

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

Расчет
плоских статически определимых рам
на неподвижные нагрузки

Методические указания
по дисциплине «Строительная механика»
для студентов строительных специальностей
дневной и заочной форм получения образования

Брест 2024

УДК 624.04
ББК 38.112я73
И 26

Рецензенты:

директор филиала республиканского унитарного предприятия «Институт БелНИИС» – Научно-технический центр, доктор технических наук, доцент Деркач Валерий Николаевич;

профессор кафедры строительных конструкций Брестского государственного технического университета, доктор технических наук, доцент Найчук Анатолий Яковлевич.

В. И. Игнатюк

И 26 Расчет плоских статически определимых рам на неподвижные нагрузки: методические указания по дисциплине «Строительная механика» для студентов строительных специальностей дневной и заочной форм получения образования. – Брест : Изд-во БрГТУ, 2024. – 56 с.

В методических указаниях представлены принципы расчета плоских статически определимых рам на неподвижные нагрузки. Излагаются методики определения внутренних сил – изгибающих моментов, поперечных и продольных сил, построения эпюр этих усилий и определения перемещений сечений в таких системах.

Методические указания предназначены для студентов строительных специальностей.

УДК 624.04
ББК 38.112я73

© В.И.Игнатюк, 2024
© Издательство БрГТУ, 2024

1. Внутренние силы в плоских стержневых системах

При действии на плоскую статически определимую стержневую систему внешней нагрузки в каждом поперечном сечении ее может возникнуть три вида внутренних сил (усилий) (см. рисунок 1.1):

– изгибающий момент M – действует в плоскости сооружения (xz) относительно центральной оси поперечного сечения стержня, перпендикулярной к плоскости сооружения (относительно оси y на рисунке 1.1, а);

отметим, что любой момент может быть представлен и как пара сил одинаковой величины, направленных в разные стороны, с некоторым расстоянием (плечом) между ними (рисунок 1.1, б); в этом случае величина момента определяется произведением значения одной из сил на плечо между силами:

$$M = P \cdot h;$$

при таком представлении момента

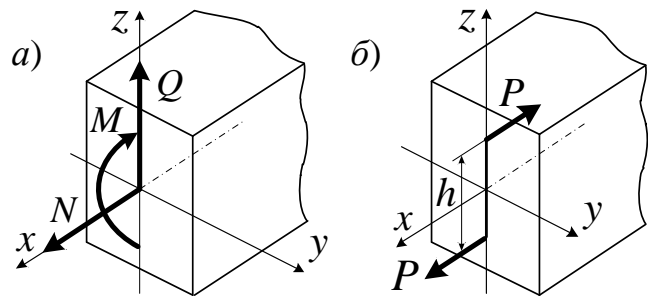
понятно, что проекция момента на любую ось равна нулю (учитывая, что такие силы P при проектировании на любую ось взаимно уничтожаются);

– поперечная сила Q – действует в плоскости поперечного сечения стержня перпендикулярно оси стержня (оси x) (в направлении центральной оси z , лежащей в плоскости сооружения);

– продольная сила N – действует перпендикулярно к плоскости сечения в направлении (вдоль) оси стержня (оси x) и приложена в центре сечения.

Определение усилий M , Q , N в сечениях статически определимых стержневых систем выполняется методом сечений.

Метод основан на том, что для неизменяемой системы, находящейся в равновесии, – в равновесии будет находиться и любая ее часть. В месте определения усилия проводится сечение (рисунок 1.2, а), разделяющее систему на две части, и рассматривается равновесие одной из этих частей, любой (рисунок 1.2, б).



а) виды усилий; б) представление момента в виде пары сил

Рисунок 1.1 – Внутренние силы в сечении

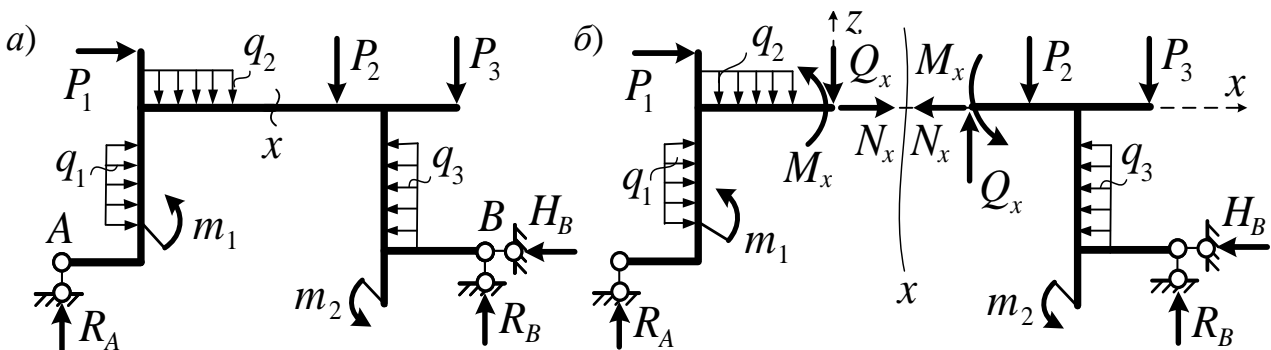


Рисунок 1.2 – Применение метода сечений

При этом действие отброшенной части на рассматриваемую часть заменяется силами, которые соответствуют внутренним силам в сечении, а по отношению к рассматриваемой части являются внешними силами (рисунок 1.2, б).

Для рассматриваемой части составляются уравнения равновесия, число которых будет равно трем, что соответствует степени свободы плоской системы и количеству неизвестных внутренних сил. Из уравнений равновесия определяются усилия в сечении (здесь параметр R представляет опорные реакции):

$$\sum M_x^{npав} = 0; \quad -M_x + \sum M_x(P_i^{npав}) + \sum M_x(q_j^{npав}) + \sum M_x(m_k^{npав}) + \sum M_x(R_n^{npав}) = 0;$$

$$M_x = \sum M_x(P_i^{npав}) + \sum M_x(q_j^{npав}) + \sum m_k^{npав,x} + \sum M_x(R_n^{npав});$$

аналогично из уравнений равновесия: $\sum Z^{npав} = 0$; и $\sum X^{npав} = 0$, получим:

$$Q_x = \sum Z(P_i^{npав}) + \sum Z(q_j^{npав}) + \sum Z(R_n^{npав});$$

$$N_x = \sum X(P_i^{npав}) + \sum X(q_j^{npав}) + \sum X(R_n^{npав}).$$

Метод сечений, таким образом, позволяет сформулировать следующие

Правила определения внутренних сил в сечениях плоских стержневых систем:

❗ **Изгибающий момент** в сечении численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, включая опорные реакции, приложенных к части системы с одной стороны от сечения, взятых относительно центра сечения.

Отметим, что центр сечения стержня в соответствии с понятием расчетной схемы лежит на оси стержня (на пересечении осей yz сечения – рисунок 1.1).

❗ **Поперечная сила** в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, включая опорные реакции, приложенных к части системы с одной стороны от сечения, на ось, перпендикулярную к оси стержня.

❗ **Продольная сила** в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, включая опорные реакции, приложенных к части системы с одной стороны от сечения, на ось стержня (в общем случае криволинейных стержней – на ось, касательную к оси стержня).

Напомним, что **проекция силы** на ось равна произведению величины силы на косинус угла между осью и линией действия силы (см. рисунок 1.3, а):

$$P_x = P \cos \varphi.$$

При этом, если сила параллельна оси, на которую она проектируется, то ее проекция на эту ось равна самой силе (рисунок 1.3, б). Если сила перпендикулярна оси, то ее проекция на эту ось равна нулю (рисунок 1.3, в).

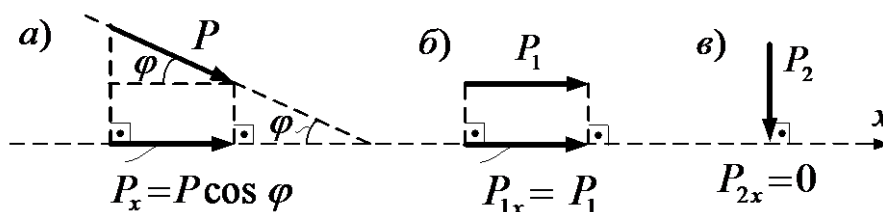


Рисунок 1.3 – Проекция силы на ось

Момент силы относительно точки равен произведению величины силы на ее плечо относительно этой точки (рисунок 1.4, а):

$$M_A(P) = P \cdot h_P,$$

где **плечо силы** относительно точки (h_P) определяется как длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на линию действия силы.

Согласно данным определениям легко вычисляются момент относительно любой точки и проекция на любую ось нагрузок, распределенных по любым зависимостям, если эти нагрузки привести к равнодействующим силам (R_q). Например, величина момента относительно точки A равномерно распределенной нагрузки q_1 на рисунок 1.4, б, равнодействующая R_{q1} которой приложена в середине участка, на который действует нагрузка, будет равна:

$$M_A(q_1) = R_{q1} h_{R1} = (q a) h_{R1},$$

а для нагрузки q_2 , изменяющейся на участке по треугольной зависимости (рисунок 1.4, в), будет определяться выражением:

$$M_A(q_2) = R_{q2} h_{R2} = \left(\frac{1}{2} q_2 b \right) h_{R2}.$$

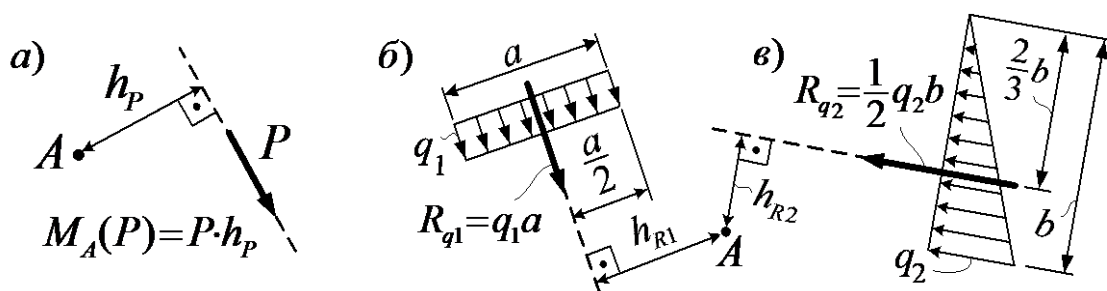


Рисунок 1.4 – Моменты сил и распределенных нагрузок относительно точек

Отметим, что момент относительно любой точки от действия сосредоточенного момента равен самому сосредоточенному моменту.

Для наглядного представления об изменении усилий (M , Q , N и др.) в сечениях систем строят эпюры усилий.

Эпюрой усилия называется график (диаграмма), отражающий зависимость изменения этого усилия по длинам всех элементов (стержней) системы.

Отметим некоторые правила, применяемые при построении эпюр усилий:

1. Ось (базу), на которой строится эпюра, всегда выбирают так, чтобы она была параллельна оси стержня или просто совпадала с ней.
2. Ординаты эпюр откладывают от базовой оси перпендикулярно к ней в определенном масштабе, одинаковом в пределах одной эпюры.
3. В характерных точках (сечениях), определяющих вид зависимостей изменения эпюр, проставляют значения ординат усилий, а в полях эпюр (в кружочках) ставят знаки ординат эпюр.
4. Штриховать эпюры принято линиями, перпендикулярными к базовой оси, учитывая, что каждая из линий штриховки – это ордината эпюры усилия.

Ⓢ Таким образом, каждая из ординат эпюры усилия представляет собой в определенном масштабе величину усилия, для которого построена эпюра, в поперечном сечении рамы, в котором эта ордината отложена.

При определении поперечных и продольных сил и построении их эпюр в строительной механике обычно принимают следующие правила знаков:

Поперечная сила в сечении, определенная по вышеуказанному правилу, **положительна**, если при приложении ее на бесконечно малом расстоянии от сечения со стороны рассматриваемой части она стремится сдвинуть эту часть относительно сечения по часовой стрелке, и **отрицательна**, если стремится сдвинуть эту часть относительно сечения против часовой стрелки – см. рисунок 1.5, а. Например, при рассмотрении отсеченной части на рисунке 1.5, б поперечная сила в сечении K равна силе P и положительна.

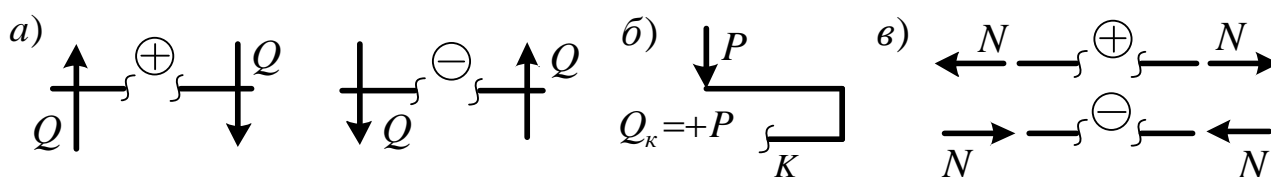


Рисунок 1.5 – Правила знаков для поперечных (а, б) и продольных (в) сил

Продольная сила в сечении **положительна**, если она вызывает растяжение в стержне рамы (направлена от сечения), и **отрицательна**, если вызывает в стержне сжатие (направлена к сечению) – см. рисунок 1.5, в.

Отметим, что при построении эпюр Q и N ординаты поперечных и продольных сил могут откладываться с любой стороны от базовых осей (стержней). При этом следует руководствоваться наибольшей наглядностью эпюр, исключая, по возможности, наложение эпюр друг на друга, и, конечно, на одной эпюре и на участках, являющихся продолжением друг друга по прямой ординаты одного знака необходимо откладывать с одной стороны.

Для изгибающих моментов специального правила знаков не устанавливаются, а откладывают ординаты изгибающих моментов на растянутых волокнах (со стороны растянутых волокон). При определении величин изгибающих моментов знаки их можно принимать по собственному усмотрению. **В данном пособии изгибающий момент принимается положительным, если он действует относительно сечения по часовой стрелке.** Растянутые волокна в сечении при этом определяются следующим образом. В той части системы, из равновесия которой в расчетном сечении определен изгибающий момент, выделяем бесконечно малый элемент стержня, прилегающий к рассматриваемому сечению (на схемах этот бесконечно малый элемент стержня для наглядности изображается в виде элемента конечной длины). Считаем затем, что в расчетном сечении указанный элемент имеет защемление, и прикладываем к нему определенный в этом сечении изгибающий момент. Анали-

зируя теперь изгиб рассматриваемого элемента системы (рамы), несложно определить, с какой стороны стержня волокна будут растянуты, а с какой – сжаты.

Схема изгиба элемента системы, представленной на рисунке 1.6, а, выделенного возле сечения 1–1 с правой стороны, показана на рисунке 1.6, б. Из анализа этой схемы видно, что растянутыми в сечении 1–1 будут нижние волокна (здесь и далее на схемах изгиба элементов растянутые волокна будем обозначать, проводя со стороны растянутых волокон штриховые линии).

Отметим, что для систем, находящихся в равновесии, усилия в любом сечении, полученные при рассмотрении одной и другой частей относительно этого сечения, будут равны друг другу (значения изгибающих моментов при этом при использовании рассматриваемых правил знаков будут получаться с противоположными знаками – растянутые же волокна, определенные по ним, будут находиться с одной и той же стороны).

Например, для системы на рисунке 1.6, а должны соблюдаться равенства:

$$M_{1-1}^{(лев)} = -M_{1-1}^{(прав)}; \quad Q_{1-1}^{(лев)} = Q_{1-1}^{(прав)}; \quad N_{1-1}^{(лев)} = N_{1-1}^{(прав)},$$

что следует использовать для проверки правильности вычисления усилий в сечениях систем.

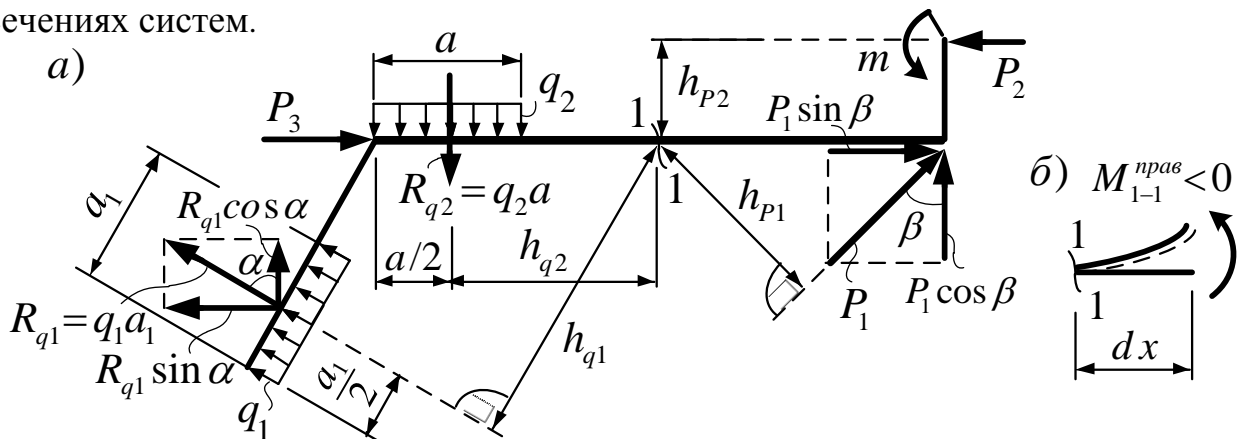


Рисунок 1.6 – Применение метода сечений для определения усилий

Приведем вычисления усилий в сечении 1–1 (в общем виде) для системы, представленной на рисунке 3.6, а, которую будем считать равновесной, отдельно из рассмотрения левой и правой частей системы относительно сечения:

$$M_{1-1}^{(лев)} = R_{q1} \cdot h_{q1} - R_{q2} \cdot h_{q2} + P_3 \cdot 0 = q_1 a_1 h_{q1} - q_2 a h_{q2};$$

$$M_{1-1}^{(прав)} = -P_1 \cdot h_{p1} - P_2 \cdot h_{p2} - m;$$

$$Q_{1-1}^{(лев)} = R_{q1} \cdot \cos \alpha + P_3 \cdot \cos 90^0 - R_{q2} \cdot \cos 0^0 = q_1 a_1 \cos \alpha - q_2 a;$$

$$Q_{1-1}^{(прав)} = -P_1 \cdot \cos \beta + P_2 \cdot \cos 90^0 = -P_1 \cos \beta;$$

$$N_{1-1}^{(лев)} = R_{q1} \cdot \sin \alpha - P_3 \cdot \cos 0^0 - R_{q2} \cdot \cos 90^0 = q_1 a_1 \sin \alpha - P_3;$$

$$N_{1-1}^{(прав)} = -P_2 + P_1 \sin \beta.$$

Отметим, что для сосредоточенных сил и равнодействующих распределенных нагрузок, действующих наклонно по отношению к горизонтальной и вертикальной осям (P_1 и R_{q1} на рисунке 1.6, а) изгибающие моменты удобнее вычислять с использованием проекций этих сил на горизонтальную и вертикальную оси, тем более, что затем эти проекции могут быть использованы и при определении поперечных и продольных сил (см. представленные расчеты).

2. Статически определимые рамы, их виды

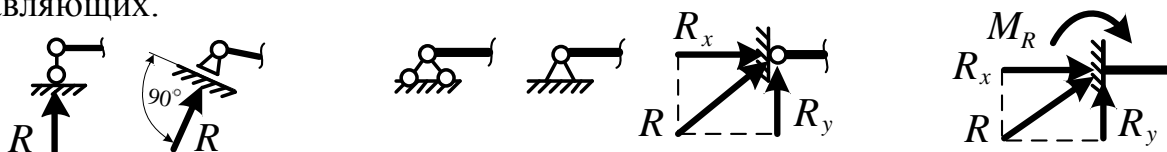
Рамами называют системы, состоящие из прямолинейных стержней, соединенных между собой преимущественно жестко в узлах, и опирающихся с помощью опор на основание.

Основными видами опор являются (рисунок 2.1):

шарнирно подвижная (рисунок 2.1, а) – имеет одну связь, в которой возникает одна реакция, направленная по оси связи (по оси действия связи);

шарнирно неподвижная (рисунок 2.1, б) – имеет две связи, в опоре возникает одна реакция, направление которой обычно неизвестно, и поэтому она ищется в виде двух составляющих;

защемление (заделка) (рисунок 2.1, в) – имеет три связи, в опоре возникает реактивный момент и реактивная сила, которая определяется в виде двух составляющих.

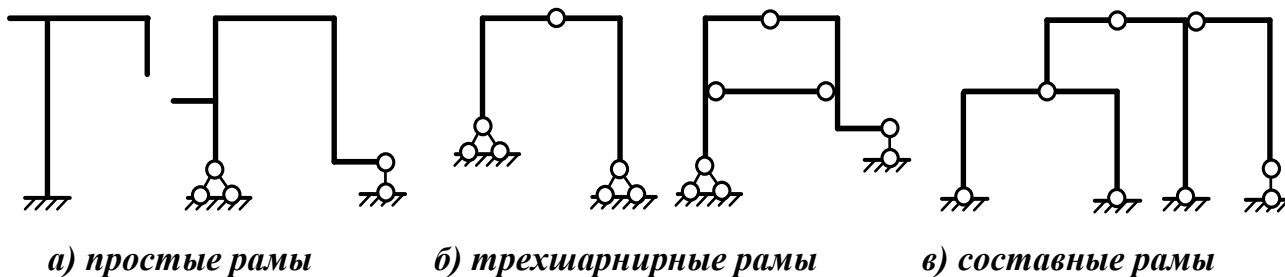


а) шарнирно подвижная б) шарнирно неподвижная в) защемление (заделка)

Рисунок 2.1 – Виды опор и их изображение на расчетных схемах систем

По структуре статически определимые рамы обычно разделяют на простые, трехшарнирные и составные.

Простые рамы – это системы, состоящие из одного диска в виде ломано-разветвленного стержня, соединенного с основанием тремя связями с использованием представленных выше опор (рисунок 2.2, а).



а) простые рамы

б) трехшарнирные рамы

в) составные рамы

Рисунок 2.2 – Виды рам

Трехшарнирные рамы (рисунок 2.2, б) – это системы, состоящие из трех дисков (ломано-разветвленных стержней), соединенных между собой после-

довательно тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой (то есть по принципу трехдискового трехшарнирного треугольника). Одним из дисков при этом может быть основание (земля).

Составными называют рамы, состоящие из нескольких соединенных между собой шарнирами простых и (или) трехшарнирных рам (рисунок 2.2, в).

Расчет составных рам выполняется путем расчета отдельных простых и (или) трехшарнирных рам, на которые могут быть разделены составные рамы, с учетом их взаимодействия друг с другом.

3. Расчет простых рам

Рассмотрим раму, представленную на рисунке 3.1. Из анализа рамы видно, что при определении усилий в ее сечениях нельзя обойтись без знания опорных реакций. Следовательно, расчет любой рамы необходимо начинать с определения опорных реакций.

Опорные реакции определяются из уравнений равновесия простой рамы в целом, которые в общем случае можно составить в трех различных вариантах:

1) в виде сумм проекций сил на две произвольные не параллельные друг другу оси и суммы моментов сил относительно любой точки плоскости:

$$\Sigma X = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \Sigma M_T = 0; \quad (3.1)$$

2) в виде суммы проекций сил на произвольную ось и двух сумм моментов относительно любых точек плоскости, не лежащих на одном перпендикуляре к указанной оси проекции:

$$\Sigma X = 0; \quad \Sigma M_{T1} = 0; \quad \Sigma M_{T2} = 0; \quad (3.2)$$

3) в виде трех сумм моментов относительно трех точек, не лежащих на одной прямой:

$$\Sigma M_{T1} = 0; \quad \Sigma M_{T2} = 0; \quad \Sigma M_{T3} = 0. \quad (3.3)$$

Заметим, что вид уравнений равновесия для определения опорных реакций следует выбирать так, чтобы в каждое из них, по возможности, входило только одна неизвестная опорная реакция и не входили ранее определенные опорные реакции, используя для этого, например, уравнения моментов относительно точек пересечения других неизвестных опорных реакций или сумму проекций сил на ось, перпендикулярную другим опорным реакциям (см., например, расчет рамы на рисунке 3.1).

После определения опорных реакций всегда нужно выполнять **проверку** правильности их расчета, для чего следует использовать уравнение равновесия, которое ранее не использовалось, и в которое входили бы все вычисленные ранее опорные реакции.

Рассмотрим расчет рамы, показанной на рисунке 3.1. Вначале определим опорные реакции, для чего используем второй вариант уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; & \quad R_A - 4 = 0; & \quad R_A = 4 \text{ кН}; \\ \Sigma M_L = 0; & \quad -4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 8 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - R_C \cdot 4 = 0; & \quad R_C = 5 \text{ кН}; \\ \Sigma M_D = 0; & \quad -4 \cdot 7 + 4 \cdot 2 + 8 + R_B \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0; & \quad R_B = 7 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Если величина реакции в результате ее определения получается отрицательной, это указывает на то, что мы неверно предположили ее направление (в нашем примере – реакции R_B) и оно будет противоположным. В этом случае рекомендуется сразу же исправить направление реакции на действительное.

Проверка правильности определения опорных реакций:

$$\Sigma M_K = 0; \quad 4 \cdot 4 - 2 \cdot 4 + 8 - 7 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 5 - 5 \cdot 7 = 0; \quad +64 - 64 = 0; \quad 0 = 0.$$

Для удобства дальнейших расчетов действительные значения вычисленных реакций рекомендуется показывать на расчетной схеме рамы (см. рисунок 3.1).

Переходим к определению усилий и построению их эпюр. Несложно заметить, что любую раму можно разбить на отдельные участки (отрезки стержней), на каждом из которых изменение того или иного усилия описывается (в пределах этого участка) одной зависимостью. Граничные точки этих участков, в которых происходит переход от одних зависимостей изменения эпюр к другим, будем называть характерными точками.

В качестве характерных точек обычно выступают:

- точки, в которых приложены внешние сосредоточенные нагрузки (силы, моменты) либо опорные реакции;
- точки начала и конца приложения распределенных нагрузок;
- точки излома и разветвления стержней.

Для рамы на рисунке 3.1 характерными будут точки A, T, K, B, C и можно выделить четыре расчетных участка:

$$I \rightarrow AT, \quad II \rightarrow TK, \quad III \rightarrow KB \quad \text{и участок } IV \rightarrow BC.$$

Рассмотрим вначале участок I. Проведем на нем произвольное сечение I–I. Внутренние силы в любом сечении рамы могут быть определены из рассмотрения как левой относительно сечения, так и правой (как нижней, так и верхней) частей рамы; при этом эти значения должны получаться равными друг другу (см. раздел 1); это можно и нужно использовать для проверки правильности вычисления усилий в сечениях. Заметим, что определение усилий в сечениях удобнее производить из рассмотрения той отсеченной части рамы, на которую действует меньшее количество сил. Для сечения I–I рассмотрим верхнюю часть рамы (для наглядности в этом примере покажем рассматриваемые части рамы отдельно – см. рисунок 3.2, *a*). Расстояние от верхней крайней точки (точка A) до сечения I–I обозначим x_1 . Тогда выражения для определения внутренних сил в произвольном сечении I–I участка I ($0 \leq x_1 \leq 2$) будут иметь вид:

$$M_1^{верх} = R_A \cdot x_1 + P \cdot 0 = 4x_1; \quad Q_1^{верх} = + R_A = 4; \quad N_1^{верх} = - P = - 4.$$

Изгибающий момент на участке I изменяется по линейному закону, а поперечная и продольные силы – постоянны. Подставляя в выражение изгибающего момента значения x_1 для крайних сечений (расположенных на бесконечно малых расстояниях от характерных точек), найдем:

$$M_1 = M_A = 4 \cdot 0 = 0; \quad M_2 = 4 \cdot 2 = +8 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_2 > 0.$$



Растянутые волокна здесь (и далее) определяются на схеме деформирования бесконечно малого элемента со стороны рассматриваемой части под действием полученного изгибающего момента.

Аналогично найдем внутренние силы на участке II ($0 \leq x_2 \leq 4$) (рисунок 3.2, б):

$$M_{II}^{всп} = 4 \cdot (2 + x_2) - 4 \cdot 0 - 4 \cdot x_2 = 8 \text{ (при любом значении } x_2);$$



$$Q_{II}^{всп} = 4 - 4 = 0; \quad N_{II}^{всп} = -4,$$

и на участке III ($0 \leq x_3 \leq 3$) (рисунок 3.2, в): $M_{III}^{лев} = 4 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 4 \cdot x_3 = 8 - 4 \cdot x_3$

[при $x_3 = 0$ (сечение 5) – $M_5 = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_5 > 0.$



при $x_3 = 3$ (сечение 6) – $M_6 = -4 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_6 < 0.$



$$Q_{III}^{лев} = -4; \quad N_{III}^{лев} = 0.$$

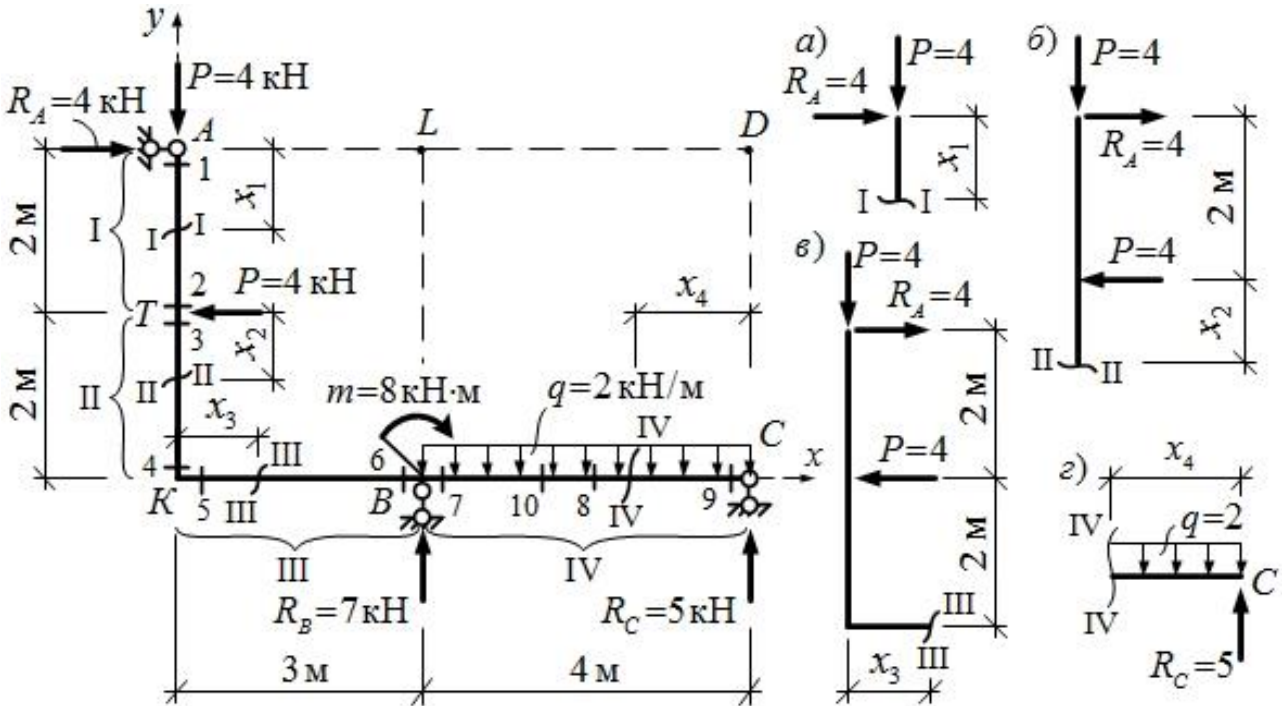


Рисунок 3.1 – Расчетная схема рамы

Рисунок 3.2 – Отсеченные части

Несколько сложнее определяются усилия на участке IV. Проведя произвольное сечение IV–IV, рассмотрим правую часть рамы (рисунок 3.1). Выражения для внутренних сил на участке будут иметь вид:

$$M_{IV}^{(прав)} = -5 \cdot x_4 + 2 \cdot x_4 \cdot x_4 / 2 = x_4^2 - 5 \cdot x_4; \quad Q_{IV}^{(прав)} = -5 + 2 \cdot x_4; \quad N_{IV}^{(прав)} = 0.$$

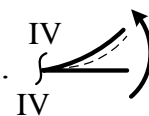
Видно, что изгибающий момент на участке IV изменяется по параболической зависимости, а поперечная сила – линейна (но не постоянна в отличие от участков I, II, III). Для построения эпюры M на этом участке, таким образом,

необходимо вычислить значения изгибающих моментов минимум в трех точках – например, по краям участка (в сечениях 7 и 9) и в середине его (в сечении 8):

$$\text{сеч. 7} - x_7 = 4 \text{ м}; \quad M_7 = 4^2 - 5 \cdot 4 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{сеч. 8} - x_8 = 2 \text{ м}; \quad M_8 = 2^2 - 5 \cdot 2 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_7 < 0 \text{ и } M_8 < 0.$$

$$\text{сеч. 9} - x_9 = 0; \quad M_9 = 0.$$



Для построения эпюры поперечных сил на участке IV достаточно вычислить значения Q в двух сечениях (т. к. через две точки всегда можно провести прямую линию), обычно вычисляют эти значения в крайних сечениях участков:

$$\text{сеч. 7} - x_7 = 4 \text{ м}; \quad Q_7 = -5 + 2 \cdot 4 = +3 \text{ кН};$$

$$\text{сеч. 9} - x_9 = 0; \quad Q_9 = -5 + 2 \cdot 0 = -5 \text{ кН}.$$

Продольная сила на участке IV равна нулю.

Эпюры M , Q и N , построенные по полученным значениям усилий представлены на рисунке 3.3.

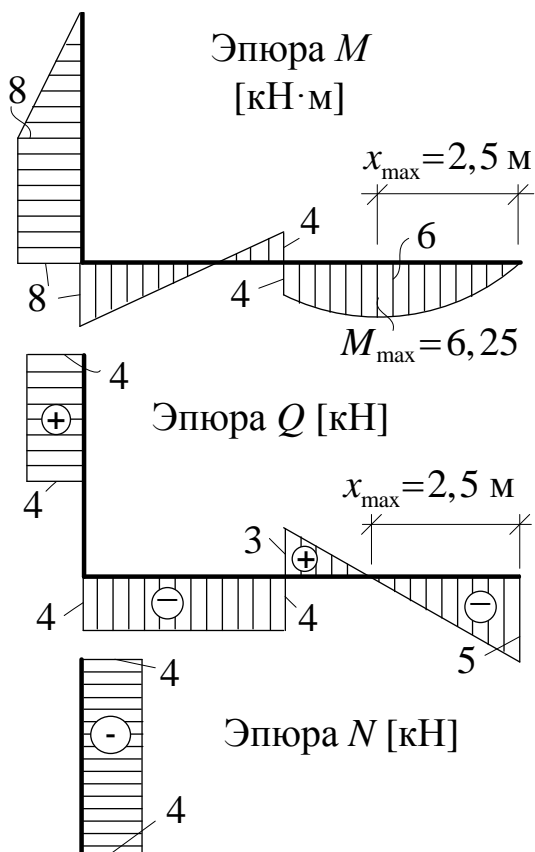
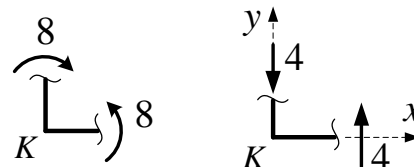


Рисунок 3.3 – Эпюры усилий

Проверка равновесия узлов:

Узел K:



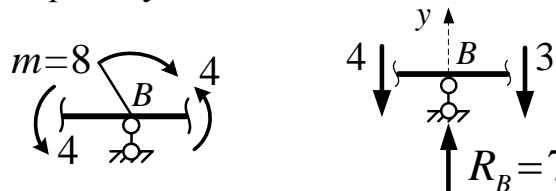
$$\Sigma M_K = 0;$$

$$\Sigma X = 0; \quad 0 = 0;$$

$$8 - 8 = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; \quad -4 + 4 = 0.$$

Опорный узел B:



$$\Sigma M_B = 0; \quad 8 - 4 - 4 = 0; \quad 8 - 8 = 0;$$

$$\Sigma X = 0; \quad 0 = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; \quad -4 - 3 + 7 = 0; \quad -7 + 7 = 0.$$

Рисунок 3.4 – Равновесие узлов рамы

Следует иметь в виду, что на участках действия равномерно распределенных нагрузок, на которых изгибающие моменты изменяются по параболическим зависимостям, эпюра M может иметь экстремумы (максимальные или минимальные значения), которые являются важной характеристикой эпюр и должны определяться дополнительно. Если выполнить анализ выражений для M_{IV} и Q_{IV} , учитывая условие экстремальности функций (согласно которому экстремум функции

находится в точке, для которой ее первая производная равна нулю) и известную дифференциальную зависимость $Q = dM / dx$ несложно заметить, что экстремальные значения изгибающие моменты принимают в сечениях, в которых поперечные силы равны нулю. Эти сечения могут быть определены из выражений для Q (в нашем примере – $Q_{IV} = 2 \cdot x_4 - 5 = 0$; $x_{\max} = 2,5$ м), или по эпюрам Q из геометрических соображений ($5/x_{\max} = 3/(4 - x_{\max})$; $x_{\max} = 2,5$ м). Максимальный изгибающий момент на участке IV рассматриваемой рамы, таким образом, имеет место в сечении 10 ($x_{\max} = 2,5$ м) и из рассмотрения правой части рамы равен:

$$M_{10} = M_{IV\max} = (2 \cdot 2,5) \cdot 1,25 - 5 \cdot 2,5 = -6,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Окончательные эпюры M , Q , N в раме представлены на рисунке 3.3.

Все узлы рамы, включая опорные, должны находиться в равновесии. Под узлами здесь будем понимать точки излома либо разветвления стержней рамы, а также точки примыкания стержней через шарниры. Поэтому после построения в раме эпюр M , Q и N целесообразно выполнить проверку равновесия ее узлов. Для этого узлы выделяем (вырезаем) из рамы, изображаем отдельно (для наглядности показываем и элементы примыкающих к узлам стержней) и прикладываем к ним усилия, возникающие в сечениях, бесконечно близких к узлам, и внешние сосредоточенные нагрузки – силы и моменты, действующие в узлах (если они есть). После этого составляем уравнения равновесия всех сил, приложенных к узлам ($\sum M_y = 0$; $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$) и проверяем их выполнение. Для рассмотренной рамы проверка равновесия узлов показана на рисунке 3.4.

⚠ Анализ полученных эпюр внутренних сил позволяет установить ряд **общих закономерностей в изменении эпюр M , Q , N** , которые должны всегда соблюдаться для стержневых систем:

1) на прямолинейном ненагруженном участке эпюра изгибающих моментов всегда линейна и может быть построена по двум ординатам (обычно для крайних сечений участка), а эпюры Q и N – постоянны (во всех сечениях одинаковы);

2) на участке действия поперечной равномерно распределенной нагрузки эпюра M всегда изменяется по параболической зависимости и должна строиться минимум по трем ординатам (обычно для крайних и среднего сечений на участке); при необходимости, в случаях трудностей с проведением кривой линии эпюры, целесообразно вычислить ординаты усилия в дополнительных точках (сечениях); выпуклость эпюры M при этом всегда направлена в сторону действия равномерно распределенной нагрузки;

эпюра Q на таком участке линейна и может быть построена по двум ординатам (для крайних сечений), а эпюра продольных сил постоянна;

если распределенная нагрузка q направлена под углом к оси стержня, то эпюра N также будет изменяться по линейной зависимости и должна строиться

по двум ординатам для крайних сечений.

3) в точке приложения сосредоточенной силы эпюра M всегда имеет излом, направленный в сторону действия силы,

эпюра Q – скачок (разрыв) на величину произведения этой силы на косинус угла между силой и осью, нормальной (перпендикулярной) к оси стержня, а эпюра N – скачок на величину произведения этой силы на синус того же угла;

если внешняя сила перпендикулярна к оси стержня, то скачок (разрыв) на эпюре Q будет равен величине самой силы, а на эпюре N скачка не будет;

4) в точке приложения сосредоточенного момента эпюра M всегда имеет скачок (разрыв) на величину этого момента;

5) в шарнире изгибающий момент всегда равен нулю (не следует путать сечение в шарнире и сечение, бесконечно близкое к шарниру; так, если в сечении, бесконечно близком к шарниру, применен сосредоточенный момент, то на эпюре M в этом сечении, согласно предыдущему положению, будет скачок с нуля в шарнире до значения сосредоточенного момента в точке его приложения);

б) на участке действия распределенной нагрузки в сечении, в котором поперечная сила равна нулю, изгибающий момент всегда имеет экстремум (максимум, минимум);

7) при принятых подходах знак эпюры Q можно определить (проверить) по эпюре M по следующему правилу: эпюра Q на участке положительна, если для совмещения по кратчайшему пути оси стержня с касательной к эпюре M на участке ось стержня необходимо поворачивать по часовой стрелке; если для указанного совмещения ось стержня нужно поворачивать против часовой стрелки, то эпюра Q на участке будет иметь отрицательный знак.

Используя изложенные закономерности в изменении эпюр M , Q , N , эти эпюры можно строить, не составляя зависимостей для изгибающих моментов, поперечных и продольных сил на участках, а ограничиваясь вычислением значений указанных усилий в характерных сечениях рамы.

Для иллюстрации такого подхода построения эпюр M , Q , N рассмотрим раму, изображенную на рисунке 3.5.

Рама является консольной и при вычислении усилий в любом ее сечении можно обойтись без определения опорных реакций, если рассматривать для всех сечений равновесие отсеченных консольных частей рамы, то есть при построении эпюр усилий в таких рамах опорные реакции можно не определять, если это не требуется специально. С другой стороны, зная опорные реакции, мы всегда имеем возможность выполнить проверку правильности предыдущих расчетов, рассматривая равновесие отсеченной части рамы со стороны опоры и равновесие опорного узла.

Для построения эпюр M , Q и N рассматриваемую раму следует разбить на

пять участков (рисунок 3.5). При построении эпюры изгибающих моментов

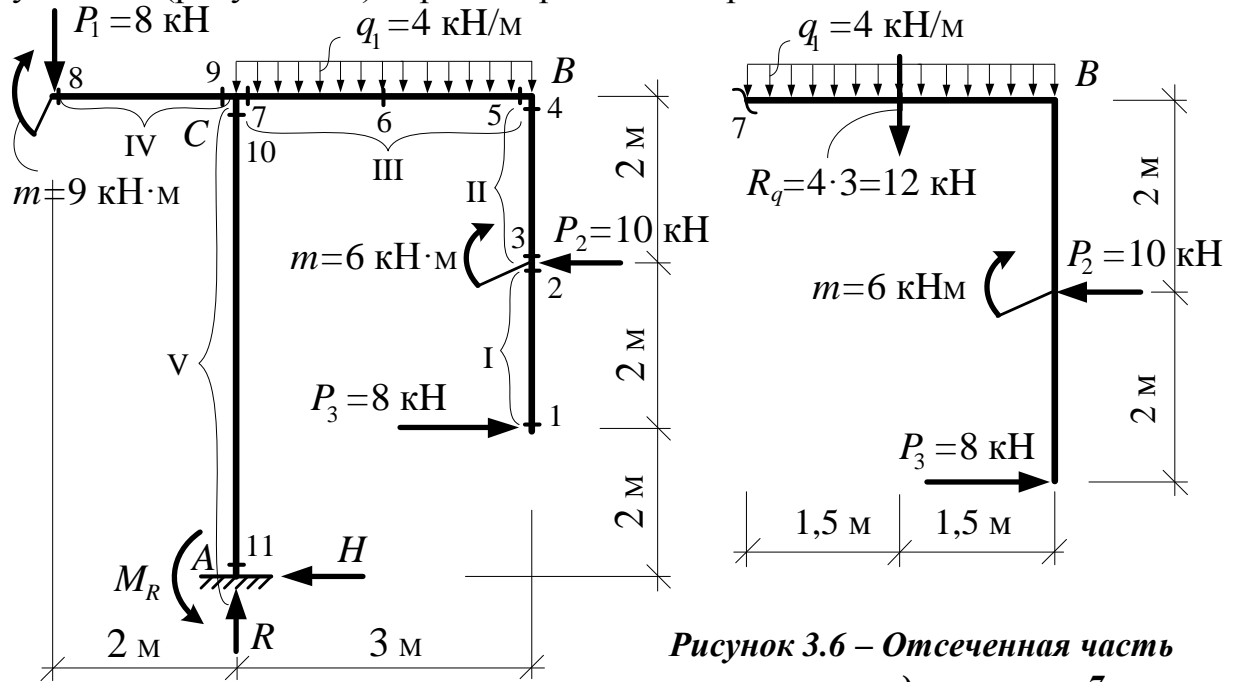


Рисунок 3.6 – Отсеченная часть для сечения 7

Рисунок 3.5 – Расчетная схема рамы

учтем, что на участках I, II, IV, V рамы эпюра M будет изменяться по линейной зависимости и для ее построения достаточно знать значения изгибающих моментов в крайних точках этих участков, то есть в сечениях 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11.

На участке III действует равномерно распределенная нагрузка и эпюра M будет изменяться по параболической зависимости и для ее построения необходимо вычислить изгибающие моменты в сечениях 5, 6, 7.

Выполним вычисление внутренних сил во всех сечениях, рассматривая равновесие консольных частей рамы (на рисунке 3.6 показана отсеченная часть для 7-го сечения):

$$M_1 = -8 \cdot 0 = 0; \quad M_2 = -8 \cdot 2 = -16 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_3 = -8 \cdot 2 + 6 = -10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4 = M_5 = -8 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 6 = -6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_6 = -8 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 6 + 4 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = -1,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_7 = -8 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 6 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 = 12 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_8 = +9 - 8 \cdot 0 = 9 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_9 = +9 - 8 \cdot 2 = -7 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{10} = +9 - 8 \cdot 2 - 8 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 6 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 = +5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{11} = +9 - 8 \cdot 2 + 8 \cdot 2 - 10 \cdot 4 + 6 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 = -7 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов в рассматриваемой раме представлена на рисунке 3.7, а.

Аналогично рассуждаем и при построении эпюр поперечных и продольных сил. На участках I, II, IV, V поперечные и продольные силы будут постоянны и

для построения на этих участках эпюр Q и N достаточно вычислить значения Q и N в одном (произвольном на участке) сечении:

$$\begin{aligned}
 Q_I = Q_1 = Q_2 &= -8 \text{ кН}; & Q_{II} = Q_3 = Q_4 &= -8 + 10 = +2 \text{ кН}; \\
 Q_{IV} = Q_8 = Q_9 &= -8; & Q_V = Q_{10} = Q_{11} &= +8 - 10 = -2 \text{ кН}; \\
 N_I = N_1 = N_2 &= 0; & N_{II} = N_3 = N_4 &= 0; \\
 N_{IV} = N_8 = N_9 &= 0; & N_V = N_{10} = N_{11} &= -8 - 4 \cdot 3 = -20 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

На участке III поперечная сила не будет постоянной, но будет изменяться линейно, и для построения эпюры Q на этом участке необходимо вычислить значения Q в двух сечениях – 5 и 7:

$$Q_5 = 0; \quad Q_7 = 4 \cdot 3 = +12 \text{ кН}.$$

Продольная же сила на этом участке будет постоянной: $N_{III} = 8 - 10 = -2$ кН.

Построенные по полученным данным эпюры Q и N изображены на рисунке 3.7, б, в.

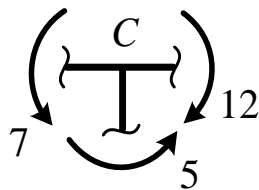
После построения окончательных эпюр M , Q и N выполняется проверка равновесия узлов:

а) на эпюре M :

Узел C

$$\Sigma M_C = 0;$$

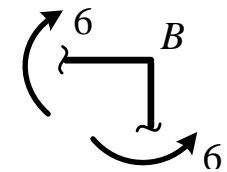
$$12 - 7 - 5 = 0;$$



Узел B

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$6 - 6 = 0;$$



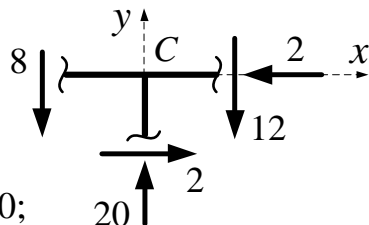
б) по эпюрам Q и N :

Узел C

$$\Sigma X = 0; \quad 2 - 2 = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; \quad -8 + 20 - 12 = 0;$$

$$20 - 20 = 0.$$



Узел B

$$\Sigma X = 0; \quad 2 - 2 = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; \quad 0 = 0.$$

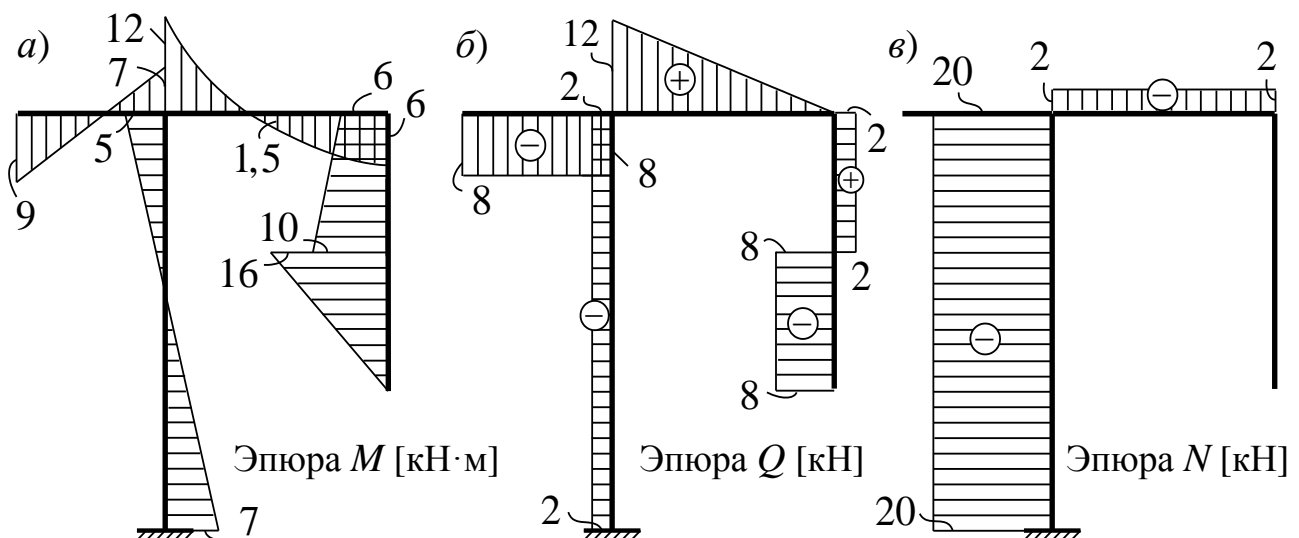
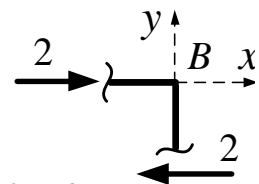


Рисунок 3.7 – Эпюры внутренних сил

На этом расчет консольной рамы можно и закончить, если нас не интересуют реакции заделки. Следует отметить, что в проектной практике расчета сооружений величины опорных реакций обычно знать необходимо (они используются в расчетах опорных узлов, нижележащих конструкций и т. д.). Поэтому здесь также выполним определение реактивных усилий в заделке, для чего рассмотрим равновесие рамы в целом:

$$\begin{aligned}\Sigma X = 0; & \quad 8 - 10 - H = 0; & \quad H = -2 \text{ кН}; \\ \Sigma Y = 0; & \quad R - 8 - 4 \cdot 3 = 0; & \quad R = 20 \text{ кН}; \\ \Sigma M_A = 0; & \quad 9 - 8 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 + 6 - 10 \cdot 4 + 8 \cdot 2 - M_R = 0; & \quad M_R = -7 \text{ кН}\cdot\text{м}.\end{aligned}$$

Несложно увидеть, анализируя окончательные эпюры M , Q и N (рисунок 3.7), что значения вычисленных опорных реакций равны соответствующим внутренним усилиям в приопорном сечении 11. Это свидетельствует о том, что опорный узел A находится в равновесии и что расчет рамы выполнен верно.

Ⓢ Анализ примеров расчета позволяет предложить следующий **порядок построения эпюр усилий M , Q и N** в рамно-стержневых и балочных системах:

1. Показываем предполагаемые направления опорных реакций в системе.
2. Составляем уравнения равновесия системы, решая которые определяем значения опорных реакций.
3. Выполняем проверку правильности определения опорных реакций.
4. Систему разбиваем на расчетные участки (участки между характерными точками – см. с. 10) и определяем сечения, в которых необходимо вычислить внутренние силы M , Q и N для построения их эпюр.
5. Вычисляем значения внутренних сил M , Q и N в указанных сечениях (на основе выше изложенных правил) и строим эпюры усилий (с учетом общих закономерностей изменения эпюр на участках); на участках действия равномерно распределенных нагрузок при этом необходимо вычислить экстремальные значения изгибающих моментов, если они есть.
6. Выполняем проверки равновесия узлов и соблюдения общих закономерностей изменения эпюр усилий.

Выполним расчет еще одной простой рамы, показанной на рисунке 3.8, *а*.

С точки зрения кинематического анализа рама представляет собой один диск (ломано-разветвленный стержень), соединенный с основанием (с землей) тремя стержнями (шарнирно подвижными опорами), не параллельными друг другу и не пересекающимися в одной точке.

Определяем опорные реакции (рисунок 3.8, *б*):

$$\begin{aligned}\Sigma M_K = 0; & \quad (10 \cdot 3) \cdot 3,5 - 7 \cdot 8 + 14 + 25 - 7 \cdot 4 - R_D \cdot 10 = 0; & \quad R_D = 6 \text{ кН}; \\ \Sigma Y = 0; & \quad R_A - 30 + 6 = 0; & \quad R_A = 24 \text{ кН};\end{aligned}$$

$$\Sigma X = 0; \quad R_B - 7 - 7 = 0 \quad R_B = 14 \text{ кН.}$$

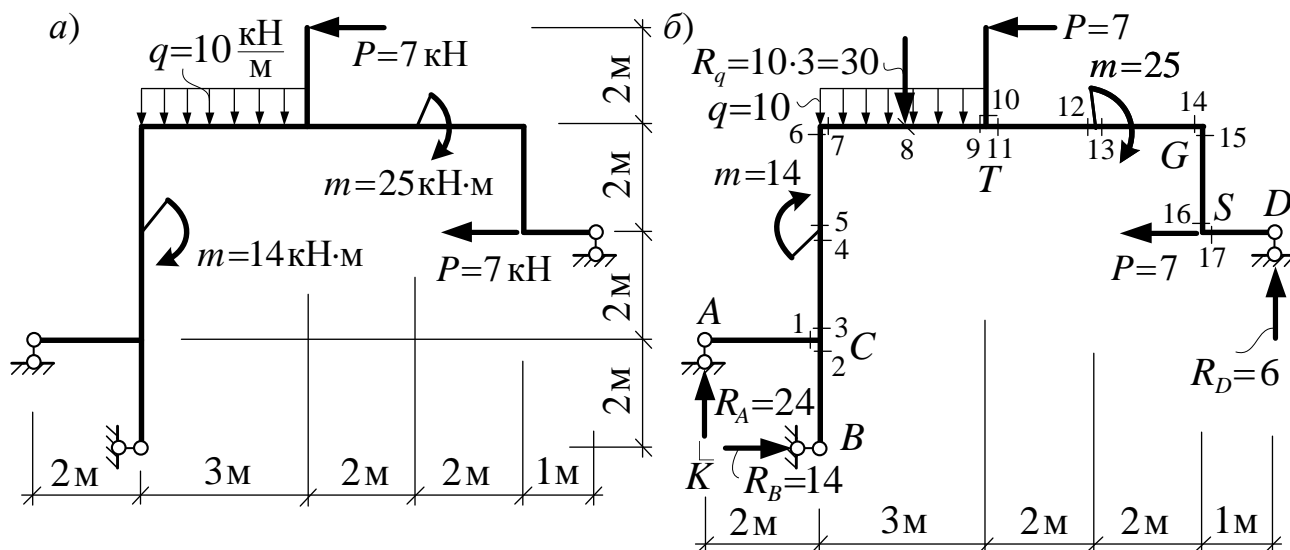


Рисунок 3.8 – Расчетная схема рамы (а) и схема расчетных сечений (б)

Проверяем правильность вычисления опорных реакций:

$$\Sigma M_T = 0; \quad 24 \cdot 5 - 14 \cdot 6 - (10 \cdot 3) \cdot 1,5 - 7 \cdot 2 + 14 + 25 + 7 \cdot 2 - 6 \cdot 5 = 0; \quad 159 - 159 = 0.$$

Для построения эпюр M , Q и N рассматриваемую раму следует разбить на десять участков (рисунок 3.8, б), на которых выделим 17 сечений, определяющих вид эпюр усилий (на участках опущены сечения, в которых расчет усилий легко выполнить даже устно и в которых изгибающие моменты равны нулю – это сечения у шарниров и на конце консоли). При этом учитываем, что эпюра изгибающих моментов на участке действия равномерно распределенной нагрузки изменяется по параболической зависимости и для ее построения необходимо вычислить изгибающие моменты, по крайней мере, в трех сечениях – 7, 8, 9; на остальных участках рамы эпюра M будет изменяться по линейным зависимостям и для ее построения на этих участках достаточно знать значения изгибающих моментов в двух крайних сечениях этих участков.

Вычисляем значений изгибающих моментов и определение растянутых волокон в расчетных сечениях (рисунок 3.8, б):

$$M_1^{\text{лев}} = 24 \cdot 2 = +48 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2^{\text{нижн}} = -14 \cdot 2 = -28 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3^{\text{нижн}} = 24 \cdot 2 - 14 \cdot 2 = +20 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_4^{\text{нижн}} = 24 \cdot 2 - 14 \cdot 4 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5^{\text{нижн}} = 24 \cdot 2 - 14 \cdot 4 + 14 = +6 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_6^{\text{нижн}} = M_7^{\text{лев}} = 24 \cdot 2 - 14 \cdot 6 + 14 = -22;$$

$$M_8^{\text{лев}} = 24 \cdot 3,5 - 14 \cdot 6 + 14 - (10 \cdot 1,5) \cdot 0,75 = +2,75 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_9^{\text{лев}} = 24 \cdot 5 - 14 \cdot 6 + 14 - (10 \cdot 3) \cdot 1,5 = +5 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{10}^{\text{верхн}} = -7 \cdot 2 = 7 - 14;$$

$$M_{11}^{прав} = 25 + 7 \cdot 2 - 6 \cdot 5 = +9 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{12}^{прав} = 25 + 7 \cdot 2 - 6 \cdot 3 = +21 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{13}^{прав} = 7 \cdot 2 - 6 \cdot 3 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{14}^{прав} = 7 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{15}^{нижн} = 7 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{16}^{нижн} = 7 \cdot 0 - 6 \cdot 1 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{17}^{прав} = -6 \cdot 1 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов в рассматриваемой раме, построенная по результатам расчетов, представлена на рисунке 3.9, а.

Переходим к построению эпюр поперечных и продольных сил.

На участках, в пределах которых нет нагрузок, поперечные и продольные силы будут постоянны и для построения их эпюр на этих участках достаточно вычислить значения усилий в одном, произвольном для каждого участка сечении:

$$Q_1^{лев} = 24 \text{ кН}; \quad Q_2^{нижн} = -14 \text{ кН}; \quad Q_3^{нижн} = Q_4^{нижн} = -14 \text{ кН};$$

$$Q_5^{лев} = +24 \text{ кН}; \quad Q_7^{прав} = Q_9 = Q_{10} = Q_{11} = Q_{12} = -6 \text{ кН};$$

$$Q_8^{прав} = -7 \text{ кН}; \quad Q_{13}^{верхн} = Q_{14} = +7 \text{ кН}; \quad Q_{15}^{прав} = -6 \text{ кН};$$

$$N_1^{лев} = 0; \quad N_2^{нижн} = 0; \quad N_3^{нижн} = N_4 = -14 \text{ кН}; \quad N_8^{верхн} = 0;$$

$$N_9^{прав} = N_{10} = N_{11} = N_{12} = -7 \text{ кН}; \quad N_{11}^{верхн} = N_{12} = -6 \text{ кН}; \quad N_{15}^{прав} = 0.$$

На участке действия равномерно распределенной нагрузки эпюра поперечных сил будет изменяться линейно и для ее построения необходимо вычислить ординаты поперечных сил в двух крайних на участке сечениях 5 и 7, а эпюра продольных сил будут постоянна и для нее достаточно вычислить значение продольной силы в одном произвольном сечении, например, в сечении 5:

$$Q_5^{лев} = +24 \cdot \text{кН}; \quad Q_7^{лев} = +24 - (10 \cdot 3) = -6 \text{ кН}; \quad N_5^{лев} = N_7 = -14 \cdot \text{кН}.$$

Построенные по полученным данным эпюры поперечных и продольных сил изображены на рисунке 3.9.

На участке действия равномерно распределенной нагрузки на эпюре поперечных сил Q имеется сечение, в котором поперечная сила равна нулю. Положение этого сечения определяется из соотношения:

$$\frac{24}{x_{\max}} = \frac{6}{3 - x_{\max}}; \Rightarrow 24 \cdot (3 - x_{\max}) = 6 \cdot x_{\max}; \quad 30 \cdot x_{\max} = 72; \quad x_{\max} = 2,4 \text{ м}.$$

В этом сечении изгибающий момент будет иметь максимальное значение:

$$M_{\max}^{лев} = 24 \cdot (2 + 2,4) - 14 \cdot 6 + 14 - (10 \cdot 2,4) \cdot 1,2 = -7,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

После построения окончательных эпюр усилий M , Q и N выполняется

$$\Sigma Y = 0; \quad -6 + 6 = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; \quad -6 + 6 = 0.$$

Выполним еще расчет простой рамы, показанной на рисунке 3.10.

Отметим, что равномерно распределенную нагрузку, действующую на наклонный стержень перпендикулярно к нему, можно учитывать непосредственно, что удобно при вычислении усилий в сечениях, расположенных на этом наклонном стержне (см. далее расчет усилий M , Q и N в сечениях 2, 3 и 4), либо через

равнодействующую этой распределенной нагрузки $R_q = 6 \cdot 5 = 30$ кН, которую можно разложить на горизонтальную и вертикальную составляющие (рисунок 3.11), что часто очень удобно, в том числе при определении опорных реакций.

Определяем опорные реакции (рисунок 3.11):

$$\Sigma M_D = 0; \quad 24 \cdot 4 - 18 \cdot 3,5 + 52 - 29 - 13 \cdot 2 + 21 \cdot 4 - R_C \cdot 6 = 0; \quad R_C = 19 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_K = 0; \quad 24 \cdot 4 - 18 \cdot 9,5 + 52 - 29 - 13 \cdot 2 - 21 \cdot 2 + R_B \cdot 6 = 0; \quad R_B = 20 \text{ кН};$$

$$\Sigma X = 0; \quad -H_A + 24 - 13 = 0 \quad H_A = 11 \text{ кН}.$$

Проверка правильности вычисления опорных реакций:

$$\Sigma M_T = 0; \quad 11 \cdot 6 - 24 \cdot 2 - 18 \cdot 5,5 + 52 - 29 + 20 \cdot 2 + 13 \cdot 4 + 21 \cdot 2 - 19 \cdot 4 = 0; \quad 223 - 223 = 0.$$

Для построения эпюр M , Q и N рассматриваемую раму следует разбить на восемь участков (рисунок 3.11), на которых выделим 15 сечений, определяющих вид эпюр усилий (на участках опущены сечения, в которых расчет усилий легко выполняется и в которых изгибающие моменты равны нулю – сечения у шарниров). При этом учитываем, что эпюра изгибающих моментов на участке действия равномерно распределенной нагрузки изменяется по параболической зависимости и для ее построения необходимо вычислить изгибающие моменты, по крайней мере, в трех сечениях – 2, 3, 4; на остальных участках рамы эпюра M изменяется по линейным зависимостям и для ее построения достаточно знать значения изгибающих моментов в двух крайних сечениях этих участков.

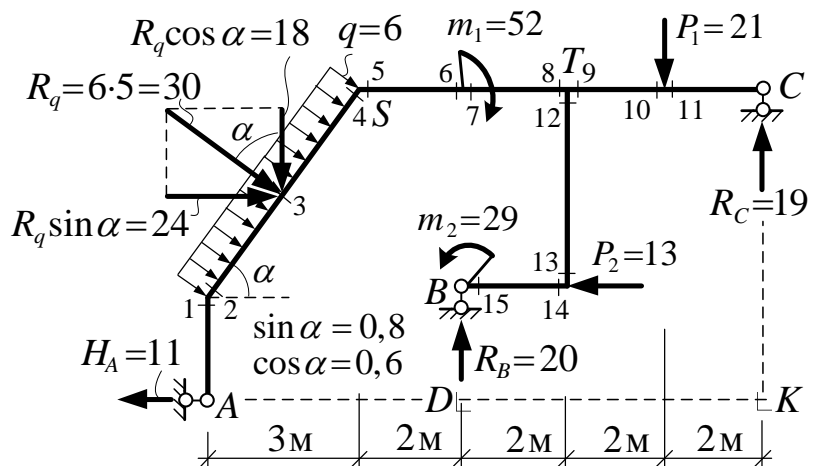


Рисунок 3.11 – Расчетная схема рамы

Вычисление значений изгибающих моментов и определение растянутых волокон в расчетных сечениях:

$$\begin{aligned}
 M_1^{нижн} &= M_2^{нижн} = +11 \cdot 2 = +22 \text{ кН}\cdot\text{м}; & & \text{1} \quad \text{2} \\
 M_3^{нижн} &= 11 \cdot 4 - (6 \cdot 2,5) 1,25 = +25,25 \text{ кН}\cdot\text{м}; & & \text{3} \quad \text{5} \\
 M_4^{нижн} &= 11 \cdot 6 - (6 \cdot 5) 2,5 = -9 \text{ кН}\cdot\text{м}; & M_5^{лев} &= 11 \cdot 6 - (6 \cdot 5) 2,5 = -9 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 M_6^{лев} &= 11 \cdot 6 - 24 \cdot 2 - 18 \cdot 3,5 = -45 \text{ кН}\cdot\text{м}; & & \text{6} \\
 M_7^{лев} &= 11 \cdot 6 - 24 \cdot 2 - 18 \cdot 3,5 + 52 = +7 \text{ кН}\cdot\text{м}; & & \text{7} \\
 M_8^{лев} &= 11 \cdot 6 - 24 \cdot 2 - 18 \cdot 5,5 + 52 = -29 \text{ кН}\cdot\text{м}; & & \text{8} \\
 M_9^{прав} &= 21 \cdot 2 - 19 \cdot 4 = -34 \text{ кН}\cdot\text{м}; & M_{10}^{прав} &= M_{11}^{прав} = -19 \cdot 2 = -38 \text{ кН}\cdot\text{м}; & & \text{10, 11} \\
 M_{12}^{нижн} &= M_{13}^{нижн} = 13 \cdot 4 + 20 \cdot 2 - 29 = 63 \text{ кН}\cdot\text{м}; & & & & \text{12, 13} \\
 M_{14}^{лев} &= 20 \cdot 2 - 29 = 11 \text{ кН}\cdot\text{м}; & M_{15}^{лев} &= 20 \cdot 0 - 29 = -29 \text{ кН}\cdot\text{м}. & & \text{14} \quad \text{15}
 \end{aligned}$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов M в рассматриваемой раме, построенная по результатам расчетов, представлена на рисунке 3.12, а. Для проверки правильности построения эпюры M необходимо производить проверку равновесия узлов. На рисунке 3.12, б показана эта проверка для узлов S и T .

Подобно выполняем и построение эпюр поперечных и продольных сил.

На участке действия равномерно распределенной нагрузки эпюра поперечных сил будет изменяться линейно и для ее построения необходимо вычислить значения Q в двух сечениях – 2 и 4. Эпюра продольных сил N на этом участке вследствие того, что распределенная нагрузка перпендикулярна оси стержня, будет постоянной (одинаковой по длине стержня) и для ее построения можно вычислять продольную силу в произвольном сечении участка (рисунок 3.11):

$$Q_2^{нижн} = 11 \cdot \sin \alpha = 11 \cdot 0,8 = 0,88 \text{ кН}; \quad Q_4^{нижн} = 11 \cdot \sin \alpha - 6 \cdot 5 = 11 \cdot 0,8 - 30 = -21,2;$$

$$N_2^{нижн} = N_3^{нижн} = N_4^{нижн} = +11 \cdot \cos \alpha = 11 \cdot 0,6 = +6,6 \text{ кН}.$$

На остальных участках поперечные и продольные силы будут постоянны и для построения эпюр Q и N на этих участках достаточно вычислить значения этих усилий в одном, произвольном на каждом участке сечении:

$$\begin{aligned}
 Q_1^{нижн} &= +11 \text{ кН}; & Q_5^{лев} &= Q_6^{лев} = Q_7^{лев} = Q_8^{лев} = -18 \text{ кН}; & Q_{11}^{прав} &= -19 \text{ кН}; \\
 Q_9^{прав} &= Q_{10} = 21 - 19 = +2 \text{ кН}; & Q_{15}^{лев} &= Q_{14} = +20 \text{ кН}; & Q_{12}^{нижн} &= Q_{13}^{нижн} = +13 \text{ кН}; \\
 N_1^{нижн} &= 0; & N_5^{лев} &= N_6^{лев} = N_7^{лев} = N_8^{лев} = +11 - 24 = -13 \text{ кН};
 \end{aligned}$$

$$N_9^{прав} = N_{10} = N_{11} = 0; \quad N_{12}^{нижн} = N_{13}^{нижн} = -20 \text{ кН}; \quad N_{14}^{лев} = N_{15}^{лев} = 0.$$

Построенные по полученным данным эпюры Q и N изображены на рисунке 3.12.

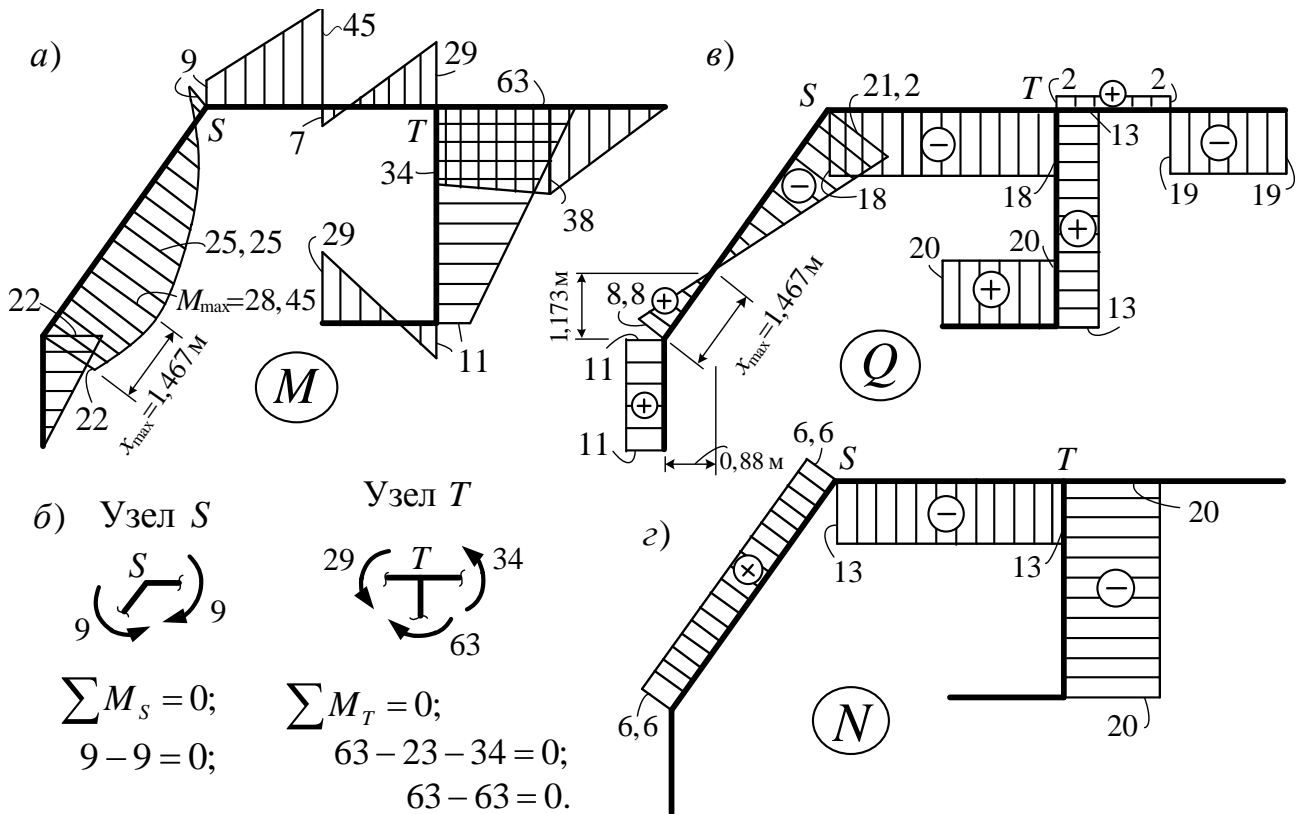


Рисунок 3.12 – Эпюры внутренних сил и равновесие узлов по моментам

На участке действия равномерно распределенной нагрузки на эпюре Q (рисунок 3.12, в) имеется сечение, в котором поперечная сила равна нулю. Положение этого сечения определяется из соотношения:

$$\frac{3,2}{14,8} = \frac{x_{\max}}{5 - x_{\max}}; \quad 3,2 \cdot (5 - x_{\max}) = 14,8 \cdot x_{\max}; \quad 18 \cdot x_{\max} = 16; \quad x_{\max} = 0,889 \text{ м}.$$

В этом сечении изгибающий момент будет иметь максимальное значение:

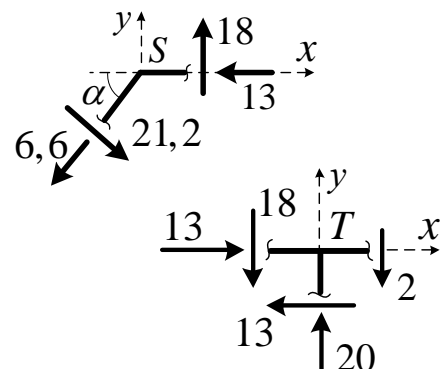
$$M_{\max}^{лев} = 24 \cdot (2 + 0,533) - 14 \cdot (2 + 0,711) - (10 \cdot 0,533) \cdot 0,5 \cdot 0,533 = 21,42 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для проверки правильности построения эпюр Q и N необходимо выполнить проверку равновесия всех узлов по поперечным и продольным силам. Здесь приведем проверку равновесия узлов S и T (рисунок 3.12, в, г):

Узел S : $\sum X = 0; \quad -6,6 \cdot 0,6 + 21,2 \cdot 0,8 - 13 = 0;$
 $16,96 - 16,96 = 0;$

$\sum Y = 0; \quad -6,6 \cdot 0,8 - 21,2 \cdot 0,6 + 18 = 0;$
 $18,0 - 18,0 = 0;$

Узел T : $\sum X = 0; \quad 13 - 13 = 0;$



$$\Sigma Y = 0; \quad -18 - 2 + 20 = 0; \quad 20 - 20 = 0.$$

4. Особенности расчета трехшарнирных рам

Трехшарнирные рамы (рисунок 2.2, б) имеют обычно более трех внешних опорных реакций, либо замкнутые контура, без «разрезания» которых нельзя полностью определить внутренние силы в таких системах.

Поэтому для расчета трехшарнирных рам трех уравнений равновесия всей системы недостаточно, – необходимо составлять дополнительно уравнения равновесия отдельных частей этих систем и определять наряду с внешними опорными реакциями и некоторые внутренние силы – усилия в шарнирах, в затяжках, – после нахождения которых построение эпюр усилий M , Q , N в этих системах можно выполнить по тем же принципам, что и в простых рамах.

Ниже рассмотрим возможные схемы определения внешних опорных реакций и некоторых внутренних сил для ряда видов рам, знания которых достаточно для построения эпюр усилий в этих системах (внешняя нагрузка на рамы может быть любой и на схемах рам не показывается; при наличии особенностей, связанных с приложением нагрузок, о них будет сказано отдельно).

I. Трехшарнирная рама с опорами в одном уровне (рисунок 4.1)

Возможный порядок определения опорных реакций:

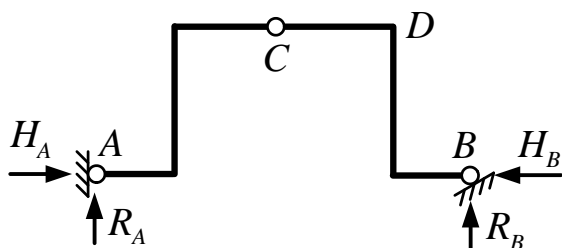


Рисунок 4.1– Схема рамы

$$1) \sum M_A = 0; \quad R_B = \dots$$

$$2) \sum Y = 0; \quad R_A = \dots$$

$$3) \sum M_C^{лев} = 0; \quad H_A = \dots$$

$$4) \sum X = 0; \quad H_B = \dots$$

Проверка: $\sum M_D^{прав} = 0; \dots$

II. Трехшарнирная рама с опорами в разных уровнях (рисунок 4.2)

Особенность этой рамы в том, что для нее нельзя составить ни одного уравнения равновесия, в которое входила бы только одна неизвестная реакция, и для определения опорных реакций здесь не обойтись без решения системы уравнений. Покажем один из вариантов составления уравнений для расчета опорных реакций в такой раме:

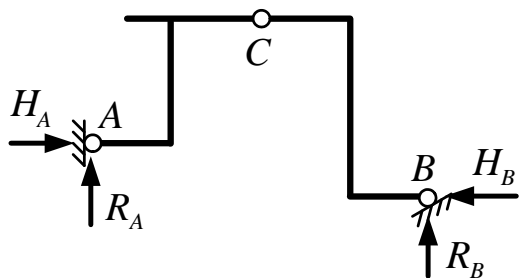


Рисунок 4.2 – Схема рамы

$$\begin{cases} 1) \sum M_A = 0; & (R_B, H_B) \\ 2) \sum M_C^{прав} = 0; & (R_B, H_B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_B = \dots \\ H_B = \dots \end{cases}$$

$$3) \sum X = 0; \quad H_A = \dots$$

$$4) \sum Y = 0; \quad R_A = \dots$$

Проверка: $\sum M_C^{лев} = 0; \dots$

III. Трехшарнирная рама с затяжкой (рисунок 4.3, а)

Особенностью рамы здесь являются:

1) наличие в структуре рамы замкнутого контура (CDK), в сечениях которого нельзя определить внутренние силы без разрезания контура;

2) при этом в рамках контура здесь имеется особый стержень (DK), который при отсутствии на него нагрузки работает только на растяжение-сжатие; при разрезании такого стержня в нем возникает только продольная сила. Такой стержень называют затяжкой.

С учетом сказанного для разрезания замкнутого контура здесь удобнее всего разрезать затяжку, в которой будет возникать одна неизвестная величина – продольная сила в затяжке.

Таким образом: Затяжкой называют прямолинейный стержень, соединяющийся с остальными частями системы по концам шарнирно и работающий при отсутствии на него нагрузки только на растяжение-сжатие.

Рассмотрим раму, изображенную на рисунке 4.3, а. Пусть стержень DK *ненагружен*. Вырежем и рассмотрим его равновесие (рисунок 4.3, б):

$$\begin{aligned} \Sigma M_D = 0; & \quad Y_K \cdot l = 0; \quad Y_K = 0; \\ \Sigma M_K = 0; & \quad Y_D \cdot l = 0; \quad Y_D = 0; \\ \Sigma X = 0; & \quad H_D - H_K = 0; \quad H_D = H_K = H. \end{aligned}$$

Получаем, что в стержне DK возникает только продольная сила, и он соответственно работает только на растяжение-сжатие, то есть стержень DK является затяжкой, продольную силу в которой обозначим H .

Тогда для рамы с ненагруженной затяжкой можно принять следующий порядок определения опорных реакций и внутренних сил, знания которых будет достаточно для определения усилий в сечениях системы:

1) определяем внешние опорные реакции (которых в такой раме (рисунок 4.3, а) три, как в обычных простых рамах), например, из уравнений:

$$1) \Sigma M_A = 0; \quad R_B = \dots \quad 2) \Sigma M_B = 0; \quad R_A = \dots \quad 3) \Sigma X = 0; \quad H_A = \dots,$$

и выполняем проверку правильности их вычисления: $\Sigma Y = 0$;

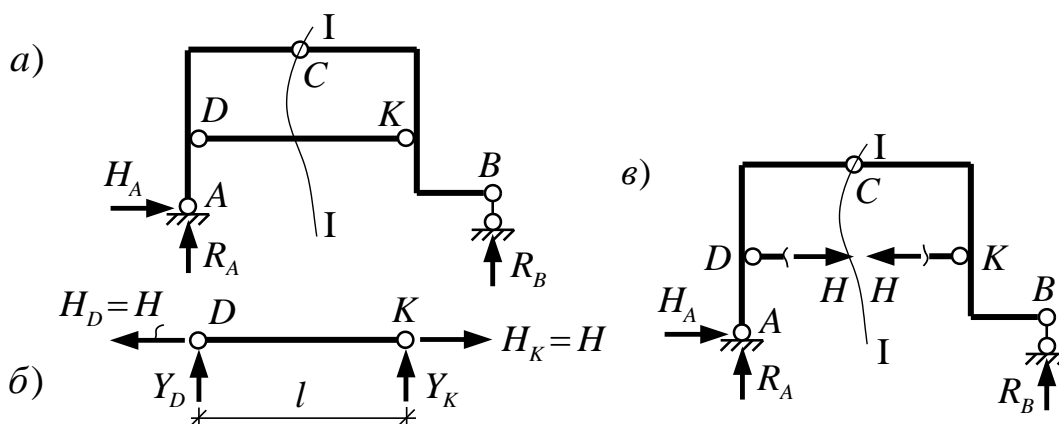


Рисунок 4.3 – Схема рамы (а), вид затяжки (б) и схема разрезания затяжки (в)

2) проводим сечение $I-I$ через шарнир C и затяжку DK (рисунок 4.3, а), усилие в которой обозначаем H ; рама принимает вид, показанный на рисунке 4.3, в; для определения усилия в затяжке рассмотрим равновесие одной из полурам:

$$\Sigma M_C^{прав} = 0; \quad H = \dots$$

3) для проверки используем уравнение равновесия другой части рамы:

$$\Sigma M_C^{лев} = 0.$$

В случае трехшарнирной рамы с нагруженной затяжкой (рисунок 4.4, а)

в затяжке будут возникать все три вида внутренних сил для рамно-стержневых систем – изгибающие моменты, поперечные и продольные силы, при этом изгибающие моменты и поперечные силы в затяжке можно определить независимо от всей рамы, рассмотрев затяжку отдельно.

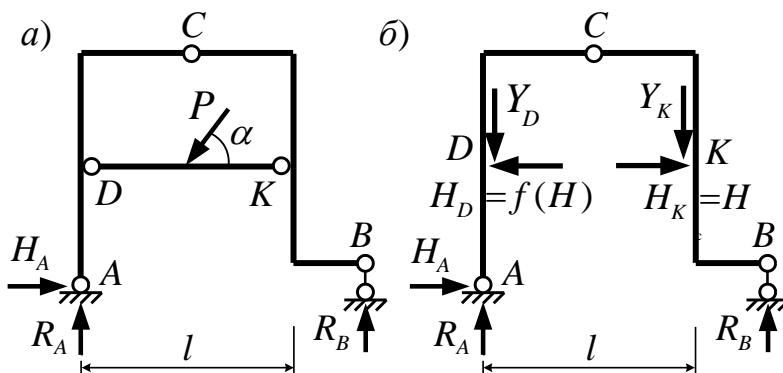


Рисунок 4.4 – Схема рамы

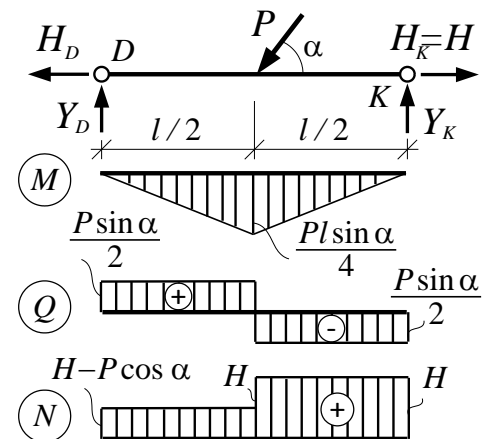


Рисунок 4.5 – Расчет затяжки

С учетом сказанного схема определения опорных реакций и необходимых для расчета рамы (для построения в ней эпюр внутренних сил) реакций во внутренних связях (в затяжке) может быть следующей:

1) определяем внешние опорные реакции R_A , H_A и R_B – так же, как и для трехшарнирной рамы с ненагруженной затяжкой (рисунок 4.4, а):

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0; \quad R_B = \dots \quad \Sigma X = 0; \quad H_A = \dots \\ \Sigma M_B = 0; \quad R_A = \dots \quad \text{Проверка: } \Sigma Y = 0; \end{aligned}$$

2) вырезаем затяжку DK и рассматриваем ее равновесие с учетом действующих на нее нагрузок (рисунок 4.5); из уравнений равновесия $\Sigma M_D = 0$ и $\Sigma M_K = 0$ определяем вертикальные реактивные усилия Y_D и Y_K в шарнирах D и K , а из уравнения $\Sigma X = 0$ найдем зависимость между H_D и H_K , обозначив одну из этих величин просто H (как усилие в затяжке, которое пока неизвестно).

Например, для нагрузки на затяжку, представленной на рис. 4.5, получим:

$$\begin{aligned} Y_D = Y_K = 0,5 P \sin \alpha; \\ H_D = H_K - P \cos \alpha = H - P \cos \alpha. \end{aligned}$$

Имея эти величины, можно построить в затяжке окончательные эпюры усилий M , Q и эпюру N с точностью до параметра H , определяющего продоль-

ные силы в затяжке (рисунок 4.5);

3) рассматриваем раму ABC без затяжки, но с учетом передаваемых от нее на раму (в обратных направлениях) реактивных сил в шарнирах D и $K - Y_D, Y_K$, которые уже известны, и усилий H_D, H_K , которые известны с точностью до параметра H (рисунок 4.4, б). Определим этот параметр, рассмотрев равновесие одной из полурам:

$$\Sigma M_C^{прав} = 0; \quad H = \dots$$

4) выполним проверку расчета, рассмотрев равновесие второй полурамы:

$$\Sigma M_C^{лев} = 0.$$

IV. Трехшарнирная рама с двумя параллельными затяжками (рис. 4.6)

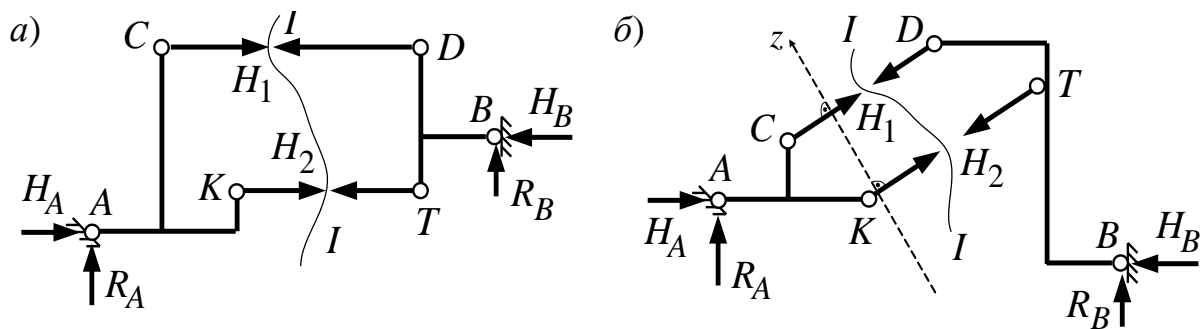


Рисунок 4.6 – Схемы рам с двумя параллельными затяжками

Здесь также нельзя составить ни одного уравнения равновесия рамы в целом, в которое входило бы только одно неизвестное, и в раме имеется замкнутый контур (образованный стержнями рамы и затяжками), который необходимо разрезать, что бы определить усилия во всех элементах рамы.

Возможная схема расчета опорных реакций и усилий в затяжках для рамы, представленной на рисунке 4.6, а:

1) проводим сечение $I-I$ и рассматриваем равновесие левой и правой частей рамы:

$$\Sigma Y^{лев} = 0; \quad R_A = \dots$$

$$\Sigma Y^{прав} = 0; \quad R_B = \dots$$

2) рассматриваем равновесие рамы в целом:

$$\Sigma M_A = 0; \quad H_B = \dots \quad \Sigma M_B = 0; \quad H_A = \dots$$

3) рассматриваем равновесие левой части, и находим усилия в затяжках:

$$\Sigma M_K^{лев} = 0; \quad H_1 = \dots \quad \Sigma M_C^{лев} = 0; \quad H_2 = \dots$$

4) выполняем проверку правильности определения реакций: $\Sigma M_B^{прав} = 0$;

Если в рассматриваемой раме параллельные затяжки не будут горизонтальны (рисунок 4.6, б), то придется решать систему уравнений, например, вида:

$$\begin{cases} 1) \Sigma M_A = 0; & (R_B, H_B) \\ 2) \Sigma Z^{прав} = 0; & (R_B, H_B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_B = \dots \\ H_B = \dots \end{cases}$$

после чего можно определять остальные внешние опорные реакции:

$$3) \Sigma X = 0; \quad H_A = \dots$$

$$4) \Sigma Y = 0; \quad R_A = \dots$$

и усилия в затяжках: $5) \Sigma M_K^{лев} = 0; \quad H_1 = \dots$

$$6) \Sigma M_C^{лев} = 0; \quad H_2 = \dots$$

V. Трехшарнирная рама с двумя пересекающимися затяжками (рисунок 4.7)

Здесь точка пересечения затяжек, являющихся по существу прямолинейными связями, может рассматриваться как фиктивный шарнир, соединяющий левый (*ADU*) и правый (*KSB*) части (диски) рамы. С учетом сказанного рассматриваемая рама аналогична трехшарнирной раме с опорами в одном уровне, и схема ее расчета будет подобной:

$$1) \quad \Sigma M_A = 0; \quad R_B = \dots$$

$$2) \quad \Sigma M_B = 0; \quad R_A = \dots$$

3) в раме имеется замкнутый контур, который необходимо разрезать для дальнейшего определения внутренних сил в сечениях, расположенных внутри контура, поэтому проводим сечение *I-I* и рассматриваем равновесие левой и правой частей рамы, определяя горизонтальные опорные реакции:

$$\Sigma M_C^{лев} = 0; \quad H_A = \dots \quad \Sigma M_C^{прав} = 0; \quad H_B = \dots$$

4) теперь определяем усилия в затяжках:

$$\Sigma M_U^{лев} = 0; \quad H_1 = \dots$$

$$\Sigma M_D^{лев} = 0; \quad H_2 = \dots$$

5) проверка:

$$\Sigma X^{прав} = 0; \dots \quad \Sigma Y^{прав} = 0; \dots$$

$$\text{или} \quad \Sigma M_B^{прав} = 0.$$

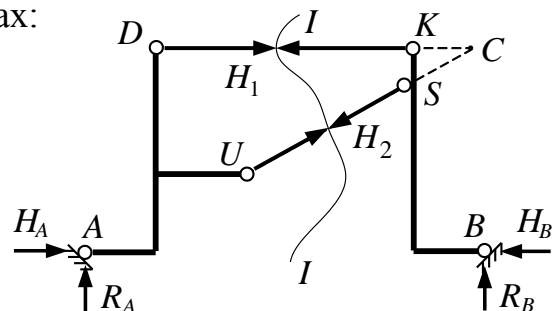


Рисунок 4.7 – Схема рамы

Если опоры рамы *A* и *B* будут располагаться в разных уровнях, то для определения внешних опорных реакций придется решать систему уравнений аналогично, как для трехшарнирной рамы с опорами в разных уровнях (см. пункт II данного раздела).

VI. Отметим еще одно возможное упрощение в расчетах трехшарнирных рам. Если в структуре рамы имеется диск, который не нагружен и который соединяется с другими дисками (либо с основанием) с помощью только двух шарниров (смотри, например, диск *AC* на рисунок 4.8), то можно и нужно использовать условие равновесия такого диска, а такой диск будет находиться в равновесии только в том случае, если реактивные силы в указанных двух шарнирах направлены по прямой, соединяющей шарниры.

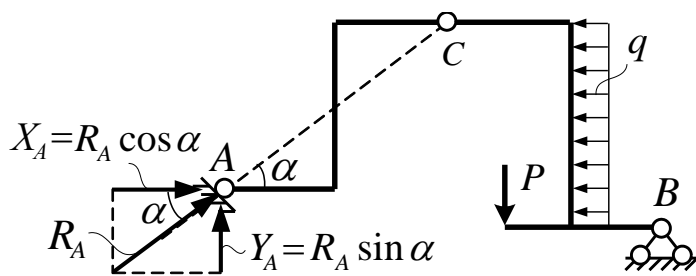


Рисунок 4.8 – Схема рамы с известным направлением опорной реакции

Это означает, что мы знаем направление реактивных усилий, действующих на диск, и нет необходимости искать их в виде составляющих. Например, для рамы на рисунке 4.8 реакция в шарнирно неподвижной опоре A (R_A) будет направлена по прямой AC , и ее величину легко найти из уравнения: $\sum M_B = 0$. Несложно после этого найти и составляющие реакции R_A , если это необходимо.

Приведем примеры расчета трехшарнирных рам.

Рассмотрим расчет рамы, представленной на рисунке 4.4, *a*.

Определим вначале опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; \quad 10 \cdot 4 - 10 - 20 \cdot 4 - 10 + R_D \cdot 10 = 0; \quad R_D = 6 \text{ кН};$$

$$\sum M_C^{прав} = 0; \quad 20 \cdot 2 + 6 \cdot 7 - 10 - R_B \cdot 6 = 0; \quad R_B = 12 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad 10 \cdot 4 - 10 - 20 \cdot 4 - 10 + R_A \cdot 10 = 0; \quad R_A = 6 \text{ кН};$$

$$\sum M_C^{лев} = 0; \quad 6 \cdot 3 - 10 \cdot 2 - 10 + \cdot 6 = 0; \quad H_A = 2 \text{ кН};$$

Проверка: $\sum X = 0; \quad -2 + 10 - 20 + 12 = 0; \quad 22 - 22 = 0; \quad \sum Y = 0; \quad -6 + 6 = 0.$

Для построения эпюр M , Q и N рассматриваемую раму разобьем на восемь участков (рисунок 4.4, *б*). Учтем, что на участке действия равномерно распределенной нагрузки эпюра изгибающих моментов будет изменяться по параболической зависимости и для ее построения необходимо вычислить изгибающие моменты, по крайней мере, в трех сечениях – в сечениях 9, 10, 11. На остальных участках эпюра M будет изменяться по линейной зависимости и для ее построения достаточно знать значения изгибающих моментов в крайних точках этих участков, то есть в сечениях 1, 2, 3, 4, 8 и 12, 13, 14 (здесь опущены сечения, в которых расчет усилий легко выполняется даже устно и в которых изгибающие моменты явно равны нулю, – например, сечения у шарниров).

Вычисление усилий в расчетных сечениях (с определением растянутых волокон):

$$M_1^{лев} = 6 \cdot 1 = +6 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2^{нижн} = 6 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = +6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3^{нижн} = M_4 = 6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = +10 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_4^{нижн} = 6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 10 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5^{нижн} = M_6^{нижн} = 6 \cdot 1 + 2 \cdot 4 - 12 = +2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

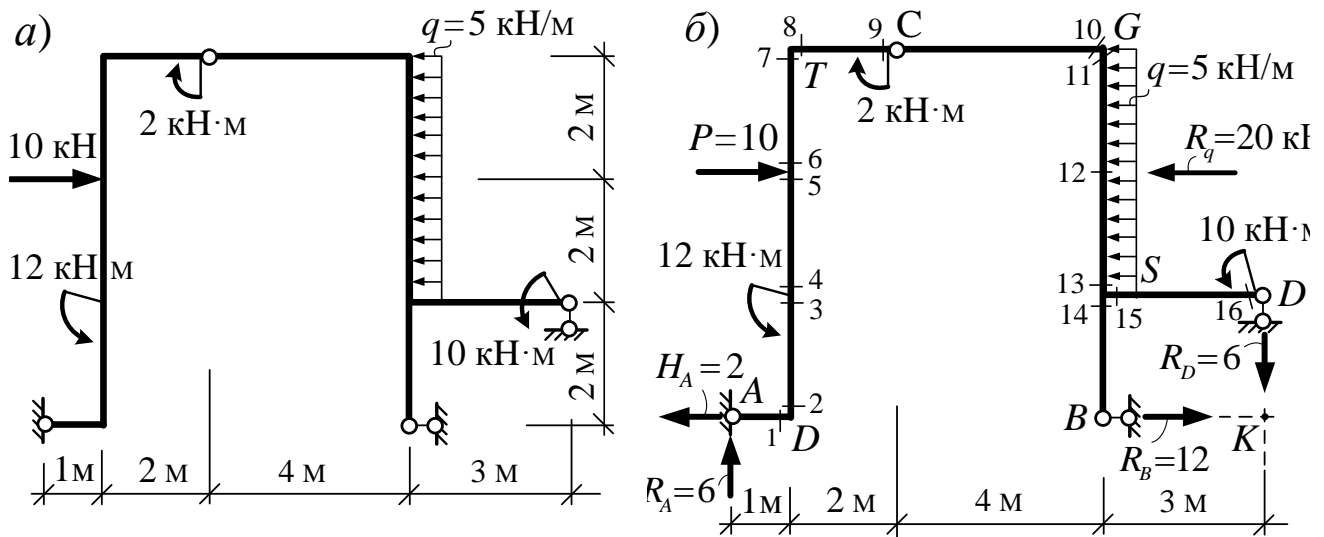


Рисунок 4.4 – Расчетная схема рамы (а) и схема обозначения сечений (б)

$$M_7^{нижн} = M_8^{лев} = 6 \cdot 1 + 2 \cdot 6 - 12 - 10 \cdot 2 = -14 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_9^{лев} = 6 \cdot 3 + 2 \cdot 6 - 12 - 10 \cdot 2 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{10}^{лев} = 6 \cdot 7 + 2 \cdot 6 - 10 \cdot 2 - 12 + 2 = +24 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{11}^{нижн} = (5 \cdot 4) \cdot 2 - 10 + 6 \cdot 3 - 12 \cdot 6 = -24 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{12}^{прав} = (5 \cdot 2) \cdot 1 - 10 + 6 \cdot 3 - 12 \cdot 4 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{13}^{нижн} = -10 + 6 \cdot 3 - 12 \cdot 2 = -16 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{14}^{нижн} = -12 \cdot 2 = -24 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{15}^{прав} = -10 + 6 \cdot 3 = +8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{16}^{прав} = -10 + 6 \cdot 0 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов представлена на рисунке 4.5, а.

Аналогично подходим и к построению эпюр поперечных и продольных сил.

На участке действия равномерно распределенной нагрузки 9–11 поперечная сила будет изменяться линейно и для ее построения на этом участке необходимо вычислить значения поперечной силы в двух сечениях – 9 и 11 (см. рисунки 4.4 и 4.5, б), а продольная сила на этом участке будет постоянной:

$$Q_{11}^{нижн} = + (5 \cdot 4) - 12 = +8 \text{ кН}; \quad Q_{13}^{нижн} = -12 \text{ кН}; \quad N_{11}^{нижн} = N_{13}^{нижн} = +8 \text{ кН}.$$

На остальных участках поперечные и продольные силы будут постоянны и для построения их эпюр на этих участках достаточно вычислить значения Q и N в одном из сечений участков:

$$Q_1^{лев} = +6 \text{ кН}; \quad Q_2^{нижн} = Q_3 = Q_4 = Q_5 = +2 \text{ кН}; \quad Q_6^{нижн} = Q_7 = +2 - 10 = -8 \text{ кН};$$

$$Q_8^{лев} = Q_9 = Q_{10} = +6 \text{ кН}; \quad Q_{14}^{нижн} = -12 \text{ кН}; \quad Q_{15}^{прав} = Q_{16} = +6 \text{ кН};$$

$$N_1^{лев} = 0; \quad N_2^{нижн} = N_3 = N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = -6 \text{ кН};$$

$$N_8^{лев} = N_9 = N_{10} = +2 - 10 = -8 \text{ кН}; \quad N_{14}^{нижн} = 0; \quad N_{15}^{прав} = 0.$$

Построенные по полученным данным эпюры Q и N изображены на рисунке 4.6.

На участке действия равномерно распределенной нагрузки на эпюре Q имеется особое сечение, в котором поперечная сила равна нулю. В этом сечении изгибающий момент будет иметь максимальное значение на участке.

Положение этого сечения найдем из соотношения (рисунок 4.6, а):

$$\frac{8}{4 - x_{\max}} = \frac{12}{x_{\max}}; \quad 8 \cdot x_{\max} = 12 \cdot (4 - x_{\max}); \quad 20 \cdot x_{\max} = 48; \quad x_{\max} = 2,4 \text{ м.}$$

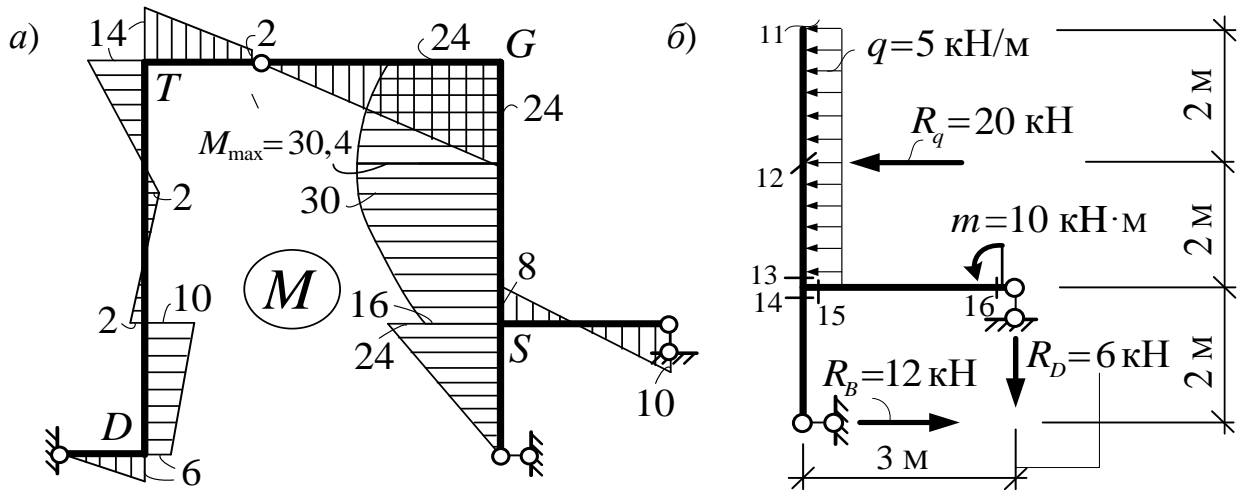


Рисунок 4.5 – Эпюры изгибающих моментов (а) и вид отсеченной части (б)

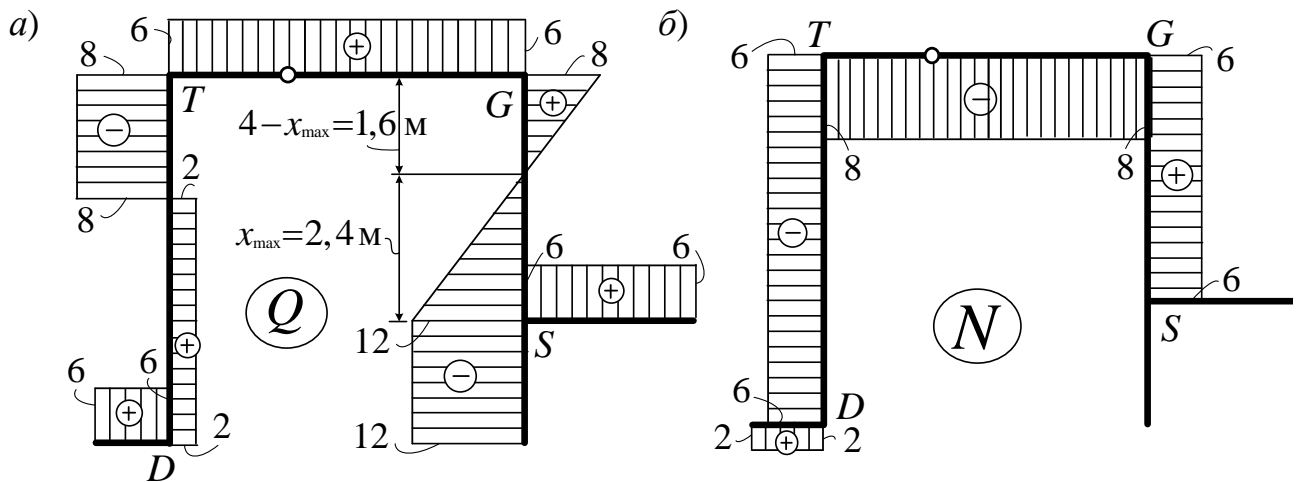


Рисунок 4.6 – Эпюры поперечных и продольных сил

Тогда величина максимального изгибающего момента на участке равна:

$$M_{\max}^{\text{прав}} = (5 \cdot 1,5) \cdot 0,75 - 10 + 6 \cdot (3 + 1,125) - 12 \cdot (2 + 1,5) = -21,625 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Проверки равновесия узлов для окончательных эпюр M , Q и N :

а) на эпюре M :

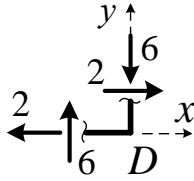
$\Sigma M_D = 0;$	$\Sigma M_T = 0;$	$\Sigma M_G = 0;$	$\Sigma M_S = 0;$
$6 - 6 = 0;$	$2 - 2 = 0;$	$6 - 6 = 0;$	$16 + 8 - 24 = 0.$

б) по эпюрам Q и N :

Узел D:

$$\Sigma X = 0; \quad -2 + 2 = 0;$$

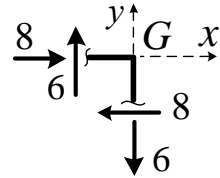
$$\Sigma Y = 0; \quad 6 - 6 = 0;$$



Узел G:

$$\Sigma X = 0 \quad 8 - 8 = 0;$$

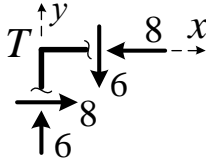
$$\Sigma Y = 0; \quad 6 - 6 = 0;$$



Узел T:

$$\Sigma X = 0; \quad 8 - 8 = 0;$$

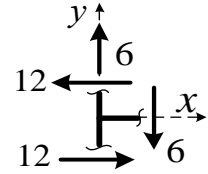
$$\Sigma Y = 0; \quad 6 - 6 = 0;$$



Узел S:

$$\Sigma X = 0; \quad 12 - 12 = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; \quad 6 - 6 = 0.$$



Рассмотрим далее расчет рамы с ненагруженной затяжкой (рисунок 4.7).

Внешние опорные реакции определяем из уравнений равновесия всей рамы:

$$\Sigma M_A = 0; \quad -5 - 5 + 8,5 \cdot 2 + 12 \cdot (2,5 + 1,5) - 16 \cdot 2 + 9,5 \cdot 2 - R_B \cdot 7 = 0; \quad R_B = 6 \text{ кН};$$

$$\Sigma X = 0; \quad H_A + 8,5 - 16 - 9,5 = 0; \quad H_A = 17,0 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0; \quad R_A - 12 + 6 = 0; \quad R_A = 6 \text{ кН}.$$

Для определения усилия в затяжке проводим сечение $I-I$ через шарнир C и затяжку и рассматриваем равновесие одной из частей рамы, например, правой:

$$\Sigma M_C^{прав} = 0; \quad 12 \cdot 1,5 + 16 \cdot 2 + 9,5 \cdot 6 - 6 \cdot 4,5 - H \cdot 4 = 0; \quad H = 20 \text{ кН}.$$

Проверка: $\Sigma M_C^{лев} = 0; \quad 6 \cdot 2,5 + (20 - 17) \cdot 4 - 8,5 \cdot 2 - 5 - 5 = 0; \quad 27 - 27 = 0.$

Покажем вычисление усилий в ряде сечений рамы (рисунок 4.8):

$$M_1^{лев} = +(20 - 17) \cdot 4 - 8,5 \cdot 2 = -5 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad \curvearrowright 1 \quad Q_1^{лев} = +20 - 17 - 8,5 = -5,5 \text{ кН};$$

$$M_2^{лев} = +(20 - 17) \cdot 4 + 6 \cdot 2,5 - 8,5 \cdot 2 - 5 - 5 = +5 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad \curvearrowleft 2 \quad Q_2^{лев} = +6 \text{ кН};$$

$$M_4^{прав} = (4 \cdot 2,5) \cdot 1,25 - 20 \cdot 2 + 9,5 \cdot 4 - 6 \cdot (1,5 + 1,5) = -7,5 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad \curvearrowright 4$$

$$M_5^{прав} = +9,5 \cdot 2 - 20 \cdot 0 - 6 \cdot 1,5 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad \curvearrowright 5$$

$$Q_3^{прав} = +(4 \cdot 5) - 20 \sin \alpha + 9,5 \sin \alpha - 6 \cos \alpha = 8 \text{ кН};$$

$$Q_5^{прав} = -20 \sin \alpha + 9,5 \sin \alpha - 6 \cos \alpha = -12 \text{ кН};$$

$$N_3^{прав} = N_5^{прав} = 20 \cos \alpha - 9,5 \cos \alpha - 6 \sin \alpha = 1,5 \text{ кН}.$$

Процедура вычисления максимального значения изгибающего момента на участке действия равномерно распределенной нагрузки (см. рисунки 4.9, 4.8):

$$\frac{8}{5 - x_{\max}} = \frac{12}{x_{\max}}; \quad 8 \cdot x_{\max} = 12 \cdot (5 - x_{\max}); \quad 20 \cdot x_{\max} = 60; \quad x_{\max} = 3,0 \text{ м};$$

проекция этого расстояния на горизонтальную и вертикальную оси:

$$x_{\max}^{\text{гор}} = x_{\max} \cos \alpha = 3 \cdot 0,6 = 1,8 \text{ м}; \quad x_{\max}^{\text{верт}} = x_{\max} \sin \alpha = 3 \cdot 0,8 = 2,4 \text{ м};$$

$$M_{\max}^{прав} = (5 \cdot 1,5) \cdot 0,75 - 10 + 6 \cdot (3 + 1,125) - 12 \cdot (2 + 1,5) = -21,625 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По результатам расчетов строим эпюры M , Q и N (рисунок 4.9). Там же представлена проверка равновесия узла D по поперечным и продольным силам.

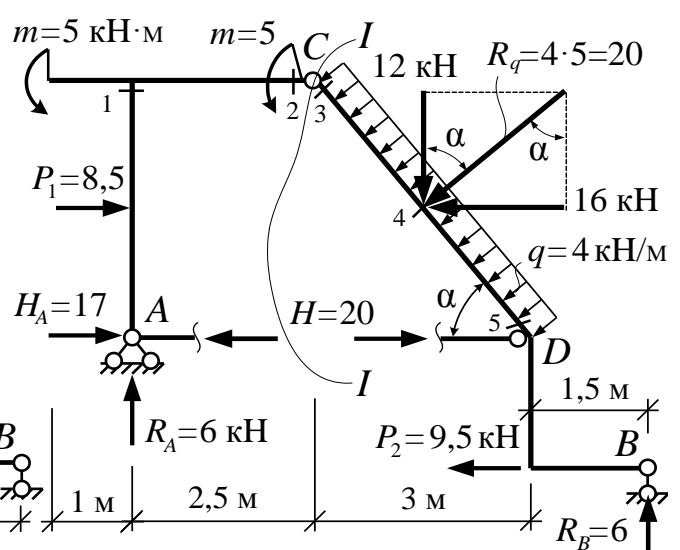
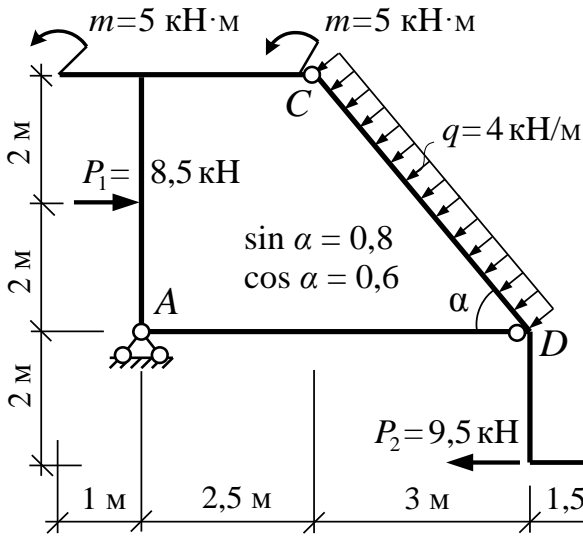


Рисунок 4.7 – Расчетная схема рамы

Рисунок 4.8 – Схема разрезания затяжки

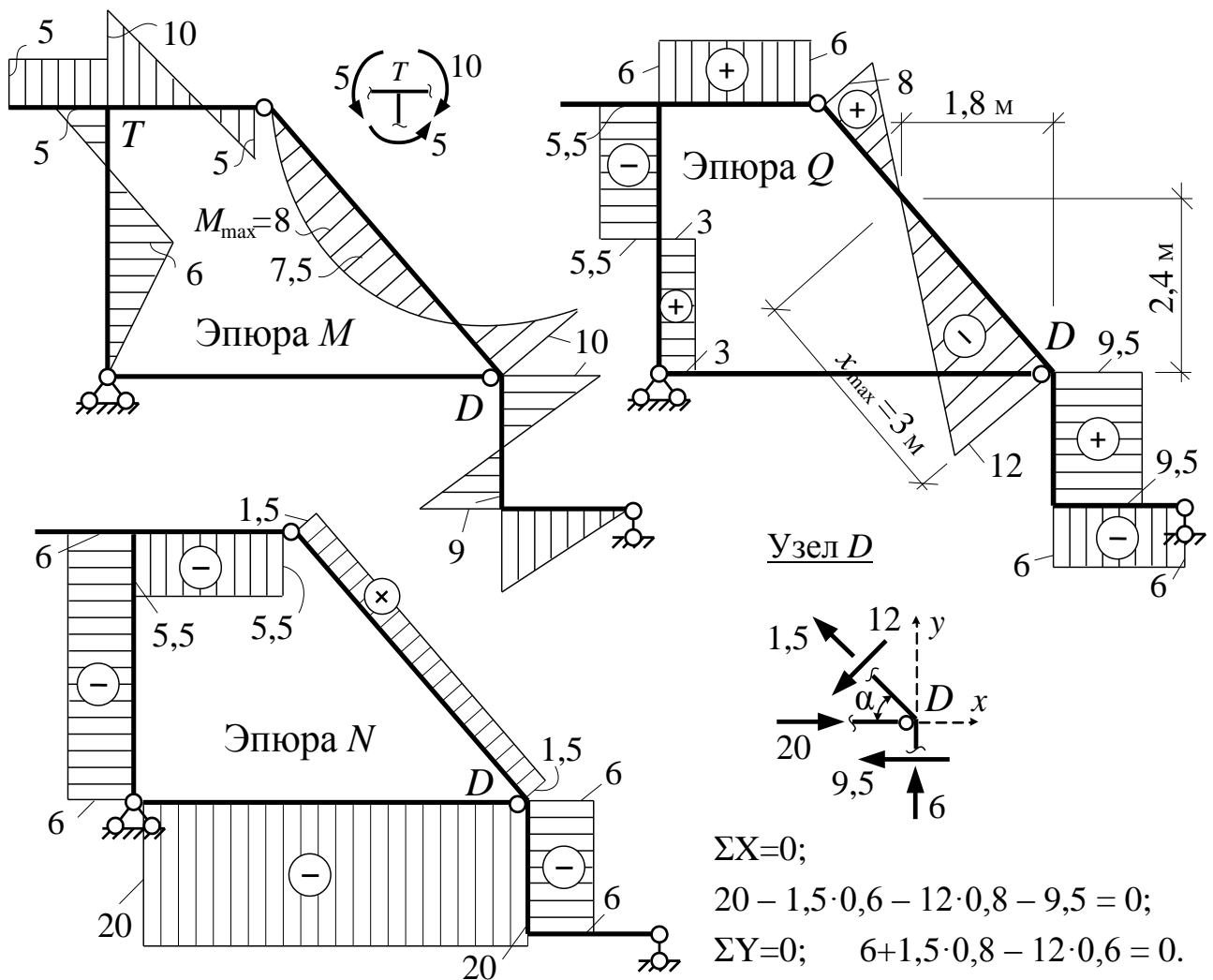


Рисунок 4.9 – Эпюры внутренних сил M , Q , N и равновесие узла D

Рассмотрим далее расчет рамы с нагруженной затяжкой (рисунок 4.10).

Опорные реакции определяем из уравнений равновесия рамы в целом:

$$\Sigma M_K = 0; \quad -6 - 18 + (4 \cdot 8) \cdot 2 - R_A \cdot 8 = 0; \quad R_A = 5 \text{ кН};$$

$$\Sigma X = 0; \quad -R_D + 4 \cdot 8 = 0; \quad R_D = 32 \text{ кН}; \quad \Sigma Y = 0; \quad -5 + R_B = 0; \quad R_B = 5 \text{ кН}.$$

Для раскрытия в раме замкнутого контура вырезаем затяжку $T-S$ замкнутым сечением $I-I$ (рисунок 4.11), и рассматриваем ее равновесие под действующими на нее нагрузками, определяя вертикальные усилия в шарнирах T и $S - Y_T$ и Y_S :

$$\Sigma M_T = 0; \quad -18 + Y_S \cdot 3 = 0; \quad Y_S = 6 \text{ кН}; \quad \Sigma M_S = 0; \quad -18 + Y_T \cdot 3 = 0; \quad Y_T = 6 \text{ кН};$$

проверка расчета: $\Sigma Y = 0; \quad +6 - 6 = 0$.

Усилие в затяжке найдем, рассматривая равновесие одной из частей рамы, например, правой, относительно шарнира C :

$$\Sigma M_C^{права} = 0; \quad -6 \cdot 2 + 32 \cdot 6 - 5 \cdot 4 - H \cdot 4 = 0; \quad H = 40 \text{ кН}.$$

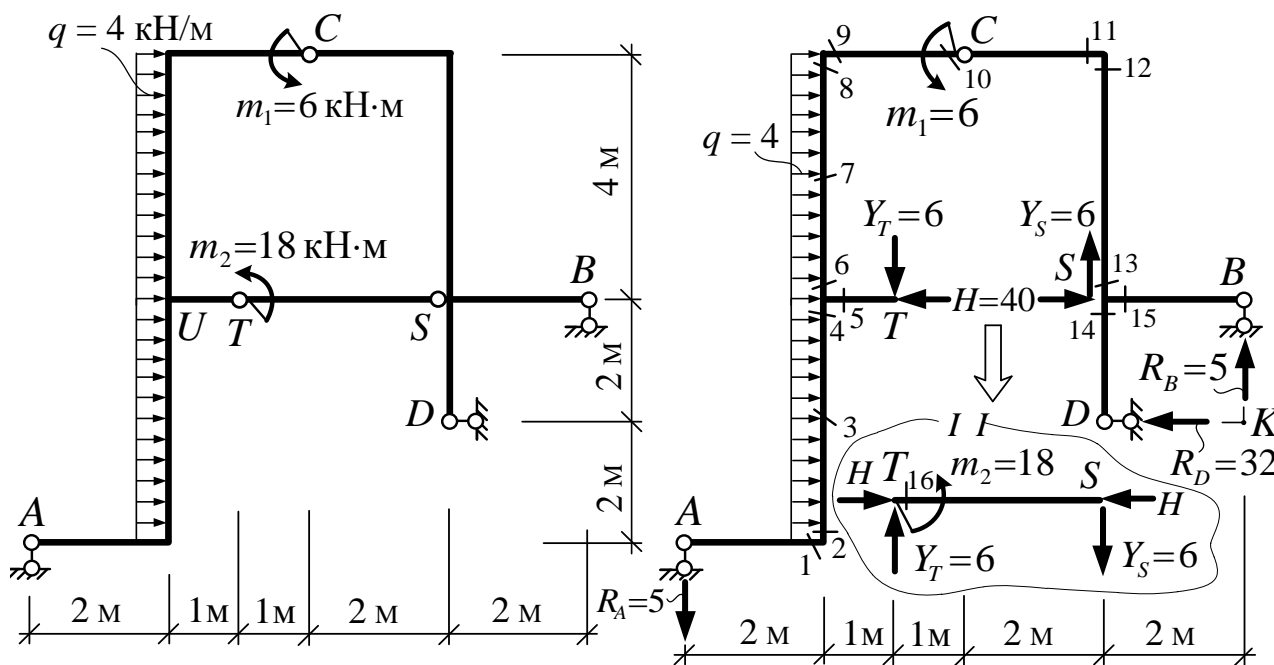


Рисунок 4.10 – Схема рамы

Рисунок 4.11 – Схема вырезания затяжки

Для проверки правильности расчетов рассмотрим равновесие левой части рамы:

$$\Sigma M_C^{лев} = 0; \quad -5 \cdot 4 - 6 \cdot 1 - (4 \cdot 8) \cdot 4 - 6 + 40 \cdot 4 = 0; \quad -160 + 160 = 0.$$

Для построения эпюр внутренних сил M , Q и N разобьем раму на десять участков (рисунок 4.11), на которых выделим 16 расчетных сечений (опустив сечения, в которых расчет усилий легко выполняется даже устно и в которых изгибающие моменты равны нулю, – например, сечения у шарниров и опор). Учтем, что на двух участках действия равномерно распределенной нагрузки эпюра M будет изменяться по параболическим зависимостям и для ее построения на этих участках необходимо вычислить изгибающие моменты, по крайней

мере, в трех сечениях на каждом из участков, то есть в сечениях 2, 3, 4 и 6, 7, 8. На остальных участках эпюра M будет линейной и для ее построения достаточно знать значения изгибающих моментов в крайних точках участков.

Вычисляем усилия в расчетных сечениях (рисунок 4.11), определяя также растянутые волокна стержней:

$$\begin{aligned}
 M_1^{лев} &= -5 \cdot 2 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}; & \left(\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ 1 \end{array} \right) & & M_2^{нижн} &= -5 \cdot 2 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}; & \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ 2 \end{array} \right) \\
 M_3^{нижн} &= -5 \cdot 2 - (4 \cdot 2) \cdot 1 = -18 \text{ кН} \cdot \text{м}; & \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ 3 \end{array} \right) & & M_4^{нижн} &= -5 \cdot 2 - (4 \cdot 4) \cdot 2 = -42 \text{ кН} \cdot \text{м}; & \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ 4 \end{array} \right) \\
 M_5^{прав} &= 6 \cdot 1 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}; & \left(\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ 5 \end{array} \right) & & M_6^{нижн} &= -5 \cdot 2 - (4 \cdot 4) \cdot 2 + 6 \cdot 1 = -36 \text{ кН} \cdot \text{м}; & \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ 6 \end{array} \right) \\
 & & & & M_7^{нижн} &= -5 \cdot 2 - (4 \cdot 6) \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = +4 \text{ кН} \cdot \text{м}; & \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ 7 \end{array} \right) \\
 M_8^{нижн} &= -5 \cdot 2 - (4 \cdot 8) \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 40 \cdot 4 = +28; & \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ 8 \end{array} \right) & & M_9^{лев} &= M_8^{нижн} = +28 \text{ кН} \cdot \text{м}; & \left(\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ 9 \end{array} \right) \\
 & & & & M_{10}^{лев} &= -5 \cdot 4 - (4 \cdot 8) \cdot 4 - 6 \cdot 1 + 40 \cdot 4 = +6 \text{ кН} \cdot \text{м}; & \left(\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ 10 \end{array} \right) \\
 M_{11}^{прав} &= -40 \cdot 4 + 32 \cdot 6 - 5 \cdot 2 + 6 \cdot 0 = +22 \text{ кН} \cdot \text{м}; & \left(\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ 11 \end{array} \right) & & M_{12}^{нижн} &= M_{11}^{прав} = +22 \text{ кН} \cdot \text{м}; & \\
 M_{13}^{прав} &= -40 \cdot 0 + 32 \cdot 2 - 5 \cdot 2 + 6 \cdot 0 = +54 \text{ кН} \cdot \text{м}; & \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ 13 \end{array} \right) & & & & \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ 12 \end{array} \right) \\
 M_{14}^{нижн} &= +32 \cdot 2 = +64 \text{ кН} \cdot \text{м}; & \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ 14 \end{array} \right) & & M_{15}^{прав} &= -5 \cdot 2 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}; & \left(\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ 15 \end{array} \right) \\
 & & & & & & \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ 14 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

В сечении 16 усилия определяем из рассмотрения отдельно затяжки:

$$M_6^{лев} = +6 \cdot 0 - 18 = -18 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad \left(\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ 16 \end{array} \right) \quad M_6^{прав} = +6 \cdot 3 = +18 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ 16 \end{array} \right)$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов в рассматриваемой раме, построенная по результатам выполненных расчетов, представлена на рисунке 4.12.

Аналогично подходим и к построению эпюр поперечных и продольных сил.

На участках действия равномерно распределенной нагрузки поперечная сила изменяется линейно и для построения эпюры Q (рисунок 4.13) на этих участках необходимо вычислить значения поперечной силы в двух сечениях на каждом из участков – в сечениях 2, 4 и 6, 8 (рисунок 4.11):

$$\begin{aligned}
 Q_2^{нижн} &= 0; & Q_4^{нижн} &= -4 \cdot 4 = -16 \text{ кН}; \\
 Q_6^{нижн} &= -4 \cdot 4 + 40 = +24 \text{ кН}; & Q_8^{нижн} &= -4 \cdot 8 + 40 = +8 \text{ кН};
 \end{aligned}$$

На остальных участках рамы (рисунок 4.11) поперечные силы будут постоянны и для построения эпюры Q (рисунок 4.13) на этих участках достаточно вычислить значения поперечной силы в одном из сечений участков:

$$\begin{aligned}
 Q_1^{лев} &= -5 \text{ кН}; & Q_5^{прав} &= +6 \text{ кН}; & Q_9^{лев} &= Q_{10} = Q_{11} = -5 - 6 = -11 \text{ кН}; \\
 Q_6^{лев} &= Q_7 = Q_8 = 6 \text{ кН}; & Q_{12}^{нижн} &= Q_{13} = -40 + 32 = -8 \text{ кН}; & Q_{14}^{нижн} &= +32 \text{ кН}; \\
 Q_{15}^{нижн} &= -5 \text{ кН}; & Q_{16}^{прав} &= +6 \text{ кН} \text{ (из рассмотрения вырезанной затяжки)}.
 \end{aligned}$$

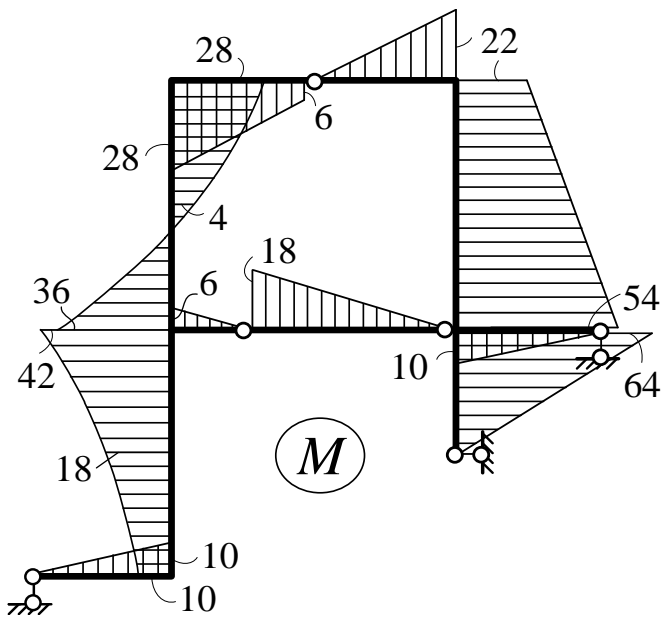


Рисунок 4.12 – Эпюра M

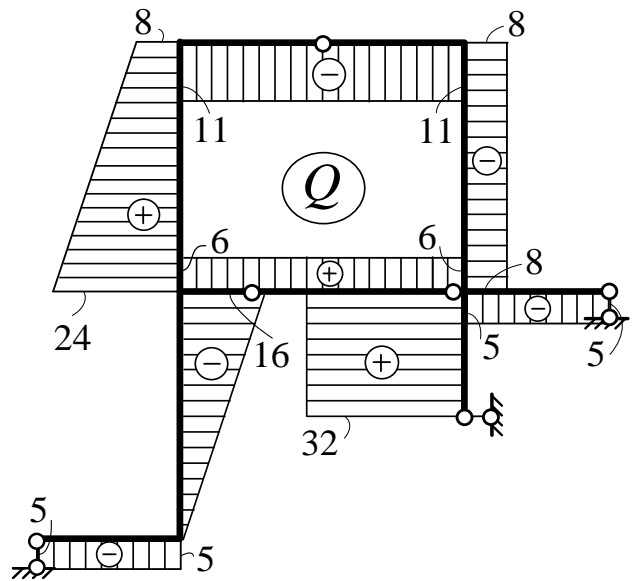


Рисунок 4.13 – Эпюра Q

Продольные силы в рассматриваемой раме (рисунок 4.11) на всех участках будут постоянны, и для построения эпюры N в раме (рисунок 4.14) достаточно вычислить значение N в одном из сечений на каждом из участков:

$$N_1^{лев} = 0; \quad N_2^{нижн} = N_3 = N_4 = +5 \text{ кН};$$

$$N_5^{прав} = -40 \text{ кН};$$

$$N_6^{лев} = N_7 = N_8 = +5 + 6 = +11 \text{ кН};$$

$$N_9^{нижн} = N_{10} = N_{11} = -4 \cdot 8 + 40 = +8 \text{ кН};$$

$$N_{12}^{нижн} = N_{13} = -6 - 5 = -11 \text{ кН};$$

$$N_{14}^{нижн} = 0; \quad N_{15}^{прав} = 0; \quad N_{16} = -40 \text{ кН}.$$

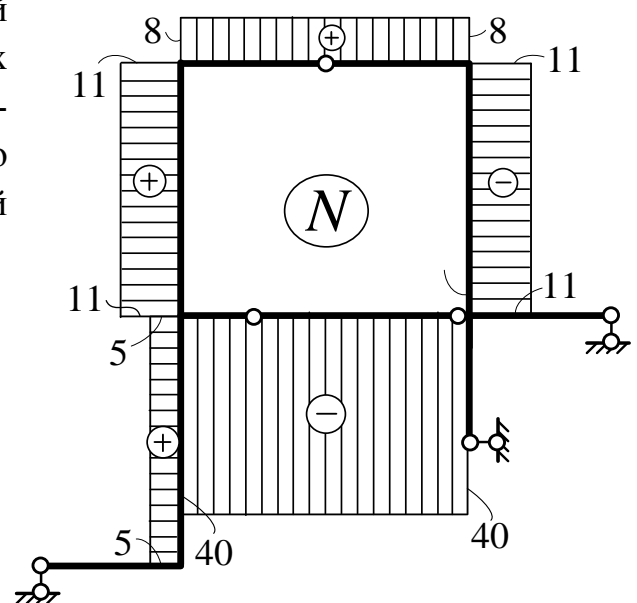
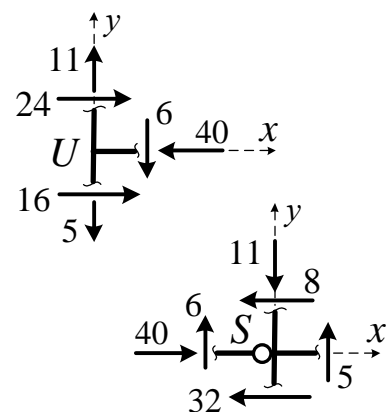


Рисунок 4.14 – Эпюра N

Покажем еще проверку равновесия средних узлов по поперечным и продольным силам:

$$\begin{aligned} \text{Узел } U: \quad \Sigma X = 0; \quad 24 + 16 - 40 = 0; \quad 40 - 40 = 0; \\ \Sigma Y = 0; \quad 11 - 5 - 6 = 0; \quad 11 - 11 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Узел } S: \quad \Sigma X = 0; \quad 40 - 8 - 32 = 0; \quad 40 - 40 = 0; \\ \Sigma Y = 0; \quad 6 + 5 - 11 = 0; \quad 11 - 11 = 0. \end{aligned}$$



5. Расчет составных рам

Составными называют рамы, состоящие из нескольких трехшарнирных и (или) простых рам (см. рисунки 2.2, в, 5.1, а).

При расчете таких рам, их целесообразно, как и многопролетные балки, разделять (по шарнирам) на отдельные трехшарнирные и (или) простые рамы, одни из которых будут опираться на другие, и расчет которых мы умеем выполнять. Среди этих простых и трехшарнирных рам можно выделить главные и второстепенные рамы. Главными будут рамы, которые могут самостоятельно существовать. Второстепенными являются рамы, которые самостоятельно существовать не могут, которые опираются на главные рамы, либо на рядом расположенные второстепенные рамы. Расчет, естественно, надо начинать с самой второстепенной рамы (самой верхней), постепенно переходя к расчету ниже расположенных рам и передавая на них реакции (в обратных направлениях) от вышерасположенных рам. Полные эпюры усилий для составной рамы получим путем составления соответствующих эпюр для отдельных рам.

Например, расчет составной рамы, представленной на рисунок 5.1, а, следует выполнять в следующей последовательности:

1. Сечением $I-I$ отрезаем верхнюю часть CDO , которая представляет собой трехшарнирную раму с затяжкой FK , в которой для размыкания

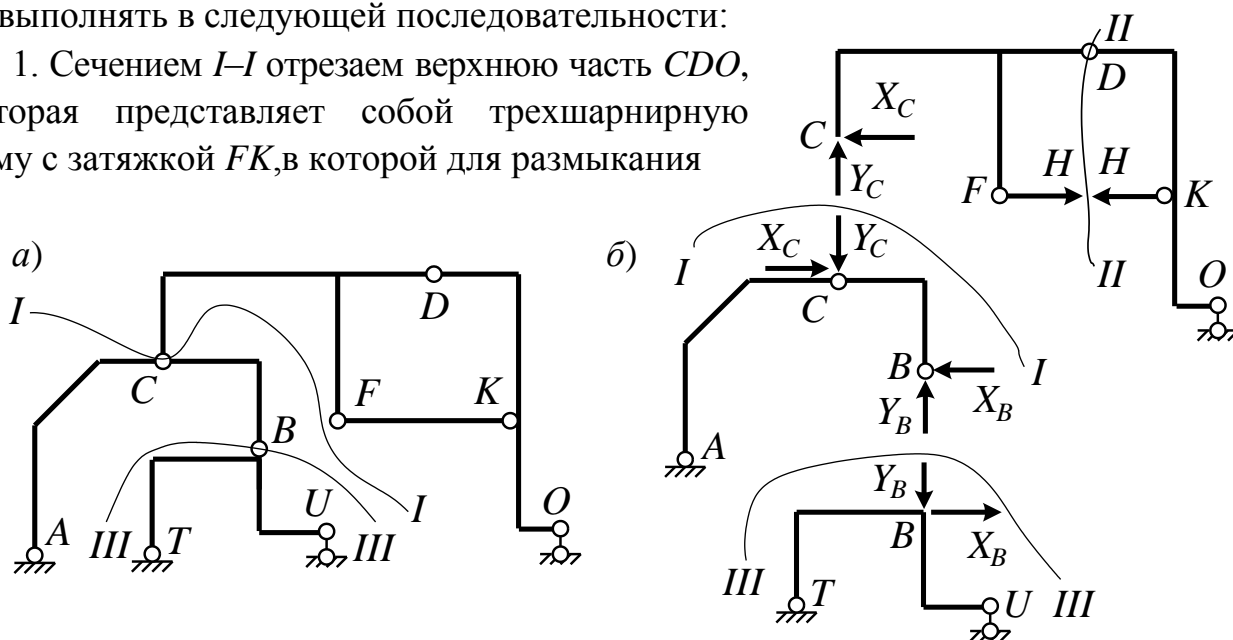


Рисунок 5.1 – Схема составной рамы (а) и ее разделения (б)

замкнутого контура нужно провести сечение $II-II$ (рисунок 5.1, б) и найти усилие H в затяжке FK , рассмотрев равновесие левой либо правой части рамы.

2. Проводим сечение $III-III$, выделяя и рассматривая отдельно раму ACB , которая является трехшарнирной рамой с опорами (A и B) в разных уровнях.

3. Последней рассматриваем простую раму TBU .

Далее рассмотрим несколько примеров расчетов составных рам.

Рама, представленная на рисунке 5.2, может быть разделена на трехшарнирную раму DCT и два простых консольных стержня AD и BT (рис. 5.3), при этом

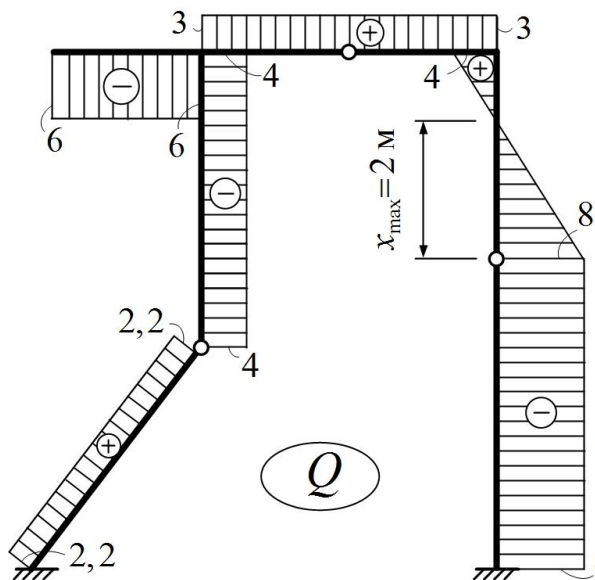


Рисунок 5.5 – Эюра Q

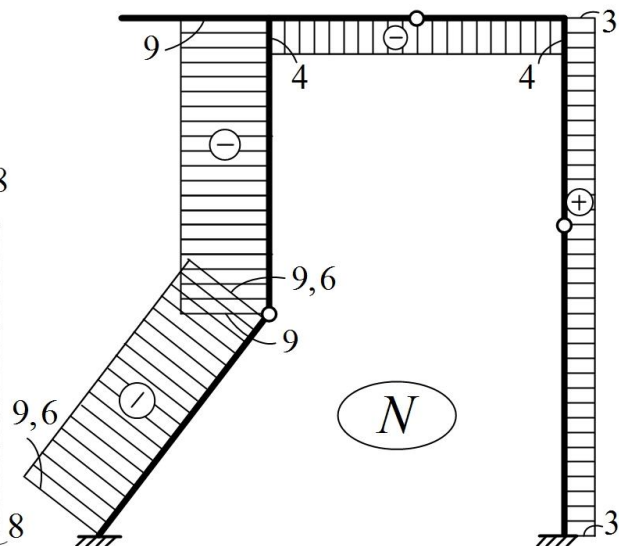


Рисунок 5.6 – Эюра N

6. Расчет многопролетных статически определимых балок

Многопролетными статически определимыми называют балки, перекрывающие ряд пролетов и состоящие из простых двухопорных (с консолями и без них) и консольных балок, соединенных между собой по концам шарнирами, как правило, не совпадающими с опорами. Такие балки называют также многопролетными шарнирными или составными.

Кинематический анализ таких систем удобно выполнять с использованием формулы $W = (3D - 2Ш - C_0)$, где D – число дисков в системе, в качестве которых здесь выступают простые балки; $Ш$ – число одиночных (простых) шарниров, соединяющих эти балки; C_0 – число опорных связей в системе.

Геометрический анализ структуры многопролетных статически определимых балок позволяет ввести для них понятие **позтажной схемы балки**, которая представляет собой схему взаимодействия отдельных простых балок, образующих многопролетную, между собой (см. рис. 6.5). При этом среди указанных простых балок можно выделить главные и второстепенные балки.

Главными называют простые балки, которые после разрезания многопролетной балки по шарнирам, соединяющим простые балки, могут самостоятельно нести нагрузку (неизменяемы). Учитывая, что балка – это диск, имеющий три степени свободы, главные балки должны иметь три опорные связи, то есть главными будут двухопорные балки и балки с защемлением. Главными в системе многопролетных будут и простые балки, имеющие две вертикальные опорные связи, учитывая, что третьей связью для них – горизонтальной – являются соседние балки (что подтверждает геометрический анализ соответствующей системы).

Второстепенными называют балки, которые после разрезания многопролетных балок по шарнирам самостоятельно нести нагрузку не могут, так как будут изменяемы. Эти балки должны опираться на рядом расположенные балки (с помощью связей в шарнирах). При этом одни второстепенные балки могут опираться на другие, то есть и среди второстепенных балок имеется определенная иерархия и соответственно уровень их второстепенности может быть разным. Самыми второстепенными будут балки, расположенные выше всего на поэтажной схеме.

Анализ работы многопролетных статически определимых балок позволяет выявить закономерности в их работе и сформулировать принципы их расчета:

– расчет многопролетных статически определимых балок удобно выполнять посредством расчета отдельно простых балок, образующих многопролетные;

– при этом расчет необходимо начинать с самых верхних на поэтажных схемах балок, постепенно переходя к расчету нижерасположенных балок и передавая на них опорные реакции от вышерасположенных балок в обратных направлениях (считая их для нижерасположенных балок нагрузками); последними рассчитываются главные балки;

– усилия от нагрузки по поэтажной схеме передаются только на нижележащие балки и не передаются на вышележащие;

– при действии на многопролетные статически определимые балку только вертикальных нагрузок продольные силы в них будут отсутствовать;

– окончательные эпюры усилий в многопролетной балке строятся путем объединения эпюр этих усилий, полученных при расчетах простых балок.

Выполним расчет многопролетной балки, представленной на рисунке 6.5.

Структурно-поэтажная схема балки показана на рисунке 6.1. Для проведения кинематического анализа системы определим вначале ее степень свободы:

$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0.$$

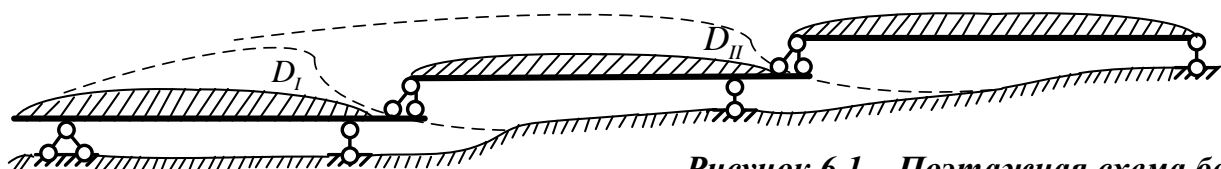


Рисунок 6.1 – Поэтажная схема балки

Геометрический анализ системы: первая (левая) балка системы соединяется с основанием тремя связями, не параллельными друг другу и не пересекающимися в одной точке, образуя с основанием (Землей) неизменяемую систему, т. е. диск (D_I); совершенно аналогично присоединяются вторая балка с предыдущим диском, образуя диск D_{II} , и третья балка с предыдущим диском D_{II} , образуя в целом статически определимую и неизменяемую систему.

Определение опорных реакций и построение эпюр внутренних сил:

1) расчет начинаем с балки EF, самой верхней на поэтажной схеме (рис. 6.2):

$$\Sigma M_E = 0; \quad -R_F \cdot 6,6 + 2 \cdot 4,4 \cdot 2,2 + 5 \cdot 8,8 = 0; \quad R_F = 9,6 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_F = 0; \quad R_E \cdot 6,6 - 2 \cdot 4,4 \cdot 4,4 + 5 \cdot 2,2 = 0; \quad R_E = 4,2 \text{ кН};$$

$$\text{Проверка:} \quad \Sigma Y = 0; \quad 4,2 - 2 \cdot 4,4 + 9,6 - 5 = 0; \quad 0 = 0.$$

Расчет ординат эпюры M : $M_1^{лев} = 0$; $M_2^{лев} = 4,2 \cdot 2,2 - 2 \cdot 2,2 \cdot 1,1 = 4,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

$M_3^{лев} = 4,2 \cdot 4,4 - 2 \cdot 4,4 \cdot 2,2 = -0,88 \text{ кН}\cdot\text{м}$; Растянутые волокна:

$M_4^{лев} = M_3^{лев} = -0,88 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

$M_5^{лев} = 4,2 \cdot 6,6 - 2 \cdot 4,4 \cdot 4,4 = -11 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

$M_6^{лев} = 5 \cdot 2,2 = 11 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

$M_7^{лев} = 5 \cdot 0 = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Расчет ординат эпюры Q : $Q_1^{лев} = 4,2 \text{ кН}$;

$Q_3^{лев} = Q_4^{лев} = 4,2 - 2 \cdot 4,4 = -4,6 \text{ кН}$;

$Q_5^{прав} = -9,6 + 5 = -4,6 \text{ кН}$; $Q_{6,7}^{прав} = 5 \text{ кН}$.

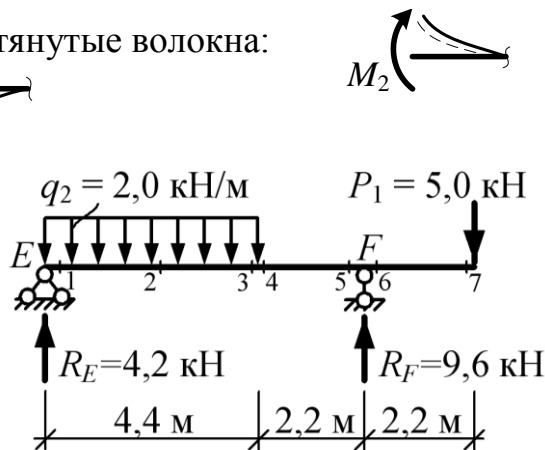


Рисунок 6.2 – Балка EF

Расчет экстремального значения изгибающего момента на участке 1–2:

$$\frac{x_1}{4,2} = \frac{4,4 - x_1}{4,6} \Rightarrow x_1 = 2,1 \text{ м}; \quad M_{\max} = 4,2 \cdot 2,1 - 2 \cdot 2,1 \cdot 1,05 = 4,41 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюры M и Q в балке изображаем на общей схеме составной балки (рисунок 6.5).

2) второй рассчитываем балку CDE (рисунок 6.3):

$\Sigma M_C = 0$; $9,4 \cdot 1,55 + 9,4 \cdot 3,1 - R_D \cdot 4,65 + 4,2 \cdot 6,85 = 0$; $R_D = 15,587 \text{ кН}$;

$\Sigma M_D = 0$; $4,65 R_C - 9,4 \cdot 3,1 - 9,4 \cdot 1,55 + 4,2 \cdot 2,2 = 0$; $R_C = 7,413 \text{ кН}$;

$\Sigma M_D = 0$; $4,65 R_C - 9,4 \cdot 3,1 - 9,4 \cdot 1,55 + 4,2 \cdot 2,2 = 0$; $R_C = 7,413 \text{ кН}$.

Проверка: $\Sigma Y = 0$; $7,413 - 9,4 - 9,4 + 15,587 - 4,2 = 0$; $0 = 0$.

Расчет ординат эпюры M и определение растянутых волокон:

$M_1^{лев} = 0$; $M_2^{лев} = 7,413 \cdot 1,55 = 11,49 \text{ кН}\cdot\text{м}$; M_2, M_3, M_4, M_5

$M_3^{лев} = 11,49 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $M_4^{лев} = 7,413 \cdot 3,1 - 9,4 \cdot 1,55 = 8,41 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

$M_5^{лев} = 7,413 \cdot 3,1 - 9,4 \cdot 1,55 = 8,41 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

$M_6^{прав} = -4,2 \cdot 2,2 = -9,24 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

$M_7^{прав} = 9,24 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

$M_8^{прав} = 0$.

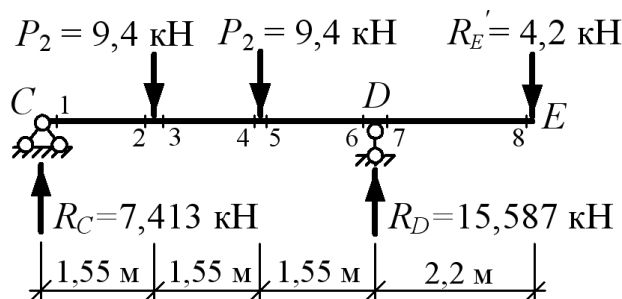


Рисунок 6.3 – Балка CDE

Расчет ординат эпюры Q :

$Q_1^{лев} = 7,413 \text{ кН}$; $Q_2^{лев} = 7,413 \text{ кН}$;

$Q_3^{лев} = Q_4^{лев} = 7,413 - 9,4 = -1,987 \text{ кН}$;

$Q_5^{прав} = Q_6^{прав} = -15,587 + 4,2 = -11,387 \text{ кН}$; $Q_7^{прав} = Q_8^{прав} = +4,2 \text{ кН}$.

Эпюры M и Q в балке изображаем на общей схеме составной балки (рисунок 6.5).

3) последней рассчитываем главную балку ABC (рисунок 6.4):

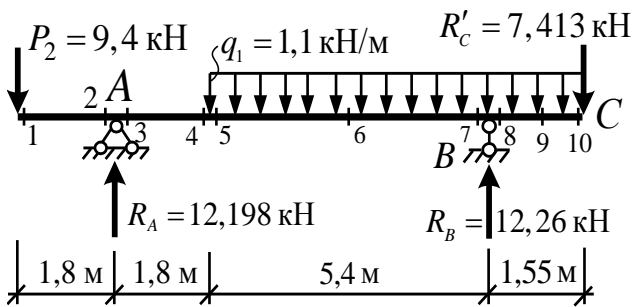


Рисунок 6.4 – Балка ABC

$$\Sigma M_A = 0;$$

$$-9,4 \cdot 1,8 + 1,1 \cdot 6,95 \cdot 5,275 - R_B \cdot 7,2 + 7,413 \cdot 8,75 = 0; \quad R_B = 12,26 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$-9,4 \cdot 9 + R_A \cdot 7,2 - 1,1 \cdot 6,95 \cdot 1,925 + 7,413 \cdot 1,55 = 0; \quad R_A = 12,198 \text{ кН}.$$

Проверка: $\Sigma Y = 0; \quad -9,4 + 12,198 - 1,1 \cdot 6,95 + 12,26 - 7,413 = 0; \quad 0 = 0.$

Расчет ординат эпюры M :

$$M_1^{лев} = 0; \quad M_2^{лев} = -9,4 \cdot 1,8 = -16,92 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_3^{лев} = M_2^{лев} = -16,92 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4^{лев} = M_5^{лев} = -9,4 \cdot 3,6 + 12,198 \cdot 1,8 = -11,884 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$$

$$M_6^{лев} = -9,4 \cdot (3,6 + 2,7) + 12,198 \cdot (1,8 + 2,7) - 1,1 \cdot 2,7 \cdot 1,35 = -8,325 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_7^{прав} = M_8^{прав} = 7,413 \cdot 1,55 - 1,1 \cdot 1,55 \cdot 0,775 = 12,812 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{10}^{прав} = 0.$$

$$M_9^{прав} = 7,413 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,55 - (1,1 \cdot 0,775) \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,775 = 6,076 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_7, M_8, M_9$$

Расчет ординат эпюры поперечных сил Q :

$$Q_1^{лев} = Q_2^{лев} = -9,4 \text{ кН}; \quad Q_3^{лев} = -9,4 + 12,198 = 2,798 \text{ кН};$$

$$Q_4^{лев} = Q_5^{лев} = Q_3^{лев} = 2,798 \text{ кН}; \quad Q_7^{прав} = 7,413 + 1,1 \cdot 1,55 - 12,26 = -3,142 \text{ кН};$$

$$Q_8^{прав} = 7,413 + 1,1 \cdot 1,55 = 9,118 \text{ кН}; \quad Q_9^{прав} = 7,413 \text{ кН}.$$

Эпюры M и Q в балке ABC показаны на общей схеме составной балки на рисунке 6.5.

Поперечная сила на участке 5–7, на котором действует равномерно распределенная нагрузка, имеет нулевое значение. Положение соответствующего сечения определим из соотношения:

$$\frac{x_2}{2,798} = \frac{5,4 - x_2}{3,142} \Rightarrow x_2 = 2,544 \text{ м};$$

В этом сечении изгибающий момент будет иметь экстремальное (наибольшее) значение на участке, величина которого из рассмотрения левой части балки будет равна:

$$M_{\max} = -9,4 \cdot 6,144 + 12,198 \cdot 4,344 - 2,544 \cdot 1,1 \cdot 2,544 / 2 = -8,325 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Объединенные эпюры изгибающих моментов и поперечных сил в рассмат-

риваемой многопролетной балке представлены на рисунке 6.5.

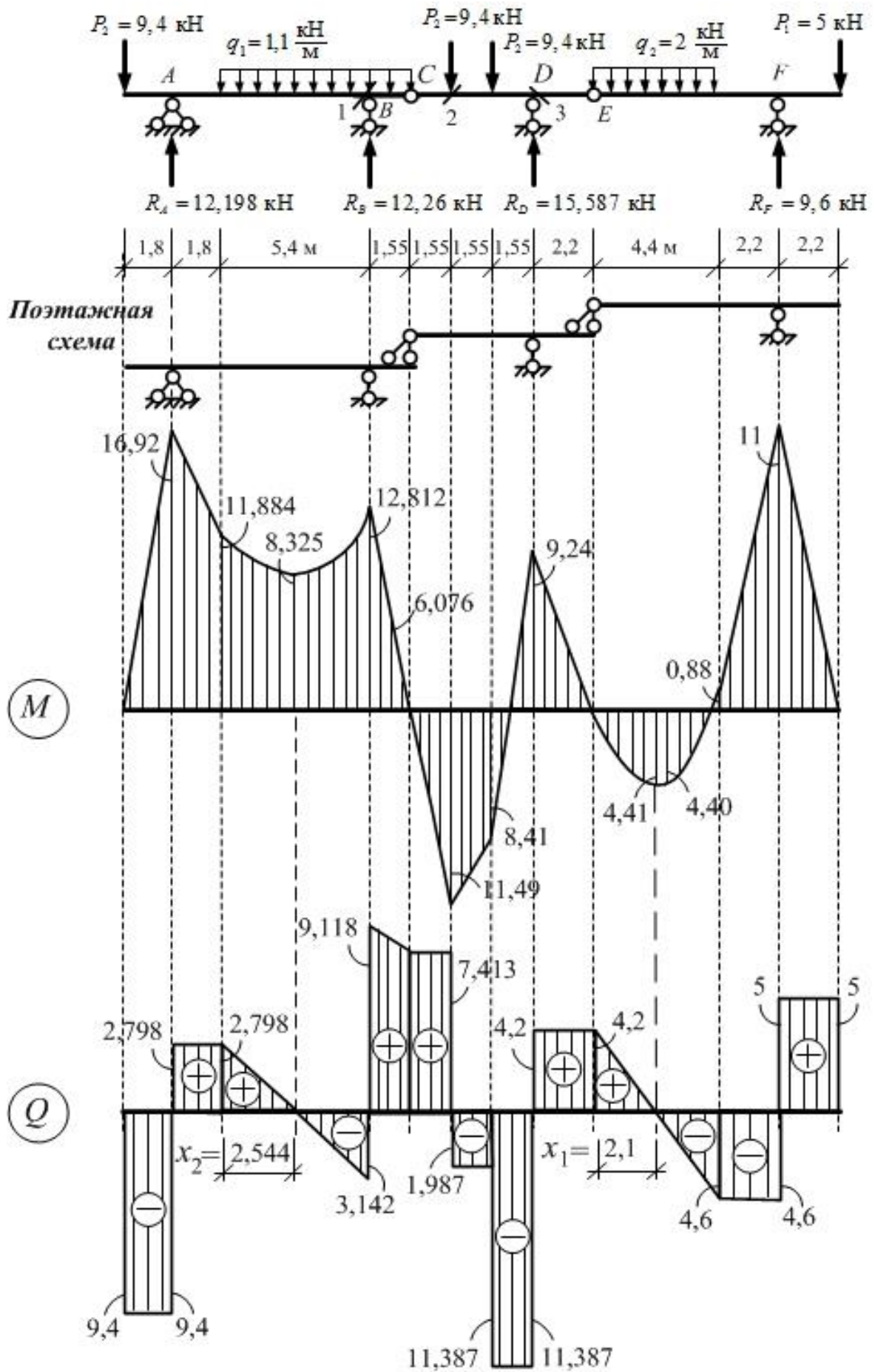


Рисунок 6.5 – Составная балка и эпюры усилий M и Q

7. Определение перемещений в статически определимых системах

7.1. Определение перемещений от действия внешних нагрузок

Общая формула для определения перемещений в стержневых системах от действия внешних нагрузок (формула Мора) имеет вид:

$$\Delta_{iF} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_F dx}{EJ} + \sum_1^n \int_0^l \eta \frac{\bar{Q}_i Q_F dx}{GA} + \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{N}_i N_F dx}{EA}, \quad (3.8)$$

где: M_F, Q_F, N_F – изгибающие моменты, поперечные и продольные силы в системе от внешней нагрузки, от действия которой

определяется перемещение;

$\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ – изгибающие моменты, поперечные и продольные силы

в системе от действия единичной «силы», приложенной в сечении (в точке), для которого определяется перемещение, в направлении искомого (i -го) перемещения;

EJ, GA, EA – жесткости стержней (участков) системы при изгибе, сдвиге и растяжении-сжатии;

η – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по высоте сечений в изгибаемых системах;

n – число участков, на которые разбивается система;

l – длины участков.

Порядок определения перемещений с использованием формулы Мора:

1. Определяются внутренние силы M, Q, N в системе от действия внешней нагрузки (находятся аналитические зависимости их изменения в пределах участков их непрерывного изменения либо строятся эпюры этих усилий).

2. В сечении, в точке, для которых определяется перемещение, в направлении искомого перемещения прикладывается единичная «сила» (рисунок 7.1).

3. От действия единичной «силы», приложенной согласно п. 2, определяются внутренние силы в системе (находятся зависимости их изменения в пределах участков их непрерывности, строятся эпюры усилий $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$).

4. Вычисляется искомое перемещение по формуле Мора (7.1).

При этом вычисление интегралов Мора может выполняться непосредственным интегрированием, в этом случае нужно знать зависимости изменения внутренних сил, или с использованием численных способов:

- а) по правилу Верещагина;
- б) по формулам трапеций, Симпсона;
- в) другими численными способами.

При определении перемещений по формуле (7.2) с использованием численных способов достаточно иметь (построить) только эпюры внутренних сил.

В большой части изгибаемых стержневых систем, например, в балках и рамах, влияние поперечных и продольных сил (второго и третьего слагаемых в формуле Мора (7.1)) на величины перемещений, как показывают результаты расчетов, невелико, и определение перемещений от действия внешних нагрузок в таких системах выполняется обычно с учетом только изгибающих моментов:

$$\Delta_{iF} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i \cdot M_F dx}{EJ}. \quad (7.2)$$

Порядок определения перемещений по формуле Мора (7.2):

1. Строится эпюра изгибающих моментов в системе от действия внешней нагрузки – эпюра M_F).

2. В точке (в сечении), для которой определяется перемещение, в направлении искомого перемещения прикладывается единичная «сила» – в зависимости от вида определяемого перемещения эта «сила» может быть разной:

а) если определяется линейное (горизонтальное, вертикальное, в каком-то произвольном направлении) перемещение, то прикладывается единичная сосредоточенная сила $F = 1$ в этом направлении (рисунок 7.1, а);

б) если определяется взаимное сближение (расхождение) двух точек, то к этим точкам прикладывается по единичной силе, которые направляются по прямой, проходящей через эти точки, навстречу друг другу (друг от друга) (рисунок 7.1, б);

в) если определяется угол поворота сечения, то прикладывается единичный сосредоточенный момент $m = 1$ (рисунок 7.1, в);

г) если определяется взаимный угол поворота двух сечений (изменение величины угла между сечениями), то к этим сечениям прикладывается по единичному моменту навстречу друг другу (рисунок 7.1, г).

3. От действия единичной «силы», приложенной согласно п. 2, строится единичная эпюра изгибающих моментов – эпюра \bar{M}_i).

4. Вычисляется искомое перемещение по формуле Мора (7.1).

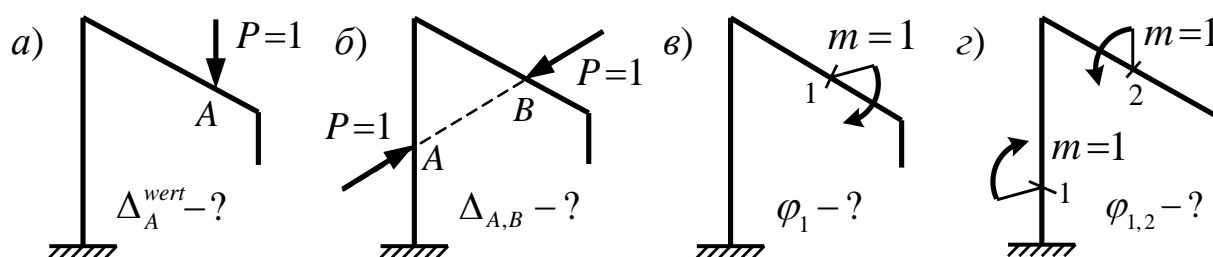


Рисунок 7.1 – Схемы приложения единичных сил при определении перемещений

Рассмотрим далее вычисление интегралов Мора по правилу Верещагина, по формулам трапеций и Симпсона. Заметим, что вычисление интегралов Мора по правилу Верещагина и по формулам трапеций и Симпсона часто условно называют «перемножением эпюр».

Правило Верещагина:

Для вычисления интеграла Мора $\int_0^l \frac{\bar{M}_i M_F dx}{EJ}$ на участке постоянной

жесткости, в пределах которого характер изменения эпюр \bar{M}_i и M_F не меняется, нужно площадь одной из эпюр (Ω) умножить на ординату, взятую под центром тяжести этой площади из другой эпюры y_c (если одна из эпюр криволинейна, то обязательно берется площадь криволинейной эпюры):

$$\frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}_i M_F dx = \frac{1}{EJ} \Omega \cdot y_c. \quad (7.3)$$

Таким образом, для эпюры, площадь которой берется, необходимо уметь вычислять эту площадь и уметь находить (знать) положение ее центра тяжести.

Правило знаков: Если центр тяжести площади «перемножаемой» эпюры и соответствующая ему ордината из другой эпюры расположены по одну сторону от оси стержня (растянутые волокна находятся с одной стороны стержня), то результат «перемножения» принимается со знаком «плюс»;

если эти параметры расположены с разных (противоположных) сторон от оси стержня, то результат «перемножения» принимается со знаком «минус».

Приведем несколько примеров применения правила Верещагина.

Для эпюр, представленных на рисунке 7.2, вычисление интеграла Мора по правилу Верещагина может быть выполнено четырьмя разными способами, которые будут давать один и тот же результат:

а) при вычислении площади эпюры M_1 и разбивке ее (для быстрого и удобного определения положения центров тяжести) на прямоугольник $a \times l$ и треугольник $(b - a) \times l$ (рисунок 7.2, а) будем иметь:

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[(a \cdot l) \cdot \frac{c}{2} + \frac{1}{2} (b - a) l \cdot \frac{1}{3} c \right];$$

б) при вычислении площади эпюры M_1 и разбивке ее на два треугольника $a \times l$ и $b \times l$ (рисунок 7.2, б) получим:

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\left(\frac{a \cdot l}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} c + \left(\frac{b \cdot l}{2} \right) \cdot \frac{1}{3} c \right];$$

в) при вычислении площади эпюры M_2 (так как обе эпюры M_1 и M_2 линейны, то не имеет значения площадь какой из них брать) (рис. 7.2, в) можно записать:

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{c \cdot l}{2} \right) \cdot \left[a + \frac{1}{3} (b - a) \right], \quad \text{или} \quad = \frac{1}{EJ} \left(\frac{c \cdot l}{2} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} a + \frac{1}{3} b \right).$$

если эпюру M_1 разобьем на прямоугольник и треугольник;

если эпюру M_1 разобьем на два треугольника.

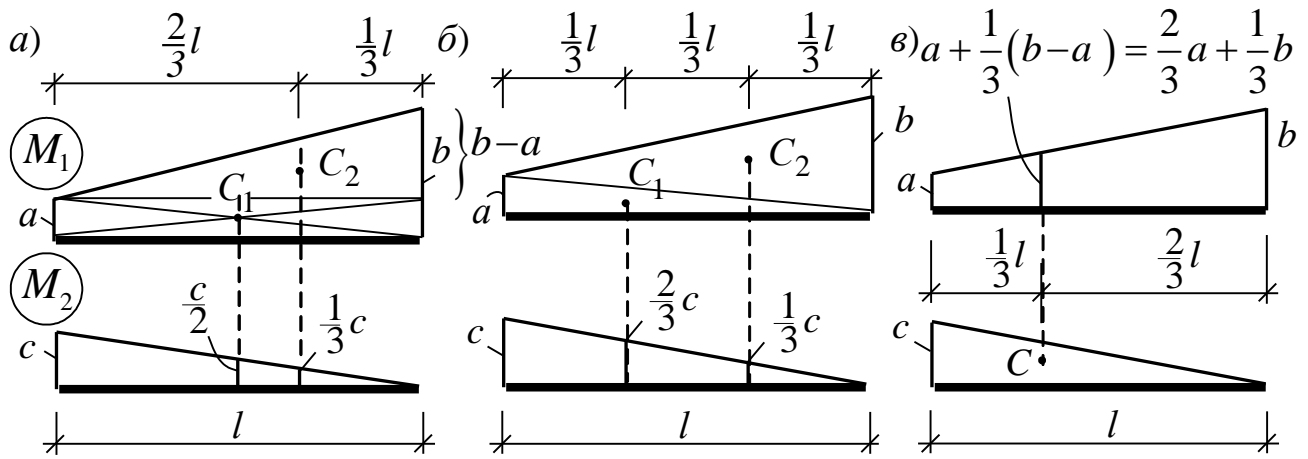


Рисунок 7.2 – Варианты разбиения линейных эпюр на простые фигуры

Формула трапеций – применяется для «перемножения» только линейных эпюр (рисунок 7.3):

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{l}{6EJ} (2M_1^{лев} \cdot M_2^{лев} + M_1^{лев} \cdot M_2^{прав} + M_2^{лев} \cdot M_1^{прав} + 2M_1^{прав} \cdot M_2^{прав}). \quad (7.4)$$

Формула Симпсона может применяться для вычисления интегралов Мора путем соответствующего «перемножения» как линейных эпюр, так и эпюр, одна из которых криволинейна (изменяется по параболической зависимости) (рисунок 7.4). Формула Симпсона имеет вид:

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{l}{6EJ} (M_1^{лев} \cdot M_2^{лев} + 4M_1^{cp} \cdot M_2^{cp} + M_1^{прав} \cdot M_2^{прав}). \quad (7.5)$$

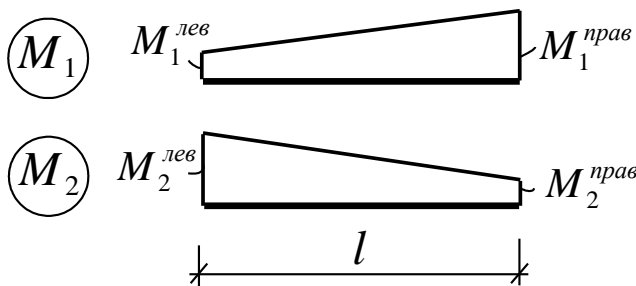


Рисунок 7.3 – Линейные эпюры

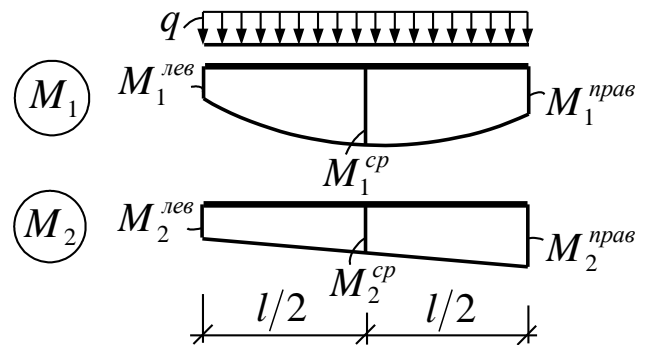


Рисунок 7.4 – Сложные эпюры

Правило знаков. В формулах Симпсона и трапеций произведения ординат принимаются со знаком «плюс», если растянутые волокна для «перемножаемых» ординат на обоих эпюрах изгибающих моментов M расположены с одной стороны от оси стержня (имеют одинаковые знаки), и со знаком «минус», если растянутые волокна для ординат находятся с разных сторон стержня.

Рекомендации к вычислению интегралов Мора:

– для эпюр усилий (изгибающих моментов), имеющих линейный характер изменения и простую форму (прямоугольную, треугольную), предлагается

использовать правило Верещагина;

– для эпюр усилий, имеющих линейный характер изменения, но более сложную форму (трапецидальную), рекомендуется использовать формулу трапеций (хотя можно использовать и формулу Симпсона);

– для эпюр усилий (изгибающих моментов), одна из которых криволинейна, удобно и целесообразно использовать формулу Симпсона.

При этом заметим, что формула Симпсона является наиболее общей и ее можно применять для всех случаев изменения эпюр усилий.

Следует отметить, что при использовании для вычисления интегралов Мора указанных способов обе «перемножаемые» эпюры на участке должны удовлетворять следующим требованиям:

- жесткость стержня на участке должна быть постоянной;
- зависимости изменения обеих эпюр (характер их изменения) не должны изменяться в пределах участка, или, по другому, – в пределах участка «перемножения» эпюры не должны иметь изломов, разрывов (скачков) и переходов к другим зависимостям изменения усилий.

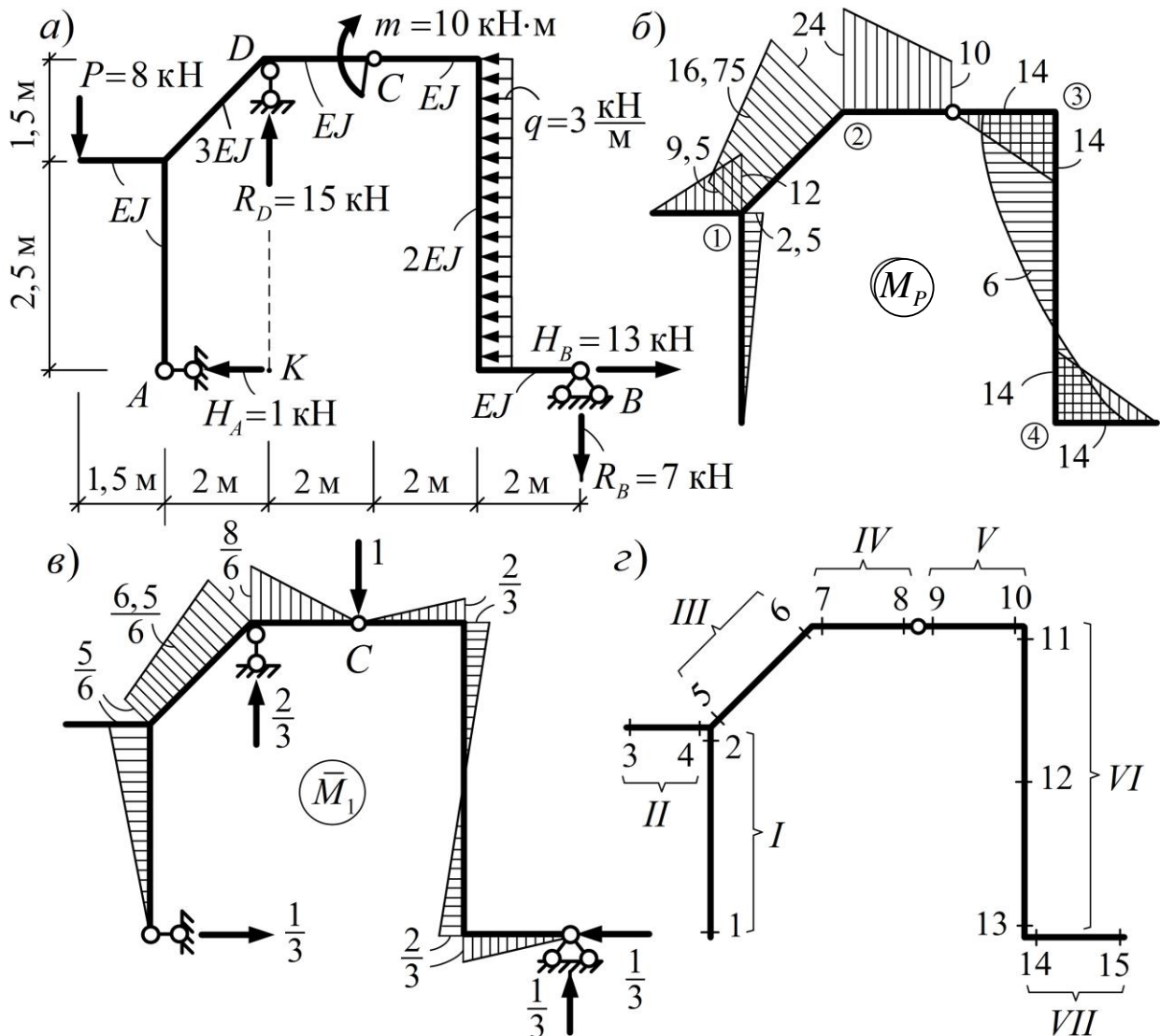


Рисунок 7.5 – Схема рамы (а), грузовая (б) и единичная (в) эпюры M ,

схема разбивки на участки одновременной непрерывности эпюр (з)

Если одно из этих требований не соблюдается, то такой участок следует разбить на более мелкие участки, и сделать это надо таким образом, чтобы указанные требования выполнялись. Границами рассматриваемых участков интегрирования в рамно-стержневых системах будут точки излома и разветвления стержней, точки приложения сосредоточенных нагрузок (сил, моментов), начала и конца распределенных нагрузок, точки приложения опорных реакций.

Вычисление перемещений от действия заданных нагрузок по формуле Мора (7.2), производится, таким образом, путем суммирования результатов вычисления интегралов Мора рассмотренными способами по всем участкам одновременной непрерывности эпюр системы.

Рассмотрим определение вертикального перемещения точки C от действия заданной нагрузки в трехшарнирной раме, представленной на рисунке 7.5, *а*.

Вычисление опорных реакций и построение эпюры изгибающих моментов в раме выполняем на основе подходов, изложенных в разделах 3–5.

Эпюра изгибающих моментов от действия заданной нагрузки имеет вид, показанный на рисунке 7.5, *б*.

Так как определяется вертикальное перемещение точки C , то в этой точке в вертикальном направлении прикладываем единичную сосредоточенную силу и направляем ее вниз, предполагая, что точка C будет смещаться вниз.

От действия этой силы строим единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M}_1 (рисунок 7.5, *в*). После этого выделяем в раме участки одновременной непрерывности эпюр, в пределах которых жесткость стержней постоянна и обе эпюры изменяются непрерывно (рисунок 7.5, *з*), и вычисляем искомое перемещение по формуле Мора (7.2):

$$\begin{aligned} \Delta_C^{perm} = \Delta_{1F} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_F ds}{EJ} = & -\frac{1}{EJ} \left(\frac{2,5 \cdot 2,5}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} + 0 + \\ & + \frac{2,5}{6 \cdot 3EJ} \left(9,5 \cdot \frac{5}{6} + 4 \cdot \frac{6,5}{6} \cdot 16,75 + 24 \cdot \frac{8}{6} \right) + \frac{2}{6EJ} \left(2 \cdot 24 \cdot \frac{8}{6} + \frac{8}{6} \cdot 10 + 0 \cdot 24 + 2 \cdot 10 \cdot 0 \right) - \\ & - \frac{1}{EJ} \left(\frac{14 \cdot 2}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{6 \cdot 2EJ} \left(-14 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot 0 \cdot 6 - 14 \cdot \frac{2}{3} \right) - \frac{1}{EJ} \left(\frac{14 \cdot 2}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10,333}{EJ}. \end{aligned}$$

Отметим, что на участках I, V и VII вычисление производилось по правилу Верещагина (7.3), на участке IV – по формуле трапеций (7.4), а на участках III и VI – по формуле Симпсона (7.5). На участке II единичная эпюра изгибающих моментов (рисунок 7.5, *в*) нулевая, поэтому и результат вычисления интеграла Мора – ноль.

Значение перемещения положительно, следовательно, точка C действительно переместится вниз.

Рассмотрим пример определения перемещений еще в одной раме, представленной на рисунке 7.6. Определим угол поворота сечения 1 и взаимное

сближение (или расхождение) узлов T и C .

Эпюра изгибающих моментов от действия заданной внешней нагрузки имеет вид, показанный на рисунке 7.7.

В сечении 1, угол поворота которого определяется, прикладываем единичный момент и строим от его действия единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M}_1 (рисунок 7.8).

Вычисляем искомое перемещение по формуле Мора:

$$\varphi_1 = \Delta_{1F} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_F ds}{EJ} = -\frac{1}{EJ} \left(\frac{12 \cdot 1}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,158 + \frac{1}{EJ} \left(\frac{0,395 \cdot 2}{2} \right) \cdot \left(2 - \frac{1}{3} \cdot 18 \right) +$$

$$\varphi_1 = \Delta_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ} = -\frac{1}{EJ} \left(\frac{12 \cdot 1}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,158 + \frac{1}{EJ} \left(\frac{0,395 \cdot 2}{2} \right) \cdot \left(2 - \frac{1}{3} \cdot 18 \right) +$$

$$+ \frac{4}{6EJ} (-10 \cdot 0,237 - 4 \cdot 1 \cdot 0,4345 + 8 \cdot 0,632) + \frac{4}{6EJ} (8 \cdot 0,632 - 4 \cdot 6 \cdot 0,316) = -\frac{2,945}{EJ}.$$

Результат имеет отрицательный знак, – это говорит о том, что сечение 1 в раме от действия рассматриваемой нагрузки повернется не против часовой стрелки, как предполагалось, а по часовой стрелке.

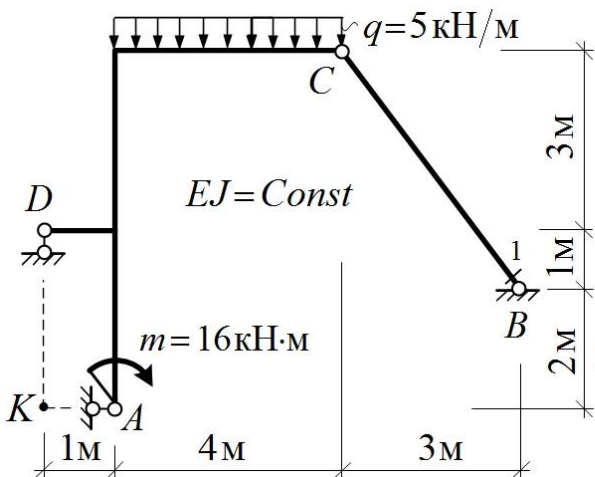


Рисунок 7.6 – Расчетная схема рамы

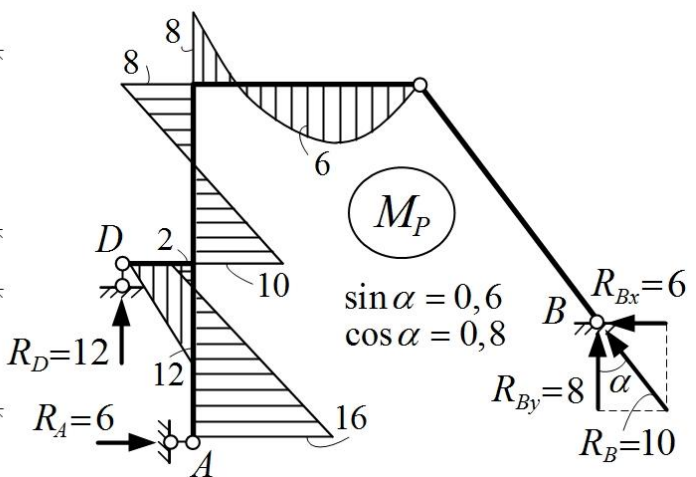


Рисунок 7.7 – Грузовая эпюра M

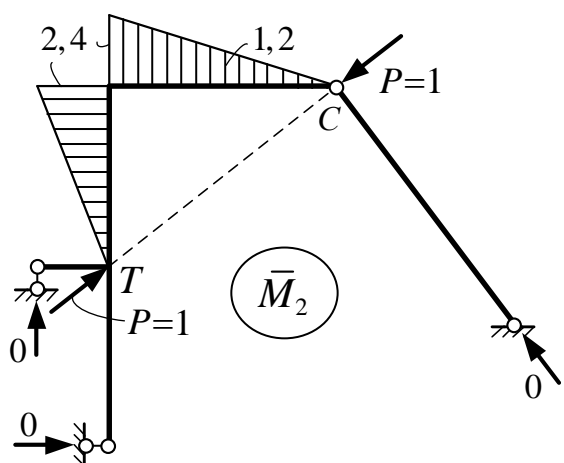
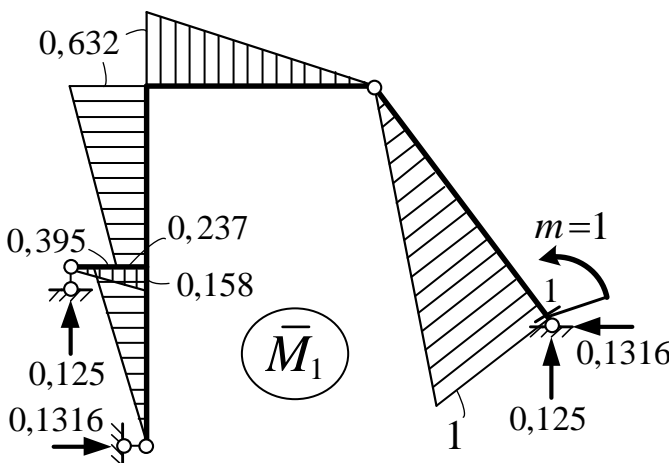


Рисунок 7.8 – Единичная эпюра M_1

Рисунок 7.9 – Единичная эпюра M_2

Для определения взаимного сближения (расхождения) узлов T и C к этим узлам прикладываем по единичной силе, которые направляем по прямой, соединяющей узлы T и C навстречу друг другу. От действия этих единичных сил строим единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M}_2 (рисунок 7.9).

Искомое перемещение вычисляем по формуле Мора:

$$\Delta_{T,C} = \Delta_{2F} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_F ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2,4 \cdot 3}{2} \left(8 - \frac{1}{3} 18 \right) + \frac{4}{6EJ} (8 \cdot 2,4 - 4 \cdot 6 \cdot 1,2 + 0) = \frac{0,8}{EJ}.$$

Узлы T и C сблизятся (приблизятся друг к другу по прямой TC).

7.2. Определение перемещений, вызываемых температурными воздействиями

Нагревание большинства материалов приводит к расширению тел, а их охлаждение – к уменьшению размеров тел (к сжатию). Деформирование элементов при температурных (тепловых) воздействиях определяется, так называемым, коэффициентом линейного температурного расширения материала α , из которого изготовлен элемент, и который показывает насколько удлинится элемент единичной длины при его равномерном нагревании на один градус. Этот коэффициент для различных материалов можно найти в справочниках. Приведем его для ряда материалов:

- для бетона (в зависимости от структуры бетона) – $\alpha_b = 1,0 \dots 1,4 \cdot 10^{-5}$ град $^{-1}$;
- для стали (в зависимости от марки стали) – $\alpha_{ст} = 1,1 \dots 1,25 \cdot 10^{-5}$ град $^{-1}$;
- для алюминия – $\alpha_{ал} = 2,38 \cdot 10^{-5}$ град $^{-1}$.

Деформирование бесконечно малого элемента бруса длиной ds при изменении температур с одной (на t_1) и с другой (на t_2) сторон элемента (при этом принимаем, что $t_2 > t_1 > 0$) показано на рисунке 7.10.

Определение перемещений от внешней нагрузки выполняется по формуле Мора вида (7.1):

$$\Delta_{iF} = \sum_1^n \int_0^l \bar{M}_i \frac{M_F ds}{EJ} + \sum_1^n \int_0^l \bar{Q}_i \eta \frac{Q_F ds}{GA} + \sum_1^n \int_0^l \bar{N}_i \frac{N_F ds}{EA},$$

или

$$\Delta_{iF} = \sum_1^n \int_0^l \bar{M}_i \Delta ds_{M_F} + \sum_1^n \int_0^l \bar{Q}_i \Delta ds_{Q_F} + \sum_1^n \int_0^l \bar{N}_i \Delta ds_{N_F}$$

Если заменить деформации для бесконечно малого элемента бруса на деформации от температурного воздействия, то получим для определения перемещений в статически определимых системах выражение в виде:

$$\Delta_{it} = \sum_1^n \int_0^l \bar{M}_i \Delta ds_t^M + \sum_1^n \int_0^l \bar{Q}_i \Delta ds_t^Q + \sum_1^n \int_0^l \bar{N}_i \Delta ds_t^N \quad (7.6)$$

Деформации сдвига при температурном воздействии малы (рисунок 7.10) и

ими можно пренебречь, то есть принимаем: $\Delta ds_i^o = 0$.

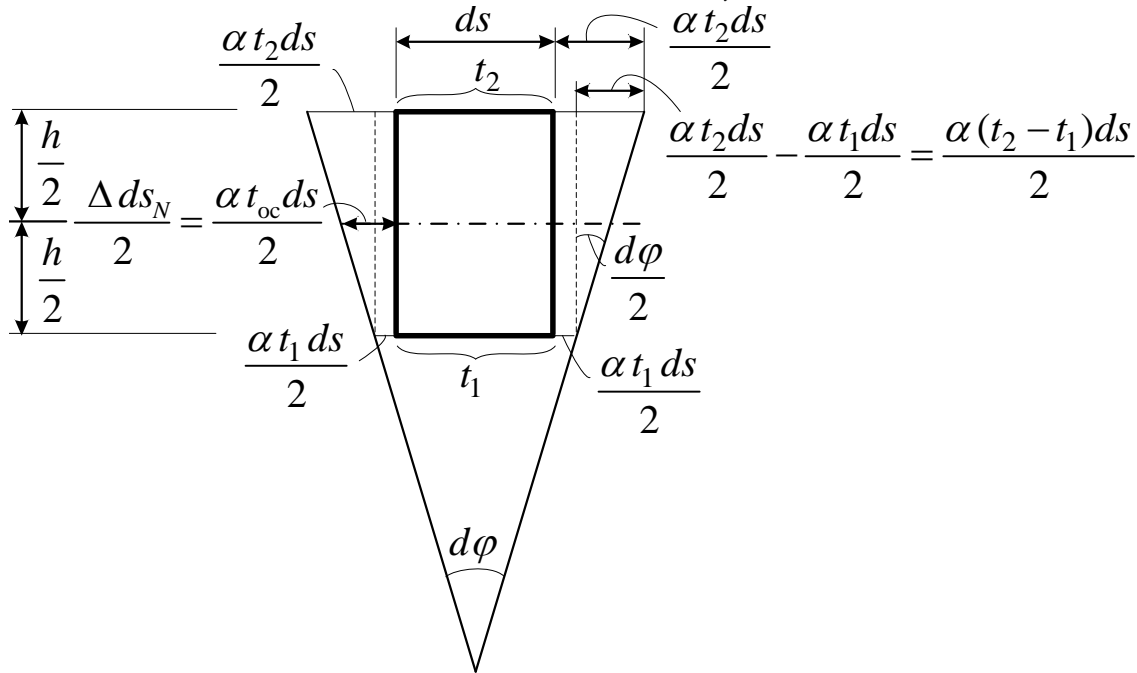


Рисунок 7.10 – Деформирование бесконечно малого элемента под воздействием изменений температур

Перемещения бесконечно малого элемента бруса, связанные с изгибными и продольными деформациями, как видно из рисунка 7.10, равны:

$$\Delta ds_i^M = d\varphi \approx \text{tg}(d\varphi) = 2 \cdot \frac{\frac{\alpha t_2 ds}{2} - \frac{\alpha t_1 ds}{2}}{h} = \frac{\alpha (t_2 - t_1) ds}{h};$$

$$\Delta ds_i^N = \alpha t_{oc} ds.$$

Подставляя эти выражения в (7.6), получим формулу для определения перемещений, вызываемых изменением температур, в виде:

$$\Delta_{it} = \sum \frac{\alpha |t_2 - t_1|}{d} \Omega_{\bar{M}_i} + \sum \alpha t_{oc} \Omega_{\bar{N}_i}, \quad (7.7)$$

где: d – высота сечения элемента;

t_1, t_2 – изменения температур с одной и с другой сторон элемента;

t_{oc} – изменение температуры на центральной оси элемента (для симметричных сечений: $t_{oc} = \frac{t_1 + t_2}{2}$);

ричных сечений: $t_{oc} = \frac{t_1 + t_2}{2}$);

Ⓢ $\Omega_{\bar{M}_i}, \Omega_{\bar{N}_i}$ – площади на рассматриваемых участках единичных эпюр изгибающих моментов и поперечных сил, построенных от действия единичной «силы» в точке (в сечении), для которой определяется перемещение, в направлении искомого перемещения.

При вычислении перемещений по формуле (7.7) следует руководствоваться правилом знаков:

если деформации на участке от действия изменения температур и от действия единичной «силы» совпадают (одинаковы), то слагаемые в формуле (7.7) на участке принимаются со знаком «плюс»,

если же указанные деформации не совпадают (противоположны), то соответствующие слагаемые принимаются со знаком «минус».

При этом надо учитывать, что:

– растянутые волокна от действия температуры в стержне будут располагаться с той стороны стержня, где температура выше;

– стержень от действия температуры удлиняется, если температура на оси стержня увеличивается ($t_{oc} > 0$), и укорачивается, если изменение температуры на центральной оси стержня отрицательно ($t_{oc} < 0$).

Для первой части формулы (7.7), учитывающей изгибные деформации, правило знаков можно сформулировать и следующим образом:

если *растянутые волокна* от температурных изменений и от действия единичной «силы» совпадают (находятся с одной стороны стержня), то первые слагаемые в формуле (7.7) на участке принимаются со знаком «плюс»; если не совпадают, то – со знаком «минус».

Порядок определения перемещений от изменений температурного режима:

1. В точке (сечении), для которой определяется перемещение, прикладывается единичная «сила» в направлении искомого перемещения (делается это так же, как и при определении перемещений от силовых нагрузок).

2. От действия этой единичной «силы» строятся эпюры изгибающих моментов и продольных сил – эпюры \bar{M}_i , \bar{N}_i (влияние поперечных деформаций мало и им пренебрегают).

3. Вычисляется искомое перемещение по формуле (7.7).

Пример расчета. Рассмотрим раму, изображенную на рисунке 7.11, находящуюся под воздействием представленного изменения температурного режима. Определим горизонтальное перемещение точки K от этого воздействия. Сечения всех элементов приняты одинаковыми – прямоугольными высотой (h) 0,5 м. Коэффициент температурного линейного расширения материала принимаем равным: $\alpha = 1 \cdot 10^{-5}$ град⁻¹.

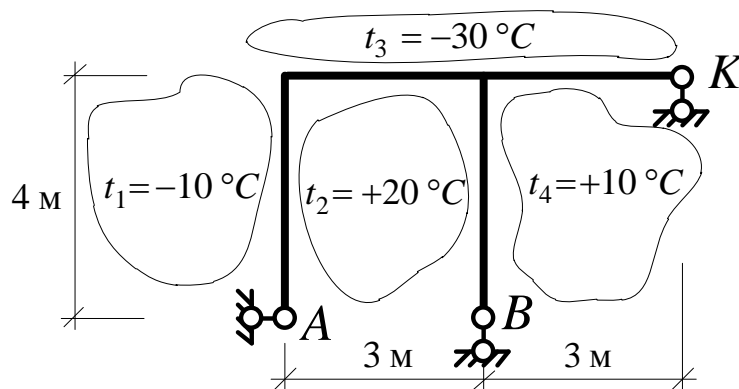


Рисунок 7.11 – Схема температурного воздействия

Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил от действия единичной «силы», приложенной в точке K в направлении искомого перемещения, то есть горизонтально, представлены на рисунке 7.12.

Величина перемещения вычисляется по формуле (7.7):

$$\Delta_K^{\text{гор}} = \Delta_{1t} = \sum \frac{\alpha |t_2 - t_1|}{h} \Omega_{\bar{M}_1} + \sum \alpha t_{oc} \Omega_{\bar{N}_1} =$$

$$= 1 \cdot 10^{-5} \cdot \left[\left(\frac{|30^\circ|}{0,5} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} + \frac{|50^\circ|}{0,5} \cdot 4 \cdot 3 + \frac{|40^\circ|}{0,5} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \right) + \frac{+20^\circ - 30^\circ}{2} \cdot (+1 \cdot 3) + \right.$$

$$\left. + \frac{+10^\circ - 30^\circ}{2} \cdot (+1 \cdot 3) + \frac{+20^\circ + 10^\circ}{2} \cdot (+0,667 \cdot 4) \right] = 2,155 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2,155 \text{ см.}$$

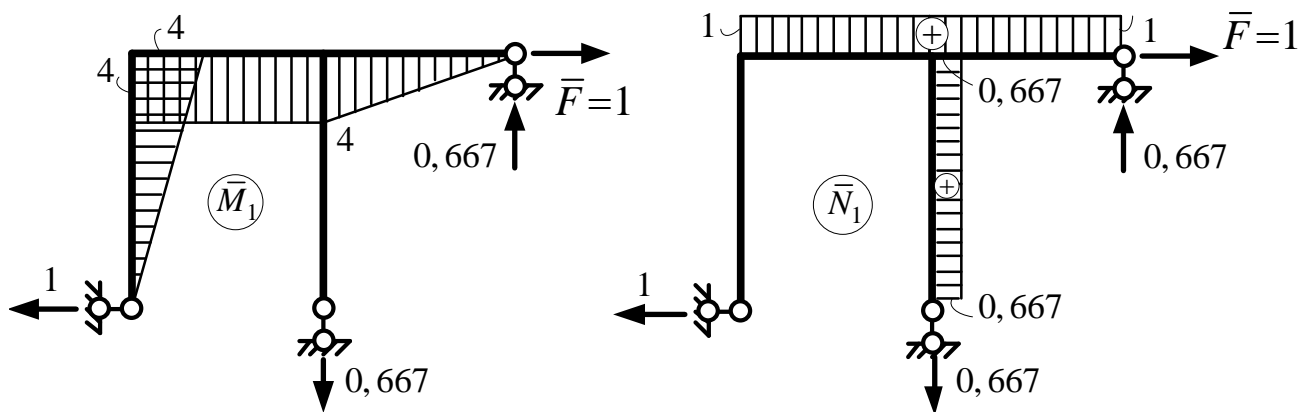


Рисунок 7.12 – Единичные эпюры \bar{M}_1 и \bar{N}_1

7.3. Определение перемещений, вызываемых смещениями опор

В общем случае перемещения, вызываемые смещениями опор, определяется в статически определимых системах по формуле:

$$\Delta_{ic} = - \sum_{j=1}^{n_{cm}} (\bar{R}_{ji} \cdot c_j) \quad (7.8)$$

где: c_j – величина смещения опоры в j -ом направлении;

$n_{см}$ – число смещений опор;

\bar{R}_{ji} – реакция в смещаемой опоре в j -ом направлении от действия единичной «силы», приложенной в направлении искомого перемещения (i -ом).

Произведение ($\bar{R}_{ji} \cdot c_j$) принимается со знаком «плюс», если направления R_{ji} и c_j совпадают, и со знаком «минус», если эти направления противоположны.

Порядок определения перемещений от смещений опор:

1. В точке (сечении), для которой определяется перемещение, прикладывается единичная «сила» в направлении искомого перемещения (делается это также, как и при определении перемещений от силовых нагрузок).

2. Определяются опорные реакции в опорах, которые смещаются, в направлениях смещений, от действия приложенной единичной «силы».

3. Вычисляется искомое перемещение по формуле (7.8).

Пример расчета. Рассмотрим раму, представленную на рисунке 7.13.

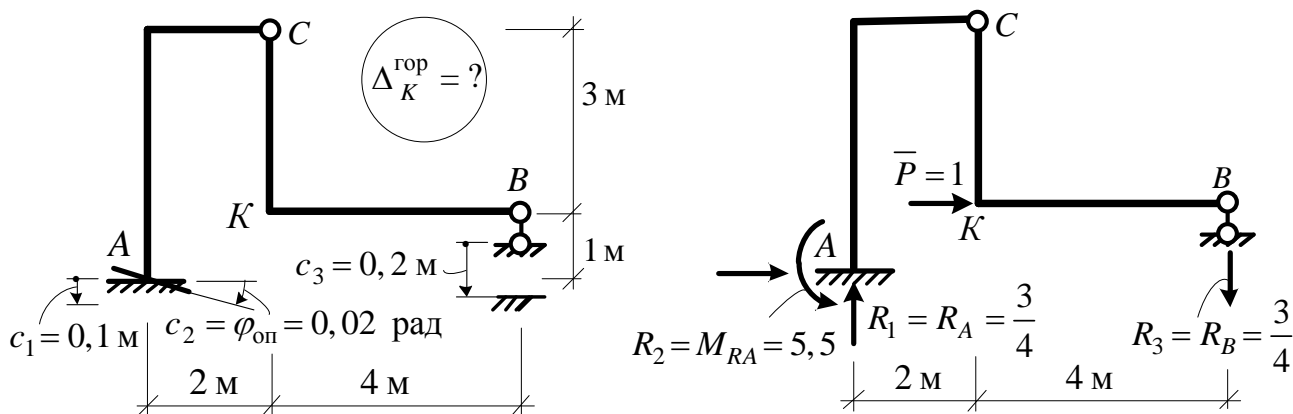


Рисунок 7.13 – Схема смещения опор и единичного силового состояния

Определяем опорные реакции в опорах, которые смещаются, по направлениям смещений:

$$\sum M_C^{np} = 0; \quad -1 \cdot 3 + R_3 \cdot h = 0; \quad R_3 = \frac{3}{4}.$$

$$\sum Y = 0; \quad R_A - \frac{3}{4} = 0; \quad R_A = R_1 = \frac{3}{4}.$$

$$\sum M_A = 0; \quad -M_{RA} + 1 \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 6 = 0; \quad M_{RA} = 5,5.$$

Вычисляем перемещение по формуле (7.8):

$$\Delta_K^{\text{top}} = \Delta_{1c} = -\sum_{j=1}^3 (\bar{R}_{ji} \cdot c_j) = -\left[-\frac{3}{4} \cdot 0,1 + \frac{3}{4} \cdot 0,2 - 5,5 \cdot 0,02 \right] = +0,035 \text{ м} = 3,5 \text{ см}.$$

Содержание

1. Внутренние силы в плоских стержневых системах 3

2. Статически определимые рамы, их виды	8
3. Расчет простых рам	9
4. Особенности расчета трехшарнирных рам	24
5. Расчет составных рам	37
6. Расчет многопролетных статически определимых балок	39
7. Определение перемещений в статически определимых системах	44
7.1. Определение перемещений от действия внешних нагрузок	44
7.2. Определение перемещений, вызываемых температурными воздействиями	51
7.3. Определение перемещений, вызываемых смещением опор	54

Учебное издание

Составитель:
Игнатюк Валерий Иванович

Расчет плоских статически определимых рам на неподвижные нагрузки

Методические указания
по дисциплине «Строительная механика»
для студентов строительных специальностей
дневной и заочной форм получения образования

*Текст печатается в авторской редакции,
орфографии и пунктуации*

Ответственный за выпуск: Игнатюк В.И.
Редактор: Митлошук М. А.
Компьютерная вёрстка: Игнатюк В.И.

Подписано в печать 05.04.2024 г. Формат 60x84 ¹/₁₆. Бумага «Performer».
Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 3,26. Уч. изд. л. 3,5. Заказ № 350. Тираж 30 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный
технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/235 от 24.03.2014 г.