УДК 539.3+539.4

МАКСИМАЛЬНОЕ ФОРМОИЗМЕНЕНИЕ В ТОЧКЕ ТЕЛА И КРИТЕРИЙ ТЕКУЧЕСТИ МАТЕРИАЛА

Холодарь Б.Г.

Используемые критерии текучести и разрушения материалов в различной степени учитывают роль сдвиговых и объемных деформаций, а некоторые из них, например, классические критерии Треска и Мизеса, не содержат объемную деформацию в своих формулировках. Однако разнообразие проявляемых свойств материалов указывает на недостаточность такого подхода, что и отражается в многочисленных известных критериях [1]. Ниже обсуждается возможность построения такого рода критерия [2,3] на основе общих представлений механики сплошной среды.

При описании напряжено-деформированного состояния материала в точке нагруженного тела выделяют шаровую и девиаторную компоненты соответствующих тензоров. Шаровая деформация характеризует однородное расширение-сжатие материала, девиаторная – сдвиговое деформирование элементарного объема, сопровождающееся изменением его формы. Формоизменение складывается из двух составляющих – ортогонального формоизменения, происходящего при сохранении первоначально прямых углов элементарного параллелепипеда и соответствующего диагональным компонентам тензора-девиатора (деформации чистого сдвига), и углового формоизменения, связанного с искажением этих углов и соответствующего внедиагональным компонентам тензора (деформации простого сдвига).

Вырежем в некоторой точке тела элементарный объем в виде кубика со стороной da, боковые грани которого ориентированы перпендикулярно осям координат. Центр этого кубика обозначим точкой O. Ось W, равнонаклоненная к осям XYZ, пройдет через эту точку по ребру пентаэдра, построенного на одной из граней кубика (рис.1).

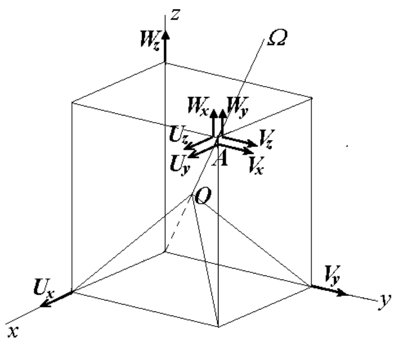


Рисунок 1 – Элементарный кубик и пентаэдр

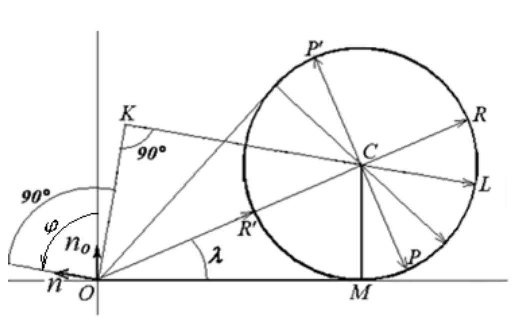


Рисунок 2 – Диаграмма деформаций

Перемещения точек будем понимать как деформационные, не содержащие переносных смещений. Перемещения точки A за счет осевых деформаций обозначены как U_x, V_y, W_z, (показаны на осях координат), девиаторная часть перемещений, соответствующая нормальным деформациям, составляет $\delta x_\varepsilon=(2\varepsilon_x-\varepsilon_y-\varepsilon_z)/3\cdot da$, $\delta y_\varepsilon=(2\varepsilon_y-\varepsilon_z-\varepsilon_x)/3\cdot da$, $\delta z_\varepsilon=(2\varepsilon_z-\varepsilon_x-\varepsilon_y)/3\cdot da$, а соответствующая сдвиговым деформациям – $\delta x_g=U_y+U_z$, $\delta y_g=V_x+V_z$, $\delta z_g=W_x+W_y$, где $U_x=\partial U/\partial x\cdot da=\varepsilon_x\cdot da$, $U_y=\partial U/\partial y\cdot da$ и т.д. Полные девиаторные перемещения точки A по осям составляют $\delta x=\delta x_\varepsilon+\delta x_g$, $\delta y=\delta y_\varepsilon+\delta y_g$, $\delta z=\delta z_\varepsilon+\delta z_g$..

Если оси XYZ совпадают с осями главных деформаций, то сдвиговое смещение вершины пентаэдра полностью принадлежит октаэдрической плоскости, а квадрат этого смещения равен половине величины второго инварианта девиатора деформаций. Полное смещение вершины пирамидки дополнительно включает также радиальное смещение точки O вдоль оси W.

Деформационные перемещения точки O можно изобразить диаграммой (рис.2).

На ней отрезком OM изображено деформационное перемещение центра кубика от девиаторной компоненты деформации (совпадает с ортогональной, пропорциональной второму инварианту тензора-девиатора деформаций), располагающейся на октаэдрической плоскости, а отрезком MC – величина шаровой компоненты в направлении диагонали кубика (по орту $\boldsymbol{n_o}$). Если от октаэдрической плоскости перейти к плоскости, повернутой вокруг центра кубика (на некоторый угол j), то лежащий на ней отрезок OK будет характеризовать ортогональное формоизменение, KL – угловое, LC – шаровое в направлении внешней нормали к этой плоскости. При повороте нормали на 360^o изображающая точка L обходит контур окружности радиуса CM. Из рис.2 вытекает, что отрезок OR представляет собой максимальную угловую девиаторную деформацию, отрезок OC – максимальную ортогональную деформацию. Обе деформации, как видим, зависит от величины шаровой деформации. Максимальная угловая деформация является и максимально-возможной девиаторной деформацией. При реализации максимальной угловой деформации ортогональная часть отсутствует, при реализации максимальной ортогональной деформации угловая не равна нулю и изображается отрезками CP или CP'.

Из диаграммы следует, что вектор полного девиаторного формоизменения $\overline{T}$ зависит от шаровой деформации и может значительно превосходить вектор ортогонального формоизменения. Для углов $j=p/2+l$ и $j=3p/2+l$ девиаторное перемещение равно соответственно максимальному и минимальному равномерному угловому перемещению, а полное деформационное перемещение равно сумме двух равномерных смещений (углового и объемного). Равномерное угловое формоизменение превращает кубик в трехмерный ромб, вытянутый вдоль оси W, в то время как ортогональное – в параллелепипед. Как видим, максимальное формоизменение не связано с площадками главных касательных напряжений или октаэдрическими площадками, а определяется углом l.

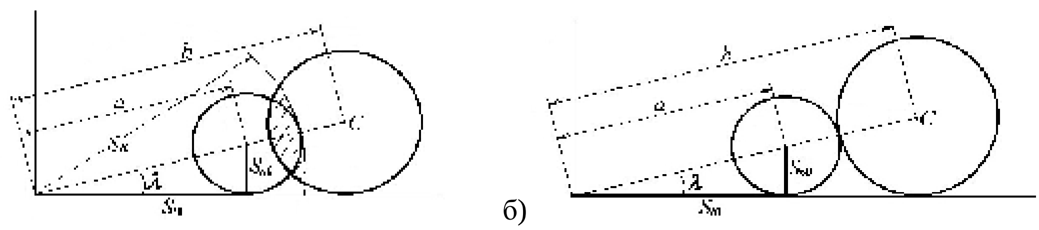
Построенные векторные диаграммы являются обобщенными, позволяя охарактеризовать деформированное состояние материала в рассматриваемой точке вдоль любого заданного направления непосредственно в виде девиаторной и шаровой составляющих, а лежащие на оси OC векторы максимальной угловой и шаровой деформаций можно рассматривать как деформационный винт по аналогии с кинематическим винтом в теоретической механике. Такая структура полностью характеризует деформированное состояние в точке тела.

Диаграмма позволяет сформулировать критерий появления (зарождения) пластической деформации материала – началу течения соответствует достижение максимальным девиаторным перемещением OR своего предельного уровня $\boldsymbol{T_P}$. Этот уровень может быть установлен из опыта на одномерное растяжение образца до деформации, соответствующей пределу текучести (пропорциональности) материала [2]:

$$T_P^2 = \frac{1}{18}\left[(1+m)^2 + 4(1-2m)^2 + 2\sqrt{2}(1+m)(1-2m)\right]\frac{s_T^2}{E^2},$$

где m - коэффициент Пуассона, s_T – предел текучести, E – модуль упругости материала.

При пропорциональном увеличении приложенной нагрузки отрезок OR удлиняется за предельный уровень и текучесть охватывает все больший объем материала выделенной вокруг точки O элементарной сферы. Диаграмма позволяет оценивать относительную долю y объема материала, перешедшего в состояние текучести (незаштрихованная часть объема сферы C на рис.3а). Величина этой доли зависит от уровня нагружения и вида напряженного состояния.



а) б)

Рисунок 3 – а - Частичная текучесть в точке ($1<n<n_к$, $y<1$), упругая $S<S_R$ и неупругая $S>S_R$ зоны работы материала; б - Полная текучесть ($n=n_к$, $y=1$)

Например, если при заданном $\lambda=arctg(S_{n0}/S_{t0})$ достигнут уровень зарождения текучести при нагрузке $P_н$, то при сохранении режима пропорционального нагружения весь объем материала перейдет в пластическое состояние при нагрузке полной текучести, равной $P_к=P_н{\cdot}b/a=P_н\dfrac{\sqrt{1+ctg\,l}+1}{\sqrt{1+ctg\,l}-1}$. Обозначив $n_к=P_к/P_н$, найдем для него несколько значений, учитывая также, что при этом $m=0.5$: $l=0^o$ – $n_к=1.0$, $l=15^o$ – $n_к$»1.7, $\lambda=30^o$ – $n_к$»3.0, $\lambda=45^o$ – $n_к$»5.8, $l=60^o$ – $n_к$»13.9. Кривые $n_к(l)$ и $y(n,l)$ показаны на рис.4.

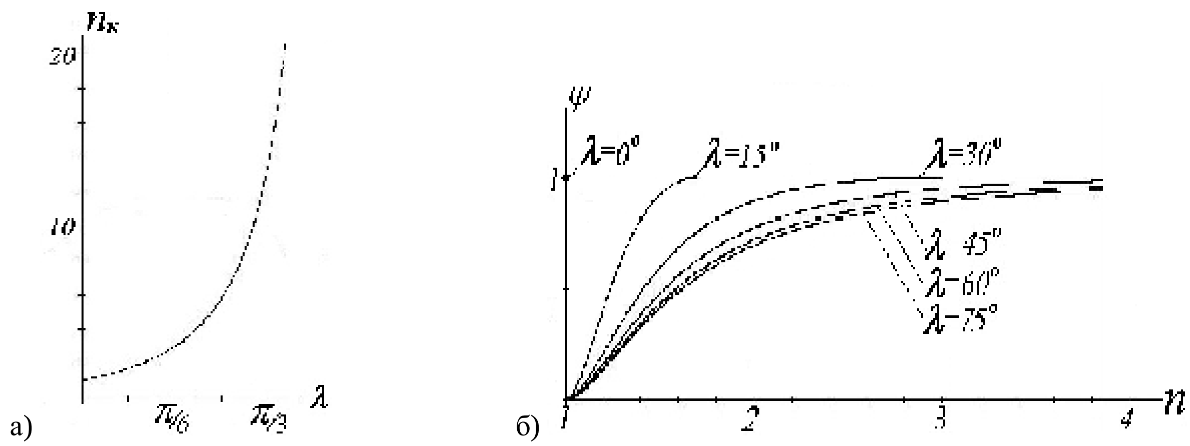


Рисунок 4 – а - Коэффициент полной пластичности $n_к(l)$;
б - Коэффициент относительного неупругого объема $y(n,l)$ в точке тела

Для получения критерия перехода к развитой пластичности, которая как раз и фиксируется в соответствующих испытаниях, необходимо провести квадратическое осреднение по сферическому углу (аналогично трактовке октаэдрических напряжений и деформаций по Новожилову). На обобщенной диаграмме (рис.2) получающемуся в результате квадратического осреднения критерию развитой пластичности соответствуют изображающие точки P и P' при $OP=OP'=\sqrt{OM^2+2MC^2}$. В напряжениях критериальная зависимость приобретает вид

$$S_1^2+S_2^2+2aS_1S_2=b, \quad S=s\ /\ s_T\ , \tag{1}$$

где $S_{1,2}=s_{1,2}/s_T$, s и s_T – напряжение и предел текучести материала,

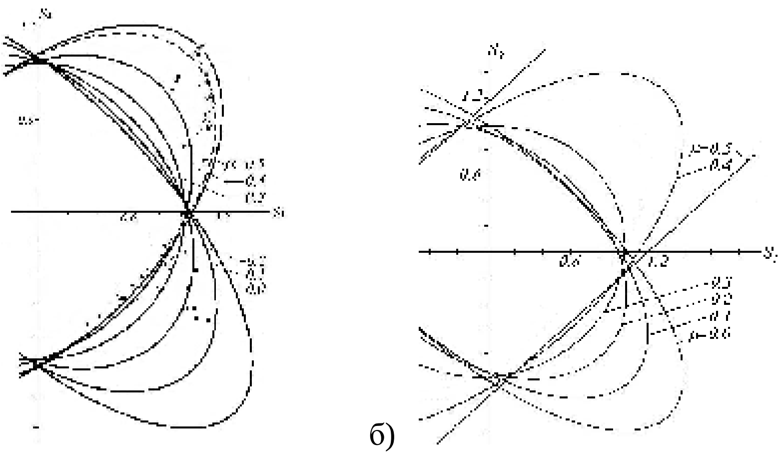
s_1, s_2 – главные напряжения, a и b – константы, зависящие от коэффициента Пуассона μ и определяемые при использовании обобщенного закона Гука для случаев плоско-напряженного и плоско-деформированного состояний (ПНС, ПДС) соответственно выражениями [2,3]

$$a=1-\frac{3(1+m)^2}{2k}, \quad b=\frac{5-14m+17m^2}{k}, \quad k=(1-m)^2(5-7m+5m^2)+3m\ ,$$

и

$$a=1-\frac{3}{2k}, \quad b=\frac{5-14m+17m^2}{(1+m)^2k}\ , \quad k=5-17m+17m^2\ .$$

Соответствующие критериальные кривые показаны на рис.5. При μ=*0.5* для ПНС критерий (1) весьма близок к критерию Мизеса (пунктирная кривая), а для ПДС совпадает с ним. Принципиальное отличие критериев заключается в том, что критерий Мизеса опирается на деформации чистого сдвига, а предлагаемый критерий – на деформации простого сдвига.



а) б)

Рисунок 5 – а - Критериальные кривые для ПНС и сравнение с экспериментальными данными [4]; б - критериальные кривые для ПДС

Близостью критерия Мизеса к предельной кривой $m=0.5$ объясняется, на наш взгляд, его универсальность, выражающаяся в использовании его в качестве критерия текучести при $S=s/s_T$ и в качестве критерия прочности при $S=s/s_B$. Особенностью хода кривых в зоне $S_1 \cdot S_2<0$ является удаление их от кривой Мизеса (увеличение выпуклости) с уменьшением коэффициента Пуассона, что в целом отвечает результатам испытаний материалов разной хрупкости [4]. Судя по зависимости $n(l)$, полная текучесть для многих материалов и напряженных состояний при нормальных температурах является недостижимой, – например, при двухосном растяжении должно выполниться соотношение $S_1=S_2$»2.5, что не реализуется экспериментально (см. [2]).

Дополнительным подтверждением работоспособности предложенного критерия может служить определение положения наклонной площадки, по которой в соответствии с (1) должно происходить разрушение образца при испытаниях на одноосное сжатие (здесь отождествляем критерии деформирования и разрушения). В этом случае угол λ определяется по формуле $tg\lambda=\frac{1-2\mu}{1+\mu}\sqrt{2}$, его зависимость от μ близка к линейной и показана на рис.6. На рис.7 показано положение расчетной площадки относительно продольной оси Z образца. Угол Ω определяет положение октаэдрической оси с ортом $\boldsymbol{n_o}$.

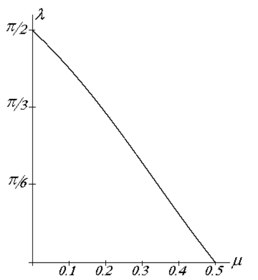


Рисунок 6 – Зависимость $\lambda(\mu)$

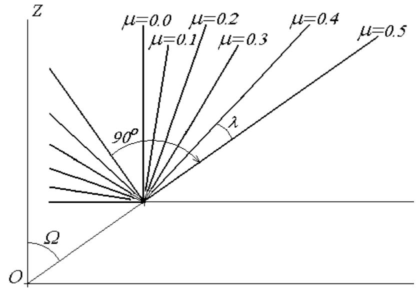


Рисунок 7 – Положение расчетных площадок относительно оси нагружения

Расчетные углы наклона площадки разрушения идеально-пластического материала (μ=*0.5*) и идеально-хрупкого (μ=*0*) отличаются между собой на 54.73^o, причем для $\mu=0$ имеем площадку разрушения, параллельную оси Z. Последнее соответствует экспериментальным данным для хрупких тел, например, кирпича. Известно также, что при испытании образцов горных пород площадки разрушения всегда наклонены к оси нагружения под углами менее 45^o [5]. При объяснении этого обстоятельства следует учесть, что с ростом нагрузки расчетные площадки поворачиваются от своих исходных положений, соответствующих моменту зарождения текучести, в направлении площадок развитых пластических деформаций (в пределе на 90^o), и поэтому угловое положение предельных площадок, наблюдаемое в опытах, может не вполне соответствовать расчету, так как разрушение материала могло произойти прежде, чем площадки развитой текучести были достигнуты.

Естественно, что одновременное наличие упругой и пластической фаз материала в точке тела при дальнейшем увеличении нагрузки приводит на уровне микроструктуры материала к дроблению зерен и трещинообразованию, что с точки зрения механики сплошной среды отражается некоторой функцией поврежденности материала $w(x,y,z,t)$ [6].

Предложенный критерий по сути является деформационным, и традиционная запись его через напряжения эквивалентна записи через соответствующие им упругие деформации, зависящие от формы диаграммы растяжения на участке упрочнения. Использование нелинейных зависимостей между интенсивностями деформаций и напряжений, принятых в теории пластичности, при одновременном введении в критерий (1) величин w и ψ позволит обоснованно осуществить переход от критерия текучести к критерию разрушения материала и тем самым обеспечит более надежное определение уровней разрушающих нагрузок и запасы прочности конструкций.

Рассмотренный подход может быть использован также при построении критериев текучести и длительной прочности реономных материалов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Трощенко, В.Т., Красовский, В.В., Сосновский, Л.А., Стрижало, В.А. Сопротивление материалов деформированию и разрушению. Справочное пособие. Часть 2. Киев, Наукова думка, 1994г. -702с

2. Холодарь, Б.Г. О геометрическом представлении девиаторной деформации // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 30, – Минск, БНТУ, 2015, с. 236-242.

3. Холодарь, Б.Г. Критерий максимального формоизменения как условие перехода материала в пластическое состояние // Деформация и разрушение материалов, – М., изд. “Наука и технологии”, 2016. № 3. с. 2–5.

4. Пономарев, С.Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Том I. ГНТИ машиностроительной литературы. М., 1956, -884с.

5. Егер, Дж.К. Упругость, прочность и текучесть. М., Машгиз, 1961, -172с.

6. Холодарь, Б.Г. Долговечность материала при сложном напряженном состоянии // Деформация и разрушение материалов, – М., изд. “Наука и технологии”, 2013, №3, с. 8-13.