

**ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЯТИСЛОЙНОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ  
ПО ТОЛЩИНЕ ПЛАСТИНЫ**

**Е.А. Лачугина**

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

**FREQUENCIES OF NATURAL VIBRATIONS OF FIVE-LAYER ASSYMMETRICAL  
PLATE THICKNESS**

**E.A. Lachugina**

Belarusian state university of transport, Gomel, Belarus

**Аннотация.** Исследуются осесимметричные собственные колебания упругой круговой пластины, состоящей из пяти слоев разной толщины. Заполнители – легкие. Для несущих слоев выполняются кинематические гипотезы Кирхгофа. В сравнительно толстых легких заполнителях – гипотезы Тимошенко. Выполнена постановка начально-краевой задачи о собственных колебаниях пластины. Произведен численный анализ.

**Ключевые слова:** несимметричная по толщине пятислойная пластина, собственные колебания, уравнения движения, частоты.

**Annotation.** The axisymmetric natural vibrations of an elastic circular plate consisting of five layers of different thicknesses are investigated. The fillers are light. Kirchhoff's kinematic hypotheses are fulfilled for the bearing layers. The hypotheses of Tymoshenko are found in relatively thick light fillers. The initial boundary value problem of the plate's own oscillations is formulated. A numerical analysis has been performed.

**Keywords:** five-layer plate asymmetrical in thickness, natural vibrations, equations of motion, frequencies.

Исследование слоистых конструкций интенсивно развивается с конца 40-х годов XX века. В настоящее время многослойные конструкции активно применяются в различных сферах современной техники. Методы расчета и постановки краевых задач для трехслойных элементов конструкций исследованы в работах [1–7]. Собственные колебания симметричных по толщине пятислойных пластин рассмотрены в [8–10].

Рассматривается несимметричная по толщине упругая круговая пластина из пяти слоев различной толщины с двумя легкими заполнителями. В трех тонких несущих слоях справедлива гипотеза Кирхгофа, в заполнителях – гипотезы Тимошенко. Постановка начально-краевой задачи приведена в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , связанной со срединной плоскостью центрального несущего слоя  $h_1$ .

На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ( $\psi_i = 0, (i = 1, 2)$  при  $r = r_0$ ). Искомые прогиб пластины  $w$ , относительный сдвиг в заполнителях  $\psi_i$  и радиальное перемещение срединной плоскости внутреннего несущего слоя  $u$  не зависят от координаты  $\varphi$ .

Для вывода системы динамических уравнений движения применен вариационный принцип Лагранжа, добавив силы инерции к действующим массовым силам. Уравнения собственных колебаний получаем при отсутствии внешней нагрузки:

$$L_2(a_1 u - a_2 w_{,r} + a_3 \psi_1 - a_4 \psi_2) = 0,$$

$$L_2(a_3 u - a_5 w_{,r} + a_6 \psi_1) = 0,$$

$$L_2(-a_4 u - a_7 w_{,r} + a_8 \psi_2) = 0,$$

$$L_3(a_2 u - a_9 w_{,r} + a_{10} \psi_1 + a_{11} \psi_2) - M_0 \ddot{w} = 0,$$

где  $M_0 \ddot{w}$  – поперечные инерционные силы,  $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3 + \rho_4 h_4 + \rho_5 h_5) r_0^2$ ;  $a_i$  – коэффициенты, зависящие от геометрических и упругих параметров материалов слоев.

$$a_1 = \sum_{k=1}^5 h_k K_k^+, \quad a_2 = \left[ K_4^+ h_4 (0,5h_4 + 0,5h_1 + h_5) + K_5^+ 0,5h_5 (h_1 + h_5) - \right. \\ \left. - K_3^+ 0,5h_3 (h_1 + h_3) - K_2^+ h_2 (0,5h_2 + 0,5h_1 + h_3) \right], \dots, \\ a_{11} = \left[ K_2^+ h_2 h_3 (0,5h_1 + 0,5h_2 + h_3) + K_3^+ \frac{h_3^3}{3} \right], \quad K_k + \frac{4}{3} G_k \equiv K_k^+, \quad K_k - \frac{2}{3} G_k \equiv K_k^-,$$

$G_k, K_k$  – модули сдвига и объемного деформирования  $k$ -го слоя;  $L_2, L_3$  – линейные дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Здесь и далее запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования, по следующей за ней координате.

Начальные условия движения принимаются однородными, на контуре должны выполняться условия жесткой заделки

$$u = \psi_1 = \psi_2 = w = w_{,r} = 0, \quad \text{при } r = r_0.$$

Уравнение для вычисления собственных чисел  $\beta_n$  получим, удовлетворяя граничным условиям. После этого частоты собственных колебаний следуют из соотношения

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4} = \frac{\beta_n^4}{M_0 D}.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-25».*

#### **Список цитируемых источников**

1. Журавков, М.А. Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021. – 535 с.
2. Zhuravkov, M. A. Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.
3. Starovoitov, É. I. Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // Strength of materials. – 2002. – Vol. 34, No. 5. – P. 474–481.
4. Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагрузениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : IDEAL PRESS, 2023. – 381 с.
5. Старовойтов, Э. И. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 162–169.
6. Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field / E.I. Starovoitov [et al.] // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2015. – Vol. 88, № 4. – P. 1023–1029.
7. Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – Т. 22, № 1. – С. 31–35.
8. Лачугина, Е.А. Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями / Е.А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.
9. Лачугина, Е. А. Частоты собственных колебаний пятислойной круговой пластины / Е. А. Лачугина // Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.-техн. сб. – Минск : БНТУ, 2023. – Вып. 38. – С. 227–233.
10. Лачугина, Е. А. Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими заполнителями / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2023. – Вып. 16. – С. 111–116.