высот H. Неподвижным фотоаппаратом, главная оптическая ось объектива которого горизонтальна и проходит через столбы, дважды производится фотографирование этих лампочек на один кадр: один раз с наводкой на резкость на одну лампочку, другой раз – на другую. Негатив представлен на рис. 19 вверху. Число заданий, которые могут быть сформулированы на основе этой ситуации, очень велико, поэтому вначале выпишем систему уравнений, полностью описывающую ситуацию, и кратко прокомментируем. В реальных фотоаппаратах при наводке на резкость перемещается объектив. Рисунок, однако, удобнее выполнить в предположении, что перемещается пленка – при фотографировании удаленных предметов это практически одно и то же. В обозначениях рис. 19 имеем (для простоты считается, что главная оптическая ось проходит посередине между лампочками):

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F};\frac{1}{d+S}+\frac{1}{f+\Delta}=\frac{1}{F};\frac{H}{2h_1}=\frac{d-F}{F};\frac{H}{2h_2}=\frac{d+S-F}{F};$$

$$h_1+h_2=h;\frac{D}{d_1}=\frac{f-\Delta}{\Delta};\frac{D}{d_2}=\frac{f}{\Delta};\frac{D-h_2}{y_2}=\frac{f}{\Delta};\frac{D-h_1}{y_1}=\frac{f-\Delta}{\Delta}.$$

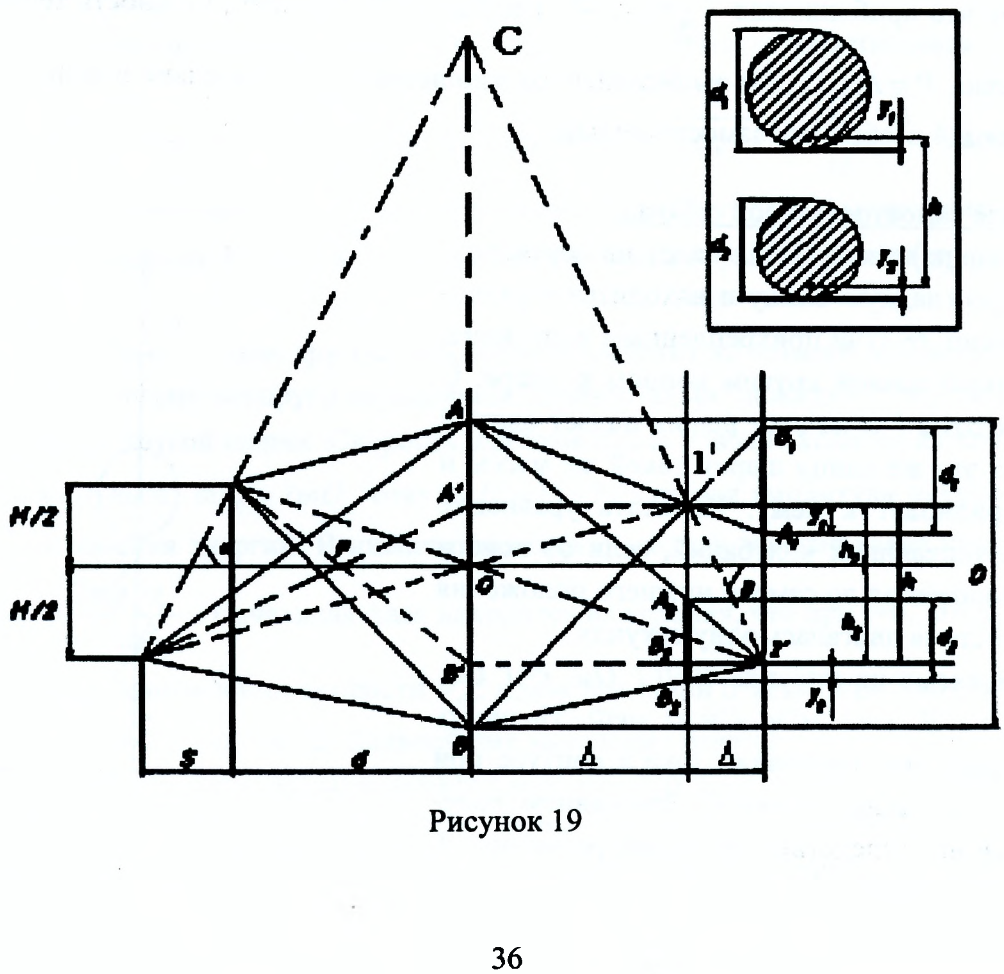


Рисунок 19

Первые пять уравнений очевидны, а последующие четыре вытекают из подобия следующих пар треугольников: ($AB1'$ и A_1B_11'), ($AB2'$ и A_2B_22'), ($BB'2$ и $B_2B'_22$), ($AA'1'$ и $A_1A'_11'$). В эту систему из 9 уравнений входит 14 величин, так что задавая 5 из них, например те, которые легко определяются по негативу на рис. 18 вверху, можно найти остальные.

Можно сформулировать и ряд дополнительных заданий:

1) Под каким углом β надо наклонить пленку фотоаппарата, чтобы на ней получились резкие изображения сразу двух лампочек?

Приведем лишь одну из всевозможных форм ответа: $\beta = arctg\dfrac{dH/S + H/2}{f-\Delta}$. Это задание можно сформулировать и для рассеивающей линзы. Сделайте это самостоятельно.

2) На дифракционную решетку длиной L, содержавшую N штрихов, падает нормально параллельный пучок белого света ($\lambda_ф<\lambda<\lambda_{кр}$). За решеткой располагается собирающая линза с фокусный расстоянием F так, что плоскости линзы и решетки составляют угол θ. Найти длину спектра k-го порядка на экране фокальной плоскости линзы.

Ответ: $l = F\left[tg\left(\theta + \arcsin\dfrac{k\lambda_{кр}N}{L}\right) - tg\left(\theta + \arcsin\dfrac{k\lambda_ф N}{L}\right)\right]$.

<u>Задачи для самостоятельной работы:</u>

1. Две маленькие лампочки находятся на главной оптической оси объектива фотоаппарата с фокусным расстоянием *50 мм*. Расстояние между лампочками *1 м*, объектив находится на расстоянии *0,5 м* от ближайшей лампочки. На негативе изображение дальней лампочки получилось точечным, а изображение ближней – в виде кружка с диаметром *4 м*. Найти входной диаметр объектива.
2. Имеется два одинаковых плоских конденсатора с площадью пластин $S=1000$ $см^3$ и расстоянием между пластинами $d=1$ $см$. Пластины конденсаторов сделаны из разных металлов: серебра (работа выхода $A_1=7{,}5\cdot10^{-19}$ $Дж$) и цинка ($A_2=6{,}4\cdot10^{-19}$ $Дж$). Свет с длиной волны $\lambda=100$ $нм$ падает у двух конденсаторов на разные платины до тех пор, пока фотоэффект не прекращается. Затем попарно соединяются разноименные пластины конденсаторов. Какое количество теплоты выделится при этом? Постоянная Планка $h=6{,}63\cdot10^{-34}$ $Дж\cdot с$, скорость света в вакууме $c=3\cdot10^8$ $м/с$.

Учебное издание

Чопчиц Н.И.

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ
«ЗАДАЧИ ЧОПЧИЦА»

Ответственный за выпуск: Кандилян Г.С.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная верстка: Романюк И.Н., Боровикова Е.А.
Корректор: Никитчик Е.В.

ISBN 978-985-493-302-3

Издательство БрГТУ.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/235 от 24.03.2014 г.
Подписано в печать 25.08.2014 г. Гарнитура «Times».
Формат 60×84 1/8. Бумага "Снегурочка".
Уч. изд. л. 5,0. Усл. печ. л. 4,65. Заказ № 667.
Тираж 100 экз. Отпечатано на ризографе Учреждения образования «Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.