

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**  
**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ**  
**«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Кафедра физики**

**ЛАБОРАТОРНЫЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ**  
**«МЕХАНИКА»**

*Рекомендовано к изданию Советом университета в качестве методического пособия для студентов технических специальностей всех форм обучения*

БРЕСТ 2011

УДК 538. 91, 548.73,378.147:53  
ББК 74.265.1 я 73  
Ч 75

Рецензенты: Ревинский А.Ф., доктор ф.- м. н., профессор «БГУ им А.С. Пушкина»  
Секержицкий В.С., к. ф.- м. н., доцент «БГУ им А.С. Пушкина»

Методическое пособие предназначено для выполнения лабораторных работ по курсу физики, раздел «Механика» студентами технических специальностей всех форм обучения. Данное пособие содержит в себе краткие теоретические сведения по основным вопросам указанного раздела, включённым в рабочие программы, чёткие указания для выполнения лабораторной работы, перечень контрольных вопросов по каждой работе, контрольный тест и рекомендуемую литературу.

Авторы благодарны Гладковскому В.И., Чугунову С.В. за помощь в написании пособия.

**Чопчиц Н.И., Гладышук А.А., Янусик И.С.**

Ч75 Лабораторный физический практикум «Механика» / Методическое пособие для студентов технических специальностей. – Брест, из-во БрГТУ, 2011. – 80 с.

**ISBN 978-985-493-195-1**

УДК 538. 91, 548.73,378.147:53  
ББК 74.265.1 я 73

**ISBN 978-985-493-195-1**

© Коллектив авторов, 2011  
© Изд-во БрГТУ, 2011

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Л/р М 1. Изучение теории погрешностей и кинематики материальной точки .....	4
2. Л/р М 2. Изучение законов и определение характеристик поступательного и вращательного движения на машине Атвуда .....	24
3. Л/р М 3. Изучение упругого удара.....	30
4. Л/р М 4. Определение скорости пули при помощи крутильного баллистического маятника .....	35
5. Л/р М 5. Изучение законов динамики вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси на маятнике Обербека .....	41
6. Л/р М 6. Определение моментов инерции твёрдых тел с помощью крутильного маятника .....	46
7. Л/р М 7. Изучение физического и математического маятников.....	54
8. Л/р М 8. Определение коэффициента трения качения .....	62
9. Л/р М 9. Диск Максвелла .....	68
10. Л/р М 10. Изучение неупругого удара.....	76
11. Приложение. Процедура линеаризации .....	83
12. Тест М 1 .....	85
13. Список использованной литературы .....	86

## Лабораторная работа М 1

### ИЗУЧЕНИЕ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ И КИНЕМАТИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

**Цель работы:** изучение основ теории погрешностей и методов обработки экспериментальных результатов. Определение кинематических характеристик по стробоскопическим фотографиям.

**Приборы и принадлежности:** стробоскопические фотографии, линейка, карандаш.

**Основы погрешностей и методы обработки экспериментальных результатов:**

#### а) Измерения. Погрешности измерений.

Основным методом получения информации об изучаемых явлениях в физике является опыт, то есть наблюдение явления в точно контролируемых условиях, позволяющих следить за его ходом и воссоздавать необходимое число раз при повторении этих условий. Количественную информацию о явлении даёт *измерение* – определение значений физических величин, характеризующих явление, опытным путем с помощью специальных технических средств. В учебных лабораториях используются два вида измерений: *прямые и косвенные*.

*Прямыми* называются измерения, в которых значение измеряемой величины находится непосредственно из отсчета по шкале прибора. Вычисления при этом сводятся к учёту цены деления прибора и других переводных множителей.

*Примеры:* измерение длины линейкой, штангенциркулем; времени – секундомером; массы – весами; силы тока – амперметром и т. д.

*Косвенными* называются измерения, при которых интересующая нас величина находится как функция одной или нескольких прямым образом измеряемых величин.

*Примеры:* определение плотности вещества по массе и объему, ёмкости конденсатора по его заряду и напряжению между обкладками и т. д.

Каковы бы ни были способы и методы измерения, измеренное значение  $x_{изм}$  физической величины  $x$  почти всегда отличается от её истинного значения  $x_{ист}$ .

Следует обратить внимание на то, что ни прямые, ни косвенные физические величины не имеют смысла вне связи с физической моделью изучаемой ситуации. Например, если мы прямым образом определяем длину и ширину стола, то мы основываемся фактически по модели реального стола в виде прямоугольника, хотя, строго говоря, даже если отвлечься от имеющей место непрямолинейности сторон, стол является неправильным четырехугольником. Поэтому вопрос о том, существует ли, например, истинная длина стола, неотделим от принятой физико-математической модели реального стола, и с самого начала увязан с вопросом приемлемой точности описания.

*Ошибкой* измерений называется разность

$$\delta x = x_{изм} - x_{ист} \quad (1)$$

Ошибки измерения систематизируются по двум основным признакам: по месту возникновения и по характеру проявления.

**Методическими ошибками** называют ошибки, возникающие из-за несовершенства методов измерения и обработки результатов. Например, часто пренебрегают трением, сопротивлением соединительных проводов и измерительных приборов и т. д.

**Приборными ошибками** называют ошибки, обусловленные несовершенством (ограниченной точностью) применяемых средств измерения.



**Личные ошибки** обусловлены индивидуальными особенностями экспериментатора, несовершенством его органов чувств и проявляются, например, в неправильном отсчитывании десятых долей шкалы прибора.

**Систематическими ошибками** называются ошибки, величина и знак которых от опыта к опыту сохраняются или изменяются закономерно. Они вызываются постоянно действующими причинами, односторонне влияющими на результат измерений, например, неправильной градуировкой прибора или его установкой, несовершенством методики измерений и т. д.

**Случайными ошибками** называются ошибки, величина и знак которых от опыта к опыту меняются непредсказуемым образом. Они вызываются, как правило, большим количеством одновременно действующих причин, влияние которых на процедуру неупорядочено и не может быть учтено заранее (вибрации, колебание температуры, движение воздуха, колебания напряжения в сети, люфт и трение в измерительных приборах и т. д.) *При наличии случайных ошибок единичное измерение недопустимо.*

**Промахи** называются грубые ошибки, возникающие вследствие неправильных действий экспериментатора (небрежность или описка в записи результатов, неправильное снятие показаний прибора и т. д.) Наблюдения, содержащие промахи, отбрасываются, как не заслуживающие доверия. Наличие ошибок приводит к следующему правилу:

*Кроме измеренного значения физической величины должна указываться и возможная величина ошибки.*

Поскольку истинное значение измеряемой величины в формуле (1) неизвестно, неизвестна и ошибка измерения  $\delta x$ . Для измерения возможной величины ошибки  $\delta x$  вводится понятие погрешности  $\Delta x$ .

**Погрешность  $\Delta x$  измерения** – это количественная мера неизвестной экспериментатору ошибки измерения  $\delta x$ . Количественно  $\Delta x$  можно задать как наибольшую по модулю ошибку так, чтобы выполнялось неравенство:

$$|\delta x| \leq \Delta x \quad (2)$$

Тогда из (1) и (2) следует, что истинное значение измеряемой величины лежит в интервале:

$$x_{изм.} - \Delta x \leq x_{ист.} \leq x_{изм.} + \Delta x \quad (3)$$

Опыт, однако, показывает, что нерационально, а часто невозможно выбирать  $\Delta x$  столь большим, чтобы равенства (2) и (3) выполнялись абсолютно надёжно. Действительно, чем больше  $\Delta x$ , тем менее ценным является результат. Например, результат измерения длины маятника  $L = (108 \pm 50)$  см, несомненно, надёжней результата  $L = (108 \pm 1)$  см, однако ценность первого результата, конечно, ниже ценности второго. Поэтому величину  $\Delta x$  задают так, чтобы неравенства (2) и (3) выполнялись с некоторой вероятностью,  $P$ . В учебных лабораториях принимают  $P = 0,95$ . Это означает, что при многократном повторении опыта в одних и тех же условиях в среднем в 95 случаях из 100 ошибки не превысят  $\Delta x$ .

*Основная задача физического измерения состоит в том, чтобы указать интервал, внутри которого с заданной наперёд вероятностью находится истинное значение искомой величины.*

Интервал значений величины  $x$ , заданный соотношением (3), называется *доверительным интервалом*, а вероятность  $P$  – *доверительной вероятностью* или *надёжностью*, соответствующей этому доверительному интервалу.

По способу учёта в лабораторном практикуме погрешности делятся на 4 типа: поправки –  $\Delta x_{\text{попр.}}$ , погрешности разброса –  $\Delta x_{\text{разб.}}$ , приборные погрешности –  $\Delta x_{\text{пр.}}$ , погрешности отсчёта и округления –  $\Delta x_{\text{окр.}}$ .

*Поправки* вводятся тогда, когда известна или найдена величина и знак систематической ошибки. Например, если известна неточность градуировки прибора (указана в паспорте или графике поправок), то на неё вводится поправка.

*Погрешности разброса* учитывают те случайные ошибки, которые приводят к разбросу результатов около некоторого среднего значения при многократном повторении опыта в неизменных условиях.

К погрешностям разброса можно отнести также погрешности, связанные с грубостью принятой математической модели. Например, достаточно точные измерения длины реального стола дадут разные результаты в разных местах, так что если в качестве модели для реального стола принимаем модель прямоугольника с определёнными длиной и шириной, то различие значений длины и ширины в разных местах следует принимать как наличие погрешностей разброса.

*Погрешности приборов* учитывают неизвестные экспериментатору систематические ошибки конкретного прибора, связанные с его конструктивными особенностями.

*Погрешности отсчёта и округления* учитывают те случайные ошибки, которые вызваны несовершенством органов чувств экспериментатора и округлением результатов.

Величина погрешности  $\Delta x$  (она называется абсолютной) не всегда удобна для характеристики точности измерений и получаемых результатов. Например, если абсолютная погрешность измерения длины  $\Delta \ell = 1$  мм, а измеряемая длина составляет несколько метров, то точность измерения хорошая, а если измеряемая длина всего несколько миллиметров, то точность будет уже плохой. В связи с этим, так же из-за неудобства сравнения точности измерения разных величин, например, длины и времени, вводят относительную погрешность измерения, которую обычно выражают в процентах.

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_{ист}} \approx \frac{\Delta x}{x_{ист}} \text{ или } \varepsilon \approx \frac{\Delta x}{x_{ист}} \cdot 100\% \quad (4)$$

### б) Погрешности прямых измерений.

Будем считать далее, что поправки на известную систематическую погрешность уже учтены. Единичное измерение величины называется *наблюдением*.

Пусть произведено  $n$  наблюдений величины  $x$  в неизменных условиях и получены результаты  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . В качестве наиболее вероятного значения величины  $x$  принимается среднее арифметическое значений, найденное в отдельных наблюдениях:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \quad (5)$$

Пусть  $\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle$  случайное отклонение результата  $i$ -го измерения от среднего, то величину

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \Delta x_i^2} \quad (6)$$

называют *средней квадратичной погрешностью отдельного наблюдения*.

В теории вероятностей и математической статистике доказывается, что случайные отклонения результатов отдельных наблюдений от среднего, то есть  $\Delta x_i$ , в хорошо проведенном опыте не должны превосходить  $3S$ . Если в каком-то наблюдении получено  $\Delta x_i > 3S$ , то это наблюдение должно считаться *промахом*.

Величина

$$S_n = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \Delta x_i^2} \quad (7)$$

называется *средней квадратичной погрешностью всей серии  $n$  наблюдений*. В математической статистике доказывается, что погрешность разброса связана с  $S_n$  соотношением

$$\Delta x_{разбр.} = t_{n,P} S_n \quad (8)$$

где множитель  $t_{n,P}$  называется *коэффициентом Стьюдента*. Индекс  $n$  у коэффициента указывает число опытов, а индекс  $P$  – доверительную вероятность. Поскольку в лабораторном практикуме принята доверительная вероятность  $P = 0,95$ , то приведем значения коэффициентов  $t_{n,0,95}$  для этой вероятности.

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_{n,0,95}$	1,60	0,82	0,77	0,74	0,73	0,72	0,71	0,71	0,70

Из таблицы видно, что чем больше проведено измерений, тем уже доверительный интеграл, то есть тем точнее измерения.

*Погрешность прибора  $\Delta x_{пр}$*  в прямых измерениях учитывается следующим образом. Для каждого типа приборов предприятие-изготовитель гарантирует на уровне доверительной вероятности  $P = 0,997$  некоторую предельную погрешность  $\Delta_{прео}$ . Значения  $\Delta_{прео}$  для наиболее часто используемых мер и приборов указаны в таблице, находящейся в лаборатории. Поскольку в учебной ла-

боратории ограничивается значением доверительной вероятности  $P = 0,95$ , то принимается

$$\Delta x_{np} = \frac{2}{3} \Delta_{np\text{до}} \quad (9)$$

**Погрешность отсчёта и округления  $\Delta x_{окр}$**  при доверительной вероятности  $P = 0,95$  может быть принята равной половине цены деления шкалы прибора при округлении до целого деления и 0,3 от цены деления  $h$  при округлении до половины деления. Полная абсолютная погрешность прямого измерения рассчитывается по формуле:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{np}^2 + \Delta x_{окр}^2 + \Delta x_{разб}^2} \quad (10)$$

Возможны, конечно, ситуации, когда погрешность какого-то типа значительно меньше остальных или вообще в эксперименте отсутствует. Например, если стол является четырехугольником, длины сторон которого отличаются меньше, чем на 0,1 мм, то при использовании в качестве его модели квадрата, стороны которого измеряются линейкой с миллиметровыми делениями, погрешность разброса будет вообще отсутствовать, ибо они замаскированы погрешностями отсчета и округления, которые составляют в данном случае 0,5 мм. Считается, что четверть миллиметровых делений глаз среднего человека отсчитать не в состоянии, а погрешность линейки, если она металлическая длиной 1000 мм, можно не учитывать, ибо она составляет лишь 0,2 мм.

Окончательный результат записывается в виде:

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x \quad (11)$$

и имеет надёжность на уровне  $P = 0,95$

### в) Погрешности косвенных измерений.

При косвенных измерениях интересующая нас физическая величина  $y$  задается как функция прямым образом изменяемых физических величин  $x_1, x_2 \dots x_n$ :  $y = f(x_1, x_2 \dots x_n)$ . Наиболее вероятное значение величины  $y$ , то есть результат косвенного измерения, находится следующим образом:

$$y_{изм} = f(\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \dots, \langle x_n \rangle) \quad (12)$$

Поскольку каждая из величин  $\langle x_i \rangle$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) определена с погрешностью  $\Delta x_i$ , то и величина  $y_{изм}$ , вычисленная по формуле (12) также будет найдена с некоторой погрешностью, которая вычисляется по формуле:

$$\Delta y = \sqrt{\left( \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\langle x_i \rangle} \cdot \Delta x_1 \right)^2 + \dots + \left( \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{\langle x_n \rangle} \cdot \Delta x_n \right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\langle x_i \rangle} \cdot \Delta x_i \right)^2}, \quad (13)$$

где  $\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\langle x_i \rangle}$  – частные производные функций (12) по аргументам, вычисленным при средних значениях. Доверительная вероятность для погрешности  $\Delta y$  будет равна  $P = 0,95$  при условии, что она имеет такое значение для каждой из погрешностей  $\Delta x_i$ .

Относительная погрешность косвенной величины  $y$  равна:

$$E_y = \frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x_i} \Delta x_i \right)^2} \quad (14)$$

Поскольку вычисление погрешностей часто достаточно громоздко, иногда используются более простые правила, которые, вообще говоря, иногда несправедливы, но в большинстве случаев могут быть в лабораторном физпрактикуме использованы. Например, можно принять, что относительная погрешность косвенной физической величины в 1,5 раза больше максимальной относительной погрешности всех прямым образом измеряемых величин. Поэтому в эксперименте следует стремиться к тому, чтобы относительные погрешности всех прямым образом измеряемых величин были примерно одинаковы. Для величин, значения которых зависят от выбора начала отсчета, например, координат, следует избегать появления близких к нулю значений, ибо при этом относительная погрешность велика.

#### г) Графическая обработка результатов.

*Выбор координатных осей.* По оси абсцисс всегда откладывается аргумент, по оси ординат – функция.

*Выбор масштаба.* При выборе масштаба необходимо придерживаться следующих рекомендаций:

1. Шкалы на всех осях должны легко читаться, поэтому одна клеточка миллиметровой бумаги должна соответствовать удобному числу единиц измеряемой величины (1, 2, 5, 10....).
2. Экспериментальные точки не должны сливаться друг с другом.
3. Масштабы вдоль осей следует выбирать так, чтобы основная часть графика имела наклон, близкий к  $45^\circ$ , и лежала в средней части между осями.
4. Если на графике необязательно иметь начало координат, начало, и конец разметки по осям должны соответствовать минимальным и максимальным значениям аргумента и функции.
5. Десятичные множители удобнее отнести к единице измерения, тогда деления на осях будут помечены цифрами 1; 2; 3 и т. д., а не 10000; 20000 или 0,001; 0,002.

*Построение графиков.* На график наносятся все полученные в измерениях точки (выносные линии не проводятся). Через экспериментальные точки проводится *наилучшая плавная кривая*. *Непосредственное соединение экспериментальных точек ломаной линией не допускается*. Точки должны располагаться как можно ближе к кривой так, чтобы по обе стороны от неё находилось по возможности одинаковое число точек.

*Нанесение ошибок на график.* Ошибка в экспериментальном значении указывается в виде крестиков, размеры которых в выбранном масштабе дают удвоенное значение погрешностей в этом масштабе. Кривая графика должна пересекать прямоугольники, образованные крестиками погрешностей.

## Оформление графиков.

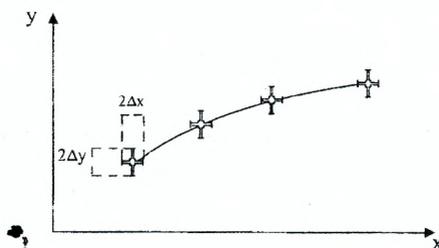


Рисунок 1 – Оформление графиков

Каждый график выполняется на миллиметровой бумаге, снабжается заголовком, содержащим точное описание зависимости, показываемой на нём, и вклеивается в отчёт.

### д) Основные правила приближенных вычислений.

Значащими цифрами числа называются все его цифры, кроме нуля, если он стоит в начале. Пример: 0,03010 – 4 значащие цифры.

*Общее правило – при вычислении сумм, разностей, произведений, частных результат не должен содержать больше значащих цифр, чем наименее точное из слагаемых, сомножителей и т. д.*

При вычислении функций ограничиваются числом значащих цифр аргумента. Если результат вычисления является промежуточным и используется в дальнейших вычислениях, необходимо сохранить в нем на одну значащую цифру больше, чем это требуется предыдущим правилом. Если в вычисляемое выражение входят постоянные типа  $\pi$ ,  $\gamma$ , константы приборов и т. п., следует для них брать значащих цифр на одну больше, чем в самом неточном из участвующих в выражениях чисел. Это делается для того, чтобы вычисления с постоянными величинами не вносили дополнительные ошибки.

Если это по каким-либо причинам невозможно (например, значения постоянной прибора недостаточно точно известны), то соответствующую константу в выражении для физической величины следует рассматривать наравне с другими переменными, и в окончательное выражение для физической величины будет входить погрешность соответствующей константы.

Абсолютную погрешность следует всегда выражать в тех же единицах измерения, что и саму измеряемую величину. Например,  $L = (1,572 \pm 0,004)$  м, но не  $L = (1,572 \pm 4)$  мм. Число и его погрешность всегда записывается так, чтобы их последние цифры принадлежали к одному и тому же десятичному разряду. Нельзя писать  $24 \pm 0,2$ , или  $21,62 \pm 0,3$ . Правильная запись  $24,0 \pm 0,2$  или  $21,6 \pm 0,3$ . Нуль писать так же обязательно, как и любую другую цифру:  $25,30 \pm 0,02$ , но не  $25,3 \pm 0,02$ .

Приближенные числа рекомендуется представлять в нормальном виде, для чего первая значащая цифра записывается в разряде единиц, а остальные – в разряде десятых, сотых и т.д. Например:  $a = (3,56 \pm 0,04) \cdot 10^{-9}$  м =  $(3,56 \pm 0,4)$  нм

*Вычисленные погрешности прямых и косвенных измерений должны округляться до одной значащей цифры, за исключением тех случаев, когда она равна 1 – в этом случае сохраняется две значащих цифры, причём вторая из них округляется до 5.*

При записи констант и других заданных чисел часто применяется неявный способ указания их погрешностей: выписываются только надёжно известные значащие цифры числового значения, а ненадёжные отбрасываются с применением обычных правил округления. Например, запись  $L = 1,2$  м читается как  $L = (1,20 \pm 0,05)$  м и так далее. Иначе говоря, погрешность в этом случае составляет половину невыписанного разряда.

**е) Кинематика материальной точки.**

Материальной точкой (частицей) называется тело, размерами, структурой и внутренними движениями которого в данных условиях при описании движения можно пренебречь.

*Системой отсчёта (СО)* называется совокупность тела отсчёта, относительно которого рассматривается движение других тел, линеек и часов. *Прежде чем говорить о движении и его описывать, нужно выбрать СО.*

*Кинематика* изучает геометрические формы и типы движений безотносительно к причинам, их вызывающим. Все СО кинематически эквивалентны в смысле возможности выбрать любую из них для описания движения.

*Геометрическим изображением СО является система координат (СК).*

Простейшим вариантом СК является, декартова прямоугольная система координат. Движение частицы в этой системе координат может быть задано разными способами. Наиболее распространённый из них – это так называемый *кинематический закон движения*, когда задаются зависимости от времени всех координат частицы:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \tag{15}$$

Вводя в рассмотрение радиус-вектор частицы  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , идущий из начала координат в рассматриваемую точку, можно уравнение (15) записать в векторном виде

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{16}$$

Здесь,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орты координаты осей. Выражения (15), (16) называются *кинематическим законом движения точки*.

*Траекторией* точки в данной СО называется кривая, описываемая точкой при движении. Уравнение траектории получается из уравнения (16) путём исключения времени  $t$ . *Вектором перемещения*  $\Delta\vec{r}$  за промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$  называется вектор, равный (см. рисунок 2)

$$\Delta\vec{r} \triangleq \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \tag{17}$$

*Путь*  $\Delta S$ , пройденный точкой за промежуток времени  $\Delta t$ , определяется как длина дуги между точками 1 и 2.

$$\Delta S \triangleq L(\vec{1}, \vec{2}) \tag{18}$$

**Вектор средней скорости**  $\langle \vec{V} \rangle$  называется величина (рисунок 2)

$$\langle \vec{V} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \quad (19)$$

Направлен вектор  $\langle \vec{V} \rangle$  так же, как и  $\Delta \vec{r}$ .

Здесь знак « $\triangleq$ » называется равенством по определению, чтобы отличать его от знака равенства, стоящего в физических законах. Векторы скорости  $\vec{V}_1$  и  $\vec{V}_2$  начинаются в тех точках, в которых находилась частица в соответствующие моменты времени, а вектор скорости  $\langle \vec{V} \rangle$ , характеризующий движение частицы в интервале времени  $\Delta t = t_2 - t_1$ , можно рисовать в любой точке траектории, соответствующей указанному интервалу (на рисунке 2 он изображен в точке, соответствующей моменту  $t_2$ ).

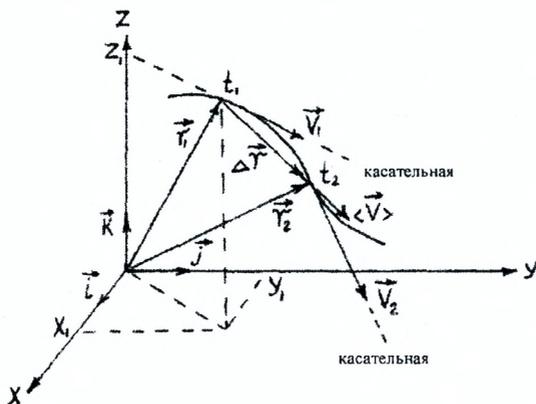


Рисунок 2 – Траектория движения материальной точки

**Вектор мгновенной скорости**  $\vec{V}$  характеризует быстроту изменения радиуса – вектора точки в данный момент времени и определяется равенством:

$$\vec{V} \triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{V} \rangle = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (20)$$

Проекции этого вектора на координатные оси равны:

$$V_x = \frac{dx}{dt}; \quad V_y = \frac{dy}{dt}; \quad V_z = \frac{dz}{dt}$$

Тогда

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} \quad (21)$$

и модуль вектора скорости:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (21)^*$$

Вектор  $\vec{V}$  направлен по касательной к траектории в сторону движения точки (рисунок 2). *Движение точки можно задать и иначе*: задается уравнение траектории, положение точки на траектории в начальный момент времени  $t = 0$  и зависимость пройденного пути от времени  $S = S(t)$ . Такой способ задания движения принято называть *естественным*. Тогда модуль вектора скорости определяется равенством:

$$V = \frac{dS}{dt}, \quad (22)$$

а сам вектор записывается в виде:  $\vec{V} = V\vec{\tau}$ ,

где  $\vec{\tau}$  – единичный вектор касательной  $|\vec{\tau}| = 1$ ,  $\vec{\tau} = \frac{\vec{V}}{V}$  (23)

*Направляющие косинусы вектора скорости*:

$$\cos(\vec{V}, \vec{i}) = \frac{V_x}{V}; \cos(\vec{V}, \vec{j}) = \frac{V_y}{V}; \cos(\vec{V}, \vec{k}) = \frac{V_z}{V} \quad (24)$$

*Вектор среднего ускорения*  $\langle \vec{a} \rangle$  определяется равенством (рисунок 3)

$$\langle \vec{a} \rangle \triangleq \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{\Delta t} \quad (25)$$

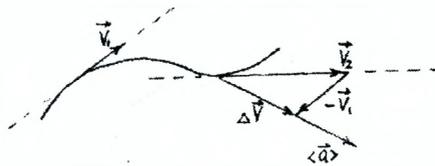


Рисунок 3 – Вектор среднего ускорения

*Вектор мгновенного ускорения*  $\vec{a}$  характеризует быстроту изменения вектора скорости в данный момент и определяется соотношением:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{a} \rangle = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (26)$$

Проекции вектора ускорения на координатные оси:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (27)$$

Тогда

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (28)$$

модуль вектора ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (29)$$

*Направляющие косинусы вектора ускорения*

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{a_y}{a}; \quad \cos(\vec{a}, \vec{k}) = \frac{a_z}{a} \quad (30)$$

Угол между векторами  $\vec{V}$  и  $\vec{a}$  определяется из равенства

$$\cos(\vec{V}, \vec{a}) = \frac{a_x V_x + a_y V_y + a_z V_z}{aV} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{V}}{a \cdot V} \quad (31)$$

Тангенциальное ускорение точки  $\vec{a}_\tau$  характеризует быстроту изменения вектора скорости в данный момент времени и выражается формулой (см. рис. 4)

$$\vec{a}_\tau = \frac{dV}{dt} \cdot \vec{\tau} = \frac{a_x V_x + a_y V_y + a_z V_z}{V} \cdot \vec{\tau} \quad (32)$$

где  $\vec{\tau}$  – единичный вектор касательной. Очевидно, имеет место также равенство

$$\vec{a}_\tau = \vec{\tau} \cdot a \cdot \cos(\vec{V}, \vec{a}) \quad (33)$$

Если  $\vec{V}$  возрастает с течением времени, то  $\frac{dV}{dt} > 0$  и  $\vec{a}_\tau \uparrow \uparrow \vec{V}$ , т.е.  $(\vec{V}, \vec{a})$  – острый угол. Если  $\vec{V}$  убывает, то  $\frac{dV}{dt} < 0$  и  $\vec{a}_\tau \uparrow \downarrow \vec{V}$ , т.е.  $(\vec{V}, \vec{a})$  – тупой угол (рис. 4).

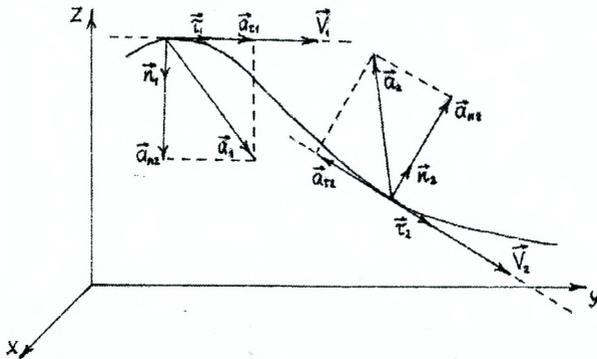


Рисунок 4 – Вектор тангенциального и нормального ускорений

Нормальное ускорение  $\vec{a}_n$  характеризует быстроту изменения в данный момент направления вектора  $\vec{V}$  и выражается формулой:

$$\vec{a}_n = \frac{V^2}{R} \cdot \vec{n}, \quad (34)$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к траектории, направленный в сторону вогнутости траектории ( $\vec{\tau} \cdot \vec{n} = 0$ ).  $R$  – радиус кривизны траектории, представляющий собой радиус соприкасающейся с траекторией в данной точке окружности, совпадающей с бесконечно малым элементом траектории с точностью до бесконечно малых величин второго порядка малости.

Полное ускорение можно записать в виде

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \quad \text{и} \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \quad (35)$$

Если движутся две частицы, то важной величиной является так называемая *относительная скорость частиц*. Скоростью частицы 2 относительно частицы 1 называется скорость частицы 2 в системе отсчета, в которой частица 1 покоится.  $\vec{V}_{21} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ . Еще одной величиной, характеризующей относительное движение частиц, является *скорость сближения (удаления)* частиц – это скорость изменения расстояния между частицами:

$$V_{y0} = \frac{d}{dt} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \frac{(x_2 - x_1)(V_{2x} - V_{1x}) + (y_2 - y_1)(V_{2y} - V_{1y}) + (z_2 - z_1)(V_{2z} - V_{1z})}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \quad (36)$$

Можно показать, что скорость удаления  $V_{y0} > 0$  или сближения  $V_{y0} < 0$  можно найти по очевидной формуле:

$$V_{y0} = V_2 \cos \varphi_2 - V_1 \cos \varphi_1,$$

где смысл обозначений ясен из следующего рисунка

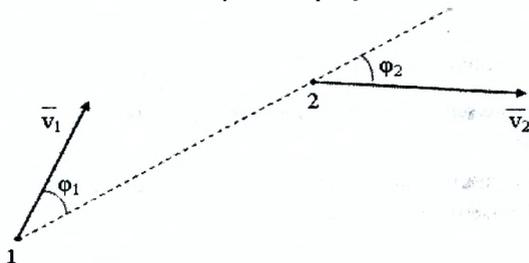
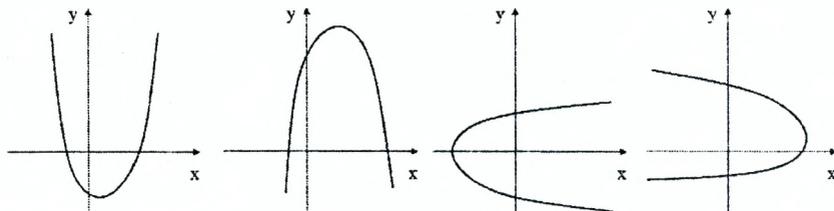


Рисунок 5 – Скорость сближения (удаления) двух частиц

Удобным способом нахождения всех кинематических характеристик движения точки является способ, основанный на использовании стробоскопических фотографий движущейся точки. Стробоскопические фотографии получаются, если движущуюся точку фотографировать на один и тот же кадр через строго фиксированные промежутки времени, называемые периодом стробоскопирования  $\tau$ . Время открытия затвора при этом должно быть малым для того, чтобы за это время фотографируемая точка заметно не сдвинулась и её изображение не смазалось. Применяется также вариант фотографирования в темноте с открытым затвором, когда движущийся объект освещается короткими мощными импульсами света, следующими друг за другом за время  $\tau$ . На фотографиях обычно указывается масштаб расстояний и период стробоскопирования  $\tau$ . Если движение точки происходит по пространственной кривой, то лучше как минимум две фотографии, снятые фотоаппаратами с разных позиций. Если движение происходит в плоскости, то фотоаппарат располагают так, чтобы плоскость плёнки была параллельна этой плоскости. Можно считать при этом, что на фотографии в неискажённом виде в некотором масштабе получается картина движения точки. На фотографии нужно также указать направление движения точки.

В работе стробоскопические фотографии имитируются с помощью прозрачных плёнок с пробитыми в них отверстиями, которые накладываются на двойной лист бумаги, и затем с помощью ручки, картина переносится на лист бумаги. Траекториями движения частиц во всех вариантах являются параболы. Период стробоскопирования равен 0,1 секунды (напомним, это означает, что  $\tau = (0,100 \pm 0,005)$  секунд). Масштабный фактор равен 1, т.е. все расстояния можно определять непосредственно по рисунку. Для описания движения нужно выбрать систему координат. Напомним, что начало координат следует выбирать так, чтобы не было близких к нулю значений координат, а расположение осей соответствовало бы одному из четырех рисунков (по указанию преподавателя).



На каждом из рисунков возможны два варианта движения: против часовой стрелки или по часовой стрелке (по указанию преподавателя).

**ж) Пример определения кинематических характеристик по стробоскопическим фотографиям**

На рисунке 6 приведена стробоскопическая фотография движения материальной точки и указаны координатные оси.

**Задание 1. Найти кинематический закон движения точки.**

Спроецируем точки на координатные оси с учётом масштаба и выпишем в таблицу 1 значения координат точки, считая, что фотографирование началось при  $t = 0$  и движение происходит по часовой стрелке. Измерения координат  $x$  и  $y$  прямые, поэтому оценим их погрешности по методике, изложенной в пункте б). Поскольку в данном случае нет особого смысла много раз измерять координаты, ибо мы будем получать всё время один и тот же результат, то следует предположить, что  $\Delta x_{\text{разбр.}} = \Delta y_{\text{разбр.}} = 0$ . Это не значит, конечно, что случайных ошибок нет – просто они меньше точности используемых инструментов. Приборная погрешность при измерении стандартной линейкой длиной 200 мм составляет  $\Delta x_{\text{пр.}} = 0,2 \cdot \frac{2}{3} = 0,13$  мм. Погрешность отсчёта и округления при округлении координат до 1 мм составит 0,5 мм. Следует учесть неидеальность процедуры проектирования, которая также приводит к погрешности отсчёта и округления и составляет примерно 0,5 мм (подумайте, почему!) результирующая погрешность будет равна по формуле (10):

$$\Delta x = \Delta y = \sqrt{(0,13)^2 + (0,5)^2 + (0,5)^2} = 0,72 \text{ мм} \approx 1 \text{ мм} = 0,1 \text{ см}$$

(множитель 10 за счёт масштаба).

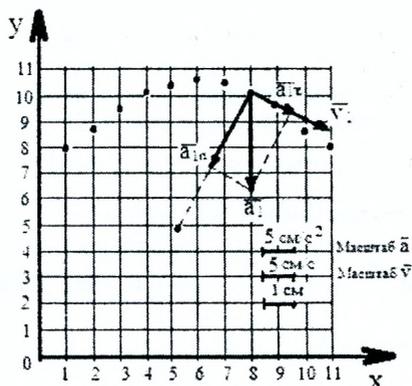


Рисунок 6 – Стробоскопическая фотография движения материальной точки

Таблица 1

t, сек	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,0
x, см	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0
y, см	8,0	8,9	9,6	10,1	10,5	10,6	10,3	10,1	9,5	8,8	8,0

Для установления вида функциональной зависимости  $x = x(t)$  изобразим данные таблицы 1 на рисунке 7, откладывая время  $t$  по горизонтали, координату  $x$  – по вертикали (в том же масштабе, что и на рисунке 6, руководствуясь при этом правилами, изложенными в пункте д).

При этом учитываем, что погрешность  $\Delta t$  задана неявно (она равна 0,005 с). Из рисунка 7 сразу видно, что искомая функциональная зависимость  $x = x(t)$  линейная. Задача, следовательно, состоит в том, чтобы провести по точкам на рисунке 7 прямую, наилучшим в некотором смысле образом соответствующую этим точкам. Можно, конечно, это сделать графически, однако это не даёт полной уверенности, что прямая – наилучшая.

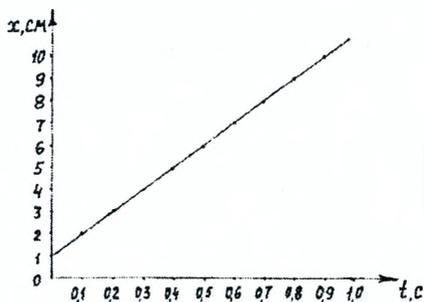


Рисунок 7 – Зависимость  $x = x(t)$

Одним из способов аналитического решения задачи о нахождении наилучшей прямой, соответствующей экспериментальным точкам, является метод наименьших квадратов.

Идея метода состоит в следующем. Пусть уравнение искомой прямой имеет вид  $x = at + b$ , где  $a$  и  $b$  – постоянные, подлежащие определению. При каждом значении времени  $t_i$  ( $0, 1, \dots, 10$ ) найдём величину  $(at_i + b - x_i)^2$ , представляющую квадрат разности между экспериментальным значением величины  $x_i$  и значением  $(at_i + b)$ , вычисленным по формуле, выражающей ожидаемую линейную зависимость. Образует далее сумму  $S = \sum_{i=0}^n (at_i + b - x_i)^2$ . Прямая  $x = at + b$  будет соответствовать экспериментальным точкам наилучшим образом, если мы найдём такие значения  $a$  и  $b$ , при которых достигается минимум суммы  $S$ . Условия минимума имеют вид  $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$ ,  $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$ , что даёт систему уравнений:

$$\sum_{i=0}^{10} t_i (at_i + b - x_i) = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^{10} (at_i + b - x_i) = 0$$

Система, может быть переписана в виде:

$$\begin{cases} a \sum_{i=0}^{10} t_i^2 + b \sum_{i=0}^{10} t_i - \sum_{i=0}^{10} x_i t_i = 0 \\ a \sum_{i=0}^{10} t_i + b \cdot 11 - \sum_{i=0}^{10} x_i = 0 \end{cases}$$

Подставляя численные значения и решая систему, получим  $a = 10,0$  см/с,  $b = 1,0$  см, так что искомая зависимость  $x(t)$  имеет вид

$$x = 10t + 1,0 \quad (37)$$

Существуют формулы, позволяющие определить погрешности значений  $a$  и  $b$ , однако мы их приводить не будем, а воспользуемся приближённым методом: относительная погрешность измерения координаты  $x$  больше всего для наименьшего значения  $x_{\min} = 1,0$  см и составляет 10% и меньше всего для максимального значения  $x_{\max} = 11,0$  см (примерно 1%). Поэтому значения  $x$ , вычисляемые по формуле (36) должны получаться с такой же относительной погрешностью. Именно поэтому мы имеем  $a = (10,0 \pm 0,5)$  см/с,  $b = (1,00 \pm 0,05)$  см. Приводим на рисунке 7 наилучшую прямую.

Для нахождения вида функциональной зависимости  $y = y(t)$  поступим аналогично, изобразив данные из таблицы 1 на координатной плоскости  $(y, t)$  (рис. 8).

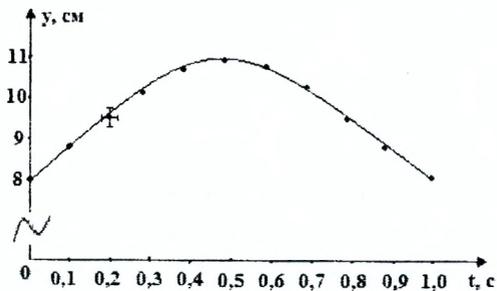


Рисунок 8 – Зависимость  $y = y(t)$

Из рисунка 8 не вытекает, однако, с определённой предположение о виде зависимости  $y = y(t)$ . В таких случаях обычно выдвигаются гипотезы о том, какому классу функций (полиномов, показательных, тригонометрических и т. д.) принадлежит искомая зависимость, а затем эти гипотезы принимаются или отвергаются. Чаще всего выдвигается гипотеза о принадлежности неизвестной функции  $y(t)$  к классу полиномов некоторой степени  $n$ :  $y(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$ . Степень  $n$  полинома обычно берется вначале минимальной, совместимой с характером расположения экспериментальных точек. Из рисунка 8 сразу видно, что зависимость  $y(t)$  нелинейная, то есть  $n \neq 1$ . Таким образом, мы берём функцию  $y(t) = a_0 t^2 + a_1 t + a_2$  и ищем значения параметров  $a_0, a_1, a_2$ , при которых эта функция наилучшим образом соответствует экспериментальным точкам рисунка 8. Задача решается на основе метода наименьших квадратов. Условия минимума суммы:

$$S = \sum_{i=1}^{10} (a_0 t_i^2 + a_1 t_i + a_2 - y_i)^2$$

дают:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=1}^{10} t_i^2 (a_0 t_i^2 + a_1 t_i + a_2 - y_i)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=1}^{10} t_i (a_0 t_i^2 + a_1 t_i + a_2 - y_i)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = 2 \sum_{i=1}^{10} (a_0 t_i^2 + a_1 t_i + a_2 - y_i)^2$$

Подставляя численные значения и решая систему уравнений, находим после округления  $a_0 = 10,0$ ;  $a_1 = 10,0$ ;  $a_2 = 8,0$  (количество значащих цифр, в значениях  $a$  выбрано исходя из того, что относительная погрешность в определении координаты  $y$  составляет примерно 1%). Таким образом, зависимость координаты  $y = y(t)$  имеет вид

$$y = -10t^2 + 10t + 8,0 \text{ (см)} \quad (38)$$

На рисунке 8 построена кривая (парабола), соответствующая уравнению (38). Как видно, кривая достаточно хорошо проходит через экспериментальные точки. Следует, однако, помнить, что предположение о полиномиальной зависимости  $y = y(t)$  является лишь гипотезой. Ведь вполне возможно, что функция вида  $y = ab^t + c$ , где постоянные подобраны с помощью метода наименьших квадратов, или полином степени большей 2 значительно лучше соответствуют экспериментальным точкам рисунка 8. Иными словами, возникает вопрос, насколько оправдана гипотеза о полиномиальной зависимости степени 2, то есть насколько функция (38) соответствует экспериментальным точкам.

На первый взгляд, естественным представляется следующий путь. С помощью метода наименьших квадратов определим значения  $a, b, c$  для функции вида  $y = ab^t + c$ , при которых она наилучшим образом соответствует экспериментальным точкам, затем для этих значений  $a, b, c$  вычислим сумму квадратов разностей, фигурирующих в методе наименьших квадратов, и сравним её с

суммой для полиномиальной зависимости (38). Естественным, что та зависимость, для которой эта сумма меньше, лучше отвечает экспериментальным точкам. Ясно, однако, что этот путь, хотя и возможен, но трудоёмок и малоэффективен, поскольку существует множество функций времени, которые могли бы, в принципе, соответствовать экспериментальным точкам рисунка 6. Например, зависимость  $y = A \sin(Bt + C) + D$  с надлежаще подобранными константами  $A, B, C, D$ . Поэтому вопросы совместимости гипотезы о той или иной зависимости (в нашем случае зависимости (38) с экспериментальными данными решаются с помощью так называемых *критериев согласия* (другое название – *критерии значимости*). Одним из наиболее удобных критериев является так называемый «критерий  $\chi^2$ » (читается хи-квадрат) или *критерий Пирсона*. В методе наименьших квадратов вычисляется величина  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=0}^n (a_0 t_i^2 + a_1 t_i + a_2 - y_i)^2}{\Delta y^2}, \quad (38)$$

то есть сумма квадратов отклонений экспериментальных значений  $y_i$  от вычисленных по формуле (38), деленная на квадрат погрешности измерения величины  $y$ . В нашем случае  $\chi^2 = 3$ . Найденное значение  $\chi^2$  должно быть сопоставлено с теорией. Это делается с помощью таблицы распределения  $\chi^2$ , фрагмент которой приведён в таблице 2. В данной таблице  $n$  – это число степеней свободы распределения  $\chi^2$ , равной числу измерений минус увеличенное на единицу число параметров, определяемых из эксперимента. В нашем случае число измерений равно 11 и с помощью метода наименьших квадратов было определено 3 параметра, так что  $n = 11 - (3 + 1) = 7$ . Число  $P$  в таблице – вероятность, выражаемая в процентах. По найденному значению  $\chi^2 = 1,3$  и числу степеней свободы  $n = 7$  находим, что  $P \approx 98\%$ . Это означает, что если гипотеза о зависимости (38) справедлива, то найденное или большее значение  $\chi^2$  должно встречаться примерно в 98% случаев. Следовательно, на уровне доверительной вероятности 98% мы подтвердили зависимость (38). Если, например, при тех же условиях  $\chi^2 = 14,1$ , то это означало бы, что при справедливости гипотезы (38) такие большие отклонения встречались бы лишь в 5% случаев, так что наше найденное значение  $\chi^2 = 14,1$  свидетельствовало бы о ненадёжности гипотезы, и это заставило бы искать другую зависимость  $y(t)$ , например, в виде полинома третьей степени и т. д.

Выпишем окончательно найденный кинематический закон движения:

$$\begin{aligned} x &= 10,0t + 1,0 \text{ (см)} \\ y &= -10t^2 + 10t + 8,0 \text{ (см)} \end{aligned} \quad (39)$$

На рис. 8 построена кривая (парабола), соответствующая уравнению (38). Как видно, кривая достаточно хорошо проходит через экспериментальные точки.

**Задание 2.** Найти среднюю скорость частицы в интервале времени  $t \in (0,4; 0,8)$ , её модуль и углы с осями координат.

Имеем:  $x(0,4) = 5,0$  см;  $x(0,8) = 9,0$  см       $y(0,4) = 10,4$  см;  $y(0,8) = 9,6$  см

Тогда  $\Delta x = 4,0$  см,  $\Delta y = -0,8$  см,  $\Delta t = 0,4$  с

$$\langle \vec{V}_x \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4,0}{0,4} = 10 \text{ см/с} = 0,10 \text{ м/с}$$

$$\langle \vec{V}_y \rangle = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{-0,8}{0,4} = -2 \text{ см/с} = -0,02 \text{ м/с}$$

$$\langle \vec{V} \rangle = (0,1\vec{i} - 0,02\vec{j}) \text{ м/с}; \quad \left| \langle \vec{V} \rangle \right| = 0,10 \text{ м/с}$$

$$\cos(\vec{i}, \langle \vec{V} \rangle) = 0,98; \quad (\vec{i}, \langle \vec{V} \rangle) = -11,3^\circ; \quad (\vec{j}, \langle \vec{V} \rangle) = -101,3^\circ$$

Обратите внимание, что для того, чтобы получить правильное значение для  $\cos(\vec{i}, \langle \vec{V} \rangle)$ , нужно вычислить значение модуля средней скорости более точно, чем записано выше:  $\left| \langle \vec{V} \rangle \right| = 0,102 \text{ м/с}$

**Задание 3.** Найти модуль мгновенной скорости в момент  $t_1 = 0,7$  сек и углы с осями координат.

$$V_{ix} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{0,7\text{с}} = 10,0 \text{ см/с}$$

$$V_{iy} = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{0,7\text{с}} = (-20t + 10) \Big|_{0,7\text{с}} = -4,0 \text{ см/с}$$

$$\vec{V}_1 = (10,0\vec{i} - 4,0\vec{j}) \text{ см/с}; \quad V_1 = \sqrt{10^2 + 4^2} = 10,8 \text{ см/с}$$

$$\cos(\vec{i}, \vec{V}_1) = 0,93; \quad (\vec{i}, \vec{V}_1) = -21,8^\circ; \quad (\vec{j}, \vec{V}_1) = -111,8^\circ$$

**Задание 4.** Найти ускорение частиц в тот же момент и углы, составляемые вектором ускорения с осями координат.

$$a_{ix} = \left. \frac{dV_{ix}}{dt} \right|_{0,7\text{с}} = 0 \text{ см/с}^2; \quad a_{iy} = \left. \frac{dV_{iy}}{dt} \right|_{0,7\text{с}} = -20,0 \text{ см/с}^2$$

$$\vec{a}_1 = -20,0\vec{j} \text{ см/с}^2, \quad a = 20,0 \text{ см/с}^2 = 0,20 \text{ м/с}^2$$

$$(\vec{i}, \vec{a}_1) = -90^\circ; \quad (\vec{j}, \vec{a}_1) = -180^\circ$$

Вектор скорости и ускорения изображены на рисунке 5.

**Задание 5.** Найти тангенциальное и нормальное ускорения в тот же момент времени.

$$a_{\tau} = \frac{V_{ix}a_{ix} + V_{iy}a_{iy}}{V_1} = \frac{(-4)(-20)}{10,8} = 7,4 \text{ см/с}^2$$

$$a_{in} = \sqrt{20^2 - 7,4^2} = 18,6 \text{ см/с}^2$$

Направлен вектор  $\vec{a}_{\tau}$  так же, как и  $\vec{V}_1$ . Изображаем его на рисунке. Вектор  $\vec{a}_{in}$  может быть найден геометрически:  $\vec{a}_{in} = \vec{a} - \vec{a}_{\tau}$ . Этот вектор также показан на рисунке 6.

**Задание 6. Найти радиус кривизны траектории в точке, соответствующей тому же моменту времени.**

Используя формулу (34), находим: 
$$R_1 = \frac{V_1^2}{a_{1n}} = \frac{(10,8)^2}{18,6} = 6,3 \text{ см}$$

Во многих случаях оказывается полезным приближенный графический способ нахождения радиуса кривизны. Для этого точку на траектории, соответствующего моменту времени  $t_1 = 0,70 \text{ с}$ , соединим прямолинейными отрезками с соседними точками, соответствующими моментам  $t_2 = 0,60 \text{ с}$  и  $t_3 = 0,80 \text{ с}$ . Из середины этих отрезков восстанавливаем перпендикуляр до их пересечения в точке  $O$ .

Точка  $O$  примерно совпадает с центром соприкасающейся окружности, соответствующей участку траектории вблизи точки, для которой велось построение. Радиус окружности примерно равен  $R_1$ .

**Задание 7. Найти зависимость пройденного пути  $S$  от времени  $t$ , то есть функцию  $S = S(t)$ .**

Имеем: 
$$S(t) = \int_0^t \sqrt{10,0^2 + (-20,0t + 10,0)^2} dt$$

Проведите вычисление самостоятельно, используя табличный интеграл

$$J = \int \sqrt{t^2 + b^2} dt = \frac{b^2 \ln \left( t + \sqrt{t^2 + b^2} \right) + t \sqrt{t^2 + b^2}}{2} + C$$

Получим: 
$$S(t) = 2,5 \ln \frac{2t-1 + \sqrt{(2t-1)^2 + 1}}{\sqrt{2}-1} + 0,25 \left[ (2t-1) \sqrt{(2t-1)^2 + 1} - \sqrt{2} \right]$$

**Задание 8. Написать уравнение траектории точки.**

Исключая время  $t$  из уравнений (39), имеем:

$$t = \frac{x-1,0}{10}$$

$$y = -10,0 \frac{(x-1,0)^2}{100} + x - 1,0 + 8,0 = -\frac{x^2 - 2,0x + 1,0}{10} = \frac{-x^2 + 12,0 + 69}{10}$$

Или  $y = -0,1x^2 + 1,2x + 6,9$  (см). Это и есть уравнение траектории.

**Задание 9. Найти скорость удаления частицы от начала координат в момент времени  $t_1 = 0,7 \text{ с}$ .**

Расстояние от частицы до начала координат согласно формуле (39) равно:

$$r(t) = \sqrt{(10t+1,0)^2 + (-10t^2+10t+8,0)^2}$$

Поэтому: 
$$V_{\text{уд}}(t) = \frac{10(10t+1,0) + (-10t^2+10t+8,0)(-20t+10)}{\sqrt{(10t+1,0)^2 + (-10t^2+10t+8,0)^2}}$$

(См. формулу 36 стр. 15)

Теперь достаточно подставить значение  $t_1 = 0,7 \text{ с}$ .

**Задание 10. Найти относительную скорость двух частиц в момент времени  $t_1 = 0,7$  с.**

Допустим, что спустя время  $t_0 = 0,2$  с из той же начальной точки с той же начальной скоростью по той же траектории движется другая частица. Требуется найти относительную скорость частиц в момент  $t_1 = 0,7$  с. Скорость второй частицы в момент  $t_1 = 0,7$  с будет такая же, как скорость первой в момент 0,5 с. Поэтому, так же, как и в задании 3, можно определить скорость частицы в момент 0,5 с.

$$V_x|_{0,5c} = 10,0 \text{ см/с}, \quad V_y|_{0,5c} = 0,0 \text{ см/с}$$

Тогда  $V_{\text{отнх}} = 0,0 \text{ см/с}$ ,  $V_{\text{отны}} = -4,0 \text{ см/с}$  и скорость первой частицы относительно второй частицы в момент времени 0,7 секунд равна 4 см/с и направлена вниз.

Стробоскопические фотографии для выполнения работы каждый студент получает у преподавателя.

### Контрольные вопросы.

1. Какие ошибки (пункт а)) имели место при выполнении работы и как они учитывались?
2. Как изменилась бы точность ваших результатов, если бы вы проводили все измерения и построения несколько раз, используя разные инструменты?
3. Как можно проверить отсутствие промахов в серии наблюдений?
4. Изложите методику расчёта погрешностей при измерении объёма цилиндра штангенциркулем.
5. Нарисуйте, примерно, как будет выглядеть стробоскопическая фотография движения точки при  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{v}$  и  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{v}$ .
6. Запишите выражение для векторов скорости и нормального ускорения  $\vec{a}_n$  в указанный преподавателем момент времени и проверьте выполнение условий  $\vec{a}_n \cdot \vec{v} = 0$ .
7. Нанесите экспериментальные точки и постройте теоретическую кривую зависимости от времени той координаты, для которой она нелинейная, откладываемая вдоль оси абсцисс значения  $(t + \frac{a_1}{2a_0})^2$ , а вдоль оси ординат – значения этой координаты. Сделайте выводы.

**Таблица 2  $\chi^2$  распределения**

N/P%	99	95	90	80	70	50	20	5
4	0,8	0,7	1,1	1,6	2,2	3,4	6,0	9,5
5	0,6	1,1	1,6	2,3	3,0	4,4	7,3	11,1
6	0,9	1,6	2,2	3,1	3,8	5,3	8,6	12,6
7	1,3	2,2	2,8	3,8	4,7	6,3	9,8	14,1
8	1,6	2,7	3,5	4,6	5,5	7,3	11,0	15,5
9	2,1	3,3	4,2	5,4	6,4	8,3	12,2	16,9
10	2,6	3,9	4,9	6,2	7,3	9,3	13,4	18,3
11	3,1	4,6	5,6	7,0	8,3	10,3	14,6	19,7
12	3,6	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3	15,8	21,0
13	4,1	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3	17,0	22,4

## Лабораторная работа М 2

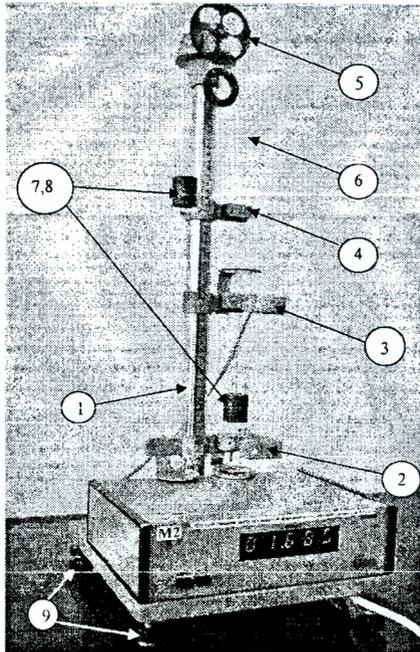
### ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НА МАШИНЕ АТВУДА

**Цель работы:** изучение законов поступательного и вращательного движения для определения момента сил трения ( $M_{тр}$ ).

**Приборы и принадлежности:**

- установка с машиной Атвуда;
- набор перегрузков кольцеобразной формы.

**Описание установки**



*Рисунок 1 – Общий вид установки*

Общий вид машины Атвуда показан на рисунке 1. На вертикальной колонне (1) расположены три кронштейна: нижний кронштейн (2) неподвижен, а кронштейны (3) и (4) могут перемещаться вдоль колонки и фиксироваться в любом положении стопорными винтами. Расстояние между кронштейнами может быть найдено с помощью миллиметровой шкалы на колонке. В верхней части колонки находится блок (5), через который перекинута нить (6) с привязанными на её концах грузами (7) и (8) одинаковой массы, винты для горизонтирования установки (9). В экспериментальной установке имеется три перегрузка кольцеобразной формы различной массы, которые можно класть порознь, по два вместе и, наконец, все три вместе.

### Подготовка прибора к работе и проведение измерений.

Установка работает следующим образом: устанавливаются необходимые расстояния между нижним и средним кронштейнами ( $S_2$ ) и верхним и средним кронштейнами ( $S_1$ ). Нажимается кнопка «СЕТЬ». При этом специальный электромагнит препятствует свободному вращению блока. На правый груз кладётся один или несколько перегрузков кольцеобразной формы, которые имеются в комплекте. Груз с перегрузком рукой устанавливается в положение, когда его нижняя грань совпадает с чертой на верхнем кронштейне. В этом положении груза нажимается кнопка «ПУСК». Когда правый груз с перегрузками достигает среднего кронштейна, перегрузки снимаются, и специальный фотоэлектрический датчик включает секундомер. Когда правый груз достигает нижнего кронштейна с другим фотодатчиком, то секундомер выключается. Для продолжения измерений нажимается кнопка «СБРОС», подготавливая секундомер для дальнейших измерений. Отжимается кнопка «ПУСК».

Последующие измерения начинаются с установки правого груза с перегрузком в исходное положение, описанное выше. Устраняются колебания грузов. Нажимается кнопка «ПУСК» и т. д. Возможно, при движении правого груза он задевает кольцо на среднем кронштейне, предназначенное для снятия перегрузков, и дальнейшее движение грузов сопровождается колебаниями. Возможно также, что правый груз не попадает в приемное окно нижнего кронштейна. Для проведения измерений эти эффекты нужно устранить!

Это достигается горизонтированием установки с помощью винтов (9) и небольшим поворотом в горизонтальной плоскости среднего кронштейна (3).

В дальнейшем изложении будем использовать следующие обозначения:

$M_{\text{тр}}$  – момент силы трения;  $[M_{\text{тр}}] = \text{Н}\cdot\text{м}$ ;

$m$  – массы грузов, висящих на нити, перекинутой через блок;  $[m] = \text{кг}$ ;

$\Delta m$  – масса перегрузка, который кладётся на правый груз;  $[\Delta m] = \text{кг}$ ;

$S_1$  – расстояние между верхним и средним кронштейнами, т. е. путь, который проходит груз вместе с перегрузком;  $[S_1] = \text{м}$ ;

$S_2$  – расстояние между средним и нижним кронштейнами, т. е. путь, который проходит груз без перегрузка;  $[S_2] = \text{м}$ ;

$t$  – время движения правого груза на этапе 2;  $[t] = \text{сек}$ ;

$a_1$  – ускорение правого груза на этапе 1;  $[a_1] = \text{м}/\text{с}^2$ ;

$a_2$  – ускорение правого груза на этапе 2;  $[a_2] = \text{м}/\text{с}^2$

$R$  – радиус блока;  $[R] = \text{м}$ .

Этап движения с перегрузком называется далее *этапом 1*, а этап движения без перегрузка – *этапом 2*.

Установка позволяет делать *прямые измерения времени движения  $t$*  правого груза на пути  $S_2$  между средним и нижним кронштейнами при различных задаваемых значениях масс перегрузков  $\Delta m$ , перемещения  $S_1$  на этапе 1 и перемещения  $S_2$  на этапе 2.

### Задание для самостоятельной работы.

#### Определение момента силы трения $M_{\text{тр}}$ .

1. Выберите любое значение  $S_1$  в интервале от 6 до 15 см. Установите минимальное возможное значение  $S_2$  ( $S_2 \geq 5$  см).

2. Измерьте не менее трёх раз время движения правого груза на этапе 2, используя на этапе 1 перегрузок кольцеобразной формы  $\Delta m$ . Найдите среднее время движения  $t$ .

3. Теория даёт следующую систему уравнений для поступательного движения грузов и вращательного движения блока на *этапе 1* (см. Приложение):

$$\begin{cases} ma_{1x} = T_1 - mg & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m + \Delta m)a_{1x} = (m + \Delta m)g - T_2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_2 R - T_1 R = M_{TP} & (3) \end{cases}$$

Получить математическое выражение для ускорения правого груза на *этапе 1* ( $a_{1x} - ?$ ) из системы уравнений 1 – 3.

4. Теория даёт следующую систему уравнений для поступательного движения грузов и вращательного движения блока на *этапе 2* (см. Приложение):

$$\begin{cases} ma_{2x} = T'_1 - mg & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ma_{2x} = mg - T'_2 & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (T'_2 - T'_1)R = M_{TP} & (6) \end{cases}$$

Получить математическое выражение для ускорения правого груза на *этапе 2* ( $a_{2x} - ?$ ) из системы уравнений 4 – 6.

5. Получить следующее математическое выражение для пути (7), проходимого правым грузом (без перегрузки), используя для этого уравнения кинематики и результаты заданий 2, 3 и 4:

$$S_2 = \sqrt{\frac{2\Delta mg - \frac{2M_{TP}}{R}}{2m + \Delta m}} \cdot S_1 \cdot t - \frac{M_{TP}}{4mR} \cdot t^2 \quad (7)$$

6. Из полученного выражения (7), подставив измеренное в задании 1 время  $t$  и все остальные известные параметры, найти момент силы трения  $M_{TP}$ .

7. Рассчитать относительную погрешность определения момента силы трения.

Из-за сложности математического выражения для определения момента силы трения можно воспользоваться упрощённым вариантом расчёта погрешности  $M_{TP}$ . Для этого относительные погрешности прямым образом определяемых

величин ( $m$ ,  $t$ ,  $S$ ) принять равными:  $\frac{\Delta m}{m} \approx 0,01$ ;  $\frac{\Delta t}{t} \approx 0,01$ ;  $\frac{\Delta S}{S} \approx 0,01$ .

Рассчитать относительную погрешность определения момента силы трения как сумму относительных погрешностей прямым образом определяемых величин ( $\frac{\Delta M_{TP}}{M_{TP}}$ ).

### Приложение. Законы динамики вращательного и поступательного движений.

Рассмотрим блок радиуса  $R$  с моментом инерции  $J$ , который может вращаться вокруг горизонтальной оси (рисунок 2).

Через блок перекинута невесомая, нерастяжимая нить, на концах которой висят грузы массой  $m$  каждый. Если на один из грузов (на рисунке – на правый) положить перегрузок достаточно большой массы  $\Delta m$ , система придёт в движение (разумеется, при отсутствии сил трения перегрузок сколь угодно малой массы приводит систему в движение, но при наличии сил трения это не так).

Найдём ускорения грузов, считая, что при движении нить по блоку не скользит. Будем считать, что диссипативные силы, зависящие от скорости (например, силы сопротивления воздуха) отсутствуют. На левый груз действует сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила  $\vec{T}_1$  со стороны нити. На левый вертикальный участок нити действуют две силы: сила  $(-\vec{T}'_1)$  со стороны левого груза, которая по III закону Ньютона равна силе  $\vec{T}_1$  по модулю и противоположна по направлению, и сила  $\vec{T}''_1$  со стороны участка нити, находящегося на блоке.

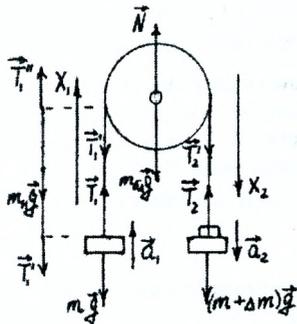


Рисунок 2 – Блок с грузами

На рисунке слева отдельно показан левый участок нити и силы, на него действующие; напомним, что нить считается невесомой. Запишем второй закон Ньютона для левого участка нити:

$$m_{\text{нити}} \vec{a}_{\text{нити}} = -\vec{T}'_1 + \vec{T}''_1 = 0, \text{ поскольку } m_{\text{нити}} = 0$$

Тогда,  $\vec{T}'_1 = \vec{T}''_1$ . По третьему закону Ньютона сила  $\vec{Q}'_1$ , с которой левый вертикальный участок нити действует на участок, находящийся на блоке, равна

$$\vec{T}'_1 = -\vec{T}''_1 = -\vec{T}_1$$

Фактически, сила  $\vec{T}'_1$  оказывается приложенной к блоку, поскольку в отсутствие проскальзывания блок и участок нити, находящийся на нём, составляют единое целое.

Аналогичные рассуждения применимы и для правого вертикального участка нити. Для модулей сил, следовательно, имеем

$$T'_1 = T_1 \text{ и } T'_2 = T_2$$

Запишем систему уравнений, описывающих поступательное движение обоих грузов. Для этого выберем положительное направление осей  $X_1$  и  $X_2$  так, чтобы они совпадали с направлением движения тел (такой выбор осей называется согласованным).

Тогда для висящих грузов, которые движутся поступательно, второй закон Ньютона при движении тел на первом этапе ( $S_1$ ):

$$\begin{cases} ma_{1x_1} = T_1 - mg \end{cases} \quad (\text{П-1})$$

$$\begin{cases} (m + \Delta m)a_{2x_2} = (m + \Delta m)g - T_2 \end{cases} \quad (\text{П-2})$$

Вследствие *нерастяжимости нити* модули перемещений грузов на обоих концах нити одинаковы. Одинаковы модули скоростей и ускорений грузов, но направления их, конечно, противоположны:

$$\vec{a}_1 = -\vec{a}_2, \quad a_{1x_1} = a_{2x_2} = a_{1x},$$

где  $a$  – модуль ускорения каждого груза.

При этом  $a_{1x_1} = a_{2x_2} = a_{1x}$  ускорения грузов на этапе I.

Рассмотрим теперь силы, которые действуют на блок. Помимо силы тяжести  $m_{\text{бл}} \vec{g}$ , сил  $\vec{T}'_1$  и  $\vec{T}'_2$ , о которых шла речь выше, на блок действует сила реакции оси  $\vec{N}$ , а также силы трения в оси блока. Детальный анализ сил трения очень сложен, поэтому ограничимся рассмотрением упрощённой модели, которая достаточно хорошо подтверждается опытом. Для вращения блока существенны не сами силы трения, а их моменты относительно оси вращения. Поскольку центр масс блока покоится, то  $\vec{N} + \vec{T}'_1 + \vec{T}'_2 = 0$ . Переходя к модулям сил, получим:

$$N = T_1 + T_2 + m_{\text{бл}} g.$$

Запишем для блока основное уравнение динамики вращательного движения

$$J\varepsilon = T'_2 R - T'_1 R - M_{TP} \quad (\text{П-3})$$

Если блок невесом, то  $J_{\text{бл}} = 0$  и  $T_2 R - T_1 R = M_{TP}$

Если нить по блоку не скользит, то модуль скорости грузов равен модулю линейной скорости точек на окружности блока:

$$V = \omega R$$

Дифференцируя это соотношение по времени, получим следующую связь модуля ускорений грузов  $a$  и углового ускорения  $\varepsilon$ :

$$a = \varepsilon R$$

Тогда (П-3) можно переписать в виде

$$J \cdot \frac{a}{R} = (T_2 - T_1) R - M_{TP} \quad (\text{П-4})$$

Решая систему уравнений (П-1), (П-2), (П-4), получим выражение для модуля ускорений грузов при движении и на первом этапе

$$a_{1x} = \frac{\Delta m g - \frac{M_{TP}}{R}}{\frac{J}{R^2} + 2m + \Delta m} \quad (\text{П-5})$$

Если блок невесом:

$$a_{1x} = \frac{\Delta m g - \frac{M_{TP}}{R}}{2m + \Delta m} \quad (\text{П-6})$$

Если система некоторое время движется с ускорением  $a_{1x}$  на этапе 1, а затем перегрузок снимается, то дальнейшее движение системы на этапе 2 будет происходить с ускорением  $a_{11x}$ , выражение для которого вытекает из формулы (П-6) при  $\Delta m = 0$ :

$$a_{11x} = -\frac{\frac{M_{TP}}{R}}{\frac{J}{R^2} + 2m} \quad (\text{П-7})$$

Если блок невесом:

$$a_{11x} = -\frac{M_{TP}}{2mR} \quad (\text{П-8})$$

Знак «минус» показывает, что движение вследствие наличия сил трения будет замедленным.

Аналогичное выражение для ускорения  $a_{IIx}$  можно получить, если записать законы поступательного и вращательного движения на этапе 2 в отсутствие перегрузки и невесомости блока:

$$\begin{cases} ma_{Ix_1} = T'_1 - mg & (\text{П-9}) \\ ma_{2x_2} = mg - T'_2 & (\text{П-10}) \\ (T'_2 - T'_1)R = M_{TP} & (\text{П-11}) \end{cases}$$

где  $a_{Ix_1} = a_{2x_2} = a_{IIx}$

В работе правый груз проходит с перегрузком задаваемый экспериментатором путь  $S_1$  (этап 1) а затем перегрузок снимается и измеряется время движения на пути  $S_2$ , который тоже задаётся экспериментатором (этап 2). Поскольку во всех случаях ускорения  $a_{Ix}$  и  $a_{IIx}$  – постоянные величины, справедливы все известные из школьного курса физики формулы кинематики.

В частности, поскольку движение с перегрузком начинается без начальной скорости, скорость правого груза в конце этапа 1 (она же является начальной скоростью на этапе 2) связана с путём  $S_1$  соотношением:

$$a_{Ix} = \frac{V_{20}^2}{2S_1} \quad (\text{П-12})$$

Время движения  $t$  на этапе 2 связано с выражением для пути  $S_2$  формулой:

$$S_2 = V_{20}t + \frac{a_{IIx}t^2}{2} \quad (\text{П-13})$$

Если массой блока можно пренебречь, то при подстановке формул (П-6), (П-8), (П-12) в (П-13) получим следующее выражение для определения момента сил трения:

$$S_2 = \sqrt{\frac{2\Delta mg - \frac{2M_{TP}}{R}}{2m + \Delta m}} \cdot S_1 \cdot t - \frac{M_{TP}}{4mR} \cdot t^2 \quad (\text{П-14})$$

### Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте основные законы динамики поступательного и вращательного движения.
2. Определите скорости грузов в конце заданного перемещения на основе закона сохранения механической энергии.
3. Определите массу блока, зная его радиус,  $S_1$ ,  $S_2$  и измеряя время движения на этапе 2. (Используйте теорию Приложения).
4. Определите момент инерции блока, измерив его радиус и положение отверстий на нём.
5. Напишите уравнение движения грузов, если в оси блока есть трение.
6. Допустим, что нить имеет массу. Напишите уравнение движения грузов для этого случая.

## Лабораторная работа М 3

### ИЗУЧЕНИЕ УПРУГОГО УДАРА ШАРОВ

#### Цель работы:

- найти зависимость времени соударения шаров от скорости;
- найти зависимость силы удара от скорости.

#### Приборы и принадлежности:

- набор шаров;
- установка для исследования удара шаров.

#### Описание установки:

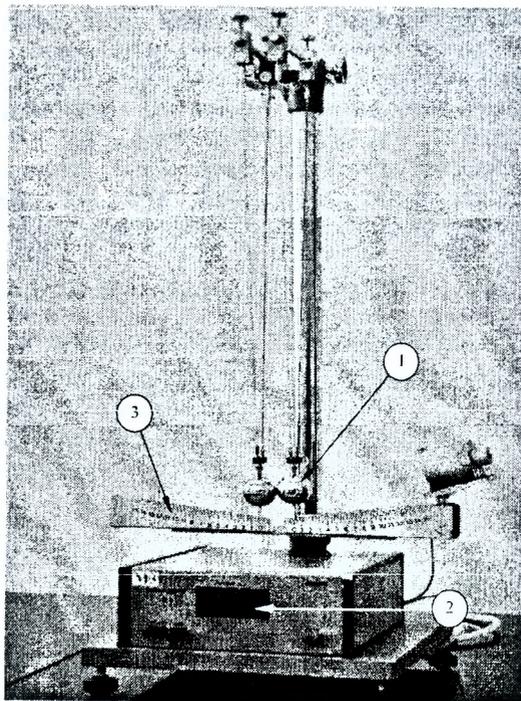


Рисунок 1 – Общий вид установки

Установка состоит из:

- 1) двух стальных шаров равного диаметра, подвешенных на нитях равной длины;
- 2) микросекундомера;
- 3) угловой шкалы.

#### Подготовка прибора к работе и проведение измерений.

Прибор включается кнопкой "СЕТЬ". Так как в данной работе рассматривается прямой удар двух шаров, являющихся в силу их однородности централь-

ным, проверить симметричность расположения шаров друг относительно друга по высоте и горизонтали. Отрегулировать, если требуется, длину нитей, убедиться в их параллельности.

– Отклоните правый шар от положения равновесия на угол " $\alpha$ ", указанный преподавателем. Нажмите кнопку «СБРОС». Магнит зафиксирует шар в указанном положении.

– Нажмите кнопку «ПУСК». Происходит удар, и второй шар начинает движение с той скоростью, которую имел первый в начальный момент удара.

– Запишите время соударения шаров, указанное на микросекундомере. Опыт повторите 3 раза и время усредните.

Установка позволяет проводить прямые измерения следующих величин:

– угла отклонения шара от положения равновесия до и после упругого удара;

– время соударения шаров.

### Задание 1. Построить график зависимости времени соударения шаров от скорости налетающего шара.

1. Согласно методике, описанной выше, измерьте время соударения шаров для различных значений угла  $\alpha$  (от 8 до 10 значений).

2. Зная угол отклонения нити перед ударом " $\alpha$ " рассчитать скорость шара непосредственно перед соударением по формуле (1) (см. Приложение):

$$V = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

3. Рассчитайте погрешность определения скорости по формуле:

$$\Delta V = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \Delta l\right)^2 + \left(\alpha \sqrt{gl} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \Delta \alpha\right)^2}$$

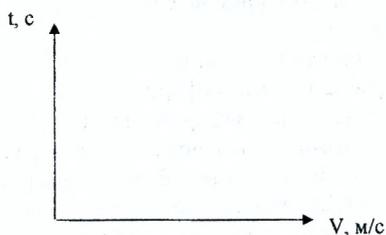
Погрешности напрямую измеряемых величин принять равными:

$\Delta l = 1$  мм;  $\Delta \alpha = 0,5^\circ$ .

4. Занесите данные в таблицу и постройте график зависимости  $t = f(V)$ .

Таблица

№ п/п	$\alpha$ , град	$t_1$ , МК	$t_2$ , МК	$t_3$ , МК	$t_{сд}$ , МК	$V$ , м/с	$\Delta V$ , м/с
1.	– « –	– « –	– « –	– « –	– « –	– « –	– « –
2.	– « –	– « –	– « –	– « –	– « –	– « –	– « –



## Задание 2. Установить зависимость средней силы удара от скорости.

1. По формуле (2) рассчитать силу удара  $\langle F \rangle_i$  для каждого из полученных значений скорости  $V_i$  и времени удара  $t_{cpi}$  из первого задания.

$$\langle F \rangle_i = \frac{mV_i}{t_{cpi}}, \quad (2)$$

где  $t_{cpi}$  – время соударения шаров из табл. 1;  $V_i$  – скорость шара из таблицы 1.

2. Рассчитайте погрешность определения силы по формуле расчёта погрешности косвенного измерения:

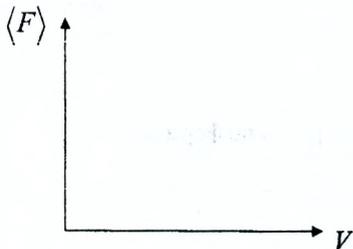
$$\Delta F_{cp} = \sqrt{\left(\frac{V}{t_{cp}} \cdot \Delta m\right)^2 + \left(\frac{m}{t_{cp}} \cdot \Delta V\right)^2}$$

Погрешности прямым образом измеряемых величин принять равными:

$$\Delta m = 0,5 \text{ г}; \Delta t \approx 0.$$

Значение  $\Delta V$  взять из предыдущего задания, усреднив полученные значения  $\Delta V_i$ .

3. Постройте график зависимости силы удара от скорости  $\langle F \rangle = f(V)$ .



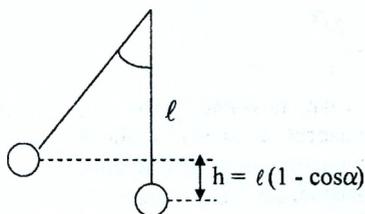
## Приложение. Абсолютно упругий удар.

При абсолютно упругом ударе выполняются законы сохранения импульса  $\vec{P} = \text{const}$  и механической энергии ( $E = \text{const}$ ). Опыт показывает, что время удара очень мало, поэтому перемещением соударяющихся тел за это время можно пренебречь. Поэтому потенциальная энергия этих тел во внешнем силовом поле за время удара не изменяется, и суммарная кинетическая энергия тел до и после удара одинакова. В данной работе рассматривается прямой удар двух шаров, являющихся в силу их однородности центральным.

Рассмотрим процесс соударения. При сближении шаров, начиная с момента их первоначального соприкосновения, возрастают силы деформации, соответственно, возрастают и упругие силы, препятствующие деформациям. Скорости тел при этом изменяются, пока не станут равными. В этот момент деформации максимальны, максимальны и упругие силы взаимодействия. В системе отсчёта, где центр масс шаров покоится, полная кинетическая энергия шаров равна нулю, т. е. кинетическая энергия, которой обладали шары до соударения, пол-

ностью переходит в потенциальную энергию упругих деформаций шаров. Затем силы деформации расталкивают шары до тех пор, пока они не разойдутся. При этом потенциальная энергия деформаций шаров переходит обратно в их кинетическую энергию, шары восстанавливают свою форму и оказываются недеформированными. Реально процесс удара намного сложнее, так как при соударении в шарах возбуждаются упругие волны, распространяющиеся в шарах и после удара, поэтому кинетическая энергия шаров после удара меньше, чем до удара, на величину энергии этих волн. Ввиду малости энергии волн, как показывают расчёты, учитывать её не будем.

Запишем закон сохранения механической энергии для абсолютно упругого, прямого, центрального удара двух шаров:



$$mgh = \frac{mV^2}{2} \quad (\text{П-1})$$

$$mgl(1 - \cos \alpha) = \frac{mV^2}{2}$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \text{ тогда}$$

$$V = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (\text{П-2})$$

При установлении связи между скоростью V и кинетической энергией ( $W_k$ ) следует иметь в виду следующее. Движение шара является наложением поступательного движения по окружности и вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через центр шара с угловой скоростью  $\omega$ . В этом случае кинетическая энергия складывается из энергии поступательного движения  $\frac{mV^2}{2}$  и энергии вращательного движения  $\frac{I_0 \omega^2}{2}$ , где  $I_0$  – момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр. Расчёт, однако, показывает, что неучёт энергии вращения даёт ошибку, не превышающую 1%, поэтому формула (П-1) достаточно верна.

Закон сохранения импульса для абсолютно упругого удара:

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 \vec{V}'_1 + m_2 \vec{V}'_2$$

В нашем случае  $V_2 = 0$ ;  $m_1 = m_2 = m$ .

Найдём среднюю по времени силу, действующую на один из шаров.

По определению средняя сила равна:

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{\int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt}{t_1 - t_0},$$

где  $t_0$  – момент начала соударения;

$t_1$  – момент времени конца соударения;

$\vec{F}$  – мгновенная сила взаимодействия шаров.

Согласно второму закону Ньютона:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}, \text{ тогда } \langle \vec{F} \rangle = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{P}}{dt} dt,$$

откуда

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{\vec{P}_1 - \vec{P}_0}{t_1 - t_0} = \frac{|\Delta\vec{P}|}{t},$$

здесь  $\vec{P}_0$  – импульс шара до удара;  $\vec{P}_1$  – импульс шара после удара;  $t = t_1 - t_0$  – время соударения. Тогда модуль средней силы равен:

$$\langle \vec{F} \rangle \equiv \langle F \rangle = \frac{|\Delta\vec{P}|}{t}$$

Если шары одинаковы и один из них до удара покоился, то можно показать, что налетающий шар после удара останавливается, а ранее покоящийся начинает движение с той скоростью, какую имел налетающий шар в момент начала удара. В этом случае для первоначально покоящегося шара имеем:

$P_0 = 0, P_1 = mV$ , где  $m$  – масса шара. Тогда

$$F = \frac{mV}{t} \quad (\text{П-3})$$

### Контрольные вопросы

1. Опишите упругий удар с точки зрения закона сохранения и превращения энергии.
2. Законы сохранения импульса и энергии требуют, чтобы налетающий шар остановился, а отскочивший имел ту же скорость, что и налетающий шар. Так ли это? Почему?
3. Почему шары подвешиваются так, что они должны соприкасаться и нити подвесов должны быть параллельны?
4. Могут ли скорости шаров после прямого центрального абсолютно упругого удара стать равными между собой?
5. Найти максимальную энергию упругой деформации шаров в данном случае.
6. Если шары имеют разные радиусы, но сделаны из одного и того же материала, то как зависит время соударения от большего радиуса.
7. Запишите законы сохранения для косоугольного удара гладких шаров.

## Лабораторная работа М 4

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПУЛИ ПРИ ПОМОЩИ КРУТИЛЬНОГО БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

#### Цель работы:

- изучение принципа работы баллистического маятника и закона сохранения момента импульса;
- экспериментальная проверка зависимостей между физическими величинами, характеризующими крутильные колебания;
- экспериментальное определение постоянной упругих сил кручения и момента инерции баллистического маятника;
- экспериментальное определение с помощью баллистического маятника скорости пули.

#### Приборы и принадлежности:

- баллистический маятник ГРМ-02 с автоматическим счетчиком периодов, миллисекундомером и стреляющим устройством.

#### Описание установки

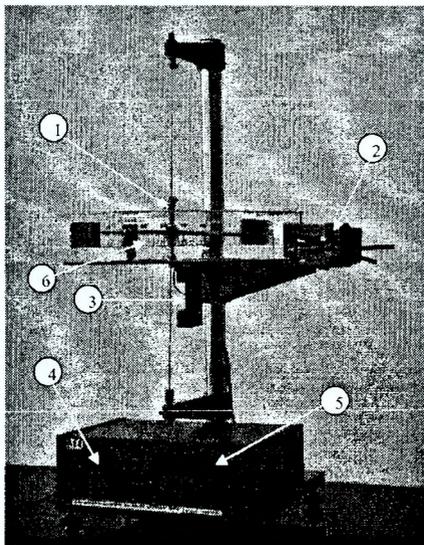


Рисунок 1 – Общий вид установки ГРМ-02

Установка состоит из:

- 1) баллистического маятника (1), подвешенного на стальной нити. Маятник состоит из двух диаметрально расположенных стальных стержней, по которым могут перемещаться грузы массой  $M$ . На одном из стержней крепится заполненная пластином мишень;
- 2) стреляющего устройства (2);
- 3) фотоэлектрического датчика (3);
- 4) автоматического счетчика числа периодов (4);

- 5) автоматического миллисекундомера (5);
- 6) угловой шкалы (6).

Установка позволяет проводить прямые измерения следующих величин: периода колебаний баллистического маятника; угловой амплитуды крутильных колебаний баллистического маятника.

### **Подготовка прибора к работе и проведение измерений**

Прибор включается в сеть кнопкой "СЕТЬ". Положение равновесия баллистического маятника устанавливается так, чтобы оно соответствовало нулю угловой шкалы.

#### *Измерение периода колебаний баллистического маятника.*

Подвижные грузы закрепите на расстоянии  $R_1$ , предложенном преподавателем. Обнулите показания прибора нажатием кнопки "СБРОС", аккуратно отклоните баллистический маятник на заданный преподавателем угол от положения равновесия и отпустите. По достижении баллистическим маятником числа колебаний «девять» (9), нажмите кнопку "СТОП". В этом случае прекращается счет времени после десяти полных колебаний. Период колебаний равен времени, деленному на количество колебаний ( $N = 10$ ).  $T = t/N$ .

#### *Измерение угловой амплитуды при абсолютно неупругом ударе пули о мишень с пластилином баллистического маятника.*

Установите подвижные грузы в предлагаемое положение (по указанию преподавателя). Зарядите специальной пулей зарядное пружинное устройство так, чтобы после сжатия пружины оно фиксировалось и удерживалось. Баллистический маятник с пластилиновой мишенью должен находиться в спокойном состоянии, соответствующем нулевому положению угловой шкалы. Нажав на затвор стреляющего устройства, зарегистрируйте максимальный угол, на который отклонился баллистический маятник.

После выстрела пуля должна застрять и оставаться в пластилиновой мишени. Такой опыт считается удачным. В случае, если пуля отскочила, установку необходимо привести в исходное состояние и опыт повторить.

*Баллистическая идея* измерения скорости пули заключается в том, что за время соударения пули с маятником угловая скорость баллистического маятника изменяется достаточно заметно, а его угловое перемещение незначительно и им можно пренебречь. Естественно, что это условие выполняется в том случае, если масса маятника намного больше массы пули.

Скорость пули определяется по измерению максимального угла отклонения маятника после неупругого соударения с пулей. Процесс неупругого соударения пули с маятником описывается на основе закона сохранения момента импульса (в этом процессе механическая энергия не сохраняется!), а процесс последующего движения может быть описан с помощью закона сохранения механической энергии.

Однако любая теоретическая модель является лишь приближенным описанием физической ситуации, так как пренебрегает влиянием многих эффектов, имеющих место в эксперименте. Но если пренебрежения реальными эффектами в теоретической модели не изменяют конечного результата больше чем на 1/20 от его реального значения, то такая теоретическая модель в лабораторном физическом практикуме является вполне приемлемой и позволяет определить искомую физическую величину.

В нашем случае мы пренебрегаем незначительным смещением центра масс маятника после соударения с пулей, упругими колебаниями, которые при этом возникают и, соответственно, перераспределением механической энергии между крутильными и упругими колебаниями. Также считаем крутильные колебания незатухающими, пренебрегая сопротивлением воздуха и диссипацией энергии неупругих колебаний в местах подвеса упругой проволоки и т. п. Тем не менее, предложенная теоретическая модель позволяет получить вполне хорошие результаты.

**Задание 1. Определение момента инерции баллистического маятника ( $I_0$ ) и коэффициента упругих сил кручения ( $C$ ).**

1. Установите подвижные грузы массой  $M$  на одинаковом расстоянии  $d_1$  от оси вращения. Отклонив баллистический маятник на угол  $\phi \sim 20^\circ$ , измерьте период колебаний  $T_1$ . Повторите опыт 3 раза и вычислите среднее значение  $T_1$ .

2. Установите положение подвижных грузов массой  $M$  на расстоянии  $d_2$  и повторите опыт (см. задание 1). Лучше, если значения  $d_1$  и  $d_2$  отличаются как можно больше.

3. Из системы уравнений 1) и 2), подставив численные значения  $T_1, T_2, d_1, d_2$ , найдите  $I_0$  и  $C$ .

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + 2Md_1^2}{C}} \quad (1)$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + 2Md_2^2}{C}} \quad (2)$$

4. Рассчитайте относительную погрешность определения момента инерции и коэффициента упругих сил кручения  $\frac{\Delta J_0}{J_0} = ?$ ,  $\frac{\Delta C}{C} = ?$

В силу сложности математического выражения для определения данной погрешности, можно воспользоваться упрощённым вариантом расчёта. Для этого относительные погрешности прямым образом определяемых величин ( $M, d, T$ ) принять равными:  $\frac{\Delta M}{M} \approx 0.01$ ;  $\frac{\Delta d}{d} \approx 0.02$ . (В данной работе период рассматриваем как прямым образом измеренную величину). Относительная погрешность измерений в данной установке периода:  $\frac{\Delta T_i}{T_i} = 5 \cdot 10^{-4}$ , и ею можно пренебречь.

Рассчитать относительную погрешность определения момента инерции и коэффициента упругих сил кручения как сумму относительных погрешностей прямым образом определяемых величин.

**Задание 2. Определение скорости пули ( $V_n$ ) и угловой скорости вращения ( $\Omega$ ).**

1. Зарядите стреляющее устройство и, установив подвижные грузы ( $M$ ) на одинаковом расстоянии  $d_3$ , произведите выстрел, измерив при этом максимальное отклонение баллистического маятника  $\phi_{\max}$  и расстояние от оси вращения до центра масс пули  $\ell$ .

2. Закон сохранения момента импульса даёт:

$$m_n V_n l = (I_o + 2Md_3^2) \Omega \quad (3)$$

где  $V_n$  – скорость пули,  $\Omega$  – угловая скорость системы после удара.

Закон сохранения механической энергии:

$$\frac{(I_o + 2Md_3^2) \Omega^2}{2} = \frac{C\phi_{max}^2}{2} \quad (4)$$

Из системы уравнений 3) и 4) найдите  $\Omega$  и  $V_n$ . Угол  $\phi_{max}$  при этом нужно подставить в радианах:

$$\phi(rad) = \frac{\phi^o \cdot \pi}{180^o} = \frac{\phi^o \cdot 3,14}{180^o},$$

где  $\phi^o$  – угол в градусах.

Рассчитайте относительные погрешности скорости пули  $\frac{\Delta V}{V}$  и угловой скорости вращения  $\frac{\Delta \Omega}{\Omega}$ .

Относительные погрешности прямым образом определяемых величин ( $m$ ,  $\phi_m$ ,  $l$ ) принять равными:  $\frac{\Delta m}{m} \approx 0,02$ ;  $\frac{\Delta \phi_m}{\phi_m} \approx 0,02$ ;  $\frac{\Delta l}{l} \approx 0,02$ . Рассчитайте отно-

сительную погрешность скорости пули и угловой скорости вращения как сумму относительных погрешностей прямым образом определяемых величин.

### Приложение. Определение скорости пули баллистическим маятником (теоретический материал)

При попадании пули в мишень с пластилином, баллистический маятник приобретает угловую скорость и выходит из положения равновесия, совершая колебания вокруг своей оси. При этом считается, что скорость пули в момент соударения перпендикулярна оси и плечу маятника. Если это условие не соблюдается, то кроме вращательных, будут также возбуждаться и колебательные степени свободы маятника, т. е. ось маятника начнет совершать колебания.

Так как скорость пули перпендикулярна плоскости мишени, то момент импульса пули равен:

$$L = mV_n l,$$

где  $l$  – расстояние от оси вращения маятника до точки удара пули;  $m$  – масса пули;  $V_n$  – скорость пули.

Момент импульса системы после соударения определяется выражением:

$$L = I\Omega,$$

где  $I$  – момент инерции системы после удара пули, равный:  $I = I_o + 2Md_i^2 + ml^2$ ;

$\Omega$  – угловая скорость системы после удара.

Удар можно считать абсолютно неупругим, так как при соударении с мишенью пуля застревает в пластилине. В этом случае закон сохранения момента импульса примет вид:

$$mVl = I\Omega \quad (П-1)$$

Таким образом, после соударения баллистический маятник приобретает угловую скорость  $\Omega$ . При движении маятника на него будет действовать момент сил, вызванный деформацией кручения стальной проволоки подвеса маятника, который равен:

$$M = -C\phi,$$

где  $C$  – постоянная упругих сил кручения проволоки;

$\phi$  – угол отклонения маятника от положения равновесия.

Знак «минус» указывает, что при  $\phi > 0$ ,  $M < 0$ . Поэтому в момент соударения угловая скорость будет максимальной, а в дальнейшем она будет уменьшаться до нуля.

При дальнейшем движении, если не учитывать сопротивление воздуха, выполняется закон сохранения механической энергии. В момент максимального отклонения угловая скорость равна нулю, а потенциальная энергия максимальна и равна

$$\frac{C\phi_{max}^2}{2}$$

Таким образом, закон сохранения энергии мы можем записать в виде:

$$\frac{I\Omega_{max}^2}{2} = \frac{C\phi_{max}^2}{2}, \quad (\text{П-2})$$

где  $\phi_{max}$  – максимальный угол поворота маятника.

Используя законы сохранения момента импульса (П-1) и энергии (П-2),

получаем:

$$\frac{I \left( \frac{mVl}{I} \right)^2}{2} = \frac{C\phi_{max}^2}{2}$$

отсюда:

$$V^2 = \frac{CI}{m^2 l^2} \cdot \phi_{max}^2$$

Т. е. скорость пули до столкновения с баллистическим маятником будет определяться выражением:

$$V = \sqrt{CI} \cdot \frac{\phi_{max}}{ml} \quad (\text{П-3})$$

### Контрольные вопросы:

1. Дайте определение момента импульса. Как эта величина используется в лабораторной работе?
2. В чем заключается баллистический принцип?
3. Какие законы сохранения использовались в данной работе?
4. Дайте определение момента инерции.
5. Сформулируйте теорему Штейнера-Гюйгенса.
6. Как определить момент инерции баллистического маятника?
7. Как изменяется угол отклонения баллистического маятника при соударении с пулей и период его колебаний, если увеличить его момент инерции?
8. Что произойдет, если пуля попадет под углом к перпендикуляру плоскости мишени?
9. Получите формулу для определения скорости пули, если баллистический маятник после неупругого удара отклонится на максимальный угол  $\phi$ .

## Лабораторная работа М 5

### ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ НА МАЯТНИКЕ ОБЕРБЕКА

#### Цель работы:

– экспериментальная проверка зависимостей между физическими величинами, характеризующими вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

#### Приборы и принадлежности:

– маятник Обербека; комплект перегрузов; миллисекундомер.

#### Описание установки

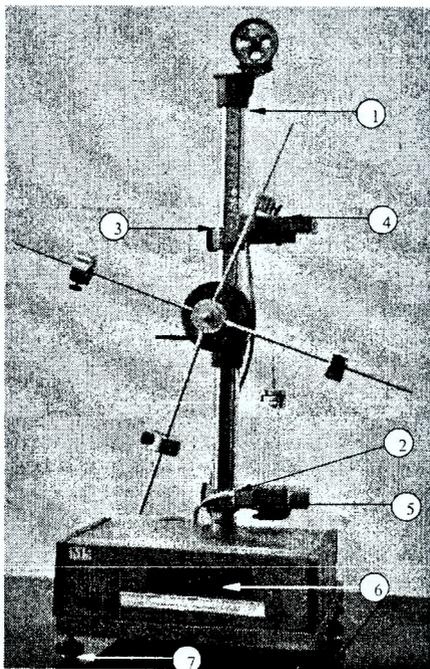


Рисунок 1 – Общий вид установки

Маятник Обербека представляет собой крестовину, на оси которой закреплены два блока радиусами  $r_1$  и  $r_2$ . На диски может наматываться нить, причём один конец нити прикрепляется к диску, а на другой подвешен груз  $m_1$ , состоящий из основного груза, на который могут помещать добавочные грузы. Поступательное движение груза вниз вызывает вращательное движение крестовины с блоками вокруг неподвижной горизонтальной оси. На четырех взаимно перпендикулярных стержнях симметрично расположены грузы массой  $m$ . Их можно установить на любом заданном расстоянии  $\rho$  от оси вращения. Маятник

с помощью неподвижного кронштейна установлен на вертикальной колонне, на которой нанесена миллиметровая шкала для подсчета длины перемещения грузов. На вертикальной колонне (1) прикреплены два кронштейна: нижний (2) неподвижный и верхний (3) подвижный. Подвижный кронштейн (3) можно перемещать вдоль колонны (1) и фиксировать его в любом положении, задавая таким образом расстояние  $H$ , которое проходят грузы. Установка снабжена двумя фотоэлектрическими датчиками (4 и 5), вырабатывающими электрические импульсы соответственно начала и конца измерения времени движения грузов. Маятник с грузами удерживается в состоянии покоя с помощью тормозного электромагнита. На основании колонны жестко закреплен миллисекундомер (6), к которому подключены фотодатчики. Само основание прибора снабжено регулируемыми ножками (7), обеспечивающими горизонтальную установку прибора.

На установке можно провести прямое измерение времени движения груза массой  $m_1$  на пути  $H$  и получить таким образом множество значений времени при различных  $m_1$ ,  $H$ ,  $\rho$  и радиусах намотки  $r_1$  и  $r_2$  и различных положениях грузов  $m$ .

Ясно, что проведение измерений времени при всех возможных комбинациях указанных величин – нереальная задача. Кроме того, неясно, что с результатами делать дальше и что с их помощью можно определить.

Ответы на последние вопросы дает теоретическая модель экспериментальной ситуации. Она же позволяет составить план измерений и обработки результатов.

Любая теоретическая модель дает приближенное описание экспериментальной ситуации, поскольку пренебрегает влиянием многих реально имеющих место эффектов.

**Внимание!** Для отчета по работе необходимо изучить также материал приложений.

В этой модели считается, что трение в оси блока (8) отсутствует, этот блок невесом, а момент сил трения  $M_{тр}$  в оси блока с крестовиной не зависит от угловой скорости вращения. В этих условиях ускорение груза массой  $m$  постоянно на всем отрезке  $H$  и равно:

$$a = \frac{mg - \frac{M_{тр}}{r}}{m + \frac{I}{r^2}},$$

где  $r$  – радиус намотки,  $I$  – момент инерции блока с крестовиной ( $r = r_1$  либо  $r_2$ ,  $I$  – определяется положением грузов массой  $m$  каждый и моментом инерции блока без грузов  $I_0$  ( $I = I_0 + 4mr^2$ ).

С другой стороны, на основании кинематических соображений, если  $a$  – постоянная величина, то

$$a = \frac{2H}{t^2},$$

где  $H$  – задаваемое перемещение груза,  $t$  – измеренное время его движения.

Имеем:

$$\frac{2H}{t^2} = \frac{mg - \frac{M_{TP}}{r}}{m + \frac{I}{r^2}} \quad (1)$$

Тогда формула (1) является основной для работы в рамках теоретической модели.

### Задание 1. Определить момент инерции ( $I_0$ ) крестовины без грузов.

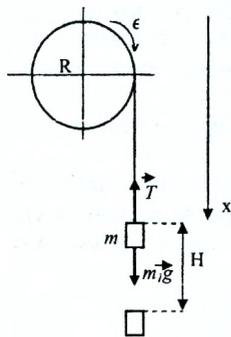
1. Освободите стержни крестовины от грузов  $m$  и убедитесь, что блок с крестовиной находится в безразличном равновесии в любом из возможных положений, когда нить с грузом  $m$  не прикреплена к блоку. Если это не так, то добейтесь состояния безразличного равновесия путем незначительного ввинчивания или вывинчивания стержней крестовины в ось блока.

2. Измерьте время движения груза  $m_1$  с высоты  $H$ . Измерения сделать 3 раза и усреднить;

3. Рассчитайте экспериментальное значение ускорения груза  $m_1$  по формуле

$$a_x = \frac{2H}{t^2} \quad (1)$$

Запишем второй закон Ньютона для поступательного движения груза  $m_1$  и вращательного движения для крестовины без грузов (см. Приложение).



$$\begin{cases} m_1 a_x = m_1 g - T, \\ I_0 \epsilon = TR \end{cases} \quad (2)$$

где  $\epsilon$  – угловое ускорение вращения крестовины;

$T$  – сила натяжения нити;

$R$  – радиус намотки нити.

Поскольку нить по блоку не скользит, то  $\epsilon = a/R$ , тогда из системы уравнений (2) получим теоретическое значение ускорения груза  $m_1$ :

$$a_x = \frac{m_1 g}{m_1 + \frac{I_0}{R^2}} \quad (3)$$

Приравняв теоретическое (3) и экспериментальное (1) выражения для ускорения груза  $m_1$ , получим следующее равенство:

$$\frac{m_1 g}{m_1 + \frac{I_0}{R^2}} = \frac{2H}{t^2} \quad (4)$$

4. Из равенства (4) выразите и рассчитайте момент инерции  $I_0$  крестовины без грузов.

Повторите пункты 2) – 4) при различных значениях  $H$  и  $m_1$ . Полученные значения  $I_0$  усредните.

5. Рассчитайте погрешность определения момента инерции по формуле:

$$\Delta J_o = \sqrt{\left( R^2 \left( \frac{gt^2}{2H} - 1 \right) \Delta m_I \right)^2 + \left( 2m_I R \left( \frac{gt^2}{2H} - 1 \right) \Delta R \right)^2 + \left( \frac{m_I R^2 gt}{H} \Delta t \right)^2 + \left( m_I R^2 \frac{gt^2}{2H^2} \Delta H \right)^2}$$

Погрешности прямым образом измеренных величин принять равными:

$\Delta m = 0,1 \text{ г}$ ;  $\Delta R = 1 \text{ мм}$ ;  $\Delta t = 0,005 \text{ сек}$ ;  $\Delta H = 0,5 \text{ мм}$ .

**Задание 2. Определить момент инерции (I) крестовины с закреплёнными на ней грузами m.**

1. Закрепите грузы  $m$  на указанном преподавателем расстоянии ( $\rho$ ) от оси и опять проверьте, находится ли система в состоянии безразличного равновесия. Если это не так, небольшими смещениями грузов на стержнях крестовины добейтесь, чтобы это состояние имело место.

2. Установите кронштейн с верхним фотодатчиком на минимальное значение  $H$  из рабочего интервала.

3. Закрепите один конец диска нити на диске радиуса  $R = r_1$  или  $R = r_2$  по указанию преподавателя, перекиньте нить с подвешенным на другом её конце грузом (основной груз + указанное преподавателем число добавочных грузов) через неподвижный блок и добейтесь, чтобы нижний край груза  $m_1$  совпал с чертой на корпусе верхнего фотодатчика.

4. Измерьте время движения груза  $m_1$  с высоты  $H$ . Измерения сделать 3 раза и усреднить;

Из равенства теоретического и экспериментального значения ускорения (формула 5) найдите и рассчитайте экспериментальное значение момента инерции ( $I = ?$ ) крестовины с закреплёнными на ней грузами массой  $m$ :

$$\frac{m_1 g}{m_1 + \frac{I}{R^2}} = \frac{2H}{t^2} \quad (5)$$

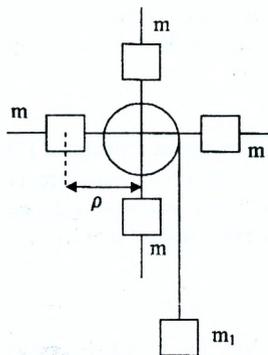
Повторите пункты 1) – 4) при разных значениях  $\rho$ . Полученные значения  $I$  усредните.

5. Посчитайте теоретическое значение момента инерции по формуле (6):

$$I_{\text{теор}} = I_o + 4m\rho^2 \quad (6)$$

6. Оцените относительную погрешность измерений по формуле (7):

$$\varepsilon = \frac{I_{\text{теор}} - I_{\text{эксп}}}{I_{\text{теор}}} \cdot 100\% \quad (7)$$



## ПРИЛОЖЕНИЕ. Основные сведения по динамике вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Движение твердого тела, при котором две его точки остаются неподвижными, называется вращением тела вокруг неподвижной оси. Прямая, соединяющая эти точки, называется *осью вращения тела*. При вращении вокруг неподвижной оси все точки тела описывают окружности, центры которых лежат на оси вращения, а плоскости перпендикулярны к ней. Положение твердого тела в пространстве полностью определяется значением  $\phi$  угла поворота тела из некоторого начального положения.

Для характеристики быстроты вращения тела вокруг оси служит *угловая скорость*. Угловой скоростью называется быстрота изменения (точнее, производная) угла поворота  $\phi$  по времени:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \quad (\text{П-1})$$

Вращение считается равномерным, если  $\omega = \text{const}$ .

Величиной, характеризующей быстроту (и направление) изменения угловой скорости, является *угловое ускорение*. Производная от угловой скорости или вторая производная угла поворота по времени

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2} \quad (\text{П-2})$$

Модуль угловой скорости и углового ускорения связаны соответственно с модулями линейной скорости  $V$  и линейного ускорения  $a$  соотношениями:

$$V = \omega \cdot r, \quad a = \varepsilon \cdot r, \quad (\text{П-3})$$

где  $r$  – радиус окружности вращения.

*Моментом силы  $\vec{M}$  относительно неподвижной точки* (полюса) называется векторная величина  $\vec{M}$ , равная векторному произведению радиус-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из этой точки в точку приложения силы, на вектор силы  $\vec{F}$ :

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] \quad (\text{П-4})$$

Модуль момента силы:

$$M = Fr \sin \alpha = F \ell, \quad (\text{П-5})$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ , а  $\ell = r \sin \alpha$  – плечо силы.

При переносе точки приложения силы  $\vec{F}$  вдоль линии её действия момент этой силы относительно одной и той же неподвижной точки не изменяется. Если линия действия силы проходит через точку вращения, то момент силы относительно этой точки равен нулю.

*Моментом силы  $\vec{F}$  относительно неподвижной оси OZ* называется скалярная величина  $M_z$ , равная проекции на эту ось вектора  $\vec{M}$  момента силы  $\vec{F}$  относительно произвольной точки на оси. Значение  $M_z$  не зависит от выбора положения точки на оси.

*Главный момент относительно неподвижной оси системы сил* равен алгебраической сумме моментов относительно этой оси всех сил.

**Моментом инерции математической системы относительно неподвижной оси OZ** называется физическая величина  $I_z$ , равная сумме произведений масс всех  $N$  материальных точек на квадраты расстояний до оси OZ:

$$I_z = \sum_{i=1}^N m_i \rho_i^2, \quad (\text{П-6})$$

где  $m_i$  и  $\rho_i$  – масса  $i$ -ой точки и ее расстояние от оси.

**Момент инерции тела**

$$I_z = \int_{(m)} \rho^2 dm \quad (\text{П-7})$$

где  $dm = \mathbf{D} \cdot d\mathbf{V}$  – масса малого элемента объема тела;  $d\mathbf{V}$  – объём малого элемента;  $\mathbf{D}$  – плотность;  $\rho$  – расстояние от элемента  $dm$  до оси OZ.

Для однородного тела ( $D = \text{const}$ )

$$I_z = \int_V \rho^2 D dV = D \int_V \rho^2 dV \quad (\text{П-8})$$

Момент инерции тела является мерой инертности во вращательном движении.

**Теорема Гюйгенса-Штейнера:** Момент инерции тела  $I$  относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела  $I_c$  относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно данной оси, и произведения массы тела  $m$  на квадрат расстояния  $d$  между осями:

$$I = I_c + md^2 \quad (\text{П-9})$$

8. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси имеет вид:

$$I\epsilon = M, \quad (\text{П-10})$$

где  $I$  – момент инерции тела (системы тел) относительно оси вращения;

$M$  – сумма проекций на ось вращения моментов всех внешних сил, действующих на тело (систему);  $\epsilon$  – угловое ускорение.

### Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте основное уравнение динамики твердого тела для вращательного движения относительно неподвижной оси.
2. Дайте определение момента инерции материальной точки, системы материальных точек и однородного тела относительно неподвижной оси.
3. Приведите аналогии между кинематическими характеристиками вращательного и поступательного движений абсолютно твердого тела; то же динамических характеристик.
4. Какие могут быть причины возникновения ошибок в ходе эксперимента?
5. Сформулируйте теорему Гюйгенса – Штейнера. Каким образом теорема используется в данной лабораторной работе?
6. Дайте определение момента силы относительно неподвижной оси.
7. Запишите основное уравнение динамики для груза,двигающегося поступательно.

## Лабораторная работа М 6

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЁРДЫХ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА

#### Цель работы:

- определение моментов инерции твёрдых тел относительно различных осей;
- экспериментальное подтверждение основных соотношений.

#### Приборы и принадлежности:

- крутильный маятник ГРМ-05;
- набор тел.

#### Описание установки

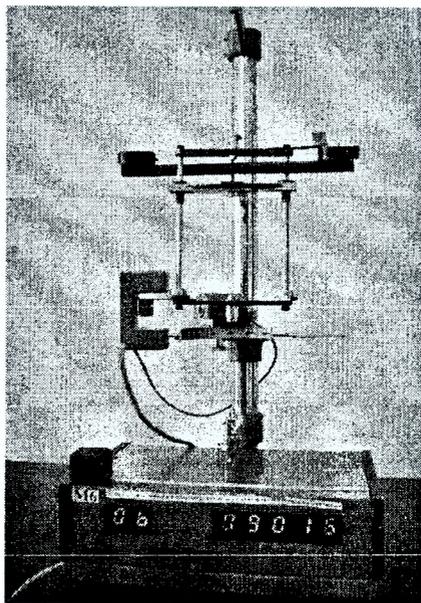


Рисунок 1 – Общий вид установки ГРМ-05

Установка позволяет проводить *прямые измерения периода крутильных колебаний ( $T$ )* рамки с закрепленными в ней телами при различных угловых амплитудах колебаний.

Определение периода осуществляется следующим образом. При выключенной установке отверните стопорный винт под электромагнитом и, передвигая по шкале углов электромагнит, установите желаемую начальную угловую амплитуду колебаний, после чего зафиксируйте положение электромагнита. Нажмите кнопку "СЕТЬ", поверните рамку до касания выступом рамки электромагнита. *Кнопка «ПУСК» при этом должна быть отжата.* Нажмите кнопку "СБРОС", а затем утопите кнопку «ПУСК». Электромагнит при этом перестает

удерживать рамку и начинаются крутильные колебания. Количество полных колебаний фиксируется на счётчике "ПЕРИОДЫ", а время - на соответствующем счётчике справа. Обычно измеряется время 10 полных колебаний. В этом случае после появления цифры «9» на счётчике периодов нажимается кнопка «СТОП» и отсчёт времени прекращается после завершения 10 колебаний. Период ( $T$ ), очевидно, равен  $T = t/10$ , где  $t$  – показания правого счётчика. Для последующих измерений кнопка «пуск» отжимается и показания счётчиков обнуляются нажатием кнопки «сброс».

### Основные положения теоретической модели.

Описание любой экспериментальной ситуации даётся теоретической моделью. Только в рамках принятой модели возможно косвенное определение тех или иных физических величин. В данной работе, в частности, косвенно определяется момент инерции различных тел ( $I$ ).

Любая теоретическая модель даёт лишь приближенное описание экспериментальной ситуации, поскольку пренебрегает влиянием многих реально имеющих место эффектов. Сложность модели и определяется, главным образом, числом учитываемых эффектов.

Ниже кратко даётся информация по используемой в работе модели, необходимая для выполнения работы и обработки результатов измерений.

1. Диссипативными силами, т. е. силами трения, сопротивления воздуха и т. д., можно пренебречь в том смысле, что период крутильных колебаний системы в том случае, если бы они отсутствовали, пренебрежимо мало отличался бы от того, который наблюдается реально.

Ниже приводится оценка влияния диссипативных сил на период крутильных колебаний.

2. В работе изучаются крутильные колебания рамки с закреплёнными в ней различными телами: стержнем, цилиндром, параллелепипедом и т. д. Закрепление цилиндра, параллелепипеда, шара, конуса в рамке, а также их крепление к стержню осуществляется с помощью небольших штырьков. В теоретической модели, во-первых, предполагается, что оси, на которых лежат эти штырьки, проходят через центры масс соответствующих тел, во-вторых, что крепление обеспечивает параллельность этих осей и оси, вокруг которой совершаются колебания (оси, на которой расположены проволоки, крепящие рамку.)

3. Считается, что вся конструкция, участвующая в крутильных колебаниях, симметрична относительно оси колебаний. Например, при закреплении в рамке стержня с прикрепленными к нему телами, тела должны быть одинаковыми и располагаться симметрично относительно центра стержня.

### Задание 1. Определение момента инерции рамки ( $I_p$ ) и коэффициента упругих сил кручения ( $C$ ).

1. Определите период колебаний рамки без закреплённых в ней тел ( $T_1$ ) по методике, описанной выше.

Теория даёт следующее выражение для периода:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_p}{C}}, \quad (1)$$

где  $I_p$  – момент инерции рамки без закреплённых в ней тел;

$C$  – коэффициент упругих сил кручения;

2. Измерьте период колебаний рамки с кубом ( $T_2$ ).

Закрепите в рамке эталонный куб в центрах противоположных граней и найдите период  $T_{21}$  колебаний системы (рисунок 2). Повторите измерения для остальных двух пар противоположных граней, найдя  $T_{22}$ ;  $T_{23}$ . Усредняя найденные значения, найдите период  $T_2$  колебаний рамки с закреплённым в ней эталонным кубом:

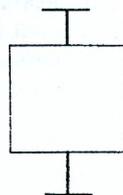


Рисунок 2

$$T_2 = \frac{T_{21} + T_{22} + T_{23}}{3}$$

Теория даёт следующее выражение для периода колебаний рамки с закреплённым в ней кубом:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_p + \frac{ma^2}{6}}{C}}, \quad (2)$$

где  $m$  – масса куба;  $a$  – сторона куба (указаны на рабочем месте),  $C$  – постоянная упругих сил кручения.

3. Из системы уравнений (1) и (2) найдите  $I_p$  и  $C$ .

4. Рассчитайте относительную погрешность определения момента инерции рамки ( $\frac{\Delta J_p}{J_p}$ ) и коэффициента упругих сил кручения ( $\frac{\Delta C}{C}$ ) как сумму относительных погрешностей прямым образом измеренных величин.

Относительные погрешности прямым образом определяемых величин ( $m$ ,  $T$ ,  $a$ )

принять равными:  $\frac{\Delta m}{m} \approx 0.01$ ;  $\frac{\Delta T}{T} \approx 0$ ;  $\frac{\Delta a}{a} \approx 0.02$ .

## Задание 2. Определение момента инерции груза ( $I_{gp}$ )

1. Измерьте период колебаний рамки со стержнем ( $T_3$ ). Для этого закрепите в рамке длинный стержень так, чтобы ось колебаний проходила через его центр (рисунок 3) и измерьте период  $T_3$  колебаний рамки со стержнем. Убедитесь, что период  $T_3$  практически не зависит от угла между плоскостью рамки и стержнем. Если эта зависимость присутствует, следует более аккуратно крепить стержень в рамке, соблюдая перпендикулярность стержня к оси колебаний и повторить измерение  $T_3$ .

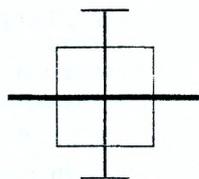


Рисунок 3

Вследствие аддитивности момента инерции согласно теории имеем:

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{I_p + I_{cm}}{C}}, \quad (3)$$

где  $I_{cm}$  – момент инерции стержня;

2. Из формулы (3), зная  $I_p$  из предыдущего задания, найдите момент инерции  $I_{ст}$ .

3. Прикрепите к стержню, закрепленному в рамке, симметрично два одинаковых тела с помощью штырьков, имеющих на этих телах, на расстоянии  $d$  от стержня (рис. 4).

4. Найдите период колебаний конструкции из стержня и двух тел ( $T_4$ )

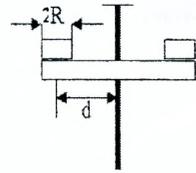


Рисунок 4

$$T_4 = 2\pi \sqrt{\frac{I_p + I_{cm} + 2I_{cp}}{C}} \quad (4)$$

5. Из формулы (4) найдите момент инерции груза ( $I_{гр}$ ) и сравните его с теоретическими значениями, найденными по формулам (5) и (6). По теореме Гюйгенса-Штейнера (см. Приложение):

$$I_{cp} = m_{cp} d^2 + \frac{1}{2} m_{cp} R^2, \quad (5)$$

где  $R$  – радиус груза.

Если грузы одеть иначе (рисунок 5), то момент инерции груза относительно оси вращения будет равен

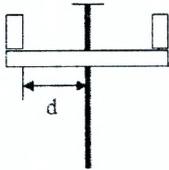


Рисунок 5

$$I_{cp} = m_{cp} d^2 + \frac{1}{4} m_{cp} R^2 \quad (6)$$

**Внимание:** все измерения проводить по 3 раза и для расчётов брать среднее значение.

6. Рассчитайте относительную погрешность определения момента инерции груза ( $\frac{\Delta J_{cp}}{J_{cp}} = ?$ ) как сумму относительных погрешностей момента инерции рамки и коэффициента упругих сил кручения.

Относительной погрешностью определения периода в силу малости можно пренебречь  $\frac{\Delta T}{T} \approx 0$ . Относительные погрешности момента инерции рамки и коэффициента упругих сил кручения взять из предыдущего задания.

### Приложение. Момент инерции и его вычисление.

Пусть твёрдое тело вращается вокруг оси  $Z$  (рисунок 6). Его можно представить как неизменную с течением времени систему разных материальных точек  $m_i$ , каждая из которых движется по окружности радиусом  $r_i$ , лежащей в плоскости, перпендикулярной оси  $Z$ . Угловые скорости всех материальных точек одинаковы. Моментом инерции тела относительно оси  $Z$  называется величина:

$$I_z = \sum m_i r_i^2 = \sum I_{zi},$$

где  $I_{zi} = m_i r_i^2$  – момент инерции отдельной материальной точки относительно оси  $OZ$ . Из определения вытекает, что момент инерции – **аддитивная величина**, т. е. момент инерции тела, состоящего из отдельных частей, равен сумме моментов инерции частей.

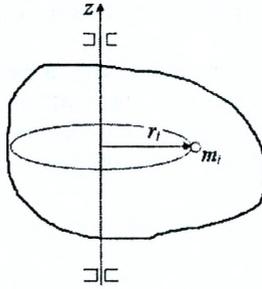


Рисунок 6

Очевидно,  $[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$ . Важность понятия момента инерции выражается в трёх формулах:

$$L_z = I_z \omega; \quad I_z \varepsilon = \sum M_z^e; \quad E_k = \frac{I_z V^2}{2}.$$

Первая из них выражает момент импульса тела, которое вращается вокруг неподвижной оси  $Z$  (полезно эту формулу сравнить с выражением для импульса тела  $P = mV_c$ , где  $V_c$  – скорость центра масс). Вторая формула носит название основного уравнения динамики вращательного движения тела вокруг неподвижной оси, т.е., иначе говоря, второго закона Ньютона для вращательного движения (сравним с законом движения центра масс:  $m\vec{a}_c = \sum \vec{F}^e$ ). Третья формула выражает кинетическую энергию тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (сравним с выражением для кинетической энергии частицы

$E_k = \frac{mV^2}{2}$ ). Сравнение формул позволяет сделать вывод о том, что момент инерции во вращательном движении играет роль, аналогичную массе в том смысле, что чем больше момент инерции тела, тем меньше угловое ускорение при прочих равных условиях оно приобретает (тело, образно говоря, труднее раскрутить). Реально вычисление моментов инерции сводится к вычислению тройного интеграла и может быть произведено лишь для ограниченного числа симметричных тел и лишь для осей симметрии. Количество осей, вокруг которых может вращаться тело, бесконечно велико. Среди всех осей выделяется та, которая проходит через замечательную точку тела – *центр масс* (точку, для описания движения которой достаточно представить, что вся масса системы сосредоточена в центре масс и к этой точке приложена сила, равная сумме всех сил). Но осей, проходящих через центр масс, также бесконечно много. Оказывается, что для любого твёрдого тела произвольной формы существуют три взаимно перпендикулярных оси  $C_x, C_y, C_z$ , называемые *осями свободного вращения*, обладающие замечательным свойством: если тело закрутить вокруг любой из этих осей и подбросить вверх, то при последующем движении тела ось останется параллельной самой себе, т.е. не будет кувыркаться. Закручивание вокруг любой другой оси этим свойством не обладает. Значение моментов инерции типичных тел относительно указанных осей приведено ниже. Если ось

проходит через центр масс, но составляет углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  с осями  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$  соответственно, то момент инерции относительно такой оси равен

$$I_c = I_{cx} \cos^2 \alpha + I_{cy} \cos^2 \beta + I_{cz} \cos^2 \gamma \quad (*)$$

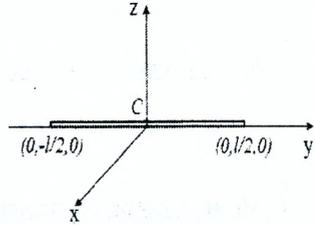
Рассмотрим кратко вычисление момента инерции для простейших тел.

1. Момент инерции длинного тонкого однородного стержня относительно оси, проходящей через центр масс стержня и ему перпендикулярной.

Пусть  $m$  – масса стержня,  $l$  – его длина.

$$I_{cx} = I_{cy} = \frac{ml^2}{12}, \quad I_{cz} = 0$$

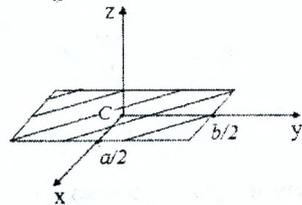
Индекс «с» у момента инерции  $I_c$  означает, что это момент инерции относительно оси, проходящий через точку центра масс (центр симметрии тела),  $C(0,0,0)$ .



2. Момент инерции тонкой прямоугольной пластинки.

$$I_{cx} = \frac{mb^2}{12}; \quad I_{cy} = \frac{ma^2}{12};$$

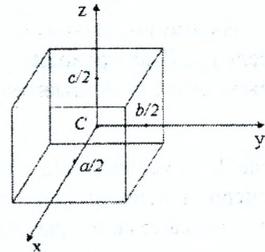
$$I_{cz} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$



3. Момент инерции прямоугольного параллелепипеда.

$$I_{cx} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2); \quad I_{cy} = \frac{m}{12}(a^2 + c^2);$$

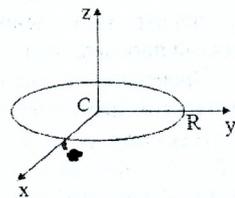
$$I_{cz} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2), \quad \text{т. } C(0,0,0)$$



4. Момент инерции тонкого кольца.

$$I_{cx} = I_{cy} = \frac{mR^2}{2};$$

$$I_{cz} = mR^2, \quad \text{т. } C(0,0,0)$$

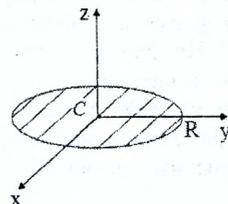


5. Момент инерции тонкого диска.

В силу симметрии

$$I_{cx} = I_{cy}; \quad I_{cx} = I_{cy} = \frac{mR^2}{4};$$

$$I_{cz} = \frac{mR^2}{2}$$

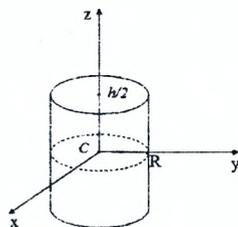


6. Момент инерции сплошного цилиндра.

$$I_{cz} = \frac{mR^2}{2};$$

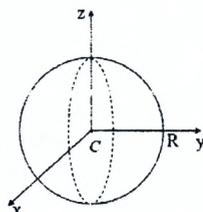
В силу симметрии:

$$I_{cy} = I_{cx} = \frac{mR^2}{4} + \frac{mL^2}{12}$$



7. Момент инерции сплошного шара.

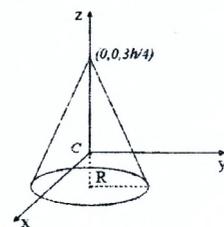
$$I_{cx} = I_{cy} = I_{cz} = \frac{2}{5}mR^2, \text{ т. } C(0,0,0)$$



8. Момент инерции сплошного конуса.

$$I_{cx} = I_{cy} = \frac{3m}{20} \left( R^2 + \frac{h^2}{4} \right)$$

$$I_{cz} = \frac{3}{10}mR^2, \text{ т. } C(0,0,0)$$



где R – радиус основания, h – высота конуса.

Напомним, что  $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ . Наконец, если ось O не проходит через центр масс, то момент инерции тела может быть вычислен с помощью теоремы Гюйгенса Штейнера

$$I_o = I_c + md^2, \quad (**)$$

где  $I_o$  – момент инерции тела относительно произвольной оси,  $I_c$  – момент инерции относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс, m – масса тела, d – расстояние между осями.

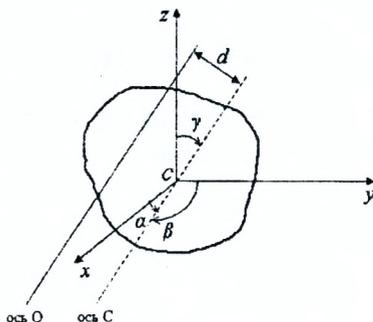
Процедура вычисления моментов инерции для тел стандартной формы относительно произвольной оси сводится к следующему:

1. Проведите ось, параллельную данной оси O и проходящую через центр масс.

2. Находите углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  между осями  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$ , совпадающими с осями вращения и показанными на рисунках, и осью C и по формуле (\*) находите  $I_c$ .

3. По формуле (\*\*) находите искомый момент инерции.

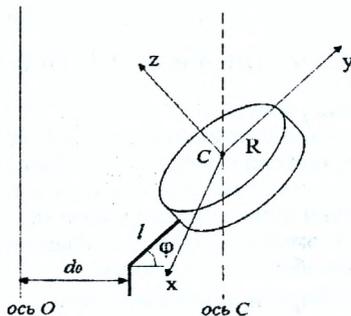
В качестве примера определим момент инерции цилиндра в ситуации, показанной на рисунке (см. ниже).



Здесь ось  $O$  лежит в плоскости  $YZ$ , ось  $Ox$  перпендикулярна этой плоскости, поэтому

$$\alpha = \frac{\pi}{2}; \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \varphi; \quad \gamma = \varphi;$$

$$d = d_o + (l + R) \cos \varphi,$$



тогда:

$$I_o = \frac{1}{12} m (h^2 + 3R^2) \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} m R^2 \cos^2 \varphi + m [d_o + (l + R) \cos \varphi]^2$$

Заметим, наконец, что в реальной практике приходится определять момент инерции тел достаточно сложной формы. Это связано в частности с тем, например, что напряжения, возникающие в упругом теле при изгибе и кручении, зависят от моментов инерции, а значения этих напряжений необходимы во многих задачах. Вычисление моментов инерции в таких случаях достаточно затруднительно, поэтому разумно использовать экспериментальные методы. Один из таких методов и рассмотрен в данной работе.

#### Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте основное уравнение динамики твёрдого тела для вращательного движения относительно неподвижной оси.
2. Запишите момент инерции материальной точки, системы материальных точек и однородного тела.
3. Приведите аналогии между кинематическими характеристиками вращательного и поступательного движений абсолютно твёрдого тела; то же для динамических характеристик.
4. В чём причины возникновения ошибок в ходе эксперимента?
5. Прямые измерения каких физических величин позволяет проводить данная установка?
6. Какие физические величины возможно косвенно определить в данной работе в рамках предложенной модели?
7. Назовите основные положения предложенной теоретической модели для данной установки.
8. Какие оси называются «Осями свободного вращения»?
9. Как записать момент инерции твёрдого тела относительно центра масс тела, выраженный через проекции на оси свободного вращения?
10. Получите выражение для момента инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс стержня и перпендикулярной ему.
11. Получите выражение для момента инерции стержня относительно оси, проходящей через конец стержня и перпендикулярной ему.
12. Получите выражение для момента инерции диска относительно оси, проходящей через его центр масс и перпендикулярной плоскости диска.

## Лабораторная работа М 7

### ИЗУЧЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОГО И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКОВ

#### Цель работы:

- экспериментальная проверка зависимостей между физическими величинами, характеризующими колебания математического и оборотного маятников;
- экспериментальное определение ускорения свободного падения  $g$  помощью математического маятника;
- экспериментальное определение ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника.

#### Приборы и принадлежности:

- универсальный маятник FPM-4 с миллисекундомером и счетчиком числа периодов.

#### Описание установки

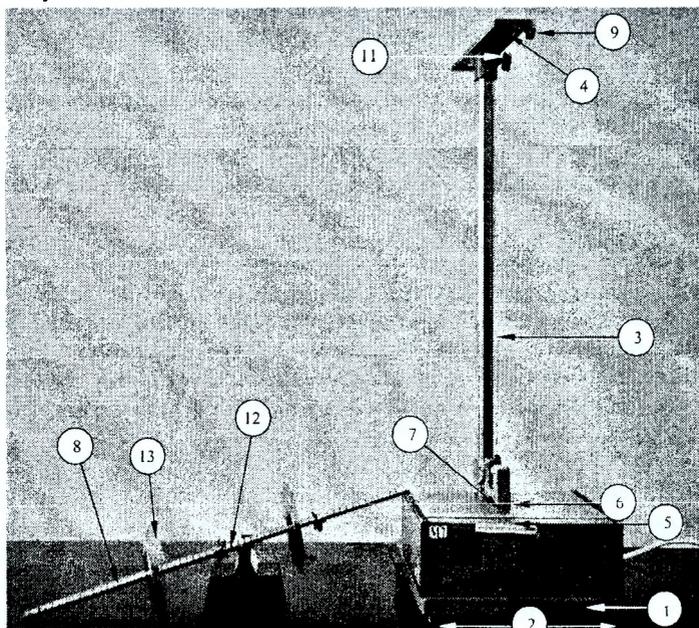


Рисунок 1 – Общий вид установки FPM-04

Общий вид универсального маятника FPM-04 представлен на рис. 1.

Основание (1) оснащено регулируемыми ножками (2), которые позволяют произвести горизонтальную установку прибора. В основании закреплена колонка (3), на которой зафиксированы верхний кронштейн (4) и нижний кронштейн (5) с фотоэлектрическим датчиком (6).

После отвинчивания воротка (11) верхний кронштейн (4) можно поворачивать вокруг колонки. Затяжка воротка (11) фиксирует кронштейн в любом произвольно выбранном положении. С одной стороны кронштейна (4) находится математический маятник (7), с другой, на вмонтированных вкладышах - обо-

ротный маятник (8). Оба маятника – математический и оборотный – представляют собой различные реализации физического маятника.

Длина математического маятника может регулироваться при помощи воротка (9) и определяется положением верхнего кронштейна (5) относительно шкалы на колонке (3). При этом маятник должен быть установлен таким образом, чтобы черта на шарике (7) была продолжением черты на корпусе фотоэлектрического датчика (6).

Оборотный маятник (8) выполнен в виде стального стержня, на котором зафиксированы две опорные призмы (12) и две чечевицы (13). На стержне через 10 мм нанесены кольцевые нарезки, позволяющие точно определить расстояние между опорными призмами. Опорные призмы и чечевицы можно перемещать вдоль оси стержня и фиксировать в любом положении. Фиксирующие воротки размещены так, чтобы при помощи кольцевых нарезок их можно было наглухо зафиксировать. Нижний кронштейн (5) вместе с фотоэлектрическим датчиком можно перемещать вдоль колонки и фиксировать в произвольном положении.

Для подготовки установки к работе необходимо проделать следующие операции:

- при отжатой кнопке "СЕТЬ" подсоедините шнур электропитания к розетке ~220 В;

- нажмите кнопку "СЕТЬ" и убедитесь в том, что все индикаторы измерителя показывают цифру ноль и горит лампочка фотоэлектрического датчика;

- отгоризонтируйте установку с помощью регулируемых ножек так, чтобы маятник при колебаниях не задевал за фотоэлектрический датчик, но при этом прерывал световой поток в датчике.

Установка позволяет провести *прямые измерения периода колебаний* математического и оборотного маятников. Для измерения периода колебаний поворотом кронштейна (4) и перемещением кронштейна (5) установите маятник таким образом, чтобы шарик математического маятника или стержень оборотного маятника в положении равновесия прерывал световой поток в фотоэлектрическом датчике (6), но при колебаниях не задевал за датчик. Затем отклоните маятник на угол  $\sim 10^\circ$  от положения равновесия и отпустите его без толчка. Пропустив несколько колебаний, нажмите кнопку "СБРОС" на "лицевой панели прибора (10). При этом запускаются миллисекундомер и счетчик числа полных колебаний маятника. Обычно измеряется время 10 полных колебаний. В этом случае после появления на счетчике периодов цифры «9» нажимается кнопка "СТОП", и отсчет времени прекращается после завершения 10 колебаний. Период колебаний маятника, очевидно, равен ( $T = t/10$ ), где  $t$  - показания миллисекундомера. Повторный запуск миллисекундомера и счетчика периодов осуществляется нажатием кнопки "СБРОС".

### **Методика измерений**

*Описание любой экспериментальной ситуации*, в том числе и колебаний маятника, дается *теоретической моделью*. При разработке модели, естественно, учитывают только наиболее существенные для данной ситуации эффекты и пренебрегают влиянием многих, реально имеющих место факторов. Ответить на вопрос: насколько хорошо теоретическая модель описывает экспериментальную ситуацию, можно только сопоставляя предсказания теории с экспериментальными данными.

Наблюдения за колебаниями математического и оборотного маятников на данной установке показывают, что за время 20 - 30 периодов амплитуда их ко-

лебаний заметно не уменьшается. Это означает, что *диссипативными силами*, т.е. силами трения, сопротивления воздуха и т. д., приводящими к затуханию колебаний, *в данном случае можно пренебречь*. Кроме того, можно предположить, что *колебания математического и оборотного маятников являются малыми*. При этих условиях теория дает следующее выражение для периода колебаний оборотного маятника (см. Приложение 1):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_c}{mgd} + \frac{d}{g}}, \quad (1)$$

где  $I_c$  – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс;  $m$  – масса маятника;  $g$  – ускорение свободного падения;  $d$  – расстояние от оси качаний до центра масс маятника.

В случае математического маятника формула (1) принимает вид:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (2)$$

где  $l$  – длина математического маятника.

Формулы (1) и (2) являются основными для данной работы, так как позволяют определить ускорение свободного падения  $g$  по измеренным значениям  $T$ ,  $d$ ,  $l$ ,  $m$ . Однако они справедливы только в том случае, если колебания маятников являются малыми.

**Внимание:** Перед началом измерений необходимо определить диапазон амплитуд, в пределах которых колебания можно считать малыми. Поскольку данная установка не позволяет измерять углы отклонения маятника от положения равновесия, их нельзя использовать в качестве критерия малости колебаний. Реализация этого критерия может быть осуществлена следующим образом.

Отклоните математический или оборотный маятник на угол  $\phi_1 \sim 10^\circ$  и измерьте период его колебаний  $T_1$  в соответствии с процедурой, описанной выше. Затем, уменьшив начальное отклонение маятника в 1,5-2 раза, опять определите период его колебаний  $T_2$ . Относительная погрешность измерения времени на данной установке

$$\frac{\Delta T}{T} = 5 \cdot 10^{-4}.$$

С другой стороны, период колебаний маятника не превышает 2 с. Поэтому если  $|T_1 - T_2| \leq 0,001$ , то в пределах точности измерений  $T_1 = T_2$ , и для дальнейших измерений можно выбирать любое начальное отклонение маятника, меньшее  $\phi_1$ . Если же  $|T_1 - T_2| > 0,001$ , то необходимо еще уменьшить начальное отклонение маятника, сравнить измеренный при этом период колебаний с  $T_2$  и т. д.

### **Задание 1. Определение ускорения свободного падения с помощью математического маятника.**

1. Установив любое значение длины математического маятника  $l$  (расстояние от точки подвеса – до черты, нанесенной на шарик) в интервале от 35 до 40 см, измерьте период его колебаний  $T$ . Затем, увеличив  $l$  на несколько сантиметров, опять измерьте  $T$  и т. д. Шаг измерения  $l$  выберите таким образом, чтобы измерения  $T$  были проведены не менее чем при  $6 \div 8$  значениях  $l$ . В результате получится набор значений периодов колебаний  $T_i$ , соответствующих длинам маятника  $l_i$ , где  $i$  – номер опыта. При каждом значении  $l$  измерения периода проводите 3 раза и усредняйте полученные значения.

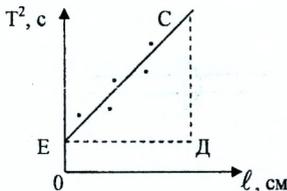
2. Данные занесите в таблицу:

Таблица

№ п/п	$\ell$ , см	$T_1$ , сек	$T_2$ , сек	$T_3$ , сек	$\langle T \rangle$ , сек	$\langle T \rangle^2$ , сек
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						

3. Постройте график зависимости  $T^2 = f(\ell)$

По данным из таблицы отложите по оси абсцисс значения  $\ell$ , а по оси ординат – значения переменной  $y = T^2$  и нанесите на график экспериментальные точки. Проведите через них наилучшую прямую (т. е. такую, чтобы отклонение каждой экспериментальной точки от данной прямой было примерно одинаковым). Проведите эту прямую вначале на глаз, а затем используя метод наименьших квадратов.



4. Значения  $T$  и  $\ell$  для математического маятника связаны между собой зависимостью (2), поэтому

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \ell \quad \text{или} \quad Y = A\ell \quad (3)$$

где  $Y = T^2$ ,  $A = \frac{4\pi^2}{g}$ . Следовательно, согласно теории прямая на координатной плоскости ( $Y, X$ ) должна проходить через начало координат. Опыт, однако, показывает, что наилучшая прямая не проходит через начало координат (подумайте о возможных причинах этого!). Поэтому по рисунку определяют угловой коэффициент прямой как отклонение длин отрезков  $CD$  и  $ED$ :  $A = \frac{CD}{ED}$ . Тогда

$$g = \frac{4\pi^2}{A}$$

Очевидно, из графика:

$$A = \operatorname{tg} \gamma$$

Из уравнения (3):

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{4\pi^2}{g}$$

Следовательно: 
$$g = \frac{4\pi^2 E D}{C D} \quad (4)$$

Определите ускорение свободного падения  $g$  по формуле (4).

5. Рассчитайте погрешность измерения ускорения свободного падения  $g$  по формуле:

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2} \Delta \ell\right)^2 + \left(\frac{8\pi^2}{T^3} \Delta T\right)^2},$$

где  $\Delta \ell = 0.5 \text{ мм}$ ;  $\Delta T = 0.005 \text{ с}$ .

## Задание 2. Определение ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника и момента инерции $J_c$ оборотного маятника

1. Зафиксируйте чечевицы на стержне оборотного маятника таким образом, чтобы одна из них находилась вблизи конца стержня, а другая – вблизи его середины (см. рисунок 2).

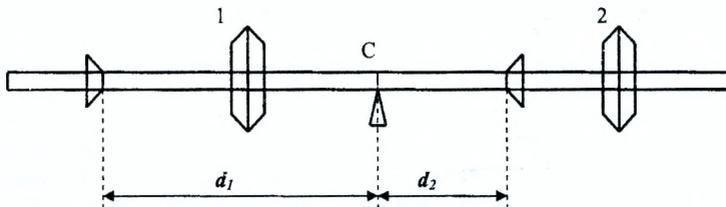


Рисунок 2 – Оборотный маятник

Одну из опорных призм зафиксируйте вблизи свободного конца стержня, а вторую – между чечевицами, причем опорные проемы должны быть обращены друг к другу.

2. Определите положение центра масс (т. С) оборотного маятника, уравновесив его на дополнительной опорной призме, расположенной на лабораторном столе. Если оказалось, что центр массы маятника находится между опорными призмами, значит, оборотный маятник собран правильно.

Чтобы точность определения ускорения свободного падения была достаточно высокой, необходимо, чтобы расстояния  $d_1$  и  $d_2$  от центра масс (т. С) до опорных призм, удовлетворяли условию:

$$1,5d_2 < d_1 < 3d_2 \quad (5)$$

Используя нарезки на стержне оборотного маятника, установите опорную призму, находящуюся между чечевицами на расстоянии  $d_2 = 10 \div 15 \text{ см}$  от центра масс маятника. Вторую опорную призму зафиксируйте на таком расстоянии  $d_1$  от центра масс маятника, которое удовлетворяет неравенству (5).

3. Установив маятник на вкладыши верхнего кронштейна опорной призмой, находящейся вблизи свободного конца стержня на расстоянии  $d_1$  от центра масс маятника, измерьте период его колебаний  $T_1$ . Затем переверните маятник и, ус-

тановив его на вкладыши верхнего кронштейна опорной призмой, находящейся между чечевицами, измерьте период его колебаний  $T_2$ .

4. Используя измеренные значения  $d_1, d_2, T_1, T_2$ , решите систему уравнений (6) и (7) и рассчитайте ускорение свободного падения  $g$  и момент инерции маятника  $J_c$  относительно оси, проходящей через его центр масс.

Теория даёт следующие уравнения для нахождения периода оборотного маятника:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_c + md_1^2}{mgd_1}} \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_c + md_2^2}{mgd_2}} \end{array} \right. \quad (7)$$

где  $m$  – масса всего маятника;  $J_c$  – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через т. С (центр масс маятника)

5. Не изменяя положения чечевиц, повторите измерения при других значениях  $d_1, d_2$  удовлетворяющих условию (5), и результаты  $J_c$  и  $g$ , полученные в пунктах 4) и 5) усредните.

6. Рассчитайте относительную погрешность определения ускорения свободного падения и момента инерции оборотного маятника  $(\frac{\Delta g}{g}, \frac{\Delta J}{J})$ .

В силу сложности математического выражения для определения данной погрешности можно воспользоваться упрощённым вариантом расчёта. Для этого относительные погрешности напрямую образом определяемых величин ( $M, d, T$ ) принять равными:  $\frac{\Delta M}{M} \approx 0.02$ ;  $\frac{\Delta d}{d} \approx 0.02$ . (В данной работе период рассматриваем как прямым образом измеренную величину). Относительной погрешностью измерения периода в силу малости можно пренебречь. Рассчитайте относительную погрешность определения момента инерции и коэффициента упругих сил кручения как сумму относительных погрешностей прямым образом определяемых величин.

### Приложение. Теория малых колебаний физического маятника.

Физическим маятником называется любое тело, которое под действием силы тяжести может свободно качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, называемой осью качаний. Точка пересечения оси качаний с вертикальной плоскостью, проходящей через центр масс маятника, называется точкой подвеса маятника (т. О на рис. 3). Очевидно, в положении равновесия центр масс маятника (т. С) находится на вертикальной прямой, проходящей через точку подвеса ( $\phi = 0$ ).

Движение маятника описывается основным уравнением динамики вращательного движения вокруг неподвижной оси:

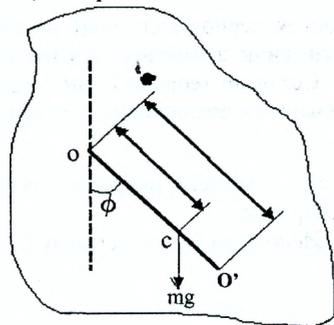


Рисунок 3

$$J \frac{d^2 \phi}{dt^2} = M,$$

где  $J$  – момент инерции маятника относительно оси вращения,  $\phi$  – угол отклонения маятника от положения равновесия,  $M$  – суммарный момент внешних сил, действующих на маятник относительно оси вращения.

В экспериментальных установках обычно моменты силы трения в оси и силы сопротивления воздуха пренебрежимо малы. Поэтому  $M_c = -mgd \sin \phi$ , где  $d = |OC|$  – расстояние от оси качания до центра масс,  $m$  – масса маятника,  $g$  – ускорение свободного падения, а знак "–" указывает на то, что момент силы тяжести стремится вернуть маятник в положение равновесия. Таким образом, уравнение движения маятника имеет вид:

$$I \frac{d^2 \phi}{dt^2} + mgd \sin \phi = 0 \quad (\text{П-1})$$

В случае малых отклонений маятника от положения равновесия (т.е.  $\phi \ll 1$ ) можно положить  $\sin \phi \approx \phi$ . Тогда уравнение (П-1) примет вид:

$$I \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{mgd}{I} \phi = 0 \quad (\text{П-2})$$

Легко убедиться, что решением этого уравнения является функция

$$\phi(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$$

где  $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$ , а  $A$  и  $\alpha$  – произвольные постоянные, т.е. величина  $\phi(t)$  совершает гармонические колебания с циклической частотой  $\omega$ . Амплитуда  $A$  и начальная фаза колебаний  $\alpha$  зависят от способа возбуждений колебаний, т.е. определяются значениями  $\phi$  и  $\frac{d\phi}{dt}$  в момент времени  $t = 0$ . Частота колебаний  $\omega$  определяется только параметрами маятника  $m$ ,  $J$ ,  $d$ .

Таким образом, при малых углах отклонения от положения равновесия колебания физического маятника являются гармоническими с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}}, \quad (\text{П-3})$$

причем период колебаний не зависит ни от начальной фазы, ни от амплитуды колебаний, а определяется только параметрами маятника.

Согласно теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции маятника  $J$  относительно оси вращения можно представить в виде:

$$J = J_c + md^2, \quad (\text{П-4})$$

где  $J_c$  – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс.

Используя (П-4), формулу (П-3) можно переписать следующим образом:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_c}{mgd} + \frac{d}{g}} \quad (\text{П-5})$$

Частным случаем физического маятника является *математический маятник*. Это идеализированная система, состоящая из невесомой нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке – центре масс маятника  $C$ . Для математического маятника длиной  $\ell$  имеем:  $d = \ell$ ,  $J_c = 0$ . Тогда формула (П-5) принимает вид:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_{np}}{g}} \quad (\text{П-6})$$

Сравнение формул (П-5) и (П-6) показывает, что период колебаний физического маятника равняется периоду колебаний математического маятника длиной

$$\ell_{np} = d + \frac{J_c}{md} \quad (\text{П-7})$$

Величину  $\ell_{np}$  называют *приведённой длиной физического маятника*. Таким образом, приведенная длина физического маятника – это длина такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника.

Как следует из (П-7), приведенная длина физического маятника больше, чем расстояние от оси качания до центра масс маятника. Точка  $O$ , находящаяся от точки  $O'$  на расстоянии  $\ell_{np}$  вдоль прямой, соединяющей точку подвеса с центром масс, называется *центром качаний*. Если маятник подвесить в точке  $O'$ , то период его колебаний будет тот же, что и при подвешивании в точке  $O$ . Действительно, при подвешивании маятника в точке  $O'$ , из (П-5) получаем следующее выражение для периода колебаний:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_c}{mg(\ell_{np} - \ell)} + \frac{\ell_{np} - d}{g}} \quad (\text{П-8})$$

Из (П-7) имеем:

$$\ell_{np} - d = \frac{J_c}{md}$$

Тогда

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d}{g} + \frac{J_c}{mgd}} = T$$

Таким образом, период колебаний физического маятника не изменяется при перемещении оси качаний в центр качаний.

### Контрольные вопросы.

1. Какие предположения используются при построении теоретической модели колебаний маятника? Как их проверить?
2. Дайте определение понятию «физический маятник». Приведите примеры.
3. Дайте определение понятию «математический маятник»?
4. Сформулируйте определение длины физического маятника.
5. В чем состоит метод измерения ускорения свободного падения с помощью математического маятника?
6. Как повысить точность измерения ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника?
7. В чем состоит метод оборотного маятника определения ускорения свободного падения?

## Лабораторная работа М 8

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ

#### Цель работы:

- экспериментальная проверка зависимостей между физическими величинами, характеризующими колебания установки;
- экспериментальное определение коэффициента трения качения.

#### Приборы и принадлежности:

- установка для определения коэффициента трения качения, 3 пары съёмных направляющих из различного материала, конструкция из сплошных цилиндров, съёмные магниты.

#### Описание установки

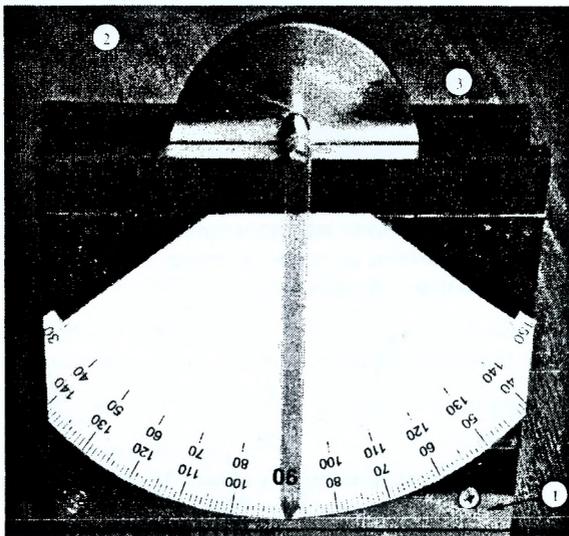


Рисунок 1 – Общий вид установки

Общий вид установки показан на рисунке 1. На основании (1) крепится пара съёмных направляющих (2), на которые устанавливается конструкция из сплошных цилиндров (3). Конструкция может быть выведена из положения равновесия на заданный угол и может совершать колебания.

На установке, располагая секундомером, и измеряя время  $t_k$ , за которое совершится  $k$  полных колебаний, можно найти период колебаний  $T = \frac{t_k}{k}$  конструкции из сплошных цилиндров.

Если использовать наручные часы, то погрешность отсчёта составит примерно 1 с. При достаточной в данном случае относительной погрешности определения периода на уровне 5% можно взять  $n = 20$ . Установка позволяет также

осуществлять прямые измерения угловой амплитуды колебаний. Шкала позволяет отсчитывать угол с точностью примерно  $1^\circ$ , т. е.  $\frac{\pi}{180}$  радиан, так что для сохранения приемлемой точности не следует измерять угловые амплитуды, которые меньше  $10^\circ$ . При такой относительной погрешности даже угол  $\varphi_0 = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$  может считаться малым, ибо замена в выражении для потенциальной энергии выражение  $\sin \frac{\varphi_0}{2} = 0.5$  на  $\frac{\varphi_0}{2} = \frac{\pi}{6} \approx 0.52$  даёт относительную погрешность на уровне 4%.

### Краткая теория работы.

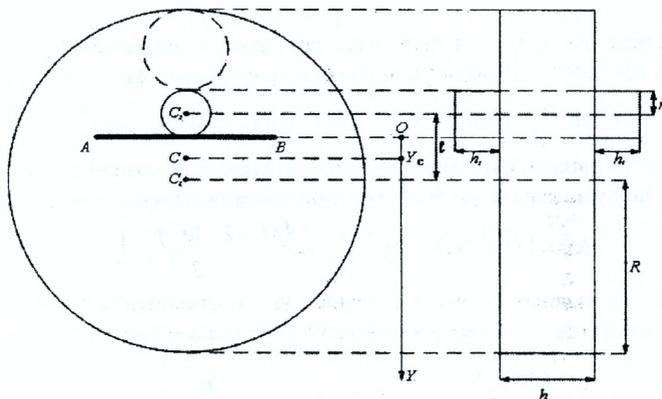


Рисунок 2

Рассмотрим конструкцию (см. рис. 2), состоящую из трёх сплошных цилиндров, показанную на рисунке (заштрихованный цилиндр – съёмный). Пусть  $\rho$  – плотность материала цилиндров. Тогда массы цилиндров и масса системы равна

$$M = \rho \pi R^2 h, \quad m = \rho \pi r^2 h_1, \quad M_0 = \rho \pi (R^2 h + 2r^2 h_1). \quad (1)$$

Если систему поставить на две горизонтальные направляющие АВ и отклонить от положения равновесия, в котором центр масс С системы занимает наинижнее положение, то предоставленная самой себе система начнёт совершать колебания. Координата  $y_c$  центра масс системы (см. рисунок) определяется соотношением

$$y_c = \frac{M(\ell - r) - 2mr}{M + 2m} = \frac{M}{M + 2m} \cdot \ell - r \quad (2)$$

Момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр масс С находится по теореме Гюйгенса-Штейнера:

$$I_c = \frac{MR^2}{2} + M(\ell - r - y_c)^2 + 2 \left[ \frac{mr^2}{2} + m(r + y_c)^2 \right]$$

$$I_c = M \left[ \frac{R^2}{2} + (\ell - r - y_c)^2 \right] + m \left[ r^2 + 2(r + y_c)^2 \right] \quad (3)$$

и Кинетическая энергия системы при качении по направляющим АВ находится по теореме Кёнига:

$$E_k = \frac{(M + 2m)v_c^2}{2} + \frac{I_c \Omega^2}{2},$$

где  $\Omega$  – угловая скорость вращения системы. Если качение происходит без проскальзывания, то скорость точки контакта системы с опорой равна нулю. Поэтому скорость центра масс связана с угловой скоростью соотношением  $V_c = \Omega \cdot y_c$ . Таким образом,

$$E_k = \left[ \frac{(M + 2m)y_c^2}{2} + \frac{I_c}{2} \right] \Omega^2 \quad (4)$$

При повороте на угол  $\varphi$  центр масс системы поднимается над нижним положением, которое он занимает в положении равновесия на высоту

$y_c(1 - \cos \varphi) = 2y_c \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ . Считая угол отклонения малым, имеем  $\sin \frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$  и тогда, считая потенциальную энергию равной нулю в положении равновесия, получим для потенциальной энергии в отклонённом положении выражение:

$$E_{II} = (M + 2m)g \cdot 2y_c \left( \frac{\varphi}{2} \right)^2 = \frac{(M + 2m)g \cdot y_c \cdot \varphi^2}{2} \quad (5)$$

Учитывая, что угловая скорость связана с углом отклонения соотношением  $\Omega = \dot{\varphi}$ , получим для полной механической энергии выражение:

$$E = \frac{(M + 2m)y_c^2}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{(M + 2m)g \cdot y_c \cdot \varphi^2}{2} \quad (6)$$

Если пренебречь всеми силами трения, то полная механическая энергии системы сохраняется, т. е. энергия постоянна. Поэтому дифференцируя (6) по времени и отбрасывая тривиальное решение  $\dot{\varphi} = 0$ , получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\varphi} + \frac{(M + 2m)g \cdot y_c}{(M + 2m)y_c^2 + I_c} \varphi = 0 \quad (7)$$

Циклическая частота  $\omega$  и период  $T$  этих колебаний равны соответственно

$$\omega = \sqrt{\frac{(M + 2m)g \cdot y_c}{(M + 2m) \cdot y_c^2 + I_c}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{(M + 2m)y_c^2 + I_c}{(M + 2m)g \cdot y_c}} \quad (8)$$

Реально на рассматриваемую конструкцию при колебаниях действуют две диссипативные силы: сила вязкого трения о воздух и сила трения качения (см. рис. 3).

Влияние силы вязкого трения сказывается тем меньше, чем больше масса конструкции и меньше её угловая скорость  $\Omega$ , т. е. угловая амплитуда колебаний. Для данной установки, как показывают расчёты, влиянием силы вязкого

трения можно пренебречь. Трение качения возникает вследствие того, что при качении деформации опоры и катящегося тела не вполне симметричны и упруги (на рисунке показана только деформация опоры в сильно преувеличенном виде). При этом сила нормальной реакции  $N = mg$  оказывается вынесенной вперёд относительно центра цилиндра  $C$  на отрезок, длина которого  $S$  называется коэффициентом трения качения. Смысл этого названия состоит в следующем. Сила трения ( $F_{\text{тр}}$ ), направленная против скорости  $\vec{V}_c$ , момент которой относительно оси, проходящей через центр масс, практически равен  $F_{\text{тр}} \cdot r$  (деформация цилиндра реально очень мала!), увеличивает угловую скорость  $\Omega$  вращения диска, но одновременно уменьшает скорость центра масс. Если, однако, обычно подразумевается, проскальзывание при качении отсутствует, то  $V_c = \Omega \cdot r$ , так что тормозит вращение диска именно сила реакции опоры ( $N$ ), момент которой относительно оси, проходящей через центр масс, равен  $NS$ . Опыт показывает, что сила трения качения обычно очень мала, т. е. можно считать, что

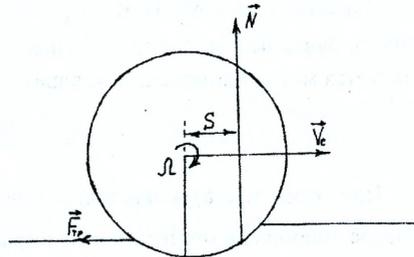


Рисунок 3

так что

$$F_{\text{тр}} r \approx NS = mgS,$$

$$F_{\text{тр}} = \frac{S}{r} N = \frac{S}{r} mg$$

В, принципе, для сохранения аналогии с силой сухого трения скольжения можно было бы величину  $\mu_{\text{квч}} = \frac{S}{r}$  называть коэффициентом трения качения, тогда  $F_{\text{тр}} = \mu_{\text{квч}} N$ , однако как сказано выше, исторически сложилось так, что коэффициентом трения качения называется величина  $S$ . Поэтому при наличии трения качения вместо уравнения (4) мы имеем следующее уравнение

$$\ddot{\varphi} + \frac{(M + 2m)g \cdot y_c}{(M + 2m)y_c^2 + I_c} \varphi = \pm \frac{mgS}{(M + 2m)y_c^2 + I_c}$$

где знак "+" соответствует движению центра масс направо (поворот системы по часовой стрелке) и знак «минус» соответствует повороту против часовой стрелки. Поскольку постоянная правая часть в дифференциальном уравнении не изменяет величину  $\omega$ , то она по-прежнему выражается формулой (5). Колебания при этом, однако, затухают, и если обозначить  $\varphi_0$  начальный угол отклонения ( $\varphi_0 > 0$ , т. е. система при  $t = 0$  повернута против часовой стрелки), то спустя период  $T$  отклонение составит

$$\varphi_t = \varphi_0 - \frac{S}{y_c},$$

а спустя  $n$  периодов:

$$\varphi_n = \varphi_0 - \frac{S \cdot n}{y_c} \quad (9)$$

Измеряя, таким образом,  $\varphi_n$ , можно определить коэффициент трения качения  $S$ . Зависимость  $\varphi_n(n)$  линейная, поэтому лучшим способом определения  $S$  является метод наименьших квадратов, который в данном случае даёт

$$S = y_c \cdot \frac{\varphi_0 \sum n_i - \sum \varphi_i n_i}{\sum n_i^2} \quad (10)$$

При этом подразумевается, конечно, что угол измеряется в радианах (по шкале прибора он отсчитывается в градусах:  $1^\circ = \frac{\pi}{180}$  рад)

### Задания для самостоятельной работы.

1. Используя указанные на рабочем месте значения размеров системы и плотности материала, найдите по формуле (1) массы  $M$  и  $m$ , а также значение  $y_c$  и  $I_c$  по формуле (2) и (3).
2. Аккуратно установите систему так, чтобы стрелка указывала на угол  $\varphi_i = 50 \div 60^\circ$  и отпустите без толчка. Измерьте время, в течение которого совершается 20 колебаний, а затем, продолжая наблюдать колебания, измерьте время следующих 20 колебаний и т. д.
3. Найдите экспериментально период колебаний для первых 20 колебаний, следующих 20 колебаний, когда угловая амплитуда уменьшится и т. д. Сделайте вывод о том, с какой относительной погрешностью выполняется теоретический вывод о независимости периода от угловой амплитуды в предположении её малости. По формуле (8) рассчитайте теоретическое значение периода.
4. Наблюдая колебания, определите примерное количество колебаний, которое совершает система, пока угловая амплитуда уменьшится до  $10^\circ$ . Разделите это число на 5 и округлите до кратного 10 значения. Обозначим полученное значение  $n$ . Вновь запустив колебания без начальной скорости при начальной угловой амплитуде  $\varphi_0$  в указанных пределах.
5. Измерьте угловую амплитуду  $\varphi_1$  через  $n_1 = n$ ,  $\varphi_2$  через  $n_2 = 2n$ ,  $\varphi_i$  через  $n_i = i \cdot n$  колебаний (угловая амплитуда измеряется по шкале в градусах, но переводится в радианы).
6. На координатной плоскости, откладывая по горизонтали  $n_i$ , а по вертикали  $\varphi_i$ , нанесите экспериментальные точки. Теория предсказывает, что все точки должны лежать на прямой.
7. По формуле, вытекающей из (9) и имеющей вид

$$S_i = \frac{(\varphi_0 - \varphi_i) y_c}{n_i},$$

Найдите коэффициент трения качения для всех экспериментальных точек (S) и усредните результат.

8. Повторите определение коэффициента трения качения по МНК. По формуле (10) имеем

$$S = y_c \cdot \frac{\varphi_0 \sum n_i - \sum \varphi_i \cdot n_i}{\sum n_i^2}$$

На указанной координатной плоскости проведите наилучшую прямую и визуально оцените соответствие экспериментальных данных теоретической модели.

9. По формуле  $E_{II} = \frac{(M + 2m)g \cdot y_c \cdot \varphi^2}{2}$  найдите начальную потенциальную энергию системы при  $\varphi = \varphi_0$  и  $\varphi = \varphi_1$  через  $n$  периодов. Рассчитайте среднее уменьшение энергии за один период и относительное уменьшение за период в %.
10. Снимите конструкцию с основания и с помощью преподавателя замените направляющие АВ на направляющие из другого материала. Повторите измерения п. п. 1 ÷ 4 для другой пары направляющих.
- 11.\* Поскольку относительное уменьшение энергии за период мало, то максимальную угловую скорость  $\Omega_{\max}$  системы можно рассчитать по формуле

$$\Omega_{\max} = \varphi_0 \omega = \varphi_0 \frac{2\pi}{T}$$

Вычислите это значение. Используя табличное значение для коэффициента вязкости воздуха  $\eta$ , оцените максимальный момент сил вязкого трения о воздух и сравните с величиной  $(M + 2m)g \cdot S$ , определяющей момент сил трения качения.

- 12.\* Установка допускает магнитное крепление дополнительного груза масс  $m_0$  и радиусом  $r_0$  (на рисунке заштрихован). Разработайте теорию и повторите выполнение всех заданий для новой системы.

### Контрольные вопросы.

1. Получите выражение для момента инерции системы для оси, проходящей через точку касания с направляющими.
2. Вычислите период малых колебаний шарика внутри полусферы.
3. Оцените, сколько колебаний совершает система до остановки. Сколько времени это займёт? Начальную угловую амплитуду задайте самостоятельно.
4. Осторожно наклонив основание, можно оценить, при каком угле наклона  $\alpha_0$  начнётся скольжение конструкции по основанию. Коэффициент трения скольжения при этом находится из соотношения  $tg\varphi_0 = \mu$ . Оцените отношение

$$\frac{\mu_{\text{кач}}}{\mu}, \text{ где } \mu_{\text{кач}} = \frac{S}{r}.$$

## Лабораторная работа М 9

### ДИСК МАКСВЕЛЛА

#### Цель работы:

- найти величину модуля ускорения центра инерции диска Максвелла;
- определить значение моментов инерции диска и сменных накладок;
- научиться строить физическую и математическую модель изучаемого явления.

#### Приборы и принадлежности:

- установка FPM-03 для измерения времени движения диска, сменные накладки.

#### Описание установки

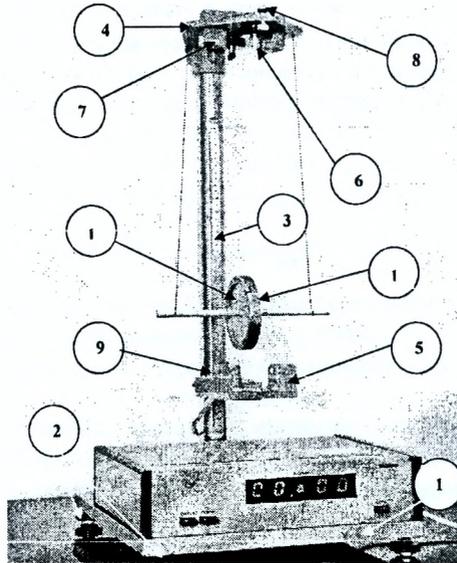


Рисунок 1 – Общий вид установки

Общий вид установки показан на рисунке 1. Основание (1) оснащено регулируемыми ножками (2), которые позволяют произвести выравнивание прибора. В основании закреплена колонка (3), к которой прикреплен неподвижный верхний кронштейн (4) и подвижный нижний кронштейн (5). На верхнем кронштейне находится электромагнит (6), первый фотоэлектрический датчик (7) и вороток (8) для закрепления и регулирования длины бифиллярной подвески маятника. Нижний кронштейн вместе с прикрепленным к нему вторым фотоэлектрическим датчиком (9) можно перемещать вдоль колонки и фиксировать в произвольно выбранном положении.

Диск Максвелла (10) представляет собой закрепленный на оси диск, на который накладываются сменные накладки (11), что позволяет изменять момент инерции системы и ее массу.

### Подготовка прибора к работе.

Проверьте заземление прибора. Работа с прибором допускается только при наличии заземления. Прибор включается кнопкой "СЕТЬ". Измерение времени движения диска осуществляется следующим образом. Нажмите кнопку "СБРОС". Аккуратно (**виток к витку**) произведите намотку нитей бифиллярного подвеса до тех пор, пока диск не зафиксируется электромагнитом. Нажмите кнопку "ПУСК". На табло индикации времени прочитайте показание прибора.

### Задания для самостоятельной работы.

1. Установите нижний кронштейн на расстоянии  $h_1 = 0,15$  м от верхнего кронштейна (4). Проведите измерения времени движения диска 3-4 раза и найдите среднее время движения  $t_1$ .

2. Определите ускорение центра масс диска Максвелла по формуле:

$$a_{c1} = \frac{2h_1}{t_1^2} \left( 1 - 2\sqrt{\frac{\Delta h}{h_1}} \right),$$

где  $\Delta h = 3 \cdot 10^{-3}$  м (Приложение 3).

3. Повторите вычисление ускорения центра масс при значениях  $h = 0,15 \pm 0,4$  м с шагом 0,05 м и найти среднее значение ускорения ( $n$  – количество измерений)

$$a_c = \frac{\sum_{i=1}^n a_{ci}}{n}$$

4. Вычислите момент инерции диска Максвелла ( $J_c$ ) относительно оси, проходящей через центр масс по формуле (Приложение 2):

$$J_c = Mr^2 \left( \frac{g}{a_c} - 1 \right),$$

где  $M$  – масса системы,  $r$  – радиус намотки,  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup> – ускорение свободного падения.

5. Вычислите согласно Приложению 3 величины

$$y_i = t_i^2 \quad x_i = (h_i - 2\sqrt{0,003h_i})$$

На координатную плоскость ( $X$ ,  $Y$ ) нанести экспериментальные точки. Согласно теории зависимость между величинами  $X$  и  $Y$  линейная:  $Y = AX$ . Проведите через начало координат и экспериментальные точки наилучшую с Вашей точки зрения прямую и найдите её угловой коэффициент  $A$ .

6. По формуле:

$$J_c = \left( \frac{gA}{2} - 1 \right) Mr^2$$

Опять найдите момент инерции  $J_c$  и сравните с результатами п. 4.

7. Согласно методу наименьших квадратов (Приложение 3) значение  $A$  находится по формуле:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Найдите это значение  $A$  и значение  $I_c$  и сравните с найденными ранее значениями.

8. Рассчитайте погрешность определения  $I_c$  по формуле:

$$\Delta J_c = \sqrt{\left( r^2 \left( \frac{g}{a_c} - l \right) \Delta m \right)^2 + \left( 2mr \left( \frac{g}{a_c} - l \right) \Delta r \right)^2 + \left( \frac{mr^2 g}{a_c^2} \Delta a_c \right)^2},$$

учитывая для  $a_c$  лишь погрешности разброса. Погрешности массы и радиуса катушки принять равными:  $\Delta m = 1 \text{ г}$ ;  $\Delta r = 1 \text{ мм}$ .

9. Вычислите теоретическое значение момента инерции системы по стандартным формулам и указанными на рабочем месте характеристикам системы и сравните с найденными экспериментальными значениями.

### Приложение 1. Уравнение динамики твёрдого тела, вращающегося вокруг движущейся оси.

Пусть абсолютно твердое тело вращается вокруг некоторой оси  $O$ , которая неподвижна относительно некоторой инерциальной системы отсчета (ИСО). Тогда, как известно, основное уравнение динамики вращательного движения тела имеет вид

$$J_o \varepsilon = \sum M_o^e, \quad (\text{П-1.1})$$

где  $J_o$  – момент инерции тела относительно оси  $O$ :

$$J_o = \sum m_i r_i^2,$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -той частицы тела,  $r_i$  – расстояние от  $i$ -той частицы до оси  $O$ ;

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

где  $\varepsilon$  – угловое ускорение тела,  $\sum M_o^e$  – сумма моментов сил, действующих на тело, относительно оси  $O$ . Рассмотрим, как изменится уравнение (1), если ось  $O$ , относительно которой происходит вращение тела, сама движется с некоторым ускорением  $\vec{a}$  относительно ИСО, *оставаясь параллельной себе, т.е. поступательно*. Перейдем в неинерциальную систему отсчета, движущуюся поступательно относительно ИСО с тем же ускорением  $\vec{a}$ , относительно которой ось неподвижна. В этой системе отсчета, наряду с силами, действующими на тело в ИСО, на каждую частицу тела будет действовать сила инерции, равная  $\vec{F}_i'' = -m_i \vec{a}$  и уравнение (1) примет вид

$$J_o \varepsilon = \sum M_o^e + \sum M_o''$$

Напомним, что моментом силы относительно оси называется проекция на эту ось момента силы относительно любой точки, лежащей на этой оси. Пусть  $O$  – произвольная точка на оси  $O$ ,  $\vec{r}_i$  – радиус-вектор частицы с массой  $m_i$  относительно точки  $O$ . Тогда момент силы инерции  $\vec{F}_i''$ , действующей на  $i$ -тую частицу относительно точки  $O$ , равен векторному произведению радиуса-вектора частицы и вектора силы инерции

$$\vec{M}_i'' = \vec{r}_i \times \vec{F}_i'' = -m_i \vec{r}_i \times \vec{a}.$$

Сумма этих моментов равна

$$\sum \vec{M}_i'' = -\sum m_i \vec{r}_i \times \vec{a} = -(\sum m_i \vec{r}_i) \times \vec{a}. \quad (\text{П-1.2})$$

Здесь мы учли, что ускорение  $\vec{a}$  одно и то же для всех точек, и вынесли его за знак суммы. Пусть  $m = \sum m_i$  – масса тела, С – его центр инерции, радиус-вектор которого равен

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}.$$

Тогда (2) можно переписать в виде

$$\sum \vec{M}_i'' = -m \vec{r}_c \times \vec{a} = \vec{r}_c \times \vec{F}'', \quad (\text{П-1.3})$$

где  $\vec{F}'' = -m\vec{a}$  – суммарная сила инерции, действующая на тело. Формула (3) показывает, что при вычислении суммы моментов сил инерции, действующих на отдельные частицы тела, можно считать, что к центру инерции тела приложена суммарная сила инерции  $\vec{F}'' = -m\vec{a}$ , и вычислить ее момент – он и будет равен искомой сумме моментов. Пусть теперь ось О проходит через центр инерции С (будем ее называть в таком случае осью С) и точка О совпадает с С. Тогда очевидно,  $\vec{r}_i = 0$  и  $\sum \vec{M}_i'' = 0$ , т.е. сумма моментов сил инерции, действующих на отдельные частицы тела, относительно центра инерции равна нулю. следовательно, и сумма моментов сил инерции относительно оси С:  $\sum \vec{M}_i'' = 0$ . Это означает, что если ось вращения тела проходит через центр инерции С, то *основное уравнение динамики вращательного движения тела* имеет вид

$$J_c \varepsilon = \sum M_i^c, \quad (\text{П-1.4})$$

безотносительно к тому, покоится ли эта ось или движется ускоренно.

## Приложение 2

Диск Максвелла представляет собой достаточно массивный диск, насаженный на ось небольшого радиуса  $r$ . На ось симметрично наматываются две нити. Если диск отпустить, он начнет попеременно двигаться вверх-вниз, совершая своеобразные колебания – отсюда и его второе название: маятник Максвелла. С течением времени эти колебания затухают вследствие наличия сил сопротивления. Заметим, что по разным причинам, на анализе которых мы останавливаться не будем, с течением времени возбуждаются и обычные колебания в направлении, перпендикулярном оси диска. На рисунке 2 показан вид маятника сбоку и силы, действующие на него:  $\vec{T}$  – суммарная сила натяжения нитей и сила тяжести  $m\vec{g}$ , приложенная к центру инерции. Силы сопротивления учитывать не будем, а нити будем считать вертикальными. Уравнение движения центра инерции в проекции на ось, направленную вниз, имеет вид

$$ma_c = mg - T, \quad (\text{П-2.1})$$

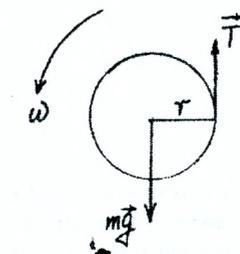


Рисунок 2 – Силы, действующие на диск Максвелла

где  $a_c$  – ускорение центра инерции,  $m$  – масса маятника. Ось вращения маятника в данном случае ускоренно движется вниз. Согласно параграфу 5 уравнение динамики вращательного движения имеет вид

$$J_c \varepsilon = -Tr, \quad (\text{П-2.2})$$

где  $r$  – радиус оси,  $J_c$  – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр инерции. Рисунок соответствует движению маятника вниз, когда угловая скорость вращения направлена по часовой стрелке, и увеличивается, следовательно, в соответствии с обычным соглашением о знаках угловых величин:  $\omega < 0$ ,  $\varepsilon < 0$ . Между  $a_c$  и  $\varepsilon$  существует простая кинематическая связь, обусловленная нерастяжимостью нити и отсутствием проскальзывания нити по оси маятника. За время  $dt$  маятника повернется на угол  $-\omega dt$  и с оси намотки сомотается участок нити длиной  $-\omega r dt$  (знак минус поставлен с учетом отрицательности угловой скорости  $\omega$ ). Таким образом, точка С опустится вниз на величину  $dy = -\omega r dt$ , а это означает, что скорость центра инерции при перемещении вниз будет равна

$$V_c = \frac{dy}{dt} = -\frac{\omega r dt}{dt} = -\omega r.$$

Дифференцируя это соотношение по времени, получим

$$a_c = -\varepsilon r. \quad (\text{П-2.3})$$

Подставляя (2.3) в (2.2), получим

$$J_c \frac{a_c}{r} = Tr,$$

откуда  $T = J_c \frac{a_c}{r^2}$ . Подставляя в (2.1), получим

$$ma_c = mg - J_c \frac{a_c}{r^2},$$

откуда

$$a_c = \frac{g}{1 + \frac{J_c}{mr^2}}. \quad (\text{П-2.4})$$

Легко видеть, что формула (2.4) остается справедливой и при движении маятника вверх. Если нити абсолютно упруги, то по достижении центром инерции С наинижней точки, его скорость изменит направление на противоположное и маятник начнет двигаться вверх замедленно, но с тем же ускорением (2.4) по величине.

Тот же результат можно получить из закона сохранения механической энергии, который справедлив в данном случае, поскольку мы пренебрегаем силами сопротивления (диссипативными силами). Считая потенциальную энергию центра инерции диска в наинищем положении равной нулю, получаем значение потенциальной энергии центра инерции диска:  $mgh_c$ , где  $h_c$  – положение центра инерции диска над указанным нулевым уровнем в данный момент времени. Кинетическая энергия вращающегося тела, движущегося поступательно,

равна  $\frac{mV_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}$ . Тогда, согласно закону сохранения механической энергии, можно записать следующее соотношение:

$$mgh_c + \frac{mV_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2} = mgh_{c\max},$$

где  $h_{c\max}$  – наибольшее значение положения центра инерции над нулевым уровнем в момент начала движения. Дифференцируя это выражение по времени и учитывая, что  $\frac{dh_c}{dt} = -V_c$  (напомним, что мы считаем положительной скорость  $V_c$ , если она направлена вниз, кроме того, поскольку  $h_c$  при этом убывает, то  $\frac{dh_c}{dt} < 0$ ) и  $\omega = -\frac{V_c}{r}$ ,  $\frac{dV_c}{dt} = a_c$ , получим

$$-mgV_c + \frac{1}{2}\left(m + \frac{J_c}{r^2}\right)2V_c a_c = 0,$$

откуда опять получаем формулу (2.4), ибо  $V_c$  не равно тождественно нулю.

### Приложение 3

На данной установке можно *провести прямые измерения* времени движения диска Максвелла на заданном расстоянии  $h$ , причем движение начинается из состояния покоя. Величины  $m$  и  $r$  также доступны непосредственному измерению, и мы будем считать их известными. Следовательно, в формулу (2.4) входят три неизвестных величины:  $g$ ,  $J$ ,  $a_c$ . Ускорение  $a_c$ , однако, легко может быть найдено по времени движения  $t$  и пройденному расстоянию  $h$ , т.к. в соответствии с (2.4) при сделанных предположениях  $a_c$  постоянно. Поскольку начальная скорость равна нулю, то в идеально функционирующей установке мы имели бы  $h = \frac{a_c t^2}{2}$  и  $a_c = \frac{2h}{t^2}$ . К сожалению, из-за конструктивных особенностей установ-

ки отсчет времени начинается не сразу в момент начала движения, а тогда, когда система сместится на некоторое расстояние  $\Delta h$ , равное, по нашим оценкам, примерно 3 мм. На первый взгляд кажется, что если, например, высота, проходящая диском, составляет  $h = 30$  см, то поскольку  $\frac{\Delta h}{h} \approx 0,01$ , т.е. примерно 1%,

то погрешностью в определении ускорения по формуле  $a_c = \frac{2h}{t^2}$  можно вполне пренебречь. Однако на самом деле это не так. Начав движение из состояния покоя, система в конце участка  $\Delta h$  приобретает скорость  $V_0 = \sqrt{2a_c \Delta h}$ . Тогда для оставшегося участка длиной  $(h - \Delta h)$  можно записать:

$$h - \Delta h = V_0 t + \frac{a_c t^2}{2},$$

где  $t$  – время движения на этом участке, которое и измеряется на установке.

Тогда

$$2(h - \Delta h) = 2\sqrt{2a_c \Delta h t} + a_c t^2$$

Решая это уравнение относительно  $a_c$ , находим

$$a_c = \frac{2h}{t^2} \left[ 1 + \frac{\Delta h}{h} - 2\sqrt{\frac{\Delta h}{h}} \right]. \quad (\text{П-3.1})$$

При указанных выше численных значениях имеем  $\sqrt{\frac{\Delta h}{h}} \approx 0,1$  и относительная погрешность в определении величины  $a_c$  по формуле  $a_c = \frac{2h}{t^2}$  составляет уже не 1%, а целых 20%, что слишком много, если учесть точность, с которой измеряется время движения и расстояние, проходимое диском. На уровне относительной погрешности 1% ускорение следует определять по формуле

$$a_c = \frac{2h}{t^2} \left[ 1 - 2\sqrt{\frac{\Delta h}{h}} \right], \quad (\text{П-3.2})$$

где мы пренебрегли величиной  $\frac{\Delta h}{h}$  по сравнению с единицей. Таким образом, в формулу

$$a_c = \frac{g}{1 + \frac{J_c}{mr^2}} \quad (\text{П-3.3})$$

входят две величины  $g$  и  $J_c$ , которые непосредственно не определяются. Конечно, значение ускорения свободного падения  $g$  хорошо известно из других опытов и составляет примерно  $g \approx 9,81 \frac{M}{c^2}$ . Тогда из формулы (3.3) можно определить момент инерции  $J_c$  и сравнить полученное значение с результатом, рассчитанным по теоретическим формулам.

Применим метод наименьших квадратов. Вначале линеаризируем исследуемую зависимость. Приравнявая правые части формул (3.2) и (3.3), получим

$$\frac{2h}{t^2} \left[ 1 - 2\sqrt{\frac{\Delta h}{h}} \right] = \frac{g}{1 + \frac{J_c}{mr^2}}$$

или

$$t^2 = \frac{2}{g} \left( 1 + \frac{J_c}{mr^2} \right) (h - 2\sqrt{h\Delta h}) \quad (\text{П-3.4})$$

Вводя обозначения

$$Y = t^2, \quad A = \frac{2}{g} \left( 1 + \frac{J_c}{mr^2} \right) \quad \text{и} \quad X = (h - 2\sqrt{h\Delta h})$$

уравнение (3.4) можно переписать в виде линейного уравнения

$$Y = AX. \quad (\text{П-3.5})$$

Составляя сумму

$$S = \sum_{i=1}^n (Y_i - AX_i)^2, \quad (\text{П-3.6})$$

определим параметр  $A$  из условия минимума суммы (3.6):

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 2 \sum_{i=1}^n (Y_i - AX_i) X_i = 0.$$

Решая полученную систему линейных уравнений, находим значение параметра  $A$ :

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2}. \quad (\text{П-3.7})$$

Зная значение параметра  $A$ , можно определить значение момента инерции диска Максвелла и сменной накладки.

#### Задачи для самостоятельного решения.

1. Два шнура длиной  $L$  с верхней стороны закреплены, а с нижней – полностью намотаны на цилиндр массой  $m$ . Определить момент инерции  $J$  цилиндра, если он, начиная вращение из состояния покоя, за время  $t_1$  приобрел угловую скорость  $\omega_1$  и переместился на расстояние  $h_1$ . За какое время произойдет полная размотка шнуров? Найти кинетическую энергию цилиндра в этот момент времени. Какие дополнительные величины можно определить в данной физической ситуации?
2. Два шнура длиной  $L$  с верхней стороны закреплены, а с нижней – намотаны на вал маховика диаметром  $D$ . На обод маховика, изготовленного в виде сплошного однородного диска, полностью намотана другая нить длиной  $L_3$  с привязанным к ней грузом массой  $m_3$ . Масса диска  $m$ . Определить момент инерции  $J$  установки, если она, начиная вращение из состояния покоя, за время  $t_1$  приобрела угловую скорость  $\omega_1$  и переместилась на расстояние  $h$ . За какое время произойдет полная размотка одного из шнуров? Найти кинетическую энергию установки в этот момент времени. Какие дополнительные величины можно определить в данной физической ситуации?
3. Придумайте самостоятельно более усложненный вариант рассмотренной выше физической ситуации. Составьте ее математическую модель. Покажите, сколько конкретных условий задач можно составить на основе этой математической модели.

## Лабораторная работа М 10

### ИЗУЧЕНИЕ НЕУПРУГОГО УДАРА

**1. Цель работы:** изучение методики применения законов сохранения для неупругого удара шаров и методики обработки стробоскопических фотографий процесса столкновения.

**2. Приборы и принадлежности:** набор стробоскопических фотографий; циркуль; линейка.

#### **3. Методика и порядок выполнения работы.**

Ударом называется кратковременное взаимодействие тел, двигающихся до этого с различными скоростями, при их соприкосновении, в результате которого резко изменяется состояние их движения. При этом предполагается, что до и после удара тела не взаимодействуют. При ударе тела деформируются, и в результате возникают силы взаимодействия, препятствующие деформациям, и направленные противоположно относительным скоростям соударяющихся тел. За счет работы этих сил происходит перераспределение энергии между соударяющимися телами.

Различают два предельных типа удара: **абсолютно неупругий** и **абсолютно упругий**. Оба этих типа являются идеализированными схемами реальных явлений удара.

Прямая, совпадающая с нормалью к поверхностям соударяющихся тел в точке соприкосновения, то есть к общей касательной плоскости называется **линией удара** (рисунок 1). Удар называется **центральный**, если линия удара проходит через центры масс  $C_1$  и  $C_2$  тел (на рисунке 1 удар не является центральным). Удар двух однородных шаров всегда будет центральным.

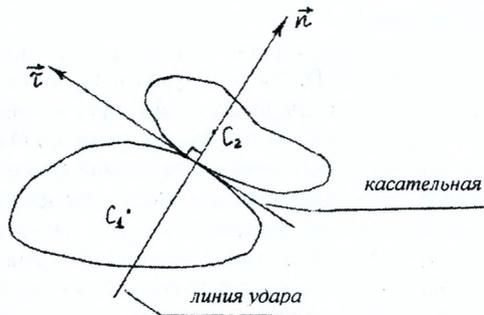


Рисунок 1 – Линия удара

При прямом ударе оба соударяющихся тела до удара двигаются вдоль линии удара; в противном случае удар называется **косым**. Рассмотрим косой удар двух шаров 1 и 2 с массами  $m_1$  и  $m_2$  соответственно (рисунок 2). Пусть  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$  – скорости шаров до удара. Проекции скоростей  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$  на линию удара назовем **нормальными составляющими** и обозначим  $V_{1n}, V_{2n}$ , а на перпендикулярное к

линии удара направление касательной к шарам в точке их соприкосновения – тангенциальными составляющими  $V_{1\tau}$ ,  $V_{2\tau}$ .

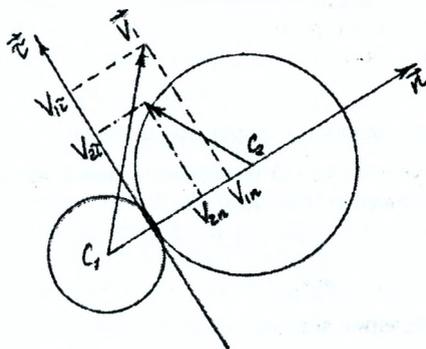


Рисунок 2 – Косой удар двух шаров

Косой удар двух шаров называется **абсолютно неупругим**, если после удара нормальные составляющие скоростей оказываются одинаковыми (скорости после удара и их проекции в дальнейшем обозначаются так:  $\bar{V}'_1$ ,  $\bar{V}'_2$ ,  $V'_{1n}$ ,  $V'_{2n}$ ,  $V'_{1\tau}$ ,  $V'_{2\tau}$ ). После абсолютно неупругого удара тела остаются в деформированном состоянии. В частности, если удар прямой, то до удара:

$$V_{1\tau} = V_{2\tau} = 0$$

и после удара оба тела движутся вместе как единое целое. Рассмотрим процесс соударения. Нормальные составляющие скоростей тел до удара  $V_{1n}$ ,  $V_{2n}$  могут быть изменены при ударе только параллельно им направленными силами взаимодействия, возникающими при деформации тел. Для того, чтобы после удара нормальные составляющие скоростей тел  $V'_1$  и  $V'_2$  оказались одинаковыми, необходимо, чтобы силы, возникающие в процессе взаимодействия, зависели не от величины деформаций, а от их скорости. Силы эти должны быть значительными даже при небольших, но быстро меняющихся деформациях. Если же деформации не изменяются со временем, то даже если они большие, силы должны обращаться в нуль.

Существование таких сил подтверждается опытными фактами, показывающими, что пластичные тела очень трудно деформировать кратковременным воздействием (ударом), но они очень легко деформируются при длительном воздействии даже малых сил. Поскольку нормальные составляющие  $V_{1n}$ ,  $V_{2n}$  скоростей тел до удара различны, в начале процесса соударения деформации обоих тел будут изменяться быстро, и при этом возникнут значительные силы взаимодействия, препятствующие деформациям. Под действием этих сил нормальные составляющие скоростей изменяются до тех пор, пока не станут равными, т. е. после удара  $V'_{1n} = V'_{2n}$ . К этому моменту времени деформация обоих тел достигают максимальной величины, но их изменения прекращаются. Одно-

временно обращаются в нуль и составляющие сил взаимодействия вдоль линии удара, так что дальнейшее изменение нормальных составляющих скоростей прекращается. Пусть система шаров замкнута, т. е. шары не взаимодействуют с окружающими телами, а только между собой. Тогда для процесса взаимодействия шаров выполняется закон сохранения импульса в векторной форме:

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 \vec{V}'_1 + m_2 \vec{V}'_2, \quad (1)$$

где  $\vec{V}'_1, \vec{V}'_2$  – векторы скоростей шаров после удара.

Спроектируем уравнение (1) на линию удара и на касательную к шарам в точке их соприкосновения. Получим

$$m_1 V_{1n} + m_2 V_{2n} = m_1 V'_{1n} + m_2 V'_{2n} \quad (2)$$

$$m_1 V_{1\tau} + m_2 V_{2\tau} = m_1 V'_{1\tau} + m_2 V'_{2\tau}$$

Согласно определению абсолютно неупругого удара  $V'_{1n} = V'_{2n} = V'_n$ .

Поэтому (2) можно переписать в виде:

$$m_1 V_{1n} + m_2 V_{2n} = (m_1 + m_2) V'_n \quad (3)$$

$$m_1 V_{1\tau} + m_2 V_{2\tau} = m_1 V'_{1\tau} + m_2 V'_{2\tau}$$

Если известны  $m_1, m_2$  и  $V_{1n}, V_{2n}$  то из первого уравнения системы (3) можно найти нормальную составляющую скоростей шаров после удара  $V'_n$ :

$$V'_n = \frac{m_1 V_{1n} + m_2 V_{2n}}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

Что касается тангенциальных составляющих  $V'_{1\tau}$  и  $V'_{2\tau}$  после удара, то одного второго уравнения системы (3) для их определения недостаточно, даже если известны  $V_{1\tau}$  и  $V_{2\tau}$  до удара. Изменить эти составляющие в процессе удара могут лишь параллельно им направленные силы – силы трения. Не зная времени взаимодействия и не делая никаких предположений о характере сил трения, определить  $V'_{1\tau}$  и  $V'_{2\tau}$  невозможно. В частности, нельзя однозначно утверждать, что  $V'_{1\tau} = V'_{2\tau}$ . Силы трения, возникающие между шарами при ударе, вызывают вращение шаров после удара, так что процесс удара становится очень сложным. В некоторых случаях, однако, силами трения при ударе можно пренебречь. В этом случае, согласно вышеуказанному, тангенциальные составляющие скоростей шаров после удара равны соответствующим тангенциальным составляющим скоростей до удара:

$$V'_{1\tau} = V_{1\tau}, \quad V'_{2\tau} = V_{2\tau} \quad (5)$$

Шары после удара в этом случае не вращаются. Из системы уравнений (1-3) можно найти отношение масс шаров, если известны кинематические характеристики их движения до и после удара:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{V'_{1\tau} - V'_{2\tau}}{V_{1n} - V_{2n}} \quad (6)$$

Если известно движение первого шара до и после удара, а движение второго шара после удара нужно найти, то, решая систему (1-3), находим:

$$V_{2r}' = V_{2r} + \frac{V_n' - V_{2n}}{V_{1n} - V_n'} \cdot (V_{1r} - V_{1r}') \quad (7)$$

$$V_{2n}' = V_n'$$

так что вектор скорости второго шара после удара находится однозначно, если его движение до удара известно. При абсолютно неупругом ударе не выполняется закон сохранения механической энергии. Это объясняется тем, что силы взаимодействия между шарами, зависящие от скоростей деформаций, не являются консервативными, а диссипативными. То же относится, конечно, и к силам трения между шарами, если они есть. Изменение механической энергии шаров в процессе столкновения в том случае, когда силы трения отсутствуют (так что вращение шаров после удара также отсутствуют) дается выражением

$$\Delta W = \frac{m_1(V_{1n}'^2 + V_{1r}'^2)}{2} + \frac{m_2(V_{2n}'^2 + V_{2r}'^2)}{2} - \frac{m_1(V_n'^2 + V_{1r}'^2)}{2} - \frac{m_2(V_n'^2 + V_{2r}'^2)}{2} \quad (8)$$

Процесс соударения шаров удобно исследовать с помощью стробоскопических фотографий. Стробоскопические фотографии получаются путем открывания затвора фотоаппарата через строго фиксированные промежутки времени, величина которых может регулироваться. Для того, чтобы за время, когда затвор открыт, тела не могли заметно сместиться, это время должно быть достаточно малым, поэтому для получения на пленке достаточно яркого изображения используются мощные, чаще всего импульсные, работающие синхронно с затвором, осветители. На стробоскопических фотографиях получаются положения тел через строго фиксированный промежуток времени  $\tau$ , называемый периодом стробоскопирования. Выбирая  $\tau$  малым, можно с высокой степенью точности исследовать форму траектории тела, найти его скорость и ускорение. Особенно просто находятся кинематические характеристики движения, если траектория – прямая линия. На рисунке 3 представлен пример стробоскопической фотографии движущегося в направлении, указанном стрелкой шара.

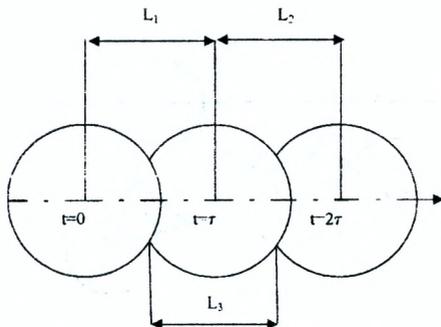


Рисунок 3 – Стробоскопическая фотография шара

Если заранее из каких-либо соображений известно, что движение равномерное, то скорость шарика может быть найдена из очевидного соотношения:

$$V = \frac{l_1}{\tau} = \frac{l_2}{\tau} = \frac{l_3}{\tau}, \quad (9)$$

где  $\tau$  – период стробоскопирования. (Хотя шарик, судя по фотографии, за равные промежутки времени проходит равные пути  $l_1 = l_2 = \dots$ , это не дает возможности утверждать, что движение равномерное; оно может быть и неравномерным (почему?) – для равномерности движения необходимо, чтобы за любые равные промежутки времени тело проходило равные пути). Направление вектора скорости устанавливается в данном случае очевидным образом. Если имеется стробоскопическая фотография двух движущихся тел, например, шариков, то по ней можно установить, сталкиваются ли шарики, если сталкиваются, то каково расположение их в момент столкновения, в какой момент времени произойдет столкновение и т. д. Рассмотрим пример. На рисунке 4 изображены два шара радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , движущиеся по пересекающимся прямым. Буквами **A**, **B** помечены начальные расположения центров шаров;  $\vec{V}_1$ ,  $\vec{V}_2$  – их скорости. Для выяснения вопроса, столкнутся ли шары, удобно перейти в систему отсчета, в которой, например, шар 1 покоится. В этой системе отсчета шар 2 движется со скоростью  $\vec{V}_{\text{отн}} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$  относительно первого шара. При движении со скоростью  $\vec{V}_{\text{отн}}$  в системе отсчета, в которой первый шар покоится, шар 2 описывает цилиндр **C**, образующие которого параллельны вектору  $\vec{V}_{\text{отн}}$ . Если шар 1 пересекает поверхность этого цилиндра – столкновение происходит; в противном случае – нет. Расстояние между центром шара 1 и линией  $BB''$  движения второго шара, обозначенное на рисунке через  $P$ , называется *прицельным параметром*. Очевидно, столкновение происходит, если  $P \leq R_1 + R_2$ . На рисунок 4 столкновение происходит, причем в момент соприкосновения центр шара 2 находится в точке  $B''$ , отстоящей от точки  $A$  на расстояние, равное, очевидно,  $|B''A| = R_1 + R_2$ . Построение точки  $B''$  не составляет труда: раствором циркуля, равным  $|R_1 + R_2|$  делают засечку на прямой  $BB''$ , поставив ножку циркуля в точку  $A$ .

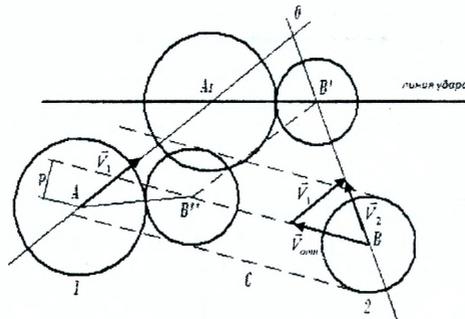


Рисунок 4 – Движение двух шаров **A** и **B**

Выполнив это построение и измеряя затем расстояние  $|B''|$  и  $\vec{V}_{\text{отн}}$  по чертежу, нетрудно определить и момент соударения:

$$t = \frac{|BB''|}{V_{\text{отн}}} \quad (10)$$

Переход в неподвижную систему отсчета осуществляется следующим образом: в неподвижной системе отсчета центр шара 2 движется вдоль линии  $BO$ , поэтому, снося точку  $B''$  на линию  $BO$ , получаем положение  $B'$  центра шара 2 в момент соприкосновения в неподвижной системе отсчета. Проводя  $A'B' \parallel AB''$ , находим и положение центра шара 1 в момент удара ( $A'$ ). Момент соударения теперь можно определить таким образом:

$$t = \frac{|AA'|}{V_1} = \frac{|BB'|}{V_2}, \quad (11)$$

что позволяет проконтролировать ранее полученный результат в формуле (9). Очевидно, прямая  $A'B'$  является линией удара.

**Задание 1.** На фотографии (рисунок 5) (5-ый и все остальные рисунки выдаются преподавателем) представлена стробоскопическая фотография движения двух шариков, направления движения которых показаны стрелками. Период стробоскопирования  $t$  считать равным  $t = \tau/k$ , где  $\tau$  указано на рисунке,  $k$  – число, показывающее, какой по порядку выполняется данная работа (если, скажем, данную работу вы выполняет третьей по счету, то  $k = 3$  и т. д.). Найдите скорости шариков  $V_1$  и  $V_2$  по формуле (9), измеряя расстояние между центрами шариков линейкой. Выберите – удобный масштаб для скоростей и изобразите вектор наклонности графически, как на рис 1.4. Проводя построения, аналогичные рисунку 5, выясните, столкнутся ли шарики, и найдите прицельный параметр  $P$ . Сделайте чертеж, аналогичный рисунку 4.

**Задание 2.** На фотографии (рисунок 6) период стробоскопирования  $\tau$  выбирается аналогично заданию 1. Аналогично же заданию 1 выясните, столкнутся ли шарики. Найдите момент соударения, усредняя результаты, полученные по формулам (1-10) (1-11). Сделайте чертеж и изобразите на нем линию удара шаров.

**Задание 3.** На фотографии (рисунок 7) период стробоскопирования выбирается аналогично предыдущим заданиям. Найдите скорости шаров до удара  $V_1$  и  $V_2$  и изобразите их графически в удобном масштабе. Найдите аналогично заданию 2 линию удара и спроектируйте векторы скоростей на линию удара и на направление касательной к шарам в точке их соприкосновения. Найдите аналогично рисунку 2  $V_{1n}, V_{1\tau}, V_{2n}, V_{2\tau}$  до удара. При этом учтите, что величины  $V_{1n}, V_{1\tau}, V_{2n}, V_{2\tau}$  – величины алгебраические. Так, например, если положительными направлениями на рисунке 2 считать направление вправо и вверх (они помечены стрелками), то  $V_{1n} > 0, V_{2n} < 0, V_{1\tau} > 0, V_{2\tau} > 0$ . Аналогично найти проекции скоростей после удара  $V'_{1\tau}, V'_{2\tau}, V'_{1n}, V'_{2n}$  с учетом знаков. **Внимание!** Все скорости откладывать в одинаковом масштабе.

*Примечание: Деформации шаров в процессе удара были незначительными. поэтому на фотографии они незаметны.*

**Задание 4.** На фотографии (рисунок 8) период стробоскопирования выбирается аналогично предыдущим заданиям, массы шаров  $m_1, m_2$  – из таблицы (имеет прежний смысл). Найдите скорости шаров до удара  $V_1$  и  $V_2$ , положение шаров в момент соударения и  $V_{1n}, V_{2n}, V_{1r}, V_{2r}$ . По формуле (4) найдите нормальные составляющие скоростей после удара  $V'_n$ . Тангенциальные составляющие скоростей после удара найдите исходя из предположения, что силы трения отсутствуют (формула (3)). Изобразите на чертеже скорости шаров до и после удара в одинаковом масштабе и изобразите положения центров шаров после удара за промежуток времени, равный утроенному периоду стробоскопирования. Рассчитайте изменение внутренней энергии шаров в процессе удара по формуле (8).

**Задание 5.** На стробоскопической фотографии (рисунок 9) изображено движение обоих шаров до удара, а после удара - только одного шара. Период стробоскопирования выбирается аналогично предыдущему. По формулам (7) найдите для второго шара  $V'_{1n}$  и  $V'_{2n}$  и нарисуйте, как будет двигаться второй шар после удара. Изобразите на чертеже полную стробоскопическую фотографию картины соударения шаров и найдите отношение масс шаров по формуле (5).

*Примечание: Во всех заданиях допускается приводить численное значение всех скоростей и составляющих в столбце прямо на чертеже. При этом на чертеже должен быть обязательно указан масштаб расстояний (если чертеж уменьшается) и масштаб скоростей. Продумайте методику расчета погрешностей.*

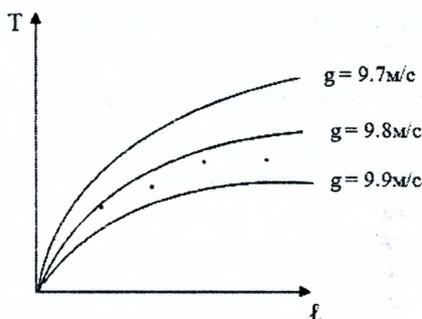
#### **Вопросы для самопроверки.**

1. Типы удара и их характеристика.
2. Силы, возникающие при ударе, и их характеристика.
3. Законы сохранения при абсолютно неупругом ударе.
4. Кинематика движения шаров в неподвижной системе отсчета и в системе покоя одного из двух шаров.
5. Вывод формул (7), (6).
6. Методика выполнения работы и расчета погрешностей.

## ПРИЛОЖЕНИЕ. Процедура линеаризации

Одним из способов визуализации функциональных зависимостей, делающих их более наглядными, является построение графика зависимости зависимой величины от независимой величины, т.е. такой, которая может быть задана экспериментатором в некотором интервале произвольно. Например, в опыте с математическим маятником независимой величиной является длина маятников, а зависимой – его период  $T$ . Соответствующая теоретическая зависимость имеет вид  $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ . Графики этой зависимости при различных значениях ускорения

свободного падения  $g$  (оно, как правило, и подлежит определению) – семейство парабол, показанных схематично на рисунке.



На этом же рисунке также схематично показаны шесть экспериментальных точек (без указания погрешностей). При сравнении экспериментальных значений периода с теоретической зависимостью возникает два фундаментальных вопроса: 1) насколько хорошо экспериментальные точки соответствуют теоретической зависимости  $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ ? Может быть, они лучше соответствуют зави-

симости  $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell + \ell_0}{g}}$ , где  $\ell_0$  – некоторая постоянная длина? 2) Если соответ-

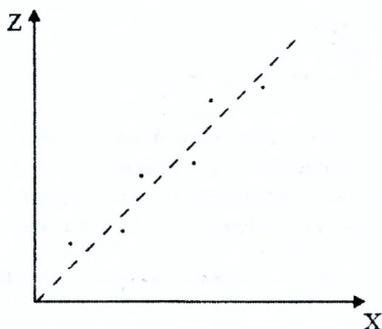
ствие экспериментальных точек зависимости  $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$  хорошее, то как найти

значение  $g$ , соответствующее экспериментальным – точкам. Графическая визуализация проводится в лабораторном эксперименте для включения в процесс познавательной деятельности человеческого глаза. Лучше всего человеческий глаз оценивает, насколько хорошо экспериментальные точки лежат на теоретической кривой в том случае, когда эта кривая является прямой. Поэтому из зависимой физической величины или из независимой физической величины или из той и другой одновременно образуют конструкции, зависимость между которыми линейна. Соответствующая процедура называется *линеаризацией*. В данном случае она сводится к следующему.

Возводим выражение для периода в квадрат

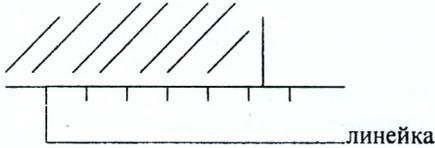
$$T^2 = 4\pi^2 \frac{\ell}{g} \quad \text{или} \quad \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{\ell}{g}$$

Обозначим  $\frac{T^2}{4\pi^2} = y$ , тогда зависимость  $y = \frac{1}{g} \ell$  – линейная и, следовательно, график теоретической зависимости  $y(\ell)$  – прямая линия, проходящая через начало координат. Если на координатной плоскости  $(\ell, y)$  отметить экспериментальные точки, то визуально легко устанавливается, достаточно ли хорошо расположение экспериментальных точек соответствует линейной зависимости. Прямая, соответствующая экспериментальным точкам наилучшим образом, может быть теоретически найдена с помощью МНК или проведена даже от руки. Процедура линеаризации неоднозначна. Например, можно записать  $\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{\ell}$ . Обозначим  $z = \frac{4\pi^2}{T^2}$ ,  $\frac{1}{\ell} = x$ . Тогда зависимость  $z = g \cdot x$  также является линейной, и экспериментальные точки, нанесённые на плоскость  $(x, z)$ , должны соответствовать представлениям о линейной зависимости.



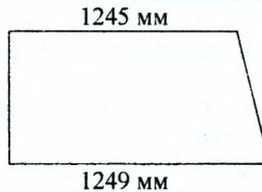
### ТЕСТ М 1

1. Студент измерил длину стола с помощью 20 – сантиметровой линейки с сантиметровыми делениями. Какой из представленных результатов, соответствует стандартам лабораторного физического практикума?



- 1) 124 см; 2) 124,0 см; 3) 124,5 см; 4) 124,32 см; 5) 124,3 см

2. В предыдущем измерении погрешность добросовестного студента равна:  
 3. Относительная погрешность результата добросовестного студента составляет:  
 4. Размеры стола измерялись 30 – сантиметровой линейкой с миллиметровыми делениями. Принимая в качестве модели стола прямоугольник, запись для его длины и ширины выглядит следующим образом



5. Площадь стола из п.4 равна:  
 6. Толщина стола из п. 4 равна 15 мм, масса 10,1 кг. Найти плотность материала стола.  
 7. В результате измерения зависимости от времени координаты  $x$  тела получена следующая таблица

$t, c$	0	1	2	3
$x, м$	3,1	5,1	7,0	9,1

Какая из зависимостей лучше соответствует экспериментальным данным в смысле МНК?

- 1)  $x = 2,0 t + 3,1$  2)  $x = 2,1 t + 2,9...$

8. Уравнение наилучшей в смысле МНК прямой имеет вид:  
 9. Для кинематического закона движения  
 $x = 3.0 t + 4.0, м$   $y = 4.0 t - 5.0, м$   
 скорость равна:  
 10. Для кинематического закона движения из п. 9 скорость составляет угол  $\alpha$  с осью  $X$ , равный:  
 11. Для кинематического закона движения  
 $x = 3.0 t$   $y = 10 + 4.0 t - 5.0 t^2$   
 уравнение траектории имеет вид:

12. Для закона движения п. 11 скорость в момент падения равна:
13. Для того же закона скорость в момент падения составляет угол с осью X, равный:
14. Для того же закона движения средняя путевая скорость равна:
15. Для того же закона движения средняя скорость перемещения по модулю равна:
16. Для того же закона движения средняя скорость составляет с осью OX угол, равный:
17. Радиус кривизны траектории в точке падения равен:
18. Центр кривизны траектории в точке падения имеет координаты:
19. Кинематический закон движения в некоторой системе координат  $(X', Y')$  имеет вид:  $x' = 8 + 5t - 4t^2$  и  $y' = 6 - 3t^2$  ускорение частицы равно при этом:
20. Для того же кинематического закона угол между ускорением и осью  $X'$  составляет:
21. Для того же кинематического закона начальная скорость равна:
22. Для того же закона начальная скорость составляет с осью  $X'$  угол, равный:
23. На какой угол повернута система координат из п. 11 по отношению к системе координат из п. 19?
24. Преобразования от системы координат  $(X', Y')$  к системе  $(X, Y)$  имеют следующий вид:
25. Одно тело движется согласно закону п. 11, а другое, начавшее движение из начала координат одновременно с первым, толкнули вверх вдоль наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha = \arccos 0.6$  с начальной скоростью 5 м/с. Трения нет. Если со вторым телом связать систему координат  $(X, Y)$ , оси которой параллельны осям  $(X', Y')$ , то кинематический закон движения первого тела в системе отсчёта, связанной со вторым, будет иметь вид:
26. Относительная скорость тел в момент падения первого на наклонную плоскость равен:
27. Относительная скорость в указанный в п. 26 момент времени составляет угол с осью X, равный:

### Литература

1. Савельев, И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1982. – Т.1.
2. Детлаф, А.А. Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М.Яворский. – М.: Высшая школа, 1989.
3. Зисман, Г.А. Курс общей физики / Г.А.Зисман, Г.А.Тодес. – Киев, Дніпро, 1994.
4. Петровский, Н.Н. Механика. – Минск, Высшая школа, 1969.

**УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ**

Чопчиц Николай Игнатъевич  
Гладышук Анатолий Антонович  
Янусик Ирина Семеновна

**ЛАБОРАТОРНЫЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ**  
**«МЕХАНИКА»**

*Рекомендовано к изданию в качестве методического  
пособия для студентов технических специальностей всех форм обучения*

Ответственный за выпуск: Янусик И.С.  
Редактор: Строкач Т.В.  
Корректор: Никитчик Е.В.  
Компьютерная верстка: Кармаш Е.Л.

---

Подписано к печати 30.02.2011 г. Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага «Снегурочка». Гарнитура Times New Roman.  
Усл. п.л. 4,65. Уч. изд. л. 5,0. Тираж 60 экз. Заказ № 245.  
Отпечатано на ризографе учреждения образования  
«Брестский государственный технический университет».  
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

ISBN 978-985-493-195-1



9 789854 931951